

LISTA 1

Exercício 1 *Resolva os exercícios sugeridos em aula.*

Exercício 2 *Prove os resultados não demonstrados em sala.*

Exercício 3 *Resolva os exercícios de 1 a 12 da seção 3.1, da referência Leon (oitava edição):*

Exercício 4 *Mostre que o conjunto*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$$

é um subespaço de \mathbb{R}^3 .

Exercício 5 *Considere o conjunto*

$$V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a, b > 0\}$$

e as operações

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd) \quad e \quad \alpha \cdot (a, b) = (a^\alpha, b^\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostre que V é um espaço vetorial.

Exercício 6 *Mostre que em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o conjunto*

$$\beta = \{p_k, k = 0, 1, \dots\},$$

é uma base, sendo $p_0(x) \equiv 1$ e $p_k(x) = x^k$.

Exercício 7 *Mostre que um conjunto β de um espaço vetorial é L.D. se, e somente se, existe um $v \in \beta$ que é combinação linear de elementos em $\beta \setminus \{v\}$.*

Exercício 8 *Considere $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios reais de grau menor que n . Mostre que o seguinte conjunto é subespaço de $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$:*

$$S = \{p \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R}); p(0) = 0\}.$$

Exercício 9 *Considere $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ das funções de classe $C^{(2)}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Considere S o conjunto das funções $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ que são soluções da equação diferencial*

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Mostre que S é subespaço de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Exercício 10 *O núcleo de uma matriz $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ é o conjunto*

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}.$$

(a) Mostre que $N(A)$ é subespaço de \mathbb{R}^n .

(b) Mostre que se os vetores colunas de A são L.I., então $N(A) = \{0\}$.

(c) Determine o núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 11 Verifique se os conjuntos abaixo são ou não subespaços de \mathbb{R}^3 .

- $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.
- $\{(2, 1, -2), (3, 2, -2), (2, 2, 0)\}$.

Exercício 12 Verifique se os conjuntos abaixo são ou não subespaços de \mathbb{R}^2 .

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 3y + 2\}$.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$.

Exercício 13 Considere $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ fixada. Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços ou não de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) $\{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); AB = BA\}$.

(b) $\{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); AB \neq BA\}$.

(c) $\{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); BA = 0\}$