CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Sejam V um conjunto não vazio, $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e duas operações

$$+ : V \times V \to V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \to V.$$

Dizemos que $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, com respeito as operações $+$ e $\cdot$, se as seguintes propriedades são cumpridas:

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Sejam V um conjunto não vazio, $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e duas operações

$$+ : V \times V \to V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \to V.$$

Dizemos que $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, com respeito as operações $+$ e $\cdot$, se as seguintes propriedades são cumpridas:

(A1) $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V.$

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V.$

(A3) Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \ \forall v \in V.$

(A4) Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0.$

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Sejam V um conjunto não vazio, $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e duas operações

$$+ : V \times V \to V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \to V.$$

Dizemos que $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, com respeito as operações $+$ e $\cdot$, se as seguintes propriedades são cumpridas:

- $(A1)$ $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V.$
- $(A2)$ $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V.$
- $(A3)$ Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \ \forall v \in V.$
- $(A4)$ Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0.$
- $(M1)$ $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot V), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V.$
- $(M2)$ $1 \cdot v = v, \ \forall v \in V$, sendo 1 a identidade de $\mathbb{K}$.

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Sejam V um conjunto não vazio, $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e duas operações

$$+ : V \times V \to V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \to V.$$

Dizemos que $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, com respeito as operações $+$ e $\cdot$, se as seguintes propriedades são cumpridas:

(A1) $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V.$

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V.$

(A3) Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \ \forall v \in V.$

(A4) Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0.$

(M1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot V), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V.$

(M2) $1 \cdot v = v, \ \forall v \in V$, sendo 1 a identidade de $\mathbb{K}.$

(D1) $\alpha \cdot (v + u) \cdot u = \alpha \cdot v + \beta \cdot u, \ \forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}.$

(D2) $(\alpha + \beta) \cdot v \cdot u = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \ \forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

Observações

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo*.

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*
- O vetor u em (A4) *é único* e será denotado denotado por $(-v)$.

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo*.
- O vetor u em (A4) *é único* e será denotado denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo*.
- O vetor u em (A4) *é único* e será denotado denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.
- $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo*.
- O vetor u em (A4) *é único* e será denotado denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.
- $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.
- Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $\lambda \cdot 0 = 0$, sendo 0 o vetor nulo.

OBSERVAÇÕES

- Note que um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é determinado por $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo*.
- O vetor u em (A4) *é único* e será denotado denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.
- $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.
- Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $\lambda \cdot 0 = 0$, sendo 0 o vetor nulo.
- Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ são tais que $\lambda \cdot v = 0$, então um deles deve ser nulo.

Exemplos

Exemplo 1

Todo corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Todo corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial.

EXEMPLO 2

Dados um corpo $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}.$$

Dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ defina

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

EXEMPLO 3

O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$ com as operações usuais.

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES REAIS

Considere X um conjunto não vazio qualquer e $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$.

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES REAIS

Considere X um conjunto não vazio qualquer e $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, defina a função

$$f + g : X \to \mathbb{R}, \quad \text{pondo} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES REAIS

Considere X um conjunto não vazio qualquer e $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, defina a função

$$f + g : X \to \mathbb{R}, \quad \text{pondo} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \to \mathbb{R}, \quad \text{pondo} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES REAIS

Considere X um conjunto não vazio qualquer e $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, defina a função

$$f + g : X \to \mathbb{R}, \quad \text{pondo} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \to \mathbb{R}, \quad \text{pondo} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Assim, $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES REAIS

Considere X um conjunto não vazio qualquer e $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, defina a função

$$f + g : X \to \mathbb{R}, \text{ pondo } (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \to \mathbb{R}, \text{ pondo } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Assim, $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

IMPORTANTE

O vetor nulo de $\mathscr{F}(X;\mathbb{R})$ é a função identicamente nula, isto é,

$$0(x) = 0, \ \forall x \in X.$$

COMBINAÇÃO LINEAR

DEFINIÇÃO

Um vetor $u \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j.$$

Conjuntos linearmente independentes

CONJUNTOS LINEARMENTE INDEPENDENTES

DEFINIÇÃO

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Conjuntos linearmente independentes

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente dependente** se for possível obter escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, **não todos nulos** tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0.$$