CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Sejam V um conjunto não vazio, $\mathbb{K}$ um corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e duas operações

$$+ : V \times V \to V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \to V.$$

Dizemos que $V = (V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, com respeito as operações $+$ e $\cdot$, se as seguintes propriedades são cumpridas:

- $(A1)$ $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V.$
- $(A2)$ $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V.$
- $(A3)$ Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \ \forall v \in V.$
- $(A4)$ Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0.$

- $(M1)$ $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot V), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V.$
- $(M2)$ $1 \cdot v = v, \ \forall v \in V$, sendo 1 a identidade de $\mathbb{K}.$

- $(D1)$ $\alpha \cdot (v + u) \cdot u = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u, \ \forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}.$
- (D2) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \ \forall v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

COMBINAÇÃO LINEAR

DEFINIÇÃO

Um vetor $u \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$.

Combinação linear

Definição

Um vetor $u \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$.

Exemplo 1

Em $\mathbb{R}^2$, o vetor $v = (3, 2)$ é combinação linear dos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Mais ainda, todo vetor em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de e_1 e e_2.

Combinação linear

Definição

Um vetor $u \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$.

Exemplo 1

Em $\mathbb{R}^2$, o vetor $v = (3, 2)$ é combinação linear dos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Mais ainda, todo vetor em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de e_1 e e_2.

Exemplo 2

Em $\mathbb{R}^2$, o vetor $v = (3, 2)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (3, 0)$.

Combinação linear

Definição

Um vetor $u \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$.

Exemplo 1

Em $\mathbb{R}^2$, o vetor $v = (3, 2)$ é combinação linear dos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Mais ainda, todo vetor em $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de e_1 e e_2.

Exemplo 2

Em $\mathbb{R}^2$, o vetor $v = (3, 2)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (3, 0)$.

Exemplo 3

Em $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ todo função é combinação linear de uma função par com uma função ímpar.

Conjuntos linearmente independentes

Conjuntos linearmente independentes

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Conjuntos linearmente independentes

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente dependente** se for possível obter escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, **não todos nulos** tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0.$$

Exemplos em $\mathbb{R}^3$

Exemplo 1

Vamos verificar quais conjuntos abaixo são L.I. e quais são L.D.

(a) $\{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (1,0,0)\}$.

(b) $\{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (0,1,0)\}$.

(c) $\{v_1 = (1,2,4),\ v_2 = (2,1,3),\ v_3 = (4,-1,1)\}$.

UM PRIMEIRO RESULTADO

- Considere um conjunto de n vetores $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ em $\mathbb{R}^n$ e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$$

- Escrevendo

$$v_j = (v_{1,j}, \ldots, v_{n,j}) \text{ e } x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

temos o sistema

$$A \cdot x = 0,$$

em que A é matriz cujas colunas são os vetores $v_1, \ldots, v_n$.

UM PRIMEIRO RESULTADO

- Considere um conjunto de n vetores $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ em $\mathbb{R}^n$ e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$$

- Escrevendo

$$v_j = (v_{1,j}, \ldots, v_{n,j}) \text{ e } x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

temos o sistema

$$A \cdot x = 0,$$

em que A é matriz cujas colunas são os vetores $v_1, \ldots, v_n$.

TEOREMA 1

Um conjunto de n vetores $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ em $\mathbb{R}^n$ é L.I. se, e somente se, $det(A) \neq 0$.

EXEMPLOS EM ESPAÇOS DE FUNÇÕES

EXEMPLO 2

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Então, o conjunto $\{f_1, f_2\}$, com $f_1(x) = cos(x)$ e $f_2(x) = sen(x)$ é linearmente independente.

UM RESULTADO GERAL

TEOREMA 2

Seja $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos em um espaço vetorial V. Se nenhum deles é combinação linear dos demais, então A é L.I.

IMPORTANTE

TEOREMA 3

Sejam V um espaço vetorial e A um subconjunto de V. Então, V é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de A é linearmente independente.

EXEMPLO 3

Em $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o conjunto $A = \{f_j,\ j \in \mathbb{N}\}$, em que

$$f_j(x) = e^{jx},$$

é linearmente independente.