CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

SUBESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(S1) $0 \in S$.

(S2) $u + v \in S, \ \forall u, v \in S$.

(S3) $\lambda u \in S, \ \forall u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

SUBESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(S1) $0 \in S$.

(S2) $u + v \in S, \ \forall u, v \in S$.

(S3) $\lambda u \in S, \ \forall u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

OBSERVAÇÕES

- Se S é um subespaço, então $(S, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é espaço vetorial, sendo $+$ e $\cdot$ as operações de V. Por isso o nome **subespaço vetorial**.

SUBESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$(S1)$ $0 \in S$.

$(S2)$ $u + v \in S, \ \forall u, v \in S$.

$(S3)$ $\lambda u \in S, \ \forall u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

OBSERVAÇÕES

- Se S é um subespaço, então $(S, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é espaço vetorial, sendo $+$ e $\cdot$ as operações de V. Por isso o nome **subespaço vetorial**.
- Qualquer combinação linear de elementos de um subespaço ainda pertence ao subespaço, isto é, se $u_1, \ldots, u_n \in S$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \in S.$$

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.

EXEMPLOS

EXEMPLO BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

EXEMPLOS

EXEMPLO BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções contínuas.

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções contínuas.
- $W = \mathscr{C}^{(k)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções diferenciáveis de ordem k.

Exemplos

Exemplo bem simples

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V. Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Funções

Considere $V = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções contínuas.
- $W = \mathscr{C}^{(k)}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, das funções diferenciáveis de ordem k.
- $Z = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios.

Intersecção

Se S_λ, $\lambda \in L$, é uma coleção de subespaços vetoriais de V, sendo L um conjunto qualquer de índices, então o conjunto

$$S = \bigcap_{\lambda \in L} S_\lambda,$$

é um subespaço.

Intersecção

Se S_λ, $\lambda \in L$, é uma coleção de subespaços vetoriais de V, sendo L um conjunto qualquer de índices, então o conjunto

$$S = \bigcap_{\lambda \in L} S_\lambda,$$

é um subespaço.

Hiperplano

Considere $V = \mathbb{K}^n$ um espaço vetorial e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ escalares fixados. Temos então o subespaço $S \subset \mathbb{K}^n$ formado por todos os vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ soluções da equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n = 0.$$

Intersecção

Se S_λ, $\lambda \in L$, é uma coleção de subespaços vetoriais de V, sendo L um conjunto qualquer de índices, então o conjunto

$$S = \bigcap_{\lambda \in L} S_\lambda,$$

é um subespaço.

Hiperplano

Considere $V = \mathbb{K}^n$ um espaço vetorial e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ escalares fixados. Temos então o subespaço $S \subset \mathbb{K}^n$ formado por todos os vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ soluções da equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n = 0.$$

Sistemas

O conjunto das soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^n$.

Exemplo: Soluções de equações diferenciais

Exemplo

O conjunto de soluções da equação diferencial homogênea

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

é um subespaço vetorial de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Núcleo e imagem de uma matriz

NÚCLEO E IMAGEM DE UMA MATRIZ

NÚCLEO

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz com entradas em $\mathbb{K}$. Então, o conjunto

$$N(A) = \{x \in \mathbb{K}^n;\ A \cdot x = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^n$ chamado de **núcleo** de A.

NÚCLEO E IMAGEM DE UMA MATRIZ

NÚCLEO

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz com entradas em $\mathbb{K}$. Então, o conjunto

$$N(A) = \{x \in \mathbb{K}^n;\ A \cdot x = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^n$ chamado de **núcleo** de A.

IMAGEM

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz com entradas em $\mathbb{K}$. Então, o conjunto

$$Im(A) = \{y \in \mathbb{K}^m;\ A \cdot x = y, \text{ para algum } x \in \mathbb{K}^n\}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^m$ chamado de **imagem** de A.

NÚCLEO E IMAGEM DE UMA MATRIZ

NÚCLEO

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz com entradas em $\mathbb{K}$. Então, o conjunto

$$N(A) = \{x \in \mathbb{K}^n;\ A \cdot x = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^n$ chamado de **núcleo** de A.

IMAGEM

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz com entradas em $\mathbb{K}$. Então, o conjunto

$$Im(A) = \{y \in \mathbb{K}^m;\ A \cdot x = y,\ \text{ para algum } x \in \mathbb{K}^n\}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^m$ chamado de **imagem** de A.

EXEMPLO

Determinar $N(A)$ e $Im(A)$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

SUBESPAÇOS GERADOS

SUBESPAÇOS GERADOS

DEFINIÇÃO

Dado um conjunto não vazio A em um espaço vetorial V denotamos por $ger(A)$ o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em A, isto é,

$$ger(A) = \left\{ v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ v_j \in A \right\}.$$

SUBESPAÇOS GERADOS

DEFINIÇÃO

Dado um conjunto não vazio A em um espaço vetorial V denotamos por $ger(A)$ o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em A, isto é,

$$ger(A) = \left\{ v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ v_j \in A \right\}.$$

- Temos que $ger(A)$ é um subespaço de V que é chamado de **espaço gerado** por A.
- Quando for $V = ger(A)$, então dizemos que A é um conjunto **gerador** de V.

Exemplos

EXEMPLOS

BASE CANÔNICA DE $\mathbb{K}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é um gerador de $\mathbb{K}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Exemplos

Base canônica de $\mathbb{K}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é um gerador de $\mathbb{K}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Espaço coluna de uma matriz

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

EXEMPLOS

BASE CANÔNICA DE $\mathbb{K}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é um gerador de $\mathbb{K}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O espaço coluna de A é o subespaço $\mathcal{C}_A$ de $\mathbb{K}^n$ gerado pelos n vetores construídos através das colunas de A, isto é, tomamos o conjunto de vetores

$$v_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}),\ v_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \ldots, v_1 = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

e definimos

$$\mathcal{C}_A = ger(\{v_1, \ldots, v_n\}).$$

SOMAS DE SUBESPAÇOS

DEFINIÇÃO

Sejam V um espaço vetorial e A, B dois subconjuntos, não vazios, quaisquer. Definimos então o conjunto

$$A + B = \{c = a + b \in V;\ a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}.$$

SOMAS DE SUBESPAÇOS

DEFINIÇÃO

Sejam V um espaço vetorial e A, B dois subconjuntos, não vazios, quaisquer. Definimos então o conjunto

$$A + B = \{c = a + b \in V;\ a \in A \ \text{ e } \ b \in B\}.$$

LEMA

Se A, B são subespaços, então $A + B$ também é subespaço.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

EXEMPLOS

MATRIZES

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

EXEMPLOS

MATRIZES

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Funções

Sejam $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ os espaços das funções pares e ímpares, respectivamente.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Funções

Sejam $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ os espaços das funções pares e ímpares, respectivamente.

- $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são subespaços de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exemplos

Matrizes

Sejam $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

- $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ são subespaços de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Funções

Sejam $\mathcal{A} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e $\mathcal{B} \subset \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ os espaços das funções pares e ímpares, respectivamente.

- $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são subespaços de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
- $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.