CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

RELEMBRANDO

DEFINIÇÃO

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

RELEMBRANDO

DEFINIÇÃO

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

DEFINIÇÃO

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente dependente** se for possível obter escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, **não todos nulos** tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0.$$

DEFINIÇÃO

Dado um conjunto não vazio A em um espaço vetorial V denotamos por $ger(A)$ o subespaço formado por todas as combinações lineares de vetores em A, isto é,

$$ger(A) = \left\{ v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j,\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ v_j \in A \right\}.$$

- Quando for $V = ger(A)$, então dizemos que A é um conjunto **gerador** de V.
- Dizemos que um espaço vetorial V é finitamente gerado se existe um conjunto A com finitos vetores tais que $V = ger(A)$.

Base

Definição

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $ger(\beta) = V$.

Base

Definição

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $ger(\beta) = V$.

Observação

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

Base

Definição

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $ger(\beta) = V$.

Observação

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

- Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de** v com respeito a base β.

COORDENADAS

MUITO IMPORTANTE

Sejam $v \in V$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Considere $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ os únicos escalares que satisfazem

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

Então, podemos definir o vetor

$$v_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_\beta \in \mathbb{K}^n.$$

COORDENADAS

MUITO IMPORTANTE

Sejam $v \in V$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Considere $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ os únicos escalares que satisfazem

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

Então, podemos definir o vetor

$$v_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_\beta \in \mathbb{K}^n.$$

- Note então que estamos associando a cada $v \in V$ um único $v_\beta \in \mathbb{K}^n$.

EXEMPLOS

BASE CANÔNICA DE $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Exemplos

Base canônica de $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Matrizes

Em $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ temos uma base formada pelas matrizes

$$E_{ij} = (e_{i,j}),$$

sendo $e_{i,j} = 1$ na posição i, j e $e_{i,j} = 0$ nas demais.

Exemplos

Base canônica de $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

Matrizes

Em $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ temos uma base formada pelas matrizes

$$E_{ij} = (e_{i,j}),$$

sendo $e_{i,j} = 1$ na posição i, j e $e_{i,j} = 0$ nas demais.

Polinômios

No espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos a base

$$\beta = \{p_k,\ k = 0, 1, \ldots\},$$

sendo $p_0(x) \equiv 1$ e $p_k(x) = x^k$.

EXEMPLOS

- Considerando $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, temos que

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$$

é uma base em $\mathbb{C}^2$.

EXEMPLOS

- Considerando $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, temos que

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\}$$

é uma base em $\mathbb{C}^2$.

- Considerando $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, temos que

$$\beta = \{(1,0),(i,0),(0,1),(,i)\}$$

é uma base em $\mathbb{C}^2$.

IMPORTANTE

TEOREMA

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e assuma que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V. Nestas condições, todo subconjunto L.I. de V possui no máximo m elementos.

IMPORTANTE

TEOREMA

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e assuma que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V. Nestas condições, todo subconjunto L.I. de V possui no máximo m elementos.

COROLÁRIO

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então, todas as bases de V tem a mesma quantidade de elementos.

IMPORTANTE

TEOREMA

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e assuma que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é um conjunto gerador de V. Nestas condições, todo subconjunto L.I. de V possui no máximo m elementos.

COROLÁRIO

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então, todas as bases de V tem a mesma quantidade de elementos.

DEFINIÇÃO

A dimensão de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V finitamente gerado é quantidade de elementos em uma de suas bases. Iremos escrever $dim_{\mathbb{K}} V$.

EXEMPLOS

- $dim_{\mathbb{K}}\{0\} = 0$.
- $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n = n$.
- $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n$ e $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n$.
- $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C}) = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R}) = mn$ e $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{C}) = 2mn$.
- $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = n + 1$.

TODO ESPAÇO VETORIAL TEM BASE

PROPOSIÇÃO

Sejam V um espaço de dimensão $n \geq 1$ e β um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes.

TODO ESPAÇO VETORIAL TEM BASE

PROPOSIÇÃO

Sejam V um espaço de dimensão $n \geq 1$ e β um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) β é uma base.

(b) β é L.I.

(c) β é um gerador de V.

TODO ESPAÇO VETORIAL TEM BASE

PROPOSIÇÃO

Sejam V um espaço de dimensão $n \geq 1$ e β um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) β é uma base.

(b) β é L.I.

(c) β é um gerador de V.

PROPOSIÇÃO

Sejam V um espaço vetorial $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto L.I. Se existir $v \notin ger(\beta)$, então $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é L.I.

TODO ESPAÇO VETORIAL TEM BASE

PROPOSIÇÃO

Sejam V um espaço de dimensão $n \geq 1$ e β um subconjunto de V com n elementos. As seguintes afirmações são equivalentes.

(a) β é uma base.

(b) β é L.I.

(c) β é um gerador de V.

PROPOSIÇÃO

Sejam V um espaço vetorial $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto L.I. Se existir $v \notin ger(\beta)$, então $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é L.I.

TEOREMA

Todo espaço finitamente gerado, não trivial, possui base.