CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Base

Definição

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $ger(\beta) = V$.

Base

Definição

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $ger(\beta) = V$.

Observação

- Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $ger(\beta) = V$.

OBSERVAÇÃO

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$
- Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de** v com respeito a base β.

Definição

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $ger(\beta) = V$.

Observação

- Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$
- Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de** v com respeito a base β.
- Nas condições acima, podemos associar a cada vetor $v \in V$ o vetor $v_\beta \in \mathbb{K}^n$ dado por
$$v_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_\beta$$

Exemplo 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{(5,2),(7,3)\} \text{ e } B = \{(3,2),(1,1)\}.$$

e o vetor $v = (2,1) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{(5,2),(7,3)\} \text{ e } B = \{(3,2),(1,1)\}.$$

e o vetor $v = (2,1) \in \mathbb{R}^2$.

1. As coordenadas de v, com respeito a base A são

$$v_A = (-1,1)_A$$

EXEMPLO 1

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{(5,2),(7,3)\} \text{ e } B = \{(3,2),(1,1)\}.$$

e o vetor $v = (2,1) \in \mathbb{R}^2$.

1. As coordenadas de v, com respeito a base A são

$$v_A = (-1,1)_A$$

2. As coordenadas de v, com respeito a base B são

$$v_B = (1,-1)_B$$

Pergunta

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B?

Pergunta

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B?

Exemplo 2

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{v_1 = (5,2), v_2 = (7,3)\} \text{ e } B = \{u_1 = (3,2), u_2 = (1,1)\}.$$

Pergunta

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B?

Exemplo 2

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{v_1 = (5,2), v_2 = (7,3)\} \text{ e } B = \{u_1 = (3,2), u_2 = (1,1)\}.$$

Então, escrevendo

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases} \tag{1}$$

iremos obter

$$v_B^t = S \cdot v_A^t,$$

sendo

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- Então, resolvendo o sistema (1), obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

- Então, resolvendo o sistema (1), obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Observação 1

Note que a matriz S é invertível, logo

$$v_A^t = S^{-1} \cdot v_B^t.$$

Neste caso,

$$S = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz mudança de base

- Considere duas bases

$$A = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ e } B = \{w_1, \dots, w_n\}$$

  de um espaço vetorial V.
- Sejam v_A as coordenadas de um vetor $v \in V$ com respeito a base A.
- Então, escrevendo

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n \\ v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2n}w_n \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n \end{cases} \tag{2}$$

  iremos obter $v_B^t = S \cdot v_A^t$, sendo

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definição

A matriz S obtida acima é dita **matriz de mudança de base** (da base A para B). Em particular, utilizaremos a notação

$$[S]_{A\to B}.$$

Observação

A matriz $[S]_{A,B}$ é inversível, logo

$$[S]_{B\to A} = [S]^{-1}_{A\to B}.$$

EM $\mathbb{R}^3$

Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$A = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1), (2,3,2), (1,5,4)\}$$
$$B = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1,1,0), (1,2,0), (1,2,1)\}$$

Neste caso, temos

$$[S]_{A\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

e

$$[S]_{B\to A} = \begin{bmatrix} -4/3 & -10/3 & -1 \\ 4/3 & 7/3 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Assim, se $v_A = (3, 2, -1)_A$, então $V_B = (8, -5, 3)_A$.

POLINÔMIOS

Considere as bases de $\mathcal{P}^3$

$$A = \{1, x, x^2\}$$
$$B = \{1, 2x, 4x^2 - 2\}$$

Neste caso, temos

$$[S]_{A\to B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

e

$$[S]_{B\to A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Assim, se $p_A = (a, b, c)_A$, então $V_B = (a + \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}b, \frac{1}{4}c)_B$.