

CMM 031

Álgebra Linear

S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



DEFINIÇÃO

Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e $\cdot$ (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(A1) \quad z + w = w + z, \quad \forall z, w \in \mathbb{K}.$$

$$(A2) \quad (z + w) + u = z + (w + u), \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

$$(A3) \quad \text{Existe um elemento } 0 \in \mathbb{K} \text{ tal que } z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbb{K}.$$

$$(A4) \quad \text{Para cada } z \in \mathbb{K}, \text{ existe } w \in \mathbb{K} \text{ tal que } z + w = 0.$$

$$(M1) \quad z \cdot w = w \cdot z, \quad \forall z, w \in \mathbb{K}.$$

$$(M2) \quad (z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u), \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

$$(M3) \quad \text{Existe um elemento } 1 \in \mathbb{K} \text{ tal que } 1 \cdot z = z, \quad \forall z \in \mathbb{K}.$$

$$(M4) \quad \text{Para cada } z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \text{ existe } w \in \mathbb{K} \text{ tal que } z \cdot w = 1.$$

$$(D4) \quad (z + w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u, \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

SISTEMAS

- Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e considere o sistemas linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

no qual os coeficientes a_{ij} são elementos de $\mathbb{K}$ e deseja-se obter $x_1, \dots, x_n$.

- Um método para resolver esse sistema é o escalonamento:
 - (e1) Trocar posição de linhas.
 - (e2) Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
 - (e3) Substituir uma linha pela soma desta com alguma outra.
- A ideia é então obter um sistema mais simples através das operações (e1), (e2) e (e3).

MATRIZES E SISTEMAS

- Note que o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é equivalente a equação linear

$$A \cdot X = B,$$

sendo

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad X = (x_{i1})_{n \times 1} \quad \text{e} \quad B = (b_{i1})_{m \times 1}$$

FORMA DEGRAU

DEFINIÇÃO 1

Dizemos que uma matriz está na sua forma **linha degrau** se:

- O primeiro elemento não nulo em cada linha não nula é 1.
- Se a linha k não consiste apenas de zeros, então o número de zeros iniciais da linha $k + 1$ é maior que o número de zeros iniciais que na linha k .
- Se há linhas nulas, então elas estão abaixo daquelas que não são nulas.

FORMA DEGRAU

DEFINIÇÃO 1

Dizemos que uma matriz está na sua forma **linha degrau** se:

- O primeiro elemento não nulo em cada linha não nula é 1.
- Se a linha k não consiste apenas de zeros, então o número de zeros iniciais da linha $k + 1$ é maior que o número de zeros iniciais que na linha k .
- Se há linhas nulas, então elas estão abaixo daquelas que não são nulas.

DEFINIÇÃO 2

Dizemos que uma matriz está na sua forma **linha degrau reduzida** se:

- Está na sua forma linha degrau.
- O primeiro elemento não nulo em cada linha é o único não nulo em sua coluna.

EXEMPLO

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Forma linha degrau

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Forma linha degrau

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Forma linha degrau reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um conjunto não vazio V no qual existem duas operações

$$+ : V \times V \rightarrow V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um conjunto não vazio V no qual existem duas operações

$$+ : V \times V \rightarrow V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

- (A1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V.$
- (A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V.$
- (A3) Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \forall v \in V.$
- (A4) Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0.$

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um conjunto não vazio V no qual existem duas operações

$$+ : V \times V \rightarrow V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(A1) \quad u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V.$$

$$(A2) \quad (u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall u, v, w \in V.$$

$$(A3) \quad \text{Existe um elemento } 0 \in V \text{ tal que } v + 0 = v, \quad \forall v \in V.$$

$$(A4) \quad \text{Para cada } v \in V, \text{ existe } u \in V \text{ tal que } v + u = 0.$$

$$(M1) \quad (\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V.$$

$$(M2) \quad 1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V, \text{ sendo } 1 \text{ a identidade de } \mathbb{K}.$$

ESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ é um conjunto não vazio V no qual existem duas operações

$$+ : V \times V \rightarrow V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(A1) \quad u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V.$$

$$(A2) \quad (u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall u, v, w \in V.$$

$$(A3) \quad \text{Existe um elemento } 0 \in V \text{ tal que } v + 0 = v, \quad \forall v \in V.$$

$$(A4) \quad \text{Para cada } v \in V, \text{ existe } u \in V \text{ tal que } v + u = 0.$$

$$(M1) \quad (\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V.$$

$$(M2) \quad 1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V, \text{ sendo } 1 \text{ a identidade de } \mathbb{K}.$$

$$(D1) \quad \alpha \cdot (v + u) \cdot u = \alpha \cdot v + \beta \cdot u, \quad \forall u, v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

$$(D2) \quad (\alpha + \beta) \cdot v \cdot u = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \quad \forall u \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Dados um corpo $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}.$$

Dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$ define

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

EXEMPLO 2

Considere o conjunto de polinômios

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_j \in \mathbb{K}, n \geq 0\}.$$

Então, $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial considerando a soma e produto usuais.

EXEMPLOS

EXEMPLO 3

O conjunto das soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com respeito a soma e o produto de $\mathbb{K}^n$.

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, defina a função

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pondo } (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, defina a função

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pondo } (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pondo } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, defina a função

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pondo } (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pondo } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Assim, $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.

EXEMPLO: ESPAÇO DE FUNÇÕES

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, defina a função

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pondo } (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pondo } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Assim, $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.

IMPORTANTE

O vetor nulo de $\mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ é a função identicamente nula, isto é,

$$0(x) = 0, \forall x \in X.$$

COMBINAÇÃO LINEAR

DEFINIÇÃO

Um vetor $v \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $u_1, \dots, u_n$ se existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j.$$

EXEMPLO

O vetor $(1, 2)$ é uma combinação linear dos vetores $v = (-1, 1)$ e $v = (-2, 0)$

EXEMPLO

O vetor $(1, 2)$ não é uma combinação linear dos vetores $v = (-1, 1)$ e $v = (-2, 2)$

DEPENDÊNCIA LINEAR

DEFINIÇÃO

Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V . Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

DEFINIÇÃO

Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V . Dizemos que A é um conjunto **linearmente dependente** se for possível obter escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, **não todos nulos** tais que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j u_j = 0.$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Os vetores $v = (-1, 1)$ e $u = (-2, 0)$ são L.I. em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Os vetores $v = (-1, 1)$ e $u = (-2, 0)$ são L.I. em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLO 2

Os vetores $v = (-1, 1)$ e $u = (-2, 2)$ são L.D. em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Os vetores $v = (-1, 1)$ e $u = (-2, 0)$ são L.I. em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLO 2

Os vetores $v = (-1, 1)$ e $u = (-2, 2)$ são L.D. em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLO 3

Os vetores $v = \sin(x)$ e $u = \cos(x)$ são L.I. em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Os vetores $v = (-1, 1)$ e $u = (-2, 0)$ são L.I. em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLO 2

Os vetores $v = (-1, 1)$ e $u = (-2, 2)$ são L.D. em $\mathbb{R}^2$

EXEMPLO 3

Os vetores $v = \sin(x)$ e $u = \cos(x)$ são L.I. em $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

EXEMPLO 4

Os vetores $v = 1 + x$ e $u = x^2$ são L.I. em $\mathcal{P}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

SUBESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(S1) \quad 0 \in S.$$

$$(S2) \quad u + v \in S, \quad \forall u, v \in S.$$

$$(S3) \quad \lambda u \in S, \quad \forall u \in S, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

SUBESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(S1) \quad 0 \in S.$$

$$(S2) \quad u + v \in S, \quad \forall u, v \in S.$$

$$(S3) \quad \lambda u \in S, \quad \forall u \in S, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

OBSERVAÇÕES

- Um subespaço S é um espaço vetorial quando munido das operações de V . Por isso, muitas vezes dizemos **subespaço vetorial**. Note que o corpo de escalares de S é o mesmo de V .

SUBESPAÇOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto $S \subset V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$(S1) \quad 0 \in S.$$

$$(S2) \quad u + v \in S, \quad \forall u, v \in S.$$

$$(S3) \quad \lambda u \in S, \quad \forall u \in S, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

OBSERVAÇÕES

- Um subespaço S é um espaço vetorial quando munido das operações de V . Por isso, muitas vezes dizemos **subespaço vetorial**. Note que o corpo de escalares de S é o mesmo de V .
- Qualquer combinação linear de elementos de um subespaço ainda pertence ao subespaço, isto é, se $u_1, \dots, u_n \in S$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in S.$$

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V . Temos então o subespaço

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V . Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V . Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

FUNÇÕES

Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V . Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

FUNÇÕES

Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, das funções contínuas.

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V . Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

FUNÇÕES

Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, das funções contínuas.
- $W = \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, das funções diferenciáveis de ordem k .

EXEMPLOS

EXEMPLOS BEM SIMPLES

- Todo espaço vetorial V é um subespaço dele.
- O conjunto $\{0\}$ é um subespaço. (Subespaço trivial).
- Seja v um vetor não nulo em V . Temos então o subespaço

$$\mathcal{R}_v = \{\alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

FUNÇÕES

Considere $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Temos então os subespaços:

- $S = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, das funções contínuas.
- $W = \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, das funções diferenciáveis de ordem k .
- $Z = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios.

EXEMPLOS

NÚCLEO DE UMA MATRIZ

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O núcleo de A é o subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$ definido por

$$N(A) = \{v \in \mathbb{K}^n; A \cdot v^t = 0\}.$$

SUBESPAÇOS GERADOS

DEFINIÇÃO

Dado um conjunto não vazio A em um espaço vetorial V denotamos por $ger(A)$ o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em A , isto é,

$$ger(A) = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in A \right\}.$$

- Note que $ger(A)$ é um subespaço de V é chamado de espaço gerado por A .
- Quando for $V = ger(A)$, então dizemos que A é um conjunto **gerador** de V .

ESPAÇO LINHA DE UMA MATRIZ

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ESPAÇO LINHA DE UMA MATRIZ

ESPAÇO COLUNA DE UMA MATRIZ

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O espaço coluna de A é o subespaço $\mathcal{C}_A$ de $\mathbb{K}^n$ gerado pelos n vetores construídos através das colunas de A , isto é, tomamos o conjunto de vetores

$$v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), v_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

temos que

$$\mathcal{C}_A = \text{ger}(\{v_1, \dots, v_n\}).$$

ESPAÇO LINHA DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ESPAÇO LINHA DE UMA MATRIZ

DEFINIÇÃO

Considere uma matriz $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O **espaço linha** de A é o subespaço $\mathcal{E}_L(A)$ de $\mathbb{K}^m$ gerado pelos m vetores construídos através das **linhas** de A , isto é, denotando

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), v_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

temos que $\mathcal{E}_L(A) = \text{ger}(\{v_1, \dots, v_m\})$.

BASE

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

BASE

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

OBSERVAÇÃO

- Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

BASE

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

OBSERVAÇÃO

- Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

- Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de** v com respeito a base β .

BASE

DEFINIÇÃO

Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores β que satisfaz as seguintes propriedades:

- β é L.I.
- $\text{ger}(\beta) = V$.

OBSERVAÇÃO

- Se $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então para cada $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j.$$

- Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são ditos **coordenadas de v com respeito a base β** .
- Nas condições acima, podemos associar a cada vetor $v \in V$ o vetor $v_\beta \in \mathbb{K}^n$ dado por

$$v_\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_\beta$$

EXEMPLOS

BASE CANÔNICA DE $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \dots, n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

EXEMPLOS

BASE CANÔNICA DE $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \dots, n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

MATRIZES

Em $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ temos uma base formada pelas matrizes

$$E_{ij} = (e_{i,j}),$$

sendo $e_{i,j} = 1$ na posição i,j e $e_{i,j} = 0$ nas demais.

EXEMPLOS

BASE CANÔNICA DE $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\beta = \{e_j, j = 1, \dots, n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, sendo $e_j \in \mathbb{K}^n$ o vetor cujas entradas são iguais 1 na posição j e 0 nas demais.

MATRIZES

Em $A \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ temos uma base formada pelas matrizes

$$E_{ij} = (e_{i,j}),$$

sendo $e_{i,j} = 1$ na posição i,j e $e_{i,j} = 0$ nas demais.

POLINÔMIOS

No espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ temos a base

$$\beta = \{p_k, k = 0, 1, \dots\},$$

sendo $p_0(x) \equiv 1$ e $p_k(x) = x^k$.

EXEMPLOS

- Considerando $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, temos que

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

é uma base em $\mathbb{C}^2$.

EXEMPLOS

- Considerando $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, temos que

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

é uma base em $\mathbb{C}^2$.

- Considerando $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, temos que

$$\beta = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$$

é uma base em $\mathbb{C}^2$.

IMPORTANTE

TEOREMA

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então, todas as bases de V tem a mesma quantidade de elementos.

DEFINIÇÃO

A dimensão de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V finitamente gerado é quantidade de elementos em uma de suas bases. Iremos escrever $\dim_{\mathbb{K}} V$.

PROPOSIÇÃO

São válidas as seguintes propriedades:

- (a) Se duas matrizes A e B são linha-equivalentes, então $\mathcal{E}_L(A) = \mathcal{E}_L(B)$
- (b) As linhas não nulas da matriz *linha degrau* formam uma base para o espaço linha.
- (c) Se A é um matriz $m \times n$, então o posto de A somando com a dimensão de $N(A)$ é igual n , ou seja,

$$\dim[\mathcal{E}_L(A)] + \dim[N(A)] = n$$

EXEMPLO

Vamos obter uma base para $N(A)$ e uma para $\mathcal{E}_L(A)$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

BASE PARA O ESPAÇO COLUNA

- 1 Reduzimos A até sua forma linha degrau U .

BASE PARA O ESPAÇO COLUNA

- 1 Reduzimos A até sua forma linha degrau U .
- 2 Procuramos as linhas não nulas de U .

BASE PARA O ESPAÇO COLUNA

- 1 Reduzimos A até sua forma linha degrau U .
- 2 Procuramos as linhas não nulas de U .
- 3 Nessas linhas, as colunas em que tivermos o primeiro 1 indicará as colunas de A que determinam uma base de $\mathcal{E}_C(A)$.

EXEMPLO 1

Obter uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

BASE PARA O ESPAÇO COLUNA

- 1 Reduzimos A até sua forma linha degrau U .
- 2 Procuramos as linhas não nulas de U .
- 3 Nessas linhas, as colunas em que tivermos o primeiro 1 indicará as colunas de A que determinam uma base de $\mathcal{E}_C(A)$.

EXEMPLO 1

Obter uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 13 & 5 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 2

Obter uma base para o subespaço gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 2, 1), v_3 = (0, 2, -1).$$

MUDANÇA DE BASE

PERGUNTA

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B ?

MUDANÇA DE BASE

PERGUNTA

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B ?

EXEMPLO 2

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{v_1 = (5, 2), v_2 = (7, 3)\} \text{ e } B = \{u_1 = (3, 2), u_2 = (1, 1)\}.$$

MUDANÇA DE BASE

PERGUNTA

Seja v um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas na base A são $v_A = (\alpha, \beta)_A$. Podemos determinar as coordenadas de v na base B ?

EXEMPLO 2

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases

$$A = \{v_1 = (5, 2), v_2 = (7, 3)\} \text{ e } B = \{u_1 = (3, 2), u_2 = (1, 1)\}.$$

Então, escrevendo

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases} \quad (1)$$

iremos obter

$$v_B^t = S \cdot v_A^t,$$

sendo

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

MATRIZ MUDANÇA DE BASE

- Considere duas bases

$$A = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ e } B = \{w_1, \dots, w_n\}$$

de um espaço vetorial V .

- Sejam v_A as coordenadas de um vetor $v \in V$ com respeito a base A .
- Então, escrevendo

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n \\ v_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{n2}w_n \\ \vdots \\ v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n \end{cases} \quad (2)$$

iremos obter $v_B^t = S \cdot v_A^t$, sendo

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

MATRIZ MUDANÇA DE BASE

DEFINIÇÃO

A matriz S obtida acima é dita **matriz de mudança de base** (da base A para B). Em particular, utilizaremos a notação

$$[S]_{A,B}.$$

OBSERVAÇÃO

A matriz $[S]_{A,B}$ é inversível, logo

$$[S]_{B,A} = [S]_{A,B}^{-1}.$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Vamos obter $[S]_{A,B}$ e $[S]_{B,A}$, sendo

$$A = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 1, 1), (2, 3, 2), (1, 5, 4)\}$$

$$B = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 1)\}$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Vamos obter $[S]_{A,B}$ e $[S]_{B,A}$, sendo

$$A = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 1, 1), (2, 3, 2), (1, 5, 4)\}$$

$$B = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 1)\}$$

EXEMPLO 2

Vamos obter $[S]_{A,B}$ e $[S]_{B,A}$, sendo

$$A = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1, 1 + t, 1 + t^2\}$$

$$B = \{w_1, w_2, w_3\} = \{1, t, t^2\}$$