CMI 022
Álgebra Linear
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Apresentação do curso

Ementa: Espaços vetoriais; Transformações lineares; Autovalores e autovetores; Diagonalização de operadores; Espaços com produto interno; Operadores sobre espaços com produto interno; Formas bilineares; Aplicações.

Apresentação do curso

Ementa: Espaços vetoriais; Transformações lineares; Autovalores e autovetores; Diagonalização de operadores; Espaços com produto interno; Operadores sobre espaços com produto interno; Formas bilineares; Aplicações.

Critérios de avaliação: Listas e provas.

Plano

Programa	Conteúdo
Parte I	Espaços vetoriais
Parte II	Transformações lineares
Parte III	Produto interno

BIBLIOGRAFIA

- LEON, S. J. ÁLGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES.
- COELHO, F. U. INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR. ED. LIVRARIA DA FÍSICA, SÃO PAULO.

Corpo

Definição

Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e $\cdot$ (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

Corpo

Definição

Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e $\cdot$ (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $z + w = w + z, \ \forall z, w \in \mathbb{K}$.

(A2) $(z + w) + u = z + (w + u), \ \forall z, w, u \in \mathbb{K}$.

(A3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = z, \ \forall z \in \mathbb{K}$.

(A4) Para cada $z \in \mathbb{K}$, existe $w \in \mathbb{K}$ tal que $z + w = 0$.

Corpo

Definição

Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e $\cdot$ (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $z + w = w + z, \ \forall z, w \in \mathbb{K}$.

(A2) $(z + w) + u = z + (w + u), \ \forall z, w, u \in \mathbb{K}$.

(A3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = z, \ \forall z \in \mathbb{K}$.

(A4) Para cada $z \in \mathbb{K}$, existe $w \in \mathbb{K}$ tal que $z + w = 0$.

(M1) $z \cdot w = w \cdot z, \ \forall z, w \in \mathbb{K}$.

(M2) $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u), \ \forall z, w, u \in \mathbb{K}$.

(M3) Existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot z = z, \ \forall z \in \mathbb{K}$.

(M4) Para cada $z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, existe $w \in \mathbb{K}$ tal que $z \cdot w = 1$.

Corpo

Definição

Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e $\cdot$ (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

$(A1)$ $z+w=w+z,\ \forall z,w\in\mathbb{K}.$

$(A2)$ $(z+w)+u=z+(w+u),\ \forall z,w,u\in\mathbb{K}.$

$(A3)$ Existe um elemento $0\in\mathbb{C}$ tal que $z+0=z,\ \forall z\in\mathbb{K}.$

$(A4)$ Para cada $z\in\mathbb{K}$, existe $w\in\mathbb{K}$ tal que $z+w=0.$

$(M1)$ $z\cdot w=w\cdot z,\ \forall z,w\in\mathbb{K}.$

$(M2)$ $(z\cdot w)\cdot u=z\cdot(w\cdot u),\ \forall z,w,u\in\mathbb{K}.$

$(M3)$ Existe um elemento $1\in\mathbb{K}$ tal que $1\cdot z=z,\ \forall z\in\mathbb{K}.$

$(M4)$ Para cada $z\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, existe $w\in\mathbb{K}$ tal que $z\cdot w=1.$

$(D4)$ $(z+w)\cdot u=z\cdot u+w\cdot u,\ \forall z,w,u\in\mathbb{K}.$

EXEMPLOS

- Os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos.

Exemplos

- Os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos.
- O conjunto $\mathbb{Z}$ não é um corpo.

Observação:

Ao longo do curso teremos interesse apenas em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Algumas propriedades

- Note que um corpo $\mathbb{K}$ é determinado por $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

Algumas propriedades

- Note que um corpo $\mathbb{K}$ é determinado por $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

Teorema

Seja $\mathbb{K}$ um corpo.

(a) As propriedades $A1, A2, M1, M2$ são válidas para uma quantidade finita de elementos.

(b) Os elementos 0 e 1 são únicos

(c) O inverso multiplicativo de um elemento é único. O mesmo para o oposto.

(d) $a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in \mathbb{K}$.

(e) Se $a \cdot b = 0$, então ou $a = 0$ ou $b = 0$.

(f) $-a = (-1) \cdot a$, para todo $a \in \mathbb{K}$.

(g) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

(h) $(-1) \cdot 1 = -1$.

(i) se $a + b = a + c$, então $b = c$.

Sistemas

- Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e considere o sistemas linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

no qual os coeficientes a_{ij} são elementos de $\mathbb{K}$ e deseja-se obter $x_1, \ldots, x_n$.

Sistemas

- Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e considere o sistemas linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

no qual os coeficientes a_{ij} são elementos de $\mathbb{K}$ e deseja-se obter $x_1, \ldots, x_n$.

- Um método para resolver esse sistema é o escalonamento:
  - (e1) Trocar posição de linhas.
  - (e2) Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
  - (e3) Substituir uma linha pela soma desta com alguma outra.

Sistemas

- Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e considere o sistemas linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

  no qual os coeficientes a_{ij} são elementos de $\mathbb{K}$ e deseja-se obter $x_1, \ldots, x_n$.
- Um método para resolver esse sistema é o escalonamento:
  - (e1) Trocar posição de linhas.
  - (e2) Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
  - (e3) Substituir uma linha pela soma desta com alguma outra.
- A ideia é então obter um sistema mais simples através das operações (e1), (e2) e (e3).

Matriz

Definição

Uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ é uma função

$$A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \mathbb{K},$$

Matriz

Definição

Uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ é uma função

$$A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \to \mathbb{K},$$

- Utilizamos as notações

$$A(i,j) = a_{ij}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

- O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ em $\mathbb{K}$ será denotado por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

SOMA DE MATRIZES

- Dadas duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ definimos $A+B$ como sendo a matriz

$$C = (c_{ij})_{m\times n} = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} \ldots a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \ldots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Soma de matrizes

- Dadas duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ definimos $A+B$ como sendo a matriz

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}\dots a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1}\dots a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

Propriedades:

Dadas matrizes A, B e C de mesma ordem tem-se

(a) $A+B=B+A$.

(b) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Produto de matrizes

- Dadas duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ definimos $A+B$ como sendo a matriz

$$C=(c_{ij})_{m\times p}=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\dots a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11}\dots b_{1p} \\ \vdots \\ b_{n1}\dots b_{np}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{1\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{1\ell}b_{\ell p} \\ & \vdots & \\ \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{m\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{m\ell}b_{\ell p}\end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

- Dadas duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ definimos $A+B$ como sendo a matriz

$$C=(c_{ij})_{m\times p}=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\dots a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11}\dots b_{1p} \\ \vdots \\ b_{n1}\dots b_{np}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{1\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{1\ell}b_{\ell p} \\ & \vdots & \\ \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{m\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{m\ell}b_{\ell p}\end{pmatrix}$$

Propriedade:

Vale a igualdade $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

Produto de matrizes

- Dadas duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ definimos $A+B$ como sendo a matriz

$$C=(c_{ij})_{m\times p}=\begin{pmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1}\dots a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11}\dots b_{1p} \\ \vdots \\ b_{n1}\dots b_{np}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{1\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{1\ell}b_{\ell p} \\ & \vdots & \\ \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{m\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{n}\dots a_{m\ell}b_{\ell p}\end{pmatrix}$$

Propriedade:

Vale a igualdade $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

Definição

A inversa de uma matriz $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, quando existe, é uma matriz $B\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A\cdot B=I,$$

sendo $I=(c_{i,k})$, com $c_{ij}=0$ para $j\neq i$ e $c_{ij}=1$ para $j=i$.

Matrizes e sistemas

- Note que o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é equivalente a equação linear

$$A \cdot X = B,$$

sendo

$$A = (a_{ij})_{m\times n},\ X = (x_{i1})_{n\times 1} \text{ e } B = (b_{i1})_{m\times 1}$$

Um caso particular e importante

- Considere $\mathbb{K}$ um corpo e defina o conjunto $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ (n vezes).
- Em $\mathbb{K}^n$ podemos definir as seguintes operações

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \; x, y \in \mathbb{K}^n$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \; \lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n.$$

Um caso particular e importante

- Considere $\mathbb{K}$ um corpo e defina o conjunto $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$ (n vezes).
- Em $\mathbb{K}^n$ podemos definir as seguintes operações

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\ x, y \in \mathbb{K}^n$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),\ \lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n.$$

- Fixada uma matriz $A = A_{m\times n}$, podemos definir a função $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ pondo

$$L_A(x) = A \cdot x,$$

em que identificamos x com a matriz $x_{n\times 1}$.

NÚCLEO E IMAGEM

Com respeito as notações anteriores, definimos os seguintes conjuntos

$$Kern\, L_A = \{x \in \mathbb{K}^n;\ L_A(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^n$$

e

$$Im\, L_A = \{L_A(x),\ x \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m.$$

Núcleo e imagem

Com respeito as notações anteriores, definimos os seguintes conjuntos

$$Kern\, L_A = \{x \in \mathbb{K}^n;\ L_A(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^n$$

e

$$Im\, L_A = \{L_A(x),\ x \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m.$$

Teorema

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

(a) $0_n \in Im\, L_A$ e $0_m \in Im\, L_A$.

(b) $\lambda x + w \in Kern\, L_A$, para todo $x, w \in Kern\, L_A$.

(c) $\lambda y + u \in Im\, L_A$, para todo $y, u \in Im\, L_A$.

Determinante

Definição

O determinante de uma matriz $A_{n\times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é definido de modo indutivo:

- se $n = 1$, então $A = (a)$ e pomos $\det(A) = a$.

Determinante

Definição

O determinante de uma matriz $A_{n\times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é definido de modo indutivo:

- se $n = 1$, então $A = (a)$ e pomos $\det(A) = a$.
- supondo $n > 1$ e que definimos $\det(B)$ para todas as matrizes $B_(m \times M)$, com $m < n$, pomos
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij})$$
em que A_{ij} é a matriz de ordem $n - 1$ formada ao se retirar a linha i e a coluna j de A.

Determinante

Definição

O determinante de uma matriz $A_{n\times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é definido de modo indutivo:

- se $n = 1$, então $A = (a)$ e pomos $\det(A) = a$.
- supondo $n > 1$ e que definimos $\det(B)$ para todas as matrizes $B_(m \times M)$, com $m < n$, pomos
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij})$$
em que A_{ij} é a matriz de ordem $n-1$ formada ao se retirar a linha i e a coluna j de A.

Teorema

Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.