

CM311 - Cálculo 1
 Professor: **Fernando de Ávila Silva**
 Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

(Os exercícios desta lista foram adaptados de listas do Prof. Wagner)

1. Quão próximo de 2 devemos tomar x para que $5x + 3$ esteja a uma distância de 13 menor que 0,1?

2. Para cada item abaixo, dado um $\epsilon > 0$, determine um valor $\delta > 0$ que torne a implicação verdadeira:

(a) $|x - 1| < \delta \implies |f(x) - 3| < \epsilon$, em que $f(x) = 4x - 1$

(b) $|x - 2| < \delta \implies |f(x) - 13| < \epsilon$, em que $f(x) = 5x + 3$

(c) $|x - 2| < \delta \implies |f(x) - 4| < \epsilon$, em que $f(x) = x^2$

3. Prove a partir da definição de limite que:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$

(b) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{x} = \frac{1}{p}$, em que $p \neq 0$

4. Utilizando as propriedades operatórias de limites, calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3x + 1$

(e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^3}{x^3 + 1}$

(i) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^2 - p^2}{x - p}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 1)(x^2 - 3x + 1)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

(j) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^n - p^n}{x - p}$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 2}{2x - 1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x - 3}$

5. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < -1 \\ x, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ (2x - 1)^2, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Determine os valores de p para os quais $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existe e justifique sua resposta.

6. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1, & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 2ax + 2a + b & \text{se } 2 \leq x < 4 \\ b\sqrt{x} + a - 1, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$

Determine os valores de a e b para que os limites $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ existam.

7. Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

(a) Calcule os limites laterais $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

(c) Faça um esboço do gráfico de f .

8. Seja um número $a \in \mathbb{R}$ tal que o limite

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2} = L$$

existe. Determine a e o valor do limite L .

9. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existir, justifique.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, em que $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, em que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$
- (c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$, em que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, em que $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, em que $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

10. Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{R}$ com $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Mostre que existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \implies |f(x)| < |g(x)|.$$

11. Seja f uma função e p um ponto tal que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, para algum $L \in \mathbb{R}$. Mostre utilizando a definição de limite que

$$\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = |L|.$$

12. Exiba uma função f e um ponto p em que $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)|$ existe, mas $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não existe.

13. Se $3x \leq f(x) \leq x^3 + 2$ para $0 \leq x \leq 2$, encontre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

14. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $x \neq 1$ temos que $-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.
Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq 2|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x}.$$

16. Utilize o Teorema do Confronto para mostrar que se $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = 0$, então $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$.

17. Sejam f e g duas funções definidas em $\mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $g(x)^2 + f(x)^2 = 4$.
Calcule e justifique os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)(x - 1).$$

18. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) - g(x)] = 1$. Determine o valor de

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x)$$

19. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + bx, & \text{se } x < -1 \\ ax^2 + x + 2b + 3 & \text{se } -1 \leq x < 1, \\ (1 - 2b)x + (3 - a), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

em que a e b são números reais. Determine os valores de a e b para que f seja uma função contínua.

20. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 - 7x + 7} \right)^8$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x^2 - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 1}{x + 1}}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x - 2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

21. Encontre números a e b tais que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x} = 1$$

22. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcule

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{f(2x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x+2)}{(x^2 - x - 6)}$

23. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$ um número real dado. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L$. Calcule

(a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+3h) - f(p)}{h}$

(b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p-h)}{h}$

(d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p-h) - f(p)}{h}$

Desafios:

I. Considere a seguinte função f definida em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Utilize a definição para mostrar que f é contínua em 0.

II. Suponha que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, com $L > 0$. Prove a *Lei da Conservação do Sinal*: mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,

$$|x - p| < \delta \implies f(x) > 0.$$

Além disso, enuncie e prove um resultado análogo para $L < 0$. Discuta o caso $L = 0$.

Dica: Faça um esboço de como deve ser o gráfico da função f para escolher um $\epsilon > 0$ conveniente.

III. Suponha que existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $0 < |x - p| < r$ e que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Prove que $L \geq 0$. Além disso, se na hipótese tivéssemos $f(x) > 0$, poderíamos concluir que $L > 0$? Justifique.

Dica: Use o Desafio II.

IV. Prove a partir da definição de limite que:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27$

(b) $\lim_{x \rightarrow p} x^3 = p^3$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 1 = 2$

V. Prove que se $|x - p| < 1$, $|x - p| < \frac{\varepsilon}{2(|q| + 1)}$ e $|y - q| < \frac{\varepsilon}{2(|p| + 1)}$, então

$$|xy - pq| < \varepsilon.$$

Dica: $|xy - pq| = |xy - xq + xq - pq|$.