CM311 - Cálculo 1

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 2

(Os exercícios desta lista foram adaptados de listas do Prof. Wagner)

---

1. A seguinte propriedade pode ser de grande ajuda: Dados a e b números reais quaisquer, vale que:
   (a) $\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen}a\cos b$
   (b) $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$
   (c) $\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$

2. Calcule os seguintes limites:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{x}$, $k\neq 0$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x-\pi}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\operatorname{sen}x}$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\operatorname{tg}x\operatorname{sen}x}$
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}x}{2x-\pi}$
   (h) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{tg}(x-p)}{x^2-p^2}$, $p\neq 0$
   (i) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}$
   (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x}$
   (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x^2-\operatorname{sen}x}$
   (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x+\operatorname{tg}x}$
   (m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2-p^2)}{x-p}$
   (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x))}{x}$
   (o) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$

3. Vimos em sala que se $0<|x|<\frac{\pi}{2}$, então
$$\cos x<\frac{\operatorname{sen}x}{x}<1.$$
Com base nesta desigualdade, calcule
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^2}$$

4. Justifique o limite abaixo utilizando os Teoremas vistos em aula:
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}x}=0$$

5. Sejam f e g funções definidas em $[a,+\infty]$ tais que $g(x)\neq 0$, para todo $x\geq a$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$, para algum $L\in\mathbb{R}$, e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$. Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

6. Calcule os seguintes limites no infinito:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2-x+1}{4x^2-5x+2}\right)$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+3}$
   (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-5}{x^2+3x+1}$
   (g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2x+1}{4x^4+3x+2}$
   (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+3}}$
   (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{32x^2-4x+1}{2x^2+1}}$
   (j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$
   (k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$
   (l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{x^2+1}\right]$

(m) $\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3}\right]$ (n) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ (o) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{8x^3 - 2x^2 + 8x + 1}{4x^3 - 6x + 2}\right)^{10}$

7. Calcule o limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1}$ e mostre que existe $N > 0$ tal que

$$x \geq N \implies \frac{1}{4} < \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} < \frac{3}{4}$$

8. Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove pela definição de limite que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

9. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2x + 2)$ (c) $\lim_{x\to+\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$ (e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$

(b) $\lim_{x\to-\infty} (x - 3)$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 + 7x - 3}{x^4 - 2x + 3}$ (f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 6x + 1 + x^3}{6x^2 + x + 3}$

10. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 3}$ (d) $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x+3})$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x + \sqrt{x+3}}{2x - 1}$ (e) $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$

(c) $\lim_{x\to+\infty} (2x - \sqrt{x^2 + 3})$ (f) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3x + \sqrt{6x}} - \sqrt{3x + 1})$

11. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to3^+} \frac{5}{3 - x}$ (c) $\lim_{x\to1^-} \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$ (e) $\lim_{x\to-1^+} \frac{2x + 1}{x^2 + x}$

(b) $\lim_{x\to0^-} \frac{x - 3}{x^2}$ (d) $\lim_{x\to3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$ (f) $\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3 - x^2}$

12. Explique os seguintes limites utilizando as propriedades vistas em aula:

(a) Se n é par, então $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

(b) Se n é ímpar, então $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

13. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty)$ tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$. Suponha que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, para algum $L > 0$. Prove que existe $N > 0$ tal que se $x > N$, então

$$\frac{L}{2} g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} g(x).$$

Conclua que se $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Dica: Escolha um $\varepsilon > 0$ conveniente na definição de limite.

14. Utilize o Exercício 12 para mostrar que se $p(x)$ é um polinômio de grau ímpar, então existem números reais a e b tais que $p(a) > 0$ e $p(b) < 0$. Conclua que todo polinômio de grau ímpar possui ao menos uma raíz real.

15. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.

16. Considere a função f dada por

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2 + 3x}.$$

(a) Verifique que f é contínua em $[0, +\infty]$.

(b) Mostre que 1 é a única raíz de f em $(0, +\infty)$, que $f(2) > 0$ e $f(1/2) < 0$.

(c) Conclua que $f(x) > 0$ em $(1, +\infty)$ e que $f(x) < 0$ em $(0, 1)$.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que existam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $f(c) < c$ e $f(d) > d$. Prove que f possui um ponto fixo entre c e d.

18. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$, para todo $x \in [a, b]$.

19. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x - 3^x$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x}$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (0.5)^x$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x + 2^{-x}$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} \operatorname{sen} x$

(h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$

20. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 x$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \left(\dfrac{x}{x+1} \right)$

(e) $\lim\limits_{x \to 1} \ln \left(\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln 2 - \ln(3^x + 1)$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{\ln x}$.

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

21. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^x$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+2}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x+1}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^x$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$

22. Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

23. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x} - 1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3^x - 1}{x^2}$

24. Calcule

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

Dica: Lembre que para todo $x > 1$ vale $2 \leq \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < 3$.

Desafios:

I. Calcule
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2+2)-\operatorname{sen}(x+2)}{x}$$
Dica: Use a fórmula obtida em sala para a expressão $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p$.

II. Utilizando os mesmos argumentos vistos em sala, mostre que a função $\cos(x)$ é contínua.
Dica: Use o item c do Exercício 1.

III. Calcule os seguintes limites, em que p é um ponto do domínio da função em cada item:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} p}{x-p}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\cos x-\cos p}{x-p}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} p}{x-p}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\sec x-\sec p}{x-p}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg} p}{x-p}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{cossec} x-\operatorname{cossec} p}{x-p}$

Dica: O limite 2f e o limite fundamental podem ser úteis.
Aqui,
$$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\qquad \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},\qquad \sec x=\frac{1}{\cos x},\qquad \operatorname{cossec} x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

IV. Seja f e g funções definidas em $[a,\infty]$ tais que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ e g é uma função limitada, ou seja, existe $C>0$ tal que $|g(x)|\le C$, para todo $x\ge a$. Mostre que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$$
Dica: Teorema do Confronto pode ajudar.

V. Calcule usando apenas as propriedades vistas em aula das funções sen e cos:

(a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

(b) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

(c) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

(d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

(e) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(f) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

(g) $\cos(2\pi)$

(h) $\operatorname{sen}(2\pi)$

(i) $\cos(a+2\pi),\quad a\in\mathbb{R}$

(j) $\operatorname{sen}(a+2\pi),\quad a\in\mathbb{R}$

VI. Assumindo que o limite existe, calcule o valor de L:
$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$
Dica: Faça uma substituição $x=2u$ e obtenha uma expressão para $2L$. Após isso, faça $2L-L$ e obtenha
$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)}{-2x^2}.$$
Utilize o Exercício 7h para determinar o valor de L.

VII. Calcule
$$M=\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$
Dica:

- Faça manipulações para obter
$$M=\lim_{x\to 0}\frac{e\left(e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1\right)}{-x}$$

- Multiplique numerador e numerador por $\frac{\ln(1+x)}{x} - 1$ e calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}$$

- Conclua que

$$M = \lim_{x\to 0} e\left(\frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{-x}\right) = eL,$$

em que L é o valor do limite do Desafio I.