

CM 310

Cálculo 1

S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



FUNÇÕES

Ao longo deste curso iremos tratar de funções reais, ou seja, funções do tipo

$$f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}.$$

em que $Dom(f)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ podendo ser:

- Um intervalo finito ou infinito (o que inclui o caso $Dom(f) = \mathbb{R}$);
- União de intervalos;
- Conjuntos discretos (e uniões destes com intervalos).

IDEIAS INTUITIVAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

UMA PRIMEIRA IDEIA...

Um função real é contínua em um ponto p de seu domínio se ela não *dá um salto* neste ponto.

IDEIAS INTUITIVAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

UMA PRIMEIRA IDEIA...

Um função real é contínua em um ponto p de seu domínio se ela não *dá um salto* neste ponto.

EXEMPLO 1

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

possui uma descontinuidade em $p = 2$

IDEIAS INTUITIVAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

UMA PRIMEIRA IDEIA...

Um função real é contínua em um ponto p de seu domínio se ela não *dá um salto* neste ponto.

EXEMPLO 1

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

possui uma descontinuidade em $p = 2$

EXEMPLO 2

A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ x - 1, & x > 2 \end{cases}$$

não possui descontinuidades.

IDEIAS INTUITIVAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

UMA SEGUNDA IDEIA...

Um função real é contínua em um ponto p de seu domínio se para valores de x *próximos* de p temos os que valores $f(x)$ estão *próximos* de $f(p)$.

IDEIAS INTUITIVAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

UMA SEGUNDA IDEIA...

Um função real é contínua em um ponto p de seu domínio se para valores de x *próximos* de p temos os que valores $f(x)$ estão *próximos* de $f(p)$.

EXEMPLO

Analisando as funções f e g dos Exemplos 1 e 2, chegaremos novamente que f é descontínua $p = 2$, mas que g é contínua em tal ponto.

IDEIAS INTUITIVAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

UMA SEGUNDA IDEIA...

Um função real é contínua em um ponto p de seu domínio se para valores de x *próximos* de p temos os que valores $f(x)$ estão *próximos* de $f(p)$.

EXEMPLO

Analisando as funções f e g dos Exemplos 1 e 2, chegaremos novamente que f é descontínua $p = 2$, mas que g é contínua em tal ponto.

OBSERVAÇÃO

Estamos então perguntando: O que acontece com os valores $f(x)$ quando x se aproxima de p ?

IDEIAS INTUITIVAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

UMA SEGUNDA IDEIA...

Um função real é contínua em um ponto p de seu domínio se para valores de x *próximos* de p temos os que valores $f(x)$ estão *próximos* de $f(p)$.

EXEMPLO

Analisando as funções f e g dos Exemplos 1 e 2, chegaremos novamente que f é descontínua $p = 2$, mas que g é contínua em tal ponto.

OBSERVAÇÃO

Estamos então perguntando: O que acontece com os valores $f(x)$ quando x se aproxima de p ?

Essa pergunta se responde com o conceito de limite.

RELEMBRANDO

MÓDULO DE NÚMERO REAL

Dado um número real a , definimos

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

RELEMBRANDO

MÓDULO DE NÚMERO REAL

Dado um número real a , definimos

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

IMPORTANTE

- O módulo de um número real é sempre um valor não negativo. Então,

$$|a| \leq 0 \iff a = 0.$$

RELEMBRANDO

MÓDULO DE NÚMERO REAL

Dado um número real a , definimos

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

IMPORTANTE

- O módulo de um número real é sempre um valor não negativo. Então,

$$|a| \leq 0 \iff a = 0.$$

- Geometricamente, o módulo de um número real é a distância dele até a origem.

RELEMBRANDO

MÓDULO DE NÚMERO REAL

Dado um número real a , definimos

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

IMPORTANTE

- O módulo de um número real é sempre um valor não negativo. Então,

$$|a| \leq 0 \iff a = 0.$$

- Geometricamente, o módulo de um número real é a distância dele até a origem.
- Dados $a, b \in \mathbb{R}$, valem as importantes propriedades

$$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$$

e

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

LIMITES DE FUNÇÕES

- Para fixar as ideias, iremos considerar funções cujos domínios são intervalos, ou uniões de intervalos.

LIMITES DE FUNÇÕES

- Para fixar as ideias, iremos considerar funções cujos domínios são intervalos, ou uniões de intervalos.

DEFINIÇÃO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in Dom(f)$, ou p uma extremidade de um dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ em p quando vale a seguinte propriedade:

LIMITES DE FUNÇÕES

- Para fixar as ideias, iremos considerar funções cujos domínios são intervalos, ou uniões de intervalos.

DEFINIÇÃO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in Dom(f)$, ou p uma extremidade de um dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ em p quando vale a seguinte propriedade:

(★) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \text{ e } 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

LIMITES DE FUNÇÕES

- Para fixar as ideias, iremos considerar funções cujos domínios são intervalos, ou uniões de intervalos.

DEFINIÇÃO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in Dom(f)$, ou p uma extremidade de um dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ em p quando vale a seguinte propriedade:

($\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \text{ e } 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso, utilizamos as notações:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L, \text{ ou simplesmente, } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} L$$

OBSERVAÇÕES

- A condição $(\star)$ é equivalentes a:

$(\star\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap (p - \delta, p + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

OBSERVAÇÕES

- A condição $(\star)$ é equivalentes a:

$(\star\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap (p - \delta, p + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

- O número δ depende de ϵ e também do ponto p .

OBSERVAÇÕES

- A condição $(\star)$ é equivalentes a:

$(\star\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap (p - \delta, p + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

- O número δ depende de ϵ e também do ponto p .
- O limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$, quando existe, é único.

OBSERVAÇÕES

- A condição $(\star)$ é equivalentes a:

$(\star\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \cap (p - \delta, p + \delta) \implies f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

- O número δ depende de ϵ e também do ponto p .
- O limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$, quando existe, é único.
- A definição de $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ não exige que p seja um ponto em $\text{Dom}(f)$.

EXEMPLO

- Pode ser muito difícil, ou impossível, obter limites através da definição!!!

EXEMPLO

- Pode ser muito difícil, ou impossível, obter limites através da definição!!!

EXEMPLO 1

Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, para $f(x) = 2x + 3$.

EXEMPLO

- Pode ser muito difícil, ou impossível, obter limites através da definição!!!

EXEMPLO 1

Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, para $f(x) = 2x + 3$.

EXEMPLO 2

Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

EXEMPLO

- Pode ser muito difícil, ou impossível, obter limites através da definição!!!

EXEMPLO 1

Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, para $f(x) = 2x + 3$.

EXEMPLO 2

Não existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

EXEMPLO 2

Não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, sendo $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

FUNÇÃO CONTÍNUA

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função real f é contínua em um ponto p de seu domínio se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

FUNÇÃO CONTÍNUA

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função real f é contínua em um ponto p de seu domínio se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

TEOREMA

Uma função real f é contínua em um p de seu domínio se, e somente se, vale a seguinte propriedade: Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in \text{Dom}(f) \text{ e } 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon,$$

ou equivalentemente,

$$x \in \text{Dom}(f) \cap (p - \delta, p + \delta) \implies f(x) \in (f(p) - \epsilon, f(p) + \epsilon).$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

A função constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$, com k fixado, é contínua em todos os pontos de seu domínio.

EXEMPLO 2

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é contínua em todos os pontos de seu domínio.

UM EXEMPLO MAIS AVANÇADO...

EXEMPLO

Considere a função real dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ L, & x = 2 \end{cases}$$

Vamos obter L de modo que f seja contínua em $x = 2$.

PROPRIEDADES DE LIMITES

TEOREMA

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio tais que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$$

PROPRIEDADES DE LIMITES

TEOREMA

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio tais que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$$

Nestas condições, vale:

- (a) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1 \pm L_2.$
- (b) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1 L_2.$
- (c) $\lim_{x \rightarrow p} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow p} f(x) = kL_1$, sendo k uma constante qualquer.
- (d) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que estes quocientes estejam bem definidos.

PROPRIEDADES DE LIMITES

TEOREMA

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio tais que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$$

Nestas condições, vale:

- (a) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1 \pm L_2.$
- (b) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1 L_2.$
- (c) $\lim_{x \rightarrow p} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow p} f(x) = kL_1$, sendo k uma constante qualquer.
- (d) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que estes quocientes estejam bem definidos.

OBSERVAÇÃO

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

PROPRIEDADES DE CONTINUIDADE

TEOREMA

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio e contínuas no ponto p . Nestas condições, as seguintes funções são contínuas em p :

(a) $S(x) = f(x) \pm g(x)$.

(b) $P(x) = f(x)g(x)$.

(c) $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, desde que este quociente esteja bem definido.

PROPRIEDADES DE CONTINUIDADE

TEOREMA

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio e contínuas no ponto p . Nestas condições, as seguintes funções são contínuas em p :

(a) $S(x) = f(x) \pm g(x)$.

(b) $P(x) = f(x)g(x)$.

(c) $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, desde que este quociente esteja bem definido.

OBSERVAÇÃO

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

APLICAÇÕES E EXEMPLOS

PROPOSIÇÃO

Toda função polinomial é contínua.

APLICAÇÕES E EXEMPLOS

PROPOSIÇÃO

Toda função polinomial é contínua.

EXEMPLO

Calcular os limites

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$$

APLICAÇÕES E EXEMPLOS

PROPOSIÇÃO

Toda função polinomial é contínua.

EXEMPLO

Calcular os limites

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}$$

Note que:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) \text{ e } x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3).$$