CM 310
Cálculo 1
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Limites de funções

- Para fixar as ideias, iremos considerar funções cujos domínios são intervalos, ou uniões de intervalos.

Definição

Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in Dom(f)$, ou p uma extremidade de um dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ em p quando vale a seguinte propriedade:

Limites de funções

- Para fixar as ideias, iremos considerar funções cujos domínios são intervalos, ou uniões de intervalos.

Definição

Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in Dom(f)$, ou p uma extremidade de um dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ em p quando vale a seguinte propriedade:

$(\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \ \text{e} \ 0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Limites de funções

- Para fixar as ideias, iremos considerar funções cujos domínios são intervalos, ou uniões de intervalos.

Definição

Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in Dom(f)$, ou p uma extremidade de um dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ em p quando vale a seguinte propriedade:

$(\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \text{ e } 0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso, utilizamos as notações:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L, \quad \text{ou simplesmente, } f(x) \xrightarrow{x \to p} L$$

Observações

- A condição $(\star)$ é equivalentes a:

$(\star\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \cap (p-\delta, p+\delta) \implies f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$$

- O limite $\lim\limits_{x \to p} f(x)$, quando existe, é único.
- A definição de $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não exige que p seja um ponto em $Dom(f)$.

Propriedades

Teorema

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio tais que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \to p} g(x) = L_2$$

Nestas condições, vale:

(a) $\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x) = L_1 \pm L_2$.

(b) $\lim_{x \to p} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \lim_{x \to p} g(x) = L_1 L_2$.

(c) $\lim_{x \to p} [k f(x)] = k \lim_{x \to p} f(x) = k L_1$, sendo k uma constante qualquer.

(d) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que estes quocientes estejam bem definidos.

Observação

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

Função contínua

Definição

Dizemos que uma função real f é contínua em um ponto p de seu domínio se

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Teorema

Uma função real f é contínua em um p de seu domínio se, e somente se, vale a seguinte propriedade: Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \text{ e } 0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon,$$

ou equivalentemente,

$$x \in Dom(f) \cap (p - \delta, p + \delta) \implies f(x) \in (f(p) - \epsilon, f(p) + \epsilon).$$

Propriedades de continuidade

Teorema

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio e contínuas no ponto p. Nestas condições, as seguintes funções são contínuas em p:

(a) $S(x) = f(x) \pm g(x)$.

(b) $P(x) = f(x)g(x)$.

(c) $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, desde que este quociente esteja bem definido.

Observação

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

Proposição

Toda função polinomial é contínua.

Uma igualdade importante

Teorema

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a igualdade

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{\ell=1}^{n} a^{n-\ell} b^{\ell-1}$$

Cálculos de limites

Vamos estudar os seguintes limites

$$\lim_{x\to 1} f(x),\ \lim_{x\to -1} g(x) \text{ e } \lim_{x\to p} h(x)$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 3, & \text{se } x = 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+1}, & \text{se } x \neq -1, \\ 2, & \text{se } x = -1, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n-p^n}{x-p}, & \text{se } x \neq p, \\ 1, & \text{se } x = p. \end{cases}$$

Um caso importante

Proposição 1

A função $f : [0, \to \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

é contínua.

Um caso importante

Proposição 1

A função $f : [0, \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

é contínua.

Aplicação

Calcular os limites

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}.$$

Aplicação: Velocidade instantânea

Velocidade instantânea

Considere um móvel cujo deslocamento é dado pela função

$$S(t) = -t^2 + 4t$$

(a) Obtenha a velocidade V em um instante qualquer t.

(b) O que significa, geometricamente, termos $V(2) = 0$?

Limite lateral

Limite à esquerda

Sejam f uma função real e p um número real para o qual exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a, p) \subset Dom(f)$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite lateral à esquerda** de f quando x tende a p se: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in (p - \delta, p) \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

Notação: $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L$.

Limite lateral

Limite à esquerda

Sejam f uma função real e p um número real para o qual exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a,p) \subset Dom(f)$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite lateral à esquerda** de f quando x tende a p se: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in (p-\delta, p) \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

Notação: $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = L$.

Limite à direita

Sejam f uma função real e p um número real para o qual exista $b \in \mathbb{R}$ tal que $(p,b) \subset Dom(f)$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o **limite lateral à direita** de f quando x tende a p se: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in (p, p+\delta) \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

Notação: $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L$.

Exemplos

Exemplo 1

Calcular os limites laterais $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Exemplos

Exemplo 1

Calcular os limites laterais $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo 2

Calcular os limites laterais $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ para

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Limite e limites laterais

Teorema

Sejam f uma função real e p um número real para o qual existam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a, p) \subset Dom(f) \text{ e } (p, b) \subset Dom(f).$$

Limite e limites laterais

Teorema

Sejam f uma função real e p um número real para o qual existam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a,p) \subset Dom(f) \text{ e } (p,b) \subset Dom(f).$$

Então, existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ se, e somente se, existem $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$ e vale a igualdade

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x).$$

Neste caso,

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x).$$