CM 310
Cálculo 1
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Propriedades de limites

Teorema

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio tais que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \to p} g(x) = L_2$$

Nestas condições, vale:

(a) $\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x) = L_1 \pm L_2.$

(b) $\lim_{x \to p} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \lim_{x \to p} g(x) = L_1 L_2.$

(c) $\lim_{x \to p} [k f(x)] = k \lim_{x \to p} f(x) = k L_1$, sendo k uma constante qualquer.

(d) $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que estes quocientes estejam bem definidos.

Observação

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

Função contínua

Definição

Dizemos que uma função real f é contínua em um ponto p de seu domínio se

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p).$$

Teorema

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio e contínuas no ponto p. Nestas condições, as seguintes funções são contínuas em p:

(a) $S(x) = f(x) \pm g(x)$.

(b) $P(x) = f(x)g(x)$.

(c) $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, desde que este quociente esteja bem definido.

Observação

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

Dois resultados importantes

Proposição 1

Vale que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \iff \lim_{h \to 0} f(p+h) = L$$

Dois resultados importantes

Proposição 1

Vale que

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \lim_{h\to 0} f(p+h) = L$$

Proposição 2

(a) Se $\lim_{x\to p} f(x) = L > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f),\ x \in (p-\delta, p+\delta), x \neq p \Longrightarrow f(x) > 0.$$

(b) Se $\lim_{x\to p} f(x) = L < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f),\ x \in (p-\delta, p+\delta), x \neq p \Longrightarrow f(x) < 0.$$

Aplicação: Velocidade instantânea

Velocidade instantânea

Considere um móvel cujo deslocamento é dado pela função

$$S(t) = -t^2 + 4t.$$

(a) Obtenha a velocidade V em um instante qualquer t.

(b) O que significa, geometricamente, a igualdade $V(2) = 0$?

Composta de funções

Definição

Considere duas funções

$$f : Dom(f) \to \mathbb{R} \ \text{ e } \ g : Dom(g) \to \mathbb{R}.$$

Se $Im(f) \subseteq Dom(g)$, então fica bem definida a função composta $g \circ f : Dom(g) \to \mathbb{R}$ dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Limite de uma composição

Teorema

Considere duas funções $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \to \mathbb{R}$, tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$,
- $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Limite de uma composição

Teorema

Considere duas funções $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \to \mathbb{R}$, tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$,
- $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Nestas condições, se g é contínua em L, então vale que

$$\lim_{x \to p} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to p} f(x)\right) = g(L).$$

Limite de uma composição

Teorema

Considere duas funções $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \to \mathbb{R}$, tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$,
- $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L$.

Nestas condições, se g é contínua em L, então vale que

$$\lim_{x \to p} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to p} f(x)\right) = g(L).$$

Corolário

A composta de funções contínuas, quando bem definida, é uma função contínua.

Exemplos

Exemplo 1

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$$

Exemplo 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}$$

Teorema do confronto

Teorema

Sejam f, g e h três funções com mesmo domínio A satisfazendo

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),\ \forall x \in A.$$

Nestas condições, se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$

Exemplos

Exemplo 1

Se $|f(x)| \leq x^2$, para todo $x \in Dom(f)$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Em particular, se $0 \in Dom(f)$, então f é contínua em 0.

Exemplos

Exemplo 1

Se $|f(x)| \leq x^2$, para todo $x \in Dom(f)$, então $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Em particular, se $0 \in Dom(f)$, então f é contínua em 0.

Exemplo 2

Sejam f, g duas funções de mesmo domínio A tais que

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \;\text{ e }\; |g(x)| \leq M, \forall x \in A, \;\text{ para algum } M \geq 0.$$

Nestas condições, $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

Exemplos

Exemplo 1

Se $|f(x)| \leq x^2$, para todo $x \in Dom(f)$, então $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Em particular, se $0 \in Dom(f)$, então f é contínua em 0.

Exemplo 2

Sejam f, g duas funções de mesmo domínio A tais que

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0 \ \text{ e } \ |g(x)| \leq M, \forall x \in A, \ \ \text{para algum } M \geq 0.$$

Nestas condições, $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

Exemplo 3

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{se } \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então, $\lim_{x \to 0} x^2 g(x) = 0$.