

CM 310

Cálculo 1

S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



PROPRIEDADES DE LIMITES

TEOREMA

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio tais que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$$

Nestas condições, vale:

- (a) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1 \pm L_2.$
- (b) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1 L_2.$
- (c) $\lim_{x \rightarrow p} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow p} f(x) = kL_1$, sendo k uma constante qualquer.
- (d) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que estes quocientes estejam bem definidos.

OBSERVAÇÃO

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

FUNÇÃO CONTÍNUA

DEFINIÇÃO

Dizemos que uma função real f é contínua em um ponto p de seu domínio se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

TEOREMA

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio e contínuas no ponto p . Nestas condições, as seguintes funções são contínuas em p :

- (a) $S(x) = f(x) \pm g(x)$.
- (b) $P(x) = f(x)g(x)$.
- (c) $Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, desde que este quociente esteja bem definido.

OBSERVAÇÃO

Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.

LIMITE DE UMA COMPOSIÇÃO

TEOREMA

Considere duas funções $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$,
- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.

LIMITE DE UMA COMPOSIÇÃO

TEOREMA

Considere duas funções $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$,
- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.

Nestas condições, se g é contínua em L , então vale que

$$\lim_{x \rightarrow p} (g \circ f)(x) = g \left(\lim_{x \rightarrow p} f(x) \right) = g(L).$$

LIMITE DE UMA COMPOSIÇÃO

TEOREMA

Considere duas funções $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Dom(g) \rightarrow \mathbb{R}$, tais que

- $Im(f) \subseteq Dom(g)$,
- $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$.

Nestas condições, se g é contínua em L , então vale que

$$\lim_{x \rightarrow p} (g \circ f)(x) = g \left(\lim_{x \rightarrow p} f(x) \right) = g(L).$$

COROLÁRIO

A composta de funções contínuas, quando bem definida, é uma função contínua.

MUDANÇA DE VARIÁVEIS

EXEMPLOS

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{x+1} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$$

TEOREMA DO CONFRONTO

TEOREMA

Sejam f, g e h três funções com mesmo domínio A satisfazendo

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in A.$$

Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L.$$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

PROPOSIÇÃO

Valem as seguintes propriedades:

(a) $\text{sen}(0) = 0$.

(b) $\text{cos}(0) = 1$.

(c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a)\text{cos}(b) - \text{sen}(b)\text{cos}(a).$$

(d) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, temos

$$\text{cos}(a - b) = \text{cos}(a)\text{cos}(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b).$$

(e) Existe $r > 0$ tal que

$$0 < \text{sen}(x) < x < \text{tg}(x).$$

CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

TEOREMA

As funções seno e cosseno são contínuas.

LIMITE FUNDAMENTAL

TEOREMA (LIMITE FUNDAMENTAL)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

EXEMPLO

Calcule os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$