CM 310
Cálculo 1
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Limites de funções

Definição

Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in Dom(f)$, ou p uma extremidade de um dos intervalos que compõem $Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ em p quando vale a seguinte propriedade:

($\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \ \text{ e } \ 0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observação

A condição ($\star$) é equivalente a:

($\star\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in Dom(f) \cap (p - \delta, p + \delta) \ \Longrightarrow \ f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

LIMITE $x \to +\infty$

DEFINIÇÃO

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(a, +\infty) \subset Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a $+\infty$ se vale a seguinte propriedade:

LIMITE $x \to +\infty$

DEFINIÇÃO

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(a, +\infty) \subset Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a $+\infty$ se vale a seguinte propriedade:

$(\star)$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso, utilizamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

LIMITE $x \to +\infty$

DEFINIÇÃO

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(a, +\infty) \subset Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a $+\infty$ se vale a seguinte propriedade:

($\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso, utilizamos a notação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Observação

A condição ($\star$) é equivalente a:

($\star\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Longrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Limite $x \to -\infty$

Definição

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(-\infty, a) \subset Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a $-\infty$ se vale a seguinte propriedade:

LIMITE $x \to -\infty$

DEFINIÇÃO

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(-\infty, a) \subset Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a $-\infty$ se vale a seguinte propriedade:

($\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x < -\delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso, utilizamos a notação

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

LIMITE $x \to -\infty$

DEFINIÇÃO

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(-\infty, a) \subset Dom(f)$. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a $-\infty$ se vale a seguinte propriedade:

($\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x < -\delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Neste caso, utilizamos a notação

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Observação

A condição ($\star$) é equivalente a:

($\star\star$) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x < -\delta \Longrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Propriedades operacionais

Teorema

Sejam f, g duas funções reais com o mesmo domínio tais que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} g(x) = L_2$$

Nestas condições, vale:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L_1 \pm L_2$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L_1 L_2$.

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [kf(x)] = k \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = kL_1$, sendo k uma constante qualquer.

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que estes quocientes estejam bem definidos.

Observação

- Os itens (a) e (b) se aplicam a somas e produtos de uma quantidade finita de funções.
- Os mesmos resultados valem para $x \to -\infty$.

Compostas

Teorema

Sejam f, g duas funções reais tis que $Im(f) \subset Dom(g)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

(a) Se g é contínua em L, então

$$\lim_{x\to+\infty}(g\circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = g(L).$$

(b) Se g não estiver definida em L, mas existir $\lim_{u\to L} g(u)$, então

$$\lim_{x\to+\infty}(g\circ f)(x) = \lim_{u\to L} g(u).$$

Observação

- Os mesmos resultados valem para $x \to -\infty$.

Exemplos

Exemplos

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$.

Limites infinitos

Definição 1

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(a, +\infty) \subset Dom(f)$. Definimos:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que
$$x > \delta \Longrightarrow f(x) > \epsilon.$$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que
$$x > \delta \Longrightarrow f(x) < -\epsilon.$$

Limites infinitos

Definição 1

Seja f uma função real tal que exista um $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo $(a, +\infty) \subset Dom(f)$. Definimos:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que
$$x > \delta \Longrightarrow f(x) > \epsilon.$$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que
$$x > \delta \Longrightarrow f(x) < -\epsilon.$$

Definição 2

Sejam f uma função real tal, $p \in \mathbb{R}$ de modo que exista bß$\mathbb{R}$ satisfazendo $(p, b) \subset Dom(f)$. Definimos $\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$ se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, com $p + \delta < b$, tal que

$$p < x < p + \delta \Longrightarrow f(x) > \epsilon.$$

Propriedades operacionais

Teorema

(a) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] = +\infty \ \text{ e } \ \lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

(b) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty, \ \text{se } L > 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty, \ \text{se } L < 0$$

(c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty$$

Propriedades operacionais

(d) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

(e) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

(f) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty, \text{ e } \lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

(g) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, então

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty, \text{ se } L > 0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty, \text{ se } L < 0$$

Exemplos

Exemplos

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 3x^2 - 5x + 2$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$.