CM 310
Cálculo 1
S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Sequências

Definição

Uma sequência real é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada natural n associa o número real $x(n)$.

Sequências

Definição

Uma sequência real é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada natural n associa o número real $x(n)$.

- É mais conveniente utilizar a notação $x_n = x(n)$.

Sequências

Definição

Uma sequência real é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada natural n associa o número real $x(n)$.

- É mais conveniente utilizar a notação $x_n = x(n)$.
- Todos os termos da sequência formam um conjunto muitas vezes denotado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sequências

Definição

Uma sequência real é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada natural n associa o número real $x(n)$.

- É mais conveniente utilizar a notação $x_n = x(n)$.
- Todos os termos da sequência formam um conjunto muitas vezes denotado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 1

Podemos considerar a sequência $x_n = 2^n$. Isto é,

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2, \ldots .$$

Neste caso, temos

$$\{1, 2, 4, 8, \ldots\}.$$

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, associamos a seguinte sequência: para cada $k \in \mathbb{N}$, colocamos

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k.$$

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, associamos a seguinte sequência: para cada $k \in \mathbb{N}$, colocamos

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k.$$

Exemplo 1

Para a sequência $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ temos

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k}.$$

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, associamos a seguinte sequência: para cada $k \in \mathbb{N}$, colocamos

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_k.$$

Exemplo 1

Para a sequência $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ temos

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k}.$$

Exemplo 2

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$ temos

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^k}{k!}.$$

Limites

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

Limites

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow 0 < |x_n - x| < \epsilon. \end{cases}$$

LIMITES

DEFINIÇÃO

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow 0 < |x_n - x| < \epsilon. \end{cases}$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow x_n > \epsilon. \end{cases}$$

Limites

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow 0 < |x_n - x| < \epsilon. \end{cases}$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow x_n > \epsilon. \end{cases}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow x_n < -\epsilon. \end{cases}$$

Limites

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow 0 < |x_n - x| < \epsilon. \end{cases}$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow x_n > \epsilon. \end{cases}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ n > n_0 \Longrightarrow x_n < -\epsilon. \end{cases}$$

Importante

Como uma sequência é uma função, então podemos resgatar todas as propriedades de limites de funções para sequências!!!

Exemplos

Exemplo 1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)=2$$

Exemplos

Exemplo 1

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right) = 2$$

Exemplo 2

Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências tais que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições, se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Exemplos

Exemplo 1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)=2$$

Exemplo 2

Sejam $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências tais que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nestas condições, se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Exemplo 3

Se $a > 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Se for $0 < a < 1$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.

Exemplo 4

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n+1}{3+2}\right)=0$$

Séries

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $S_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$ temos a **série**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \doteq \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n. \tag{1}$$

Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é convergente se existe o limite .

Séries

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $S_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$ temos a **série**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \doteq \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n. \tag{1}$$

Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é convergente se existe o limite .

Exemplo 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Séries

Definição

Dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $S_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$ temos a **série**

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \doteq \lim_{k\to+\infty} S_k = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n. \tag{1}$$

Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é convergente se existe o limite .

Exemplo 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Exercício

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n, \quad \text{em que } \; 0 < a < 1.$$

O NÚMERO e

TEOREMA

Existe o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

o qual é denotado do por e.

O NÚMERO e

TEOREMA

Existe o limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

o qual é denotado do por e.

OBSERVAÇÃO

Mostra-se que e é um número irracional. Mais ainda, dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Limites de funções e sequências

Teorema

Seja f uma função real para a qual faz sentido calcular o limite $\lim_{x\to p} f(x)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\lim_{x\to p} f(x) = L$.

(b) Para qualquer sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Dom(f)$, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, vale que $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = L$.

Limites de funções e sequências

Observações

- Se f é contínua em p e $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, então vale a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(p).$$

LIMITES DE FUNÇÕES E SEQUÊNCIAS

OBSERVAÇÕES

- Se f é contínua em p e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, então vale a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(p).$$

- Se existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Dom(f)$ que converge para p, mas tivermos não existir

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

então não existe $\lim\limits_{x\to p} f(x)$.

Limites de funções e sequências

Observações

- Se f é contínua em p e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$, então vale a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(p).$$

- Se existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Dom(f)$ que converge para p, mas tivermos não existir

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

  então não existe $\lim\limits_{x\to p} f(x)$.

- Se existem duas sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no domínio de f que convergem para p, mas tivermos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n),$$

  então não existe $\lim\limits_{x\to p} f(x)$.

Exemplos

Exemplo 1

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Afirmação: dado qualquer $p \in \mathbb{R}$, não existe $\lim_{x \to p} f(x)$.

Exemplos

Exemplo 1

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Afirmação: dado qualquer $p \in \mathbb{R}$, não existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Exemplo 2

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Afirmação: dado qualquer $p \neq 0$, não existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.