

CM 310

Cálculo 1

S2 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



TEOREMAS

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que exista um intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$. Se $\gamma \in [f(a), f(b)]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$

TEOREMAS

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que exista um intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$. Se $\gamma \in [f(a), f(b)]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$

TEOREMA DE ANULAMENTO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que exista um intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$ para o qual $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários. Nestas condições, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

TEOREMAS

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que exista um intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$. Se $\gamma \in [f(a), f(b)]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$

TEOREMA DE ANULAMENTO

Seja $f : Dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que exista um intervalo $[a, b] \subset Dom(f)$ para o qual $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais contrários. Nestas condições, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

- Dizemos que x_1 é um ponto de mínimo de f e que x_2 é um ponto de máximo.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

A equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

A equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLO 1

A equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

A equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLO 1

A equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLO 2

Todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

A equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLO 1

A equação $x^3 - 4x + 8 = 0$ possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLO 2

Todo polinômio de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.

EXEMPLO 3

O conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } y = x^2 + \frac{1}{x} \text{ e } \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

RELEMBRANDO

Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, consideramos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $f(x + y) = f(x)f(y)$.
- (b) Se $a > 1$, então f é estritamente crescente: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- (c) Se $0 < a < 1$, então f é estritamente decrescente: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

LIMITES

EXEMPLO 1

Se $a > 1$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

LIMITES

EXEMPLO 1

Se $a > 1$, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

EXEMPLO 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - 3^x = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x + 2^{-x} = +\infty$$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

RELEMBRANDO

Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, consideramos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$ é bijetiva.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

RELEMBRANDO

Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, consideramos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$ é bijetiva.

DEFINIÇÃO

Dado $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de função logarítmica (na base a) a função $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que é a inversa de $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$. Utilizamos a notação

$$g(x) = \log_a(x).$$

CONTINUIDADE

TEOREMA

As funções exponencial e logarítmica são contínuas.

OBSERVAÇÕES

OBSERVAÇÃO 1

Como g é a inversa de f , então valem as igualdades

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \forall x \in (0, +\infty) \text{ e } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$a^{\log_a(x)} = x, \forall x \in (0, +\infty) \text{ e } \log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

OBSERVAÇÕES

OBSERVAÇÃO 1

Como g é a inversa de f , então valem as igualdades

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \forall x \in (0, +\infty) \text{ e } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$a^{\log_a(x)} = x, \forall x \in (0, +\infty) \text{ e } \log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

OBSERVAÇÃO 2

O caso que merece mais atenção é quando $a = e$, donde

$$f(x) = e^x \text{ e } g(x) = \log_e(x) \doteq \ln(x).$$

OBSERVAÇÕES

OBSERVAÇÃO 1

Como g é a inversa de f , então valem as igualdades

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \forall x \in (0, +\infty) \text{ e } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou seja,

$$a^{\log_a(x)} = x, \forall x \in (0, +\infty) \text{ e } \log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

OBSERVAÇÃO 2

O caso que merece mais atenção é quando $a = e$, donde

$$f(x) = e^x \text{ e } g(x) = \log_e(x) \doteq \ln(x).$$

OBSERVAÇÃO 3

- (a) Se $a > 1$, então $\log_a(x)$ é estritamente crescente: $x < y \Rightarrow \log_a(x) < \log_a(y)$.
- (b) Se $0 < a < 1$, então $\log_a(x)$ é estritamente decrescente: $x < y \Rightarrow \log_a(x) > \log_a(y)$.

LIMITES

EXEMPLO 1

Para $a > 1$, vale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$$

EXEMPLO 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2x + 1) - \ln(x + 3)] = \ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 0.$$