Aula 10 - 09_02- Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

quarta-feira, 9 de fevereiro de 2022 09:28

TEOREMA

Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado. Todo funcional linear limitado f definido sobre um subespaço Z de $\mathbb{X}$ tem uma extensão linear limitada $\tilde{f}$ definida em todo $\mathbb{X}$ tal que

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|.$$

Seja $\mathbb{X}$ um espaço normado.

(a) Dado $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, existe $F \in \mathbb{X}^*$ tal que

$$\|F\| = 1 \text{ e } F(x_0) = \|x_0\|.$$

$\mapsto x \in Z \Rightarrow x = \alpha_x x_0$

Dem (a).

$$Z \doteq \text{Ger}\{x_0\} = \{\alpha x_0 ; \alpha \in \mathbb{K}\}$$

Defina

$$f : Z \to \mathbb{K}, \quad f(x) = \alpha_x \|x_0\|$$

Afirmação $f \in Z^*$

Linear: $f(\lambda x + y) = f(\lambda \alpha_x x_0 + \alpha_y x_0)$

$$= f[(\lambda \alpha_x + \alpha_y) x_0]$$

$$= (\lambda \alpha_x + \alpha_y) \|x_0\|$$

$$= \lambda f(x) + f(y)$$

Continuidade:

$$|f(x)| = |\alpha_x \|x_0\|| = |\alpha_x| \|x_0\|$$

$$= \|\alpha_x x_0\|$$

$$= \|x\|$$

$\rightsquigarrow \|f\|_{Z^*} = 1$

Existe ext. linear de f

$$F : \mathbb{X} \to \mathbb{K} \, ;$$

$$F \in \mathbb{X}^* \quad \text{e} \quad \|F\|_{\mathbb{X}^*} = \|f\|_{Z^*} = 1$$

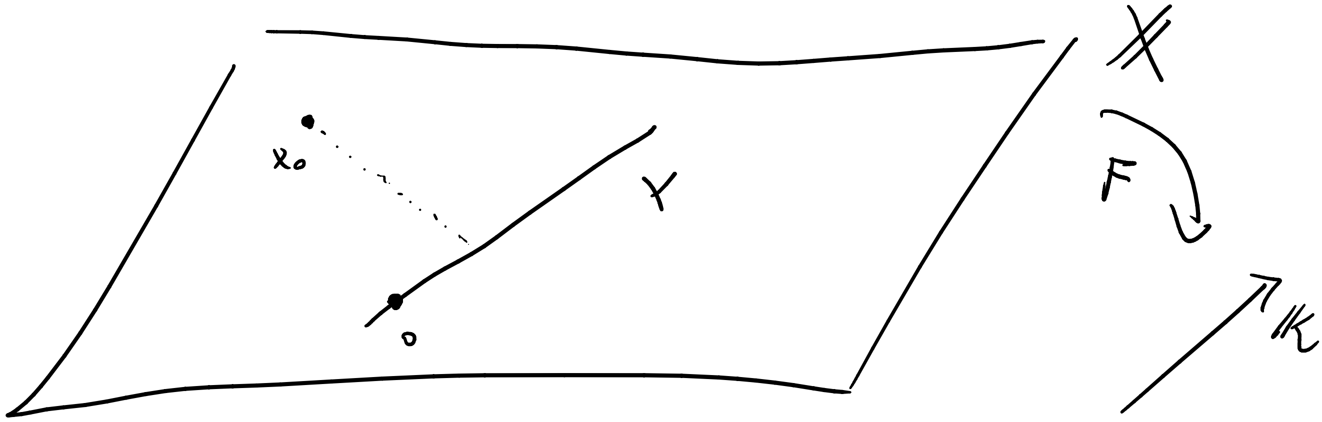
Note que $x_0 \in Z$

$$F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$$

(c) Seja Y um subespaço fechado próprio de $\mathbb{X}$. Dado $x_0 \in \mathbb{X} \setminus Y$, existe $F \in \mathbb{X}^*$ tal que

$$\|F\| = 1, \quad F|_Y \equiv 0, \quad F(x_0) = d(x_0, Y) = \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|.$$

$F \in \mathbb{X}^*$



<u>IDEIA</u>: $x_0 \in \mathbb{X} \setminus Y \quad (x_0 \neq 0)$

$$Z \doteq \mathrm{Ger}\{x_0\} \oplus Y$$

$$\doteq \{\alpha x_0 + y ; \; y \in Y \text{ e } \alpha \in \mathbb{K}\}$$

$$f : Z \to \mathbb{K},$$

$$f(x) \doteq \alpha \, \delta,$$

Sendo $\delta \doteq d(x_0, Y)$

Se $\mathbb{X}$ é não trivial e $B(\mathbb{X}, \mathcal{N})$ é Banch, então $\mathcal{N}$ é Banach.

<u>Dem</u>: Seja $\{\eta_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ seq. de Cauchy.

- Tome $\xi_0 \in \mathbb{X}$, com $\|\xi_0\| = 1$.

(*) Existe $F \in \mathbb{X}^*$;

$$\|F\|_{\mathbb{X}^*} = 1 \quad \text{e} \quad F(\xi_0) = \|\xi_0\| = 1$$

(*) Defina $T_j : \mathbb{X} \to \mathcal{N}$

⊛ Defina $T_j : X \to N$

$$T_j(\xi) \doteq F(\xi)\,\eta_j$$

$$\Rightarrow \quad T_j \in B(X, N), \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

Note que, dado $\xi \in X$

$$\|(T_j - T_k)(\xi)\|_N = \|F(\xi)\eta_j - F(\xi)\eta_k\|_N$$

$$\le \overbrace{\|F\|_{X^*}}^{=1} \cdot \|\xi\|_X \cdot \|\eta_j - \eta_k\|_N$$

$$= \|\xi\|_X \cdot \|\eta_j - \eta_k\|_N$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|(T_j - T_k)\xi\|}{\|\xi\|} \le \|\eta_j - \eta_k\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|T_j - T_k\|_{B(X,N)} \le \|\eta_j - \eta_k\|_N$$

Como $\{\eta_J\}$ é de Cauchy, então

$\{T_J\}_{J \in \mathbb{N}}$ é Cauchy,

logo $T_J \longrightarrow T \in B(\mathcal{X}, \mathcal{N})$

Assim

$$\|\eta_J - T(\xi_0)\| = \| \underbrace{F(\xi_0)\eta_J}_{\downarrow} - T(\xi_0)\|$$
$$= \| T_J(\xi_0) - T(\xi_0)\|$$
$$\leq \|T_J - T\|_B \cdot \|\xi_0\|$$
$$= \|T_J - T\|_B$$

$$\Longrightarrow \eta_J \longrightarrow T(\xi_0) \in \mathcal{N}$$

$\blacksquare$

Teorema

Sejam $\mathcal{N}_1$ e $\mathcal{N}_2$ dois espaços normados. Dado $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ fica bem definida a aplicação linear

$$T^a : \mathcal{N}_2^* \to \mathcal{N}_1^*,$$

tal que para cada $g \in \mathcal{N}_2^*$ associa a um elemento $T^a g \in \mathcal{N}_1^*$ definido por

$$(T^a g)(\xi) = g(T\xi), \ \forall \in \mathcal{N}_1.$$

Mais ainda, $T^a \in B(\mathcal{N}_2^*, \mathcal{N}_1^*)$ e

$$\|T^a\|_{B(\mathcal{N}_2^*, \mathcal{N}_1^*)} = \|T\|_{B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)}.$$

$T \in B(N_1, N_2)$

$N_1^* \rightsquigarrow h : N_1 \to \mathbb{K}$ cont.

$N_2^* \rightsquigarrow \tilde{h} : N_2 \to \mathbb{K}$ cont.

$$T^a : N_2^* \to N_1^*$$

$$g \longmapsto T^a g : N_1 \to \mathbb{K}$$

$$\xi \mapsto (T^a g)(\xi) \doteq g(T\xi)$$

$(T^a = g \circ T)$

T^a é linear:

$$T^a(\lambda f + g)(\xi) = (\lambda f + g)(T\xi)$$
$$= \lambda f(T\xi) + g(T\xi)$$
$$= \lambda T^a f(\xi) + T^a g(\xi)$$

$$\Rightarrow T^a(\lambda f + g) = \lambda T^a f + T^a g$$

T^a é contínuo

——//——

Fixado $\underbrace{g \in N_2^*}$ e $\xi \in N_1$:

$$|T^a_g(\xi)| = |g(T\xi)| \leq \|g\|_{N_2^*} \cdot \|T\xi\|_{N_2}$$

$$\leq \underbrace{\|g\|_{N_2^*} \|T\|_{B(N_1,N_2)}}_{\text{Const. que não dep. de } \xi} \|\xi\|_{N_1}$$

$$\Rightarrow T^a g \in N_1^*$$

(*) $$\sup_{\xi \neq 0} \frac{|T^a_g(\xi)|}{\|\xi\|} \leq \|g\|_{N_2^*} \|T\|_{B(N_1,N_2)}$$

$$\Rightarrow \|T^a g\|_{N_1^*} \leq \|g\|_{N_2^*} \cdot \|T\|_{B(N_1,N_2)}$$

$$\Rightarrow \quad \|T^a g\|_{N_1^*} \leq \|g\|_{N_2^*} \cdot \|T\|_{B(N_1,N_2)}$$

$$\hookrightarrow \forall\, g \in N_2^*$$

$$\rightsquigarrow \quad \sup_{g \neq 0} \frac{\|T^a g\|_{N_1^*}}{\|g\|_{N_2^*}} \leq \|T\|_{B(N_1,N_2)}$$

$$\Rightarrow \quad (i) \quad T^a \in B(N_2^*, N_1^*)$$

$$(ii) \quad \|T^a\|_{B(N_2^*, N_1^*)} \leq \|T\|_{B(N_1,N_2)}$$

Afirmação: $\|T\| \leq \|T^a\|$

① Se $T = 0 \Rightarrow T^a = 0$

② Suponha $T \neq 0 \Rightarrow \exists\; 0 \neq \xi_0 \in N_1 ;$

$$\underbrace{T(\xi_0)} \neq 0$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\in N_2}$$

Existe $g \in N_2^*$;

$$0 \neq g(T(q_0)) = \|Tq_0\| \quad e \quad \|g\| = 1$$

Assim

$$\|Tq_0\| = g(Tq_0) = g \circ T(q_0)$$

$$= T^a g(q_0)$$

$$\leq \|T^a\| \|g\| \|q_0\|$$

$$= \|T^a\| \|q_0\|$$

$$\Rightarrow \|Tq_0\| \leq \|T^a\| \|q_0\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|Tq_0\|}{\|q_0\|} \leq \|T^a\|$$

$\|\varphi_0\|$

$\Rightarrow \quad \|T\| \leq \|T^a\|$

$f \in \mathcal{H}^* \qquad \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}$

$\rightarrow \exists!\ x_f \in \mathcal{H}_j \qquad f \rightsquigarrow x_f$

$f(x) = \langle x, x_f \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}$

RELEMBRANDO

- Dado $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, existe um único $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que
$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \ \forall x \in \mathcal{H}_1, \ \forall y \in \mathcal{H}_2.$$
Além disso, $\|T^*\| = \|T\|$.
- Pela representação de Riez, ficam bem definidos $\Psi_j : \mathcal{H}_j^* \to \mathcal{H}_j$, definido s por
$$\mathcal{H}_j^* \ni f \mapsto x_f \in \mathcal{H}_j,$$

$T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$

$\Psi_1 : \mathcal{H}_1^* \to \mathcal{H}_1$

TEOREMA

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e Ψ_j os operadores de representação de Riez. Então,
$$T^a = \Psi_1^{-1} \circ T^* \circ \Psi_2.$$

$T^a : \mathcal{H}_2^* \to \mathcal{H}_1^*$

$$\mathcal{H}_2^* \xrightarrow{\Psi_2} \mathcal{H}_2 \xrightarrow{T^*} \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\Psi_1^{-1}} \mathcal{H}_1^*$$

• Tome $g \in H_2^*$. Dado $x \in H_1$:

$$T^a_g(x) = g\circ T(x) \underset{\text{Teor. Riesz}}{=} \langle x, \Psi_1(g\circ T)\rangle_{H_1}$$

$\boxed{g\circ T \in H_1^*}$

$$\overset{(I)}{=} \langle x, \Psi_1(T^a g)\rangle_{H_1}$$

Por otro lado

$$T^a_g(x) = g\circ T(x) = g(Tx) \underset{\text{Riesz}}{=} \langle Tx, \Psi_2(g)\rangle_{H_2}$$

$\boxed{g \in H_2^*}$

$$\overset{(II)}{=} \langle x, T^*(\Psi_2(g))\rangle_{H_1}$$

I

$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}$

$$\psi_1(T^a g) = T^*(\psi_2(g)), \quad \forall g \in H_2^*$$

$$\Rightarrow \psi_1 \circ T^a = T^* \circ \psi_2$$

$$\Rightarrow \boxed{T^a = \psi_1^{-1} \circ T^* \circ \psi_2} \quad \blacksquare$$

Aplicação canônica

Seja $\mathcal{N}$ um espaço normado. Considere a aplicação

$$\Lambda : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{**}$$

tal que a cada $x \in \mathcal{N}$ associa um $\Lambda x \in \mathcal{N}^{**}$ da seguinte forma:

$$(\Lambda x)f \doteq f(x), \ \forall f \in \mathcal{N}^*.$$

$$\Lambda : N \longrightarrow N^{**}$$

$$x \longmapsto \Lambda x : N^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f \mapsto \Lambda x(f) \doteq f(x)$$