CM 095 - Análise I
Professor:
Fernando de Ávila Silva
Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 6 - Séries

1 Sequências Numéricas

Exercício 1 *Mostre que as seguintes sequências convergem:*

(a) $\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *se* $|r| \leqslant 1$;

(b) $\{1/(1+na)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *se* $a > 0$;

Exercício 2 *Mostre que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$;

Exercício 3 *Mostre que a sequência* $\{1 + (-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *não é uma sequência de Cauchy;*

Exercício 4 *Mostre que a sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada, então existe um subsequência* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} 1/x_{n_k} = 0$;

Exercício 5 *Suponha que* $\lim a_n = \infty$ *e* $\{b_n\}$ *limitada inferiormente, então* $\lim(a_n + b_n) = \infty$;

Exercício 6 *Suponha que* $\lim a_n = \infty$ *e* $b_n > c > 0$, *então* $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$;

Exercício 7 *Se* $a_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim(1/a_n) = 0$;

Exercício 8 *Suponha* $a_n > 0$ *e* $b_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então*

(a) *se* $a_n > c$, *para algum* c, *e* $\lim b_n = 0$ *então* $\lim(a_n/b_n) = \infty$;

(b) *se* x_n *é limitada e* $\lim b_n = \infty$ *então* $\lim(a_n/b_n) = 0$;

2 Séries Numéricas

Exercício 9 *Mostre que as seguintes séries são convergentes:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2+n)$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, *se* $p \geqslant 2$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n!)$;

Exercício 10 *Mostre que as seguintes séries não são convergentes:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, *se* $0 < p \leqslant 1$;

Exercício 11 *Mostre que se* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *são convergentes, então* $\sum(x_n + y_n)$ *é convergente;*

Exercício 12 *Suponha que* $\sum x_n$ *seja convergente e* $x_n > 0$. *Definindo* $y_n = (x_1 + \ldots x_n)/n$ *mostre que é convergente;*

Exercício 13 *Suponha que* $\sum x_n$ *seja convergente e* $x_n > 0$. *Definindo* $y_n = (x_1 + \ldots x_n)/n$ *mostre que* $\sum y_n$ *é convergente;*

Exercício 14 *Verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes* *(a)* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - n + 1)$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/[(n+1)(n+2)]$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, *se* $p > 0$;

Exercício 15 *Se* $\sum x_n$ *é convergente e* $x_n > 0$, *então é verdade que* $\sum (x_n)^2$ *é convergente?*

Exercício 16 *Se* $\sum x_n$ *é convergente e* $x_n > 0$, *então é verdade que* $\sum \sqrt{x_n}$ *é convergente?*

3 Convergência Absoluta

Exercício 17 *Demosntre o seguinte resultado:*

Teorema 1 *Suponha que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sejam sequências de termos não nulos tais que existe*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_n}{y_n} \right|$$

(a) se $r \neq 0$, *então* $\sum x_n$ *converge absolutamente se, e somente se,* $\sum y_n$ *converge absolutamente;*

(b) se $r = 0$, *e* $\sum y_n$ *é absolutamente convergente, então* $\sum x_n$ *converge absolutamente;*

Exercício 18 *Demosntre o seguinte resultado:*

Teorema 2 *Se* $\lim |x_n|^{1/n} < 1$, *então* $\sum x_n$ *converge absolutamente;*

Exercício 19 *Demosntre o seguinte resultado:*

Teorema 3 *Suponha que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de termos não nulos tais que existe*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|.$$

Se $r < 1$, *então* $\sum x_n$ *converge absolutamente. Se* $r > 1$, *então* $\sum x_n$ *diverge;*

Exercício 20 *Para quais valores* $a \in \mathbb{R}$ *a série* $\sum_n a^n$ *converge?*

Exercício 21 *Suponha que* $\sum (x_n)^2$ *e* $\sum (y_n)^2$ *convergem. Mostre que* $\sum x_n y_n$ *converge absolutamente;*

Exercício 22 *Sejam* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *duas séries absolutamente convergentes e defina*

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_n b_{n-j}.$$

Mostre que

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \right) \left(\sum_{n\geq 0} b_n \right) = \sum_{n\geq 0} c_n$$