

Representação equivalente de dados referidos a um elipsóide

De acordo com o significado da propriedade de equivalência das projeções cartográficas, realizar a estimativa do valor numérico de área a partir de coordenadas de projeção de uma figura, conduz ao mesmo resultado que se obtém ao se realizar se esta estimativa, apenas, a partir de coordenadas da superfície de referência (esfera ou elipsóide). A avaliação de valores de área para regiões pertencentes a superfícies curvas não é trivial, no entanto para regiões contidas em superfícies planas e dadas em coordenadas retangulares esta operação é imediata. Assim, a adoção de uma projeção cartográfica, que tenha a propriedade de equivalência, é uma solução para a determinação do valor numérico de área de figuras cujas coordenadas de uma superfície de referência (esfera ou elipsóide) sejam conhecidas.

A representação cartográfica equivalente de dados referidos ao elipsóide, tal que se verifique a propriedade de equivalência, pode seguir dois caminhos diferentes. O primeiro é produzir ou desenvolver as funções de transformação de coordenadas geodésicas (φ_g, λ_g) em coordenadas de projeção de modo a utilizar a condição de equivalência (1), como se fez em aula para o desenvolvimento da *projeção cilíndrica equivalente normal*, casos tangente e secante (latitude de secância dada por $\varphi_o \neq 0^\circ$), e resultou nas funções (2).

$$e \ g = \begin{vmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \quad (1)$$

$$X = R \operatorname{sen} \varphi / \cos \varphi_o \quad (2)$$

$$Y = R (\lambda - \lambda_o) \cos \varphi_o .$$

As funções (2) foram obtidas: a partir do estabelecimento do significado das derivadas parciais ($\mathcal{U}/\partial u$, $\mathcal{U}/\partial v$, $\mathcal{V}/\partial u$ e $\mathcal{V}/\partial v$) que compõem a condição de equivalência; da recuperação das Primeiras Quantidades Fundamentais de Gauss para a superfície de referência ($e = R^2$ e $g = R^2 \cos^2 \varphi$) e para o referencial usado na SP ($E' = G' = 1$ e $F' = 0$); da integração desta forma matemática; e da posterior discussão do significado das constantes. Assim, as funções (2) proporcionam o meio de produzir uma representação equivalente da esfera na superfície de um cilindro em posição normal, com contato tangente ou secante, a depender do valor de φ_0 . Caminho análogo pode ser seguido para desenvolver uma projeção cartográfica equivalente para uma superfície de referência elipsoidal, no entanto, este caminho implica na integração de expressões mais complexas do que nos casos de esfera.

O segundo caminho, que torna possível realizar a representação de um elipsóide de modo equivalente numa superfície de projeção, envolve a realização da dupla projeção. Parte-se da consideração de que dada uma superfície que tenha um valor de área A , há infinitas figuras possíveis que têm o mesmo valor de área A , sejam elas planas ou sejam tridimensionais. A partir disso, pode-se dizer que para um elipsóide de área A , caracterizado do ponto de vista geométrico pela existência dos valores de semi-eixo maior a e pelo achatamento f , existe uma esfera que tem o mesmo valor de área A do elipsóide. Esta esfera terá um raio Ra que se denomina *raio autálico* ou *equivalente*. A esfera, para a qual o raio é tal que produza a mesma área do elipsóide é dita *esfera autálica* ou *equivalente*. As coordenadas para pontos de uma *esfera autálica* são a *latitude autálica* φ_a e a longitude λ_g . A dupla projeção consiste em representar, de modo equivalente, um elipsóide em uma esfera, e representar a esfera numa superfície de projeção equivalente cujas funções de transformação sejam desenvolvidas para uma esfera.

Assim, se as expressões (2) forem re-escritas com $R = Ra$, $\varphi = \varphi_a$ e $\varphi_0 = \varphi_{0a}$ (3), tem-se a possibilidade de representar de modo equivalente as coordenadas geodésicas (φ_g , λ_g), pois neste caso o raio usado é denominado *raio autálico ou equivalente* (4) e a latitude usada é a *latitude autálica* ou *equivalente* (5), e para a longitude (λ_g) nada se altera.

$$X = Ra \operatorname{sen} \varphi_a / \cos \varphi_{0a}$$

(3)

$$Y = Ra (\lambda - \lambda_o) \cos \varphi_{oa} .$$

(com φ_{oa} igual à latitude de secância autálica)

A expressão que proporciona o *raio autálico* ou *equivalente* ao quadrado é dada a seguir:

$$Ra^2 = b^2 \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 \right) . \quad (4)$$

A expressão que proporciona o cálculo da *latitude autálica* ou *equivalente* é dada a seguir:

$$Num = 1 + \frac{2}{3} e^2 \sin^2 \varphi_g + \frac{3}{5} e^2 \sin^4 \varphi_g + \frac{4}{7} e^2 \sin^6 \varphi_g + \frac{5}{9} e^2 \sin^8 \varphi_g ;$$

$$Den = 1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 ; \quad e$$

$$\varphi_a = \arcsin \left(\sin \varphi_g \frac{Num}{Den} \right) . \quad (5)$$

Para se obter *Num* e *Den* deve-se conhecer o semi-eixo maior do elipsóide *a* e seu achatamento *f*, para poder calcular o semi-eixo menor *b* e a excentricidade *e*:

$$b = a - a f \quad e$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} .$$

As funções (2) foram usadas como exemplo, pois são relativamente simples e foram desenvolvidas em aula. Para realizar a representação equivalente do elipsóide, de tal modo que haja a propriedade de equivalência, é necessário usar o *raio autálico* ou *equivalente* *Ra*

e a *latitude autálica* ou *equivalente* com quaisquer funções que tenham sido desenvolvidas para representar a esfera de modo equivalente.

RICHARDUS, P, ADLER, R.K., Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers. North-Holland Publishing Company, 1972.

Subsídio para a disciplina de Projeções Cartográficas I – DGEOM/UFPR

(v1.2) 12 mar 2013.
Prof. Henrique Firkowski