Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências da Terra
Departamento de Geomática

Teoria das Distorções, Conceito de Distorção de Escala e Propriedades das Projeções Cartográficas

(Subsídio para aulas de Projeções Cartográficas, baseado no Capítulo 3 do livro Map Projections for Geodesists, Cartographers and Geographers de Richardus, P. e Adler, R.)

Curitiba
Março 2004

V1.03.04

Teoria das Distorções da Geometria Diferencial

1 Introdução

Uma projeção cartográfica consiste de uma representação de posições referidas a uma superfície em outra superfície. As superfícies envolvidas neste processo são denominadas de superfície de referência (SR) e superfície de projeção (SP). O estudo de superfícies representadas por meio de curvas paramétricas pertence ao domínio da Geometria Diferencial. A abordagem ao tema projeções cartográficas quando segue este caminho proporciona um conhecimento geral que permite estabelecer relações entre duas superfícies.

Para o âmbito da cartografia a ferramenta geometria diferencial auxilia no estabelecimento das funções bi-unívocas que permitirão fazer a transformação de espaços entre a superfície de referência (SR) e a superfície de projeção (SP). Estas funções bi-unívocas são estabelecidas partindo-se de condições iniciais e de propriedades que caracterizarão a nova superfície. Desse modo, pode-se escolher uma superfície de referência, uma superfície de projeção e uma característica desejável e então desenvolver as funções. Além disso as funções bi-unívocas que realizam as transformações entre as superfícies contém informações que permitem avaliar o comportamento dos elementos transformados

2. Curvas Paramétricas e Segmento de Arco numa Superfície

Uma posição pode ser determinada numa superfície qualquer por meio de curvas paramétricas ou curvas de referência. Se estas curvas são denominadas por *u* e *v*, então qualquer ponto desta superfície pode ser dado em coordenadas cartesianas *x*, *y*, *z* como funções de *u* e *v* (Figura 1).

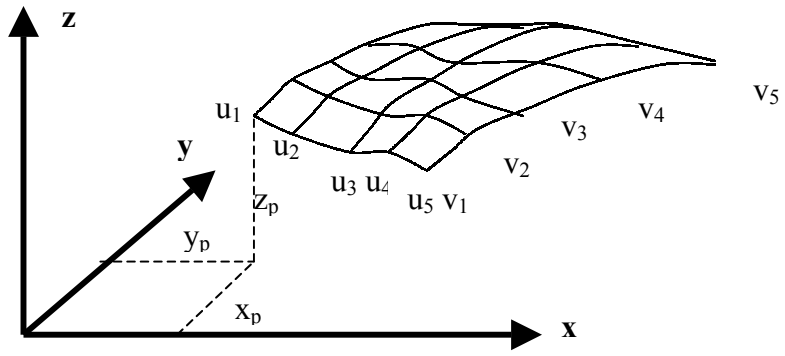

Figura 1. Superfície expressa em termos de curvas *u* e *v* em um sistema espacial de referência *x, y, z*.

A posição de um ponto qualquer, em termos de coodenadas cartesianas, é dada por:

$$\begin{aligned} x &= p_1(u,v) \\ y &= p_2(u,v) \\ z &= p_3(u,v) \end{aligned} \tag{1}$$

Isto é, as coordenadas cartesianas x,y e z de cada ponto são funções p_1, p_2 e p_3 das variáveis u e v. As funções p_1, p_2 e p_3 são denominadas equações paramétricas da superfície, e relacionam as curvas u e v às coordenadas x, y e z.

Uma outra superfície qualquer pode ser definida de forma análoga, porém com curvas U e V num sistema de coordenadas de eixos X, Y, Z (Figura 2).

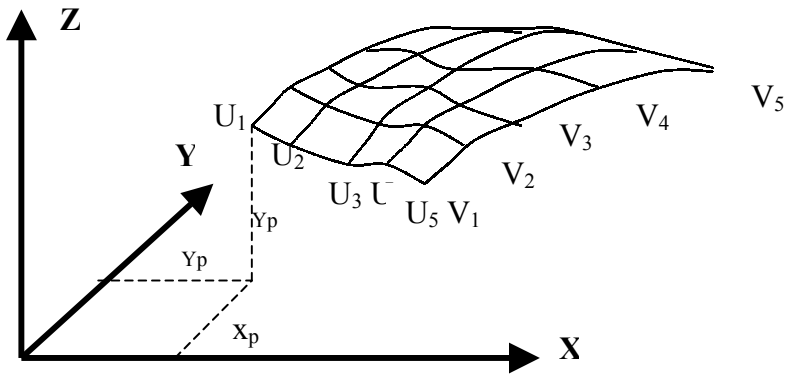

Figura 2. Superfície expressa em termos de curvas U e V em um sistema espacial de referência X, Y, Z.

A posição do ponto fica caracterizada, em termos de coordenadas cartesianas, como segue:

$$\begin{aligned} X &= P_1(U,V) \\ Y &= P_2(U,V) \\ Z &= P_3(U,V) \end{aligned} \tag{2}$$

Isto é, as coordenadas cartesianas X, Y e Z de cada ponto são funções P_1, P_2 e P_3 das variáveis U e V. Do mesmo modo como no caso da superfície de curvas u e v, as funções P_1, P_2 e P_3 são denominadas equações paramétricas da superfície, e relacionam as curvas U e V às coordenadas X, Y e Z.

É possível relacionar as curvas U e V com as curvas u e v por meio de q_1 e q_2, isto é, existem funções q_1 e q_2 tais que uma curva U seja dada por um relacionamento entre u e v e uma curva V seja dada por outro relacionamento também entre u e v. É possível também que existam as funções q_1^{-1} e q_2^{-1}, de tal modo que u e v sejam expressos como funções de U e V. Para o caso

da cartografia o sistema *x, y, z* pode ser o sistema de referência da superfície de referência (SR) e o sistema *X, Y, Z* pode ser o sistema de referência da superfície de projeção (SP). As curvas *u* e *v* devem se relacionar às curvas *U* e *V* para que se possa ligar a SR à SP. E isto é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= q_1(U, V) \\ v &= q_2(U, V) \end{aligned} \tag{3}$$

Deve ser satisfeita, ainda, a condição de reversibilidade da função:

$$\begin{aligned} U &= q_1^{-1}(u, v) \\ V &= q_2^{-1}(u, v) \end{aligned} \tag{4}$$

Pode-se, então, escrever as fórmulas gerais a partir das (3) nas (2):

$$\begin{aligned} X &= r_1(u, v) \\ Y &= r_2(u, v) \\ Z &= r_3(u, v) \end{aligned} \tag{5}$$

Nas (5) tem-se a segunda superfície como função das curvas paramétricas *u* e *v* da primeira superfície. O conjunto das equações (1) representa a superfície no referencial (*x*,*y*,*z*) e o conjunto (5) no referencial (*X*,*Y*,*Z*) em função das mesmas curvas *u* e *v*. O grupo de equações (1) e (5) permitem determinar a posição de pontos em dois espaços usando os mesmos argumentos. Nos termos da cartografia será possível, então, representar a superfície de referência (*x*,*y*,*z*), ou parte dela, na superfície de projeção (*X*,*Y*,*Z*). No estudo de projeções cartográficas procuram-se as equações tal como dado pelas (5), desconsiderando a grandeza Z pois as representações são feitas sobre o plano ou sobre figuras desenvolvíveis no plano (cone e cilíndro).

Até este ponto falou-se apenas em representação das superfícies por meio de curvas ditas paramétricas. Passa-se agora a desenvolver o estudo de uma superfície qualquer representada por suas curvas paramétricas.

1.3 Primeiras Quantidades Fundamentais de Gauss

Da Figura 3, que mostra o comprimento infinitesimal de um arco sobre uma superfície qualquer, pode-se escrever:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{6}$$

Esta expressão mostra que o quadrado do comprimento infinitesimal de um arco sobre uma superfície qualquer pode ser dado pela soma dos quadrado das suas componentes cartesianas (Figura 3).

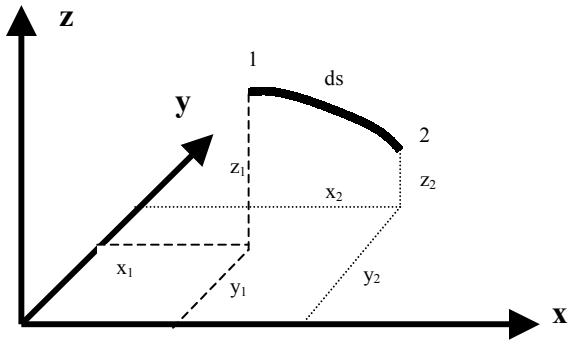

Figura 3. Arco elementar *ds* sobre uma superfície e suas componentes cartesianas.

Como a superfície é formada por curvas *u* e *v* as componentes *dx*, *dy* e *dz* são funções tanto de *u* como de *v*. Portanto pode-se escrever:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{aligned} \tag{7}$$

Substituindo as (7) na (6) resulta:

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2 \tag{8}$$

Desenvolvendo-se os quadrados desta última chega-se a:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + \\ &2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) du\ dv + \\ &\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Os coeficientes de du^2, $dudv$ e dv^2 são chamados de Primeiras Quantidades Fundamentais de Gauss, e são normalmente nominados por e, f e g respectivamente.

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$
$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \qquad (10)$$
$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

A equação (8) pode ser escrita então como:

$$ds^2 = e\ du^2 + 2\ f\ du\,dv + g\ dv^2 \qquad (11)$$

Esta é a expressão que representa o comprimento de um arco infinitesimal de uma superfície qualquer, basta que se conheçam os valores e, f e g que são função da forma dessa superfície e do relacionamento que as curvas que a definem tem entre si. A espressão é válida para o caso do plano, esfera, elipsóide e outra superfície qualquer quando descrita por um par de curvas paramétricas.

As Primeiras Quantidades Fundamentais de Gauss (QFG) representam a métrica da superfície. Indicam o comportamento das curvas paramétricas de uma dada superfície. Por exemplo, para uma superfície onde as curvas paramétricas são perpendiculares entre si tem-se $f=0$, este pode ser o caso do plano quando descrito por coordenadas retangulares (X,Y) ou por coordenadas polares (ρ, θ).

As quantidades $\sqrt{e}$ e $\sqrt{g}$ atuam como unidade de medida ao longo da curvas u e v na superfície.

1.4 Primeiras Quantidades Fundamentais de Gauss para o plano, para a esfera e para o elipsóide

A determinação das Quantidades Fundamentais de Gauss para uma dada superfície é feita pela diferenciação das equações paramétricas em relação às curvas paramétricas descritoras da superfície. Para tanto deve-se satisfazer às equações (9) ou (10).

A seguir são apresentadas as equações paramétricas e as QFG para o plano, para a esfera e para o elipsóide.

a) Plano

No plano o sistema de coordenadas mais fácil de se representar pontos ou curvas é o sistema cartesiano. Neste sistema as curvas U e V (poderiam se as curvas de uma superfície de projeção) são representadas por uma abcissa e uma ordenada (X, Y).

O comprimento de um arco infinitesimal nesta superfície é dado pela expressão:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 \tag{12}$$

e, neste caso as quantidades fundamentais de Gauss para o plano resultam:

$$\begin{aligned} E' &= 1 \\ F' &= 0 \\ G' &= 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Percebe-se que a escala ao longo de uma curva $U = X$ é a mesma que ao longo de uma curva $V = Y$ e igual a 1, e que as curvas U e V são independentes (ou perpendicculares entre si) pois $F' = 0$. Quando se utiliza um sistema cartesiano não se faz uso de fator de escala ao longo dos eixos, e a expressão que representa o comprimento poderia ser a (11), que prevê os elementos e, f e g.

b) Esfera

Na esfera o sistema de coordenadas esféricas é adotado e um ponto é localizado pela latitude φ e pela longitude λ e estas são associadas às curvas u e v (utiliza-se minúsculas por tratar-se de superfície de referência) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} u &= \varphi \\ v &= \lambda. \end{aligned} \tag{14}$$

As equações paramétricas da esfera, de raio R, são:

$$\begin{aligned} x &= R\ \cos(\varphi)\ \cos\ (\lambda) \\ y &= R\ \cos(\varphi)\ \ sin\ (\lambda) \\ z &= R\ \ sin(\varphi) \end{aligned} \tag{15}$$

As quantidades fundamentais de Gauss para a esfera resultam, pela aplicação das (10):

$$\begin{aligned} e &= R^2 \\ f &= 0 \\ g &= R^2\ \cos^2(\varphi) \end{aligned} \tag{16}$$

Percebe-se que o valor de e é constante, porém g não é pois é dado em função da latitude (φ). Isso quer dizer que sobre a esfera todos os pontos de mesma latitude terão o mesmo valor para e e g. Os valores das QFG serão diferentes apenas para pontos com diferentes longitudes (λ).

O arco elementar ou um segmento infinitesimal sobre esta superfície será dado por:

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2\ \cos^2(\varphi)\ \ d\lambda^2 \tag{17}$$

Observa-se que $e \neq g$, isto significa que quando se introduz iguais variações ($d\varphi$ e $d\lambda$) em $u = \varphi$ e $v = \lambda$ obtém-se diferentes comprimentos de arco ds. No caso de uma esfera, dada uma posição quialquer que não seja o equador, ao se produzir uma variação de $d\varphi = 0{,}5°$ apenas em latitude, se produz um resultado diferente em comprimento de arco se esta mesma variação $0{,}5°$ for produzida apenas em longitude. Diferentemente do plano descrito por coordenadas retangulares, numa esfera descrita por curvas de latitude e de longitude o arco ds produzido pela aplicação de variações em latitude e longitude depende da posição da esfera em que isso se realiza.

c) Elipsóide

No elipsóide as curvas paramétricas que representam a posição de um único ponto são a latitude geodésica Φ associada à curva u e a longitude geodésica Λ associada à curva v.

As equações paramétricas para a superfície do elipsóide (bi-axial) são:

$$\begin{aligned} x &= N \cos(\Phi) \cos(\Lambda) \\ y &= N \cos(\Phi) \sin(\Lambda) \\ z &= N (1-e^2) \sin(\Phi) \end{aligned} \tag{18}$$

com:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2(\Phi))^{1/2}} \tag{19}$$

e

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \tag{20}$$

As grandezas envolvidas nas equações paramétricas do elipsóide de revolução são: a) N raio de curvatura do primeiro vertical ou grande normal; b) e^2 primeira excentricidade; c) a semi-eixo equatorial do elipóide; e d) b semi-eixo polar do elipsóide.

Após a diferenciação das equações (18) segundo as equações (9) ou (10) obtém-se:

$$\begin{aligned} e &= M^2 \\ f &= 0 \\ g &= N^2 \cos^2(\Phi) \end{aligned} \tag{21}$$

onde M, que é o raio de curvatura de uma seção meridiana, é dado por:

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2(\Phi))^{3/2}} \tag{22}$$

Novamente $e \neq g$ e estas quantidades são função somente da latitude, o que equivale dizer que se for definida a latitude Φ de um paralelo, não importa o valor da longitude, os arcos *ds* produzidos a partir do mesmo par de valores $d\Phi$ e $d\Lambda$ serão iguais. O comprimento ds de um arco infinitesimal pertencente à superfície do elipsóide será dado por:

$$ds^2 = M^2 d\Phi^2 + N^2 \cos^2(\Phi)\ d\Lambda^2 \tag{23}$$

1.5 Expressões Angulares

As expressões angulares que srão apresentadas podem sero obtidas da figura de um paralelogramo diferencial considerado plano e com os lados curtos o suficiente para a sua aproximação por segmentos de reta seja possível.

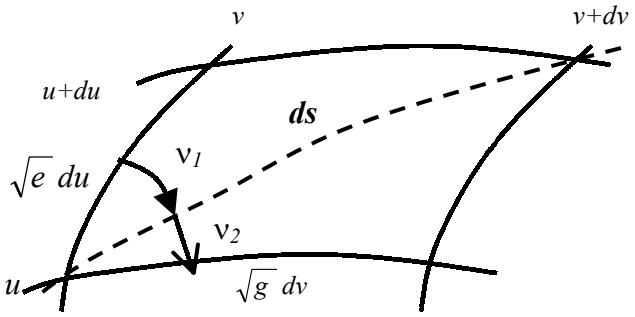

Figura 4. Paralelogramo diferencial representando o arco infinitesial *ds* entre os pontos (u,v) e $(u+du, v+dv)$.

Aplicando a lei dos cossenos ao paralelogramo diferencial considerado plano (Figura 4), tem-se a expressão:

$$ds^2 = e\,du^2 + g\ dv^2 + 2\sqrt{eg}\ \ du\,dv\ \ \cos(\omega) \tag{24}$$

Tem-se das (6) a (10) :

$$\cos\omega = \frac{f}{\sqrt{e\,g}} \tag{25}$$

$$\cos\nu_1 = \frac{\sqrt{e}\ du + \sqrt{g}\ dv\ \cos(\omega)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e\,\frac{du}{ds} + f\,\frac{dv}{ds}\right)$$

$$\cos\nu_2 = \frac{\sqrt{g}\ dv + \sqrt{e}\ du\ \cos(\omega)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(f\ \frac{du}{ds} + g\,\frac{dv}{ds}\right) \tag{26}$$

$$sin\omega = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{eg}} \tag{27}$$

$$sin\ \vartheta_1 = \sqrt{g}\ sin\ (\omega)\ \frac{dv}{ds} = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{e}}\ \frac{du}{ds}$$

$$sin\ \vartheta_2 = \sqrt{e}\ sin\ (\omega)\ \frac{du}{ds} = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{g}}\ \frac{dv}{ds} \tag{28}$$

1.6 Área do Paralelogramo Diferencial

Considerando plano o paralelogramo diferencial, pode-se escrever a seguinte expressão para o cálculo de sua área infinitesimal.

$$a_d = \sqrt{eg}\ du\, dv\ sin(\omega) \tag{29}$$

Nesta expressão percebe-se que a figura terá valor de área máximo quando ω = *90*°, e nulo quando ω = *0*°.

Pode-se substituir *sin(ω)* de acordo com a (27), o que resulta na expressão:

$$a_d = \sqrt{eg - f^2}\ du\, dv \tag{30}$$

com $e\,g - f^2 >= 0$ e ainda, para curvas ortogonais $f=0$ e ω =*90*°.

1.7 Matriz de Transformação e Determinante Jacobiano

Das equações (3) por diferenciação chega-se a:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial u} du + \frac{\partial U}{\partial v} dv$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial v} dv \tag{31}$$

Das equações (2) por diferenciação chega-se a:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial U} dU + \frac{\partial X}{\partial V} dV. \tag{32}$$

Igualmente por diferenciação das (5) obtém-se:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv. \tag{33}$$

Igualando as duas últimas obtém-se:

$$\frac{\partial X}{\partial U}dU + \frac{\partial X}{\partial V}dV = \frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv \tag{34}$$

Introduzindo as (31) chega-se a:

$$\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv = \frac{\partial X}{\partial U}\left(\frac{\partial U}{\partial u}du + \frac{\partial U}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial X}{\partial V}\left(\frac{\partial V}{\partial u}du + \frac{\partial V}{\partial v}dv\right), \tag{35}$$

que operada resulta em :

$$\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv = \frac{\partial X}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial v}dv + \frac{\partial X}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial v}dv \tag{36}$$

Agrupando os termos em *du* e *dv* obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{\partial X}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial u}\\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{\partial X}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial v}\end{aligned} \tag{37}$$

De forma análoga obtém-se as derivadas parciais ∂Y/∂u, ∂Y/∂v, ∂Z/∂u e ∂Z/∂v.

Em uma dada superfície é possível definir mais do que um par de curvas paramétricas, o que como consequência acarreta mais do que um conjunto de QFG para a superfície. Assim sendo é necessário convencionar-se o que segue:

a) para a superfície de referência dada em função de suas próprias, tal como nas equações (1), usam-se *e*, *f* e *g*.
b) para a superfície de projeção (cilíndro, cone ou plano) dada em função de suas próprias curvas, como nas equações (2), usam-se *E*', *F*' e *G*'.
c) do mesmo modo, para a superfície de projeção (cilíndro, cone ou plano) dada em função das curvas paramétricas da superfície de referência, como o segundo grupo das equações (5), usam-se *E*, *F* e *G*.

As seguintes expressões para as Quantidades Fundamentais de Gauss podem ser escritas para os ítens c) e b) acima:

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2\\ F &= \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2\end{aligned} \tag{38}$$

$$
\begin{aligned}
E' &= \left(\frac{\partial X}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial U}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial U}\right)^2 \\
F' &= \frac{\partial X}{\partial U}\frac{\partial X}{\partial V} + \frac{\partial Y}{\partial U}\frac{\partial Y}{\partial V} + \frac{\partial Z}{\partial U}\frac{\partial Z}{\partial V} \\
G' &= \left(\frac{\partial X}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial V}\right)^2
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Substituindo as (37) e suas análogas para ∂Y/∂u, ∂Y/∂v, ∂Z/∂u e ∂Z/∂v nas expressões de *E*, *F* e *G* tem-se (após algumas operações):

$$
\begin{bmatrix} E \\ F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 & 2\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u} & \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 & 2\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial v} & \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E' \\ F' \\ G' \end{bmatrix}. \tag{40}
$$

Esta forma matricial recebe o nome de Matriz de Transformação, e permite determinar um conjunto de primeiras quantidades fundamentais de Gauss E, F, G a partir de um segundo conjunto de QFG E', F', G' a partir do relacionamento e dependência entre as curvas *u* e *v* e *U* e *V*. A matriz de transformação assume fundamental importância no desenvolvimento de projeções cartográficas que tenham a propriedade de conformidade.

E ainda pode-se chegar a:

$$
EG - F^2 = \begin{vmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \tag{41}
$$

ou o que é o mesmo que:

$$
E\,G - F^2 = E'\,G' - F'^{\,2} \left\{\frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}\right\} \tag{42}
$$

Estas últimas duas expressões contém o Determinante Jacobiano $\partial (U,V) / \partial (u,v)$, e se constituem na condição de equivalência, isto é, uma transformação de espaços que tenha a propriedade de equivalência deve satisfazer às condições expressas em (41) e (42). Do mesmo modo como para a condição de conformidade, a condição de equivalência é utilizada ao longo do processo de desenvolvimento das expressões de transformação de uma representação equivalente de uma superfície em outra.

1.8 Distorção de escala

Quando se utiliza uma projeção cartográfica como meio de representação de algum modelo da Terra, é necessário estabelecer uma escala de representação. A escala é uma relação entre dois comprimentos, um deles considerado como referência, normalmente um segmento de arco pertencente à superfície de referência e outro comprimento considerado como pertencente à superfície de representação. Este valor de escala é verdadeiro apenas para pontos em que as duas superfícies, SR e SP, têm contato. No caso particular das superfícies utilizadas em projeções cartográficas, esta escala representa a escala verdadeira apenas nos pontos ou linhas de tangência ou ainda nas linhas de secância. A escala válida para os pontos comuns entre as duas superfícies, SR e SP, é dita escala nominal da representação. Para todos os outros pontos de uma projeção cartográfica a escala de representação é diferente da escala nominal. A existência de valores distintos de escala conduz ao termo distorção de escala pois torna possível explicar a existência da distorção em uma representação de uma superfície em outra e torna possível quantificar esta distorção.

A distorção de escala é definida pela razão entre um arco de comprimento infinitesimal na superfície de projeção pelo seu homólogo na superfície de referência, isto quer dizer:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} \tag{43}$$

onde m é a distorção de escala e dS representa o comprimento do arco infinitesimal na superfície de projeção SP e ds representa o comprimento do arco infinitesimal na superfície de referência SR.

A quantidade m assume apenas valores positivos e podem ocorrer os seguintes casos:

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ m &> 1 \\ m &< 1 \end{aligned} \qquad (44)$$

As possíveis situações de m como mostrado pelas (44) são explicadas como segue:

- Quando *m=1* os segmentos *dS* e *ds* são iguais e não houve distorção naquele ponto ou região e a escala nominal é válida para relacionar o comprimento medido com o seu correspondente original.
- Quando *m > 1* o segmento *dS* resulta maior do que o segmento *ds*, e isso indica que o comprimento do segmento representado, se afetado da escala nominal, produzirá um comprimento maior do que o comprimento original sobre a superfície de referência.
- Quando *m < 1* o segmento *dS* resulta menor do que o segmento *ds*, e isso indica que o comprimento do segmento representado, se afetado da escala nominal, produzirá um comprimento menor do que o comprimento original sobre a superfície de referência.

Contorna-se estas duas situações modificando o valor do comprimento representado pela aplicação da quantidade *m* de acordo com a expressão (43). Nesta situação conhecem-se os valores de *m* e de *dS* e, por conseqüência, calcula-se *ds*.

A expressão (44) pode ser escrita de forma a explicitar o significado de *dS* e *ds*, com segue:

$$m^2 = \frac{E'\,dU^2 + 2\,F'\,dU\,dV + G'\,dV^2}{e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2} \qquad (45)$$

ou, o que é o mesmo:

$$m^2 = \frac{E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}{e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2}. \qquad (46)$$

Os numeradores das expressões (45) e (46) são iguais visto que uma superfície qualquer admite a possibilidade de ser descrita por mais do que apenas um par de curvas paramétricas. A variação das quantidades *du* e *dv* permite variar a orientação do segmento ds, e por conseqüência variar o valor de *m*. Esta dependência que *m* apresenta em relação aos

valores *du* e *dv* pode ser vista na expressão (47), que é obtida pela divisão do segundo membro por dv^2.

$$m^2 = \frac{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\,F\,\frac{du}{dv} + G}{e\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2\,f\,\frac{du}{dv} + g} \tag{47}$$

1.9 Distorção de escala sobre as curvas paramétricas

A distorção de escala é dependente da orientação do segmento ds, isto é, para diferentes valores de *du* e *dv* se obtém diferentes valores para *m*. Dentre as infinitas orientações que se pode dar ao arco *ds* pela variação dos incrementos infinitesimais *du* e *dv* estão as direções das curvas paramétricas *u* e *v*.

O arco infinitesimal *ds* obtido a partir de um par de incrementos infinitesimais $du \neq 0$ e $dv = 0$ consiste de um segmento de curva *u*, e o arco infinitesimal *ds* obtido a partir de um par de incrementos infinitesimais $du = 0$ e $dv \neq 0$ consiste de um segmento de curva *v*. Estas duas situações caracterizam os valores de distorção de escala para as curvas paramétricas *u* e *v*. Estes valores particulares de distorção de escala são denominados m_0 e m_{90} ou m_φ e m_λ respectivamente.

A expressão para m_φ é obtida da expressão (46) fazendo $dv = 0$:

$$m_\varphi = \sqrt{\frac{E}{e}} \tag{48}$$

e a expressão para m_λ também é obtida da expressão (46), no entanto, fazendo $du = 0$:

$$m_\lambda = \sqrt{\frac{G}{g}} \tag{49}$$

Observa-se que nas expressões (48) e (49) os valores dos incrementos foram simplificados e as quantidades m_φ e m_λ resultam como funções apenas de *E*, *e*, *G* e *g*, e da posição do ponto dado em valores *u* e *v* implícitos nas QFG.

1.10 Comportamento da distorção de escala em caso de: conformidade; eqüivalência; e eqüidistância

A representação de uma superfície em outra superfície implica uso de uma transformação. A aplicação de transformações entre os dados no âmbito das projeções

cartográficas implica em modificações de grandezas geométricas como forma, comprimentos, orientações e áreas. A distorção de escala assume comportamentos particulares para os casos de conformidade, eqüivalência e eqüidistância.

a) Conformidade

A propriedade de conformidade é caracterizada pela manutenção da forma de pequenas figuras, ou, pela manutenção de ângulos. Se os quatro pontos que definem um quadrado na SR forem observados na SP deve-se encontrar a figura de um quadrado, isto significa a preservação dos ângulos da figura.

Conformidade, com base no conceito de distorção de escala, significa a existência de um único valor de distorção de escala por posição na SP. Em outras palavras, a distorção de escala independe da orientação do segmento *ds* como foi dito ao se comentar as expressões (46) e (47). Por essa razão a distorção de escala que afeta a direção da curva *u* tem o mesmo valor da distorção de escala que afeta da direção da curva *v*, e neste caso pode-se escrever:

$$m_\varphi = m_\lambda = m \tag{50}$$

Esta igualdade expressa nas (50), que mostra a igualdade entre m_φ e m_λ, pode ser escrita como:

$$m^2 = \frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} \tag{51}$$

Para o caso específico das superfícies da esfera e do elipsóide, consideradas como superfícies de referência e tratadas em projeções cartográficas, sabe-se que a quantidade $f = 0$ de acordo com as expressões das QFG para esfera e para o elipsóide (16) e (21), e tem se como como conseqüência $F = 0$.

b) Eqüivalência

Num a representação equivalente de uma superfície em outra existe uma relação constante entre os valores numéricos entre as áreas das duas superfícies. Neste caso o valor numérico representativo da área A_d de uma figura qualquer da superfície de projeção representa o valor numérico da área a_d da mesma figura na superfície de referência. Assim pode-se recuperar a expressão (30):

$$a_d = \sqrt{eg - f^2}\; du\, dv$$

e adicionar uma expressão análoga para uma segunda superfície, que pode ser uma superfície de projeção válida em projeções cartográficas:

$$A_d = \sqrt{EG - F^2}\; du\, dv\,. \tag{52}$$

Como espera-se uma igualdade entre estas áreas as duas expressões podem ser igualadas e resultar em:

$$\sqrt{eg - f^2}\; du\, dv \quad = \sqrt{EG - F^2}\; du\, dv\,. \tag{53}$$

Conclui-se que para que haja eqüivalência na representação deve ocorrer:

$$eg = E\,G - F^2 \tag{54}$$

O desenvolvimento de uma projeção cartográfica que tem a propriedade de eqüivalência parte da expressão (41) considerando a (54), isto é:

$$e\;g \;= \begin{vmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial u} & \dfrac{\partial U}{\partial v} \\ \dfrac{\partial V}{\partial u} & \dfrac{\partial V}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \tag{55}$$

Nesta expressão e g representam as QFG da SR, E', F' e G' representam as QFG do referência da SP e as derivadas parciais do determinante exprimem as dependências de u e v em relação às curvas U e V.

c) Eqüidistância

A eqüidistância significa que ocorre a manutenção de uma relação constante entre uma família de linhas da SR quando observadas na SP. Nesse caso o valor da distorção de escala para as curvas desta família assume o valor 1.

A generalização do conceito de distorção de escala é realizada no estudo da Elipse Indicatriz de Tissot.