6 Hilbert: “Sobre o Infinito ” (Tradução: Walter A. Carnielli)

PREFÁCIO ESCRITO POR WALTER A. CARNIELLI

A estranheza dos resultados acerca dos infinitos distintos e a confusão engendrada pelo paradoxo de Russel levaram muitos matemáticos do começo do século XX a questionar a legitimidade do uso de coleções infinitas em matemática.

Uma situação similar havia ocorrido no século anterior quando Bolyai e Lobachevsky desenvolveram as geometrias não-euclideanas. Basicamente, eles mostraram que se podia juntar aos demais axiomas da geometria a negação do Axioma das paralelas de Euclides, obtendo-se uma nova geometria, que embora parecesse estranha e contraditória com a realidade, devia ter uma consistência interna.

Mais tarde foi mostrado por Beltrami, Klein e Poincaré que, se a geometria euclideana fosse livre de contradições, então também o seriam as de Bolyai e Lobachevsky. Isso se conseguia exibindo-se um modelo das novas geometrias dentro da geometria euclideana. Portanto as novas geometrias eram pelo menos tão seguras quanto a geometria euclideana, cuja consistência não estava em questão.

David Hilbert teve um papel fundamental na formalização dessas geometrias. No seu livro *Grundlagen der Geometrie* de 1899 (traduzido para o inglês como *Foundations of Geometry*), ele apresenta uma axiomatização da geometria plana que contém um núcleo de axiomas aos quais se pode adicionar o axioma das paralelas de Euclides ou sua negação, na forma dada por Riemann. Ele então provou um número suficiente de teoremas no seu sistema formal para mostrar que os dois tipos de geometria poderiam ser completamente caracterizados pelas suas axiomatizações.

Mais tarde Hilbert pensou em prosseguir nessa direção com a finalidade de justificar o uso do infinito em matemática. Havia diversas axiomáticas disponíveis para a teoria dos conjuntos por volta de 1920. A dificuldade era mostrar que pelo menos uma delas era livre de contradições. Na sua famosa conferência, apresentada aqui, Hilbert proclama que não há nenhuma razão, a partir das teorias físicas do universo, para se acreditar que exista alguma coisa no mundo que corresponda a uma coleção infinita. Portanto, não há possibilidade de justificar uma axiomática envolvendo infinito por um modelo físico. Como poderia então Hilbert justificar o infinito em matemática?

O texto a seguir, que pode ser considerado como um manifesto ao chamado “Programa de Hilbert”, [...]

“Sobre o Infinito “ por David Hilbert [1]

TRECHOS ESCOLHIDOS
(o texto completo pode ser encontrado no livro “Computabilidade: Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática” de W.A. Carnielli e R.L.Epstein)

1ª PARTE:

Weierstrass, através de sua crítica penetrante, conseguiu uma sólida fundamentação para a análise matemática. Elucidando, entre outros, os conceitos de mínimo, função e quociente diferencial, ele removeu as falhas que ainda persistiam no cálculo infinitesimal, livrou-o de todas as noções vagas a respeito do infinitesimal e desse modo resolveu definitivamente as dificuldades advindas desse conceito.

[…]

Contudo, a despeito da fundamentação que Weierstrass obteve para o cálculo infinitesimal, as disputas a respeito dos fundamentos da análise ainda não tiveram fim.

A razão dessas disputas consiste no fato de que o significado do *infinito* para a matemática ainda não foi completamente clarificado. De fato, a análise de Weierstrass eliminou o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, reduzindo as proposições correspondentes a relações entre magnitudes finitas. Contudo o infinito ainda aparece nas séries numéricas infinitas que definem os números reais e no conceito de sistema de números reais, o qual é concebido como uma totalidade completa e terminada.

Em sua fundamentação da análise, Weierstrass recorreu livre e reiteradamente às formas de dedução lógica envolvendo o infinito, como por exemplo, quando se trata de *todos* os números reais com uma certa propriedade, ou quando se argumenta que *existem* números reais com uma certa propriedade.

Portanto, o infinito pode reaparecer disfarçado na teoria de Weierstrass, escapando da sua aguda crítica e daí segue que o *problema do infinito*, no sentido indicado, é o que nós temos que resolver de uma vez por todas. Tal como nos processos limite do cálculo infinitesimal, onde o infinito no sentido do infinitamente grande e do infinitamente pequeno acabou se mostrando uma mera figura de linguagem, também o infinito na forma de totalidade, ainda utilizado nos métodos dedutivos, deve ser entendido como uma ilusão. Do mesmo modo em que operações com o infinitamente pequeno foram substituídas por operações com o finito que apresentam exatamente os mesmos resultados e as mesmas elegantes relações formais, os métodos dedutivos baseados no infinito devem ser substituídos por procedimentos finitos que produzam exatamente os mesmos resultados, isto é, que tornem possível as mesmas cadeias de provas e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e teoremas.

[1] Texto de uma conferência proferida em 4 de junho de 1925 num congresso da Sociedade Matemática da Westfalia, em Münster, em homenagem a Karl Weierstrass. Traduzido por W.A.Carnielli a partir do original alemão publicado em *Mathematische Annallen* (Berlim) v. 95 (1926), pp. 161-190.

Esta é a intenção da minha teoria. Ela tem por objetivo estabelecer de uma vez por todas a confiabilidade definitiva dos métodos matemáticos, o que o período crítico do cálculo infinitesimal ainda não conseguiu; essa teoria deveria portanto completar o que Weierstrass aspirou conseguir com sua fundamentação da análise e para a qual ele deu um passo essencial e necessário. [...]

Através destas observações quero apenas mostrar que o esclarecimento definitivo da *natureza do infinito*, muito mais do que interessar ao conhecimento científico especializado, é necessário para a própria *dignidade do intelecto humano.*

O infinito, como nenhuma outra questão, abala tão profundamente as *emoções* humanas; o infinito, como nenhuma outra *idéia*, tão frutiferamente tem estimulado a mente; o infinito, como nenhum outro *conceito*, necessita ser *esclarecido*.

[...]

É sabido que toda matéria é composta de pequenas partículas, os *átomos*, cujas combinações e ligações produzem toda a variedade de objetos macroscópicos. Mas a física não ficou só no atomismo da matéria. No fim do século passado apareceu o atomismo da eletricidade, que parecia ainda mais estranho à primeira vista. Conquanto até aquele momento fosse vista como um fluído e considerada um agente contínuo, a eletricidade mostrou-se constituída de *elétrons* positivos e negativos.

Fora do domínio da matéria e da eletricidade existe ainda na física uma entidade onde vale a lei da conservação, a saber, a energia. Foi mostrado que nem mesmo a energia admite incondicionalmente infinita divisibilidade. Planck descobriu os *quanta de energia*.

[...]

O segundo lugar onde nos deparamos com o problema de encontrar o infinito na natureza é na consideração do universo como um todo. Temos aqui que investigar a expansão do universo para determinar se ele contém algo infinitamente grande.

A opinião sobre a infinidade do mundo foi vigente durante muito tempo. Até Kant, e ainda mais adiante, não se punha em dúvida a infinidade do espaço.

[...]

Vejamos como é a situação na matemática, interrogando primeiro a mais pura e ingênua criação do espírito humano, que é a teoria dos números. Consideremos um exemplo da rica variedade de fórmulas elementares da teoria de números:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$$

Dado que podemos substituir *n* por qualquer inteiro, por exemplo, *n=2* ou *n=5*; esta fórmula contém implicitamente *infinitas* proposições. Esta característica é essencial à fórmula e é por isso que ela represente a solução de um problema aritmético e precisa de uma prova, enquanto as equações numéricas particulares

$$1^2 + 2^2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11$$

podem ser verificadas através de cálculo simples e são portanto individualmente desprovidas de interesse especial.

[...]

Mas a análise por si só não nos conduz à compreensão mais profunda da natureza do infinito. Esta nos é dada por uma disciplina que mais se aproxima de um método filosófico geral e que foi engendrada para lançar nova luz sobre o grande complexo das questões sobre o infinito. Esta teoria, criada por Georg Cantor, é a teoria dos conjuntos e estamos aqui interessados somente naquela parte única e original da teoria que forma o núcleo central da doutrina de Cantor, a saber, a teoria dos números *transfinitos*. **Esta teoria me parece o mais refinado produto do gênio matemático e uma das façanhas supremas da pura atividade intelectual humana.**

O que é, então, esta teoria?

Alguém que desejasse caracterizar brevemente a nova concepção do infinito que Cantor introduziu, poderia afirmar que em análise lidamos com o infinitamente grande e o infinitamente pequeno somente como conceitos-limite, como algo a acontecer ou vir a ser, isto é, como *infinito potencial*. Mas este não é o verdadeiro infinito. Encontramos o verdadeiro infinito somente quando consideramos a totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade completa, ou quando tomamos os pontos de um intervalo como uma totalidade que existe, de uma só vez. Este tipo de infinito é conhecido como *infinito atual* ou *completado*.

Frege e Dedekind, os dois mais célebres matemáticos por seu trabalho nos fundamentos da matemática, usaram o infinito atual— independentemente um dou outro— para prover fundamento para a aritmética que fosse independente da intuição e da experiência, somente baseado pura lógica e deduzindo toda a aritmética a partir dela. Dedekind chegou mesmo ao ponto de evitar o uso intuitivo de número finito, derivando este conceito a partir da noção de conjunto infinito. Foi Cantor, porém, quem desenvolveu sistematicamente o conceito de infinito atual. Retomemos os dois exemplos de infinito citados:

1. 1, 2, 3, 4, ...
2. Os pontos do intervalo entre 0 e 1, ou, o que é o mesmo, a totalidade dos números reais entre 0 e 1;

é bastante natural considerar estes exemplos do ponto de vista de sua magnitude, mas tal tratamento revela resultados surpreendentes, conhecidos de todo matemático hoje em dia. De fato, quando consideramos o conjunto de todos os números racionais, isto é, as frações

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{3}{7}, \cdots,$$

notamos que do ponto de vista de seu tamanho este conjunto não é maior que o dos inteiros: dizemos que os racionais podem ser enumerados.

[…]

Quem vivencia estes fatos pela primeira vez, pode ser levado a pensar que do ponto de vista do tamanho existe um único infinito. Não. Os conjuntos em nossos exemplos (1) e (2) não são, como se diz, “equipotentes”; de fato, o conjunto (2) não pode ser enumerado, senão que é maior que o conjunto (1). Encontramos aqui o que é novo e característico da teoria de Cantor: os pontos do intervalo não podem ser enumerados da maneira usual, isto é, contando 1, 2, 3, ... Mas já que admitimos o infinito atual, nada nos obriga a parar aí.

Quando tivermos contado 1, 2, 3, ... , poderemos tomar os objetos assim enumerados como um conjunto infinito completado. Se, seguindo Cantor, chamarmos ω a este tipo de ordem, então a contagem continua naturalmente como $\omega+1$, $\omega+2$, ... até $\omega+\omega$ ou $\omega.2$ e daí de novo como $\omega.2+1$, $\omega.2+2$, $\omega.2+3$, ... $\omega.2+\omega=\omega.3$ e novamente como $\omega.2$, $\omega.3$, $\omega.4$, ...,$\omega.\omega = \omega^2$, ω^2+1, até obter finalmente a seguinte tabela:

$$
\begin{array}{l}
1, 2, 3, \ldots \\
\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \\
\omega.2, \omega.2+1, \omega.2+2, \ldots \\
\omega.3, \omega.3+1, \omega.3+2, \ldots \\
\omega^2, \omega^2+1, \ldots \\
\omega^2+\omega, \omega^2+\omega.2, \omega^2+\omega.3, \ldots \\
\omega^2.2, \ldots \\
\omega^2.2+\omega, \ldots \\
\omega^3, \ldots \\
\omega^4, \ldots \\
\omega^{\omega}, \omega^{\omega\omega}, \omega^{\omega\omega\omega}, \ldots
\end{array}
$$

Estes são os primeiros números transfinitos de Cantor, chamados por ele de números da segunda classe. Obtemos estes números simplesmente estendendo o processo de contagem além da enumeração ordinária, isto é, através de uma continuação natural e unicamente determinada da contagem usual finita. Da mesma forma como, até agora, temos contado somente o primeiro, segundo, terceiro, ... elemento de um conjunto, contamos também o ω-ésimo, $(\omega+1)$-ésimo, ω^{ω}-ésimo elemento.

A partir destes resultados pode-se perguntar se realmente podemos usar a contagem com respeito a tais conjuntos, que não são enumeráveis no sentido usual.

Cantor desenvolveu com base nestes conceitos e com bastante sucesso, a teoria dos números transfinitos e formulou um cálculo para eles. Desta forma, graças ao esforço hercúleo de Frege, Dedekind e Cantor o infinito se fez rei e reinou em grande triunfo. Em vôo vertiginoso, o infinito atingiu o pináculo da glória.

A reação, porém, não se fez esperar e veio de maneira realmente dramática. Ela aconteceu de forma perfeitamente análoga à reação que havia ocorrido contra o cálculo infinitesimal. No afã do descobrimento de resultados novos e importantes os matemáticos prestavam pouca atenção à validade de seus métodos dedutivos; então, simplesmente como resultado da mera aplicação de definições e métodos dedutivos que já pareciam costumeiros, contradições começaram gradualmente a aparecer. A princípio esporádicas, foram se tornando mais e mais agudas e sérias, até chegar aos paradoxos da teoria dos conjuntos. Em especial, uma contradição descoberta por Zermelo e Russell teve um efeito catastrófico quando se tornou conhecida no mundo da matemática. Confrontados com este paradoxo, Dedekind e Frege abandonaram completamente seu próprio ponto de vista e bateram em retirada. Dedekind hesitou longo tempo antes de permitir uma reedição de seu tratado que marcou época, *Was sind und was sollen die Zahlen*. Frege, num apêndice, teve que reconhecer que seu livro *Grundgesetze der Mathematik* estava no rumo errado. A doutrina de Cantor, também, foi atacada de todos os lados. A reação foi tão violenta que até os conceitos mais naturais e os métodos mais simples e importantes da matemática foram ameaçados e seu emprego esteve na iminência de ser considerado ilícito. Os defensores da antiga ordem, é claro, não faltaram, mas sua estratégia defensiva era muito débil e eles nunca puderam formar uma frente unida na defesa de seus pontos-chave. Os remédios contra os paradoxos eram demasiados e os métodos propostos variados demais. Deve-se admitir que o presente estado de coisas em relação aos paradoxos é intolerável. Pense nisso: as definições e métodos dedutivos que todos aprendem, ensinam e usam em matemática, o paradigma da verdade e certeza, levam a absurdos! Se o raciocínio matemático é defeituoso, onde encontraremos verdade e certeza?

2ª PARTE:

Existe, contudo, um caminho satisfatório para evitar os paradoxos sem trair nossa ciência. As atitudes que nos ajudarão a achar este caminho e a direção a tomar são as seguintes:

1. Definições frutíferas e métodos dedutivos que tiverem uma esperança de salvamento serão cuidadosamente investigados, nutridos e fortalecidos. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.
2. É necessário estabelecer para todas as deduções matemáticas o mesmo grau de certeza das deduções da teoria elementar dos números, onde ninguém duvida e onde contradições e paradoxos só ocorrem devido a nosso descuido.

O completamento desta tarefa só será possível quando tivermos elucidado completamente a *natureza do infinito*.

[…]

Consideremos a teoria dos números mais de perto. Na teoria dos números temos os símbolos numéricos:

1, 11, 111, 11111

onde cada símbolo é intuitivamente reconhecido pelo fato de que contém somente 1´s. Estes símbolos numéricos que são nosso objeto de estudo não têm em si mesmo nenhum significado. Adicionalmente a estes símbolos, mesmo na teoria elementar dos números, temos outros que possuem significado e que servem para facilitar a comunicação: por exemplo, o símbolo 2 é usado como uma abreviação para o símbolo numérico 11 e 3 como uma abreviação para 111. Usamos ainda símbolos como +, = e > para comunicar proposições. Já 2+3=3+2 pretende comunicar o fato de que 2+3 e 3+2, levando em conta as abreviações, são o mesmo e idêntico símbolo, a saber, o símbolo numérico 11111. Similarmente, 3 > 2 serve para comunicar o fato de que o símbolo 3, isto é, 111, é mais longo do que o símbolo 2, isto é, 11; ou, em outras palavras, que o último é parte própria do primeiro.

Usamos também as letras **a**, **b**, **c** para comunicação[2]. Desta forma, **b**>**a** comunica o fato que o símbolo numérico **b** é mais longo do que o símbolo numérico **a**. Sob este ponto de vista, **a**+**b**=**b**+**a** comunica somente o fato de que o símbolo numérico **a**+**b** é o mesmo que **b**+**a**. O conteúdo material do que é comunicado pode também ser demonstrado através de regras da dedução material e de fato este tipo de tratamento pode nos levar bastante longe.

Gostaria de dar um primeiro exemplo onde este método intuitivo é transcendido. O maior número primo conhecido é o seguinte: (39 dígitos)

p = 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727

Pelo conhecido método de Euclides podemos dar uma demonstração, que cabe inteiramente dentro de nosso enfoque finitário, de que existe pelo menos um novo número primo entre **p**+1 e **p**!+1. A forma da proposição já é perfeitamente apropriada ao enfoque finitário, pois a expressão “existe” somente abrevia a expressão seguinte: é certo que **p**+1 ou **p**+2 ou **p**+3 ... ou **p**!+1 é primo. Mais ainda, desde que é a mesma coisa, nesse caso, dizer que existe um número

---

2 Utilizamos letras em negrito onde Hilbert utilizava letras góticas.

primo tal que é:

1. > **p** e simultaneamente,
2. ≤ **p**!+1,

podemos chegar à idéia de formular um teorema que expressa somente uma parte do teorema euclideano, isto é, podemos formular um teorema que afirma que existe um primo > **p**. Embora este último teorema seja muito mais fraco em termos de conteúdo, já que afirma apenas parte da proposição euclidiana e embora a passagem do teorema euclidiano a este seja praticamente inócua, esta passagem envolve um passo transfinito quando a proposição parcial é tomada fora de contexto e considerada de forma independente.

Como pode ser isso? Porque temos uma proposição existencial! É verdade que tínhamos uma proposição similar no teorema euclideano, mas naquele caso o "existe", como mencionado, é apenas uma abreviação para "**p**+1 ou **p**+2 ou **p**+3 ... ou **p**!+1 é um número primo", exatamente como eu poderia dizer, ao invés de "ou este pedaço de giz, ou este pedaço, ... , ou este pedaço é vermelho" que "existe um objeto" com uma certa propriedade numa totalidade finita conforma-se perfeitamente a nosso enfoque finitário. Mas uma proposição da forma "ou **p**+1 ou **p**+2 ou **p**+3 ... ou *(ad infinitum)* ... satisfaz uma certa propriedade" consiste na verdade em um produto lógico infinito. Uma tal extensão na direção do infinito, a menos que se tomem precauções adicionais, não é mais lícita que a extensão do finito ao infinito no cálculo integral e diferencial; sem cuidado adicional, ela nem tem significado.

De nossa posição finitária, uma proposição existencial da forma "existe um número com uma certa propriedade" em geral só tem significado como uma proposição parcial, isto é, como parte de uma proposição melhor determinada. A formulação mais precisa, contudo, para muitos propósitos pode ser desnecessária.

Encontramos o infinito analisando uma proposição existencial cujo conteúdo não pode ser expresso por uma disjunção finita. De modo similar, negando uma proposição geral, que se refere a símbolos numéricos arbitrários, obtemos uma proposição transfinita. Por exemplo, a proposição que se **a** é um símbolo numérico então **a**+1=1+**a** vale sempre, de nossa perspectiva finitária é *incapaz de negação*. Veremos melhor isso se considerarmos que este enunciado não pode ser interpretado como uma conjunção de infinitas equações numéricas conectadas através de "e" mas somente como um juízo hipotético que afirma algo no caso de ser dado um símbolo numérico.

[…]

Vamos lembrar que *somos matemáticos* e que como matemáticos temos estado muitas vezes em situação precária, da qual fomos resgatados pelo método genial dos elementos ideais. Alguns exemplos ilustrativos do uso deste método foram vistos no início desta conferência.

[…]

É, portanto, necessário formalizar as próprias operações lógicas e demonstrações matemáticas. Uma tal formalização requer transformar relações lógicas em fórmulas. Portanto, junto com os símbolos matemáticos, precisamos também introduzir símbolos lógicos tais como:

$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\sim$
(conjunção)	(disjunção)	(implicação)	(negação)

e, juntamente com as variáveis *a, b, c, ...* devemos também empregar variáveis lógicas, ou seja, as variáveis proposicionais *A, B, C ...* .

3ª **PARTE:**

Como isso pode ser feito? Felizmente, a mesma harmonia preestabelecida que tantas vezes encontramos vigente na história do desenvolvimento da ciência – a mesma que ajudou Einstein, dando a ele o cálculo geral de invariantes já previamente trabalhado para sua teoria gravitacional – vem também em nossa ajuda: encontramos o cálculo lógico já previamente trabalhado. Na verdade, este cálculo lógico foi desenvolvido originalmente de uma perspectiva completamente distinta. Os símbolos do cálculo lógico foram originalmente introduzidos para comunicar. Contudo, é consistente com nossa perspectiva finitária negar qualquer significado aos símbolos lógicos, como negamos significado aos símbolos matemáticos e declarar que as fórmulas do cálculo lógico são proposições ideais sem qualquer significado próprio. Possuímos, no cálculo lógico, uma linguagem simbólica capaz de transformar asserções matemáticas em fórmulas e capaz de expressar a dedução lógica por meio de procedimentos formais. Em exata analogia com a transição da teoria material dos números à álgebra formal, tratamos agora os sinais e símbolos de operação do cálculo lógico abstraindo do seu significado. Desta forma, finalmente, obtemos, ao invés do conhecimento matemático material que é comunicado através da linguagem comum, somente uma coleção de fórmulas envolvendo símbolos lógicos e matemáticos que são gerados sucessivamente, de acordo com regras determinadas. Algumas dessas fórmulas correspondem a axiomas matemáticos e as regras segundo as quais fórmulas são derivadas umas das outras correspondem à dedução material. A dedução material é então substituída por um procedimento formal governado por regras. A passagem rigorosa do tratamento ingênuo para o formal, portanto, é levada a efeito tanto pelos axiomas (os quais, embora originalmente vistos como verdades básicas têm sido tratados na axiomática moderna como meras relações entre conceitos), como pelo cálculo lógico (originalmente considerado como não mais que uma linguagem diferente).

Vamos agora explicar brevemente como podemos formalizar as *demonstrações matemáticas*.

[Neste ponto Hilbert discute a formalização da dedução lógica, uma versão equivalente da qual será estudada neste curso.].

Estamos portanto em posição de levar adiante nossa teoria da prova e construir um sistema de fórmulas demonstráveis, ou seja, de toda a matemática.

Mas em nosso regozijo pela conquista e em particular pela nossa alegria em encontrar um instrumento indispensável, o cálculo lógico, já pronto de antemão e sem nenhum esforço de nossa parte, não devemos esquecer a condição essencial de nosso trabalho. Há apenas uma condição, embora seja uma condição absolutamente necessária, ligada ao método dos elementos ideais: a *prova de consistência*, pois a extensão de um domínio através da adição de elementos ideais só é legitimada se a extensão não causa o aparecimento de contradições no domínio inicial, ou seja, somente se as relações válidas nas novas estruturas continuarem a ser válidas no domínio anterior, quando os elementos ideais são canceladas.

O problema da consistência nas presentes circunstâncias é passível de ser tratado. Ele se reduz, obviamente, a provar que a partir dos nossos axiomas e através das regras estabelecidas não podemos obter "1 ✶ 1" como a última fórmula numa demonstração, ou, em outros termos, que 1 ✶ 1 não é uma fórmula demonstrável. Esta é uma tarefa que cabe no domínio do tratamento intuitivo, tanto quanto, por exemplo, a tarefa de obter uma prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ na teoria dos números, isto é, uma prova de que é impossível encontrar dois símbolos numéricos **a** e **b** que satisfaçam a relação $\mathbf{a}^2 = 2.\mathbf{b}^2$, ou, em outras palavras, que não se pode neste caso produzir dois símbolos numéricos com uma certa propriedade. Similarmente, é nossa incumbência mostrar que um tal tipo de prova não se pode produzir. Uma prova formalizada, tal qual um símbolo numérico, é um objeto concreto e visível. Podemos descrevê-la completamente, do começo ao fim. Mais ainda, o requisito de que a última fórmula seja 1 ✶ 1 é uma propriedade concreta da prova. Podemos, de fato, demonstrar que não é possível obter uma prova que termine com aquela fórmula, e justificamos assim nossa introdução das proposições ideais.

[…]

A teoria da prova que esboçamos não somente é capaz de prover uma base sólida para os fundamentos da matemática, mas também, acredito, pode prover um método geral para tratar questões matemáticas fundamentais, as quais os matemáticos até agora não foram capazes de manejar.

A matemática tornou-se uma corte de arbitragem, um supremo tribunal para decidir questões fundamentais – em bases concretas com as quais todos podem concordar e onde toda asserção pode ser controlada.

[…]

Um exemplo do tipo de questões fundamentais que podem ser tratadas deste modo é a tese de que todo problema matemático é solúvel. Estamos todos convencidos de que seja realmente assim. De fato, uma das motivações principais para nos ocuparmos de um problema matemático é que ouvimos sempre este grito dentro de nós: aí está o problema, ache a resposta; você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois não há *ignorabimus* em matemática. Minha teoria da prova não é capaz de suprir um método geral para resolver qualquer problema matemático – simplesmente tal método não existe; contudo, a prova de que a hipótese da solubilidade de todo problema matemático não causa contradição cai no escopo da nossa teoria.

Mas quero ainda jogar um último trunfo: para uma nova teoria, sua pedra-de-toque definitiva é a habilidade de resolver problemas que, mesmo conhecidos há longo tempo, a teoria mesma não tenha sido expressamente projetada para resolver. A máxima "por seus frutos deveis reconhecê-las" aplica-se também a teorias.

[Neste ponto Hilbert afirma ser capaz de resolver a Hipótese do Contínuo: existe alguma coleção infinita cujo cardinal seja maior que N e menor que R? Hilbert certamente estava enganado, pois Kurt Gödel provou, em 1938, que a Hipótese do Contínuo (Generalizada) não pode ser refutada na teoria dos conjuntos ZFC, e Paul Cohen em 1963 provou que a Hipótese do Contínuo não pode também ser demonstrada em ZFC. A Hipótese do Contínuo é portanto independente de ZFC, situação que aparentemente Hilbert não estaria levando em conta, como se depreende de seu texto. N.A.].

Em resumo, vamos voltar ao nosso tema principal e tirar algumas conclusões a partir de nossas considerações sobre o infinito. Nosso resultado geral é que o infinito não se encontra em lugar algum na realidade. Não existe na natureza e nem oferece uma base legítima para o pensamento racional – uma notável harmonia entre existência e pensamento. Em contraste com os primeiros esforços de Frege e Dedekind, estamos convencidos de que certos conceitos e juízos preliminares são condições necessárias ao conhecimento científico, e que a lógica por si só não é suficiente. As operações com o infinito só podem ser tornadas seguras através do finitário.

O papel que resta ao infinito é somente o de uma idéia – se entendemos por uma idéia, na terminologia de Kant, um conceito da razão que transcende toda experiência e que completa o concreto como uma totalidade – uma idéia em que podemos confiar sem hesitar graças ao quadro conceitual erigido por nossa teoria.

Finalmente, quero agradecer a P. Bernays por sua inteligente colaboração e valiosa ajuda, tanto na parte técnica quanto editorial especialmente em relação à prova do teorema do contínuo.

Leitura Adicional

A biografia de Hilbert por Constance Reid oferece uma ótima oportunidade de aprofundar seus conhecimentos acerca da história da matemática e do programa de Hilbert.