Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} prova de cálculo II

Curitiba, 28 de Março de 2014

1. Considere a função f dada por

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x-1}}$$

   (i) Represente formalmente e graficamente o domínio da função $f(x,y)$.

   (ii) Esboce algumas curvas de nivel da função

2. Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y\sqrt{x}}{5x+3y^2}$$

3. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{U^2}{R}$ watts.

   Se $U = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular um valor aproximado para a variação da energia quando U decresce de $0,001$ volts e R aumenta de $0,002$ ohms.

4. Suponha que $z = x^2 + xy + y^2$.

   (a) Qual a taxa de variação de z em $(0,0)$ quando nos movemos da origem a $(2,1)$?.

   (b) Em que direção devemos nos mover para que a taxa de variação de z seja máxima? Qual é o valor dessa taxa?

   (c) Quais as duas direções em que a derivada direcional é zero?

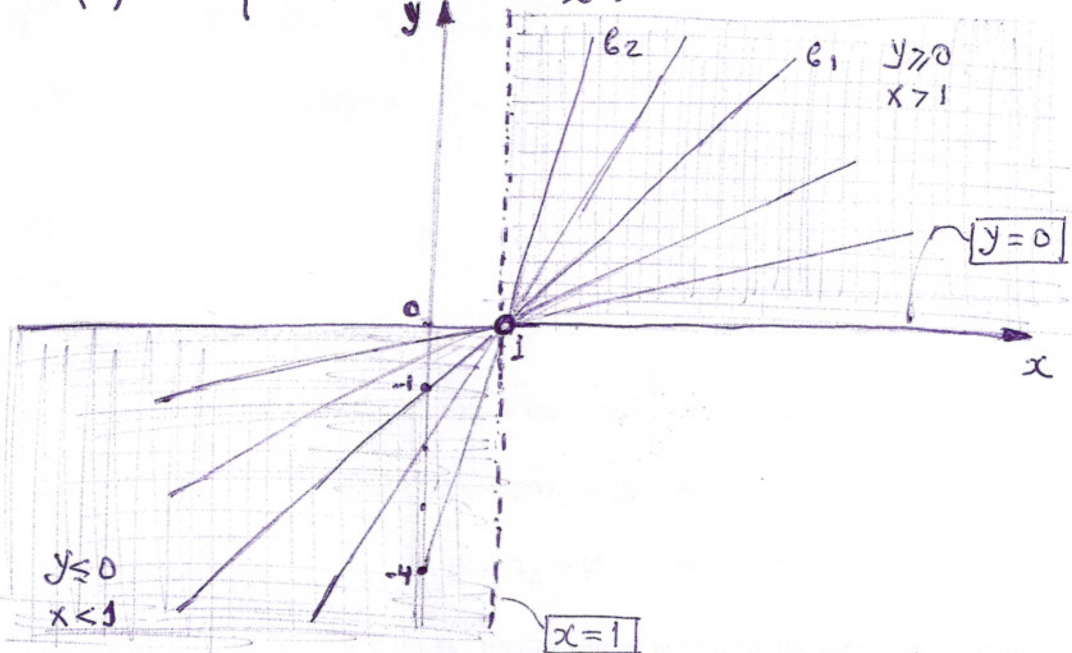
5. Encontre e classifique os extremos locais da função:

$$f(x,y) = x^2y(1-x-y)$$

6. Um recipiente cilíndrico deverá ter um volume de $4\pi\ cm^3$. O custo (por cm^2) de fabricação da tampa e da base de metal é o dobro do custo do restante do recipiente, feito de cartolina grossa. Quais são as dimensões do recipiente mais barato?

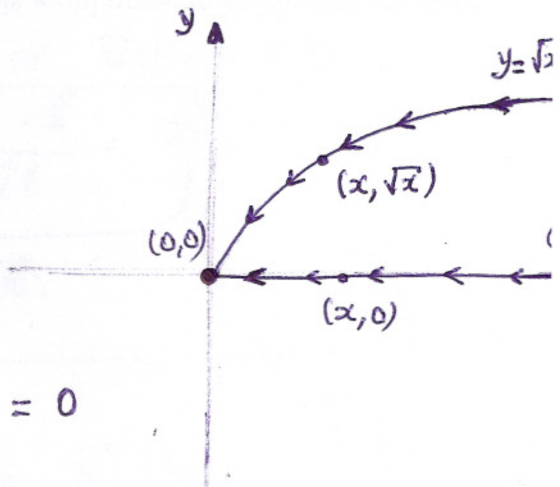
$\boxed{1}$ $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{x-1}}$

(i) $Dom(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ \dfrac{y}{x-1} \geq 0 \right\}$



(ii) Curvas de Nivel : $C_K : f(x,y) = K$ $\begin{cases} K = 0 \Rightarrow C_0 : y = 0 \\ K = 1 \Rightarrow C_1 : y = x-1 \\ K = 2 \Rightarrow C_2 : y = 4(x-1) \\ K = 3 \Rightarrow C_3 : y = 9(x-1) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y\sqrt{x}}{5x+3y^2} = ?$



Seja $F(x,y) = \dfrac{3y\sqrt{x}}{5x+3y^2}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in C_1}} F(x,y) = \lim_{x\to 0} F(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{x\to 0} F(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{3\sqrt{x}\sqrt{x}}{5x+3(\sqrt{x})^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{8}$$

3

$$P(U,R) = \frac{U^2}{R}$$

$$dP = P_U \, dU + P_R \, dR$$

$$dP = \left(\frac{2U}{R}\right) dU + \left(-\frac{U^2}{R^2}\right) dR$$

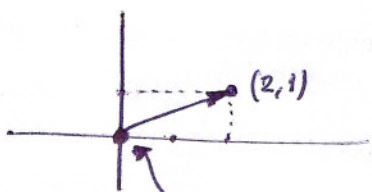
$U = 120$, $dU = -0.001$
$R = 12$, $dR = 0.002$ $\Rightarrow$ $dP = \left(\frac{2 \times 120}{12}\right)\left(\frac{-1}{1000}\right) + \left(-\frac{(120)^2}{(12)^2}\right)$

$$dP = -0.02 - 0.2$$

$$dP = -0.22$$

4 Seja $z = x^2 + xy + y^2$

a)



Taxa de Variação em $(0,0) = D_{\vec{u}} f(0,0)$ onde $\vec{u} = (2,1)$

$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \frac{\nabla f(0,0) \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|} = 0$$

b) $D_{\vec{u}} f(0,0) = 0 \quad \forall \vec{u}$.

$\nabla f(2,1) = (5, 4)$

$D_{\vec{u}} f(2,1)$ é máxima see $\vec{u} = (5,4)$

$D_{\vec{u}} f(2,1) = \|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

c) $D_{\vec{u}} f(2,1) = 0$ see $\vec{u} \perp \nabla f(2,1)$

$\therefore$ $u = (-4, 5)$ ou $\vec{u} = (4, -5)$

$f(x,y) = x^2 y (1-x-y)$ ou $f(x,y) = x^2y - x^3y - x^2y^2$

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 3x^2y - 2xy^2 \\ f_y = x^2 - x^3 - 2x^2y \end{cases}$$

Pontos críticos $\nabla f = \vec{0}$

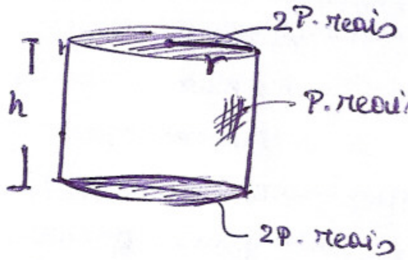
$$\begin{cases} xy(2-3x-2y) = 0 \\ x^2(1-x-2y) = 0 \end{cases}$$

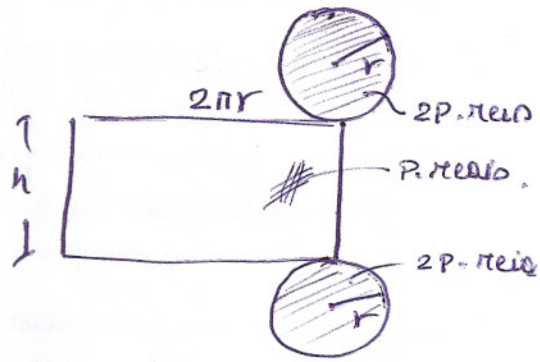
$A(0,y)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$\begin{cases} f_{xx} = 2y - 6xy - 2y^2 \\ f_{xy} = 2x - 3x^2 - 4xy \\ f_{yy} = -2x^2 \end{cases}$$

Ponto	f_{xx}	f_{xy}	f_{yy}	$f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2$	Natureza
$A(0,y)$	$2y-2y^2$	0	0	0	?
$B(1,0)$	0	-1	-2	-1	Ponto. Sela. local
$C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{2}{16} > 0$	Ponto de Máximo

6





Volume $g(r,h) = \pi r^2 h = 4\pi$

Custo: $f(r,h) = \pi r^2 (4P) +$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8\pi r + 2\pi h)P = \lambda(2\pi r h) & \dots (1) \\ (2\pi r)P = \lambda(\pi r^2) & \dots (2) \\ \pi r^2 h = 4\pi & \dots (3) \end{cases}$$

De (2): $\lambda = \frac{2P}{r} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \boxed{h = 4r} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \begin{cases} r = 1 \\ h = 4 \end{cases}$