

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

Nome: JUAN CARLOS VILA BRAVO

Nota=4.0

Exercícios de cálculo II (Funções vetoriais)

Curitiba, 13 de Março de 2017

1. Considere duas partículas $P1$ e $P2$ viajando segundo as trajetórias:

$$r_1(t) = (t - 1, 3 + 2t, 4t - t^2) \text{ e } r_2(t) = (\sqrt{t+1}, t^2, 6 - t), \quad t \geq 0$$

As partículas colidem? Onde? Qual instante?

Rpta:

Fazendo $r_1(t) = r_2(t)$ obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} t - 1 = \sqrt{t+1} \\ 3 + 2t = t^2 \\ 4t - t^2 = 6 - t \end{cases} \quad \text{de onde temos que } t = 3$$

Colidem no ponto $(2, 9, 3)$ no instante $t = 3$.

2. Determine $T(t)$, $N(t)$ (tangente unitário e normal principal) para a função vetorial $r(t) = (t^2 - 1, t)$ no ponto $t = 1$.

Rpta:

Dado $r(t) = (t^2 - 1, t)$, temos que $r'(t) = (2t, 1)$. Por tanto o vetor tangente no ponto $r(1) = (0, 1)$ é $r'(1) = (2, 1)$. Dai concluímos que:

$$T(1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad N(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

3. Determine o comprimento da trajetórias abaixo para o intervalo especificado:

$$r(t) = (t^2, 2t, \ln t); \quad 1 \leq t \leq e$$

Rpta:

Dado $r(t) = (t^2, 2t, \ln t)$ temos que $r'(t) = (2t, 2, \frac{1}{t})$

Por tanto, o comprimento da curva é:

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_1^e \sqrt{4t^2 + 4 + \frac{1}{t^2}} \, dt \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^2} \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^e \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \left[t^2 + \ln t\right]_1^e \\
&= e^2 + \ln e - 1 - \ln 1 \\
&= e^2 + 1 - 1 - 0 \\
&= e^2
\end{aligned}$$

4. Seja $\mathcal{C}$ uma curva de $\mathbb{R}^2$ definida pela função vetorial $r(t) = (t^2 + 1, t)$ com $t \in [0, 2]$

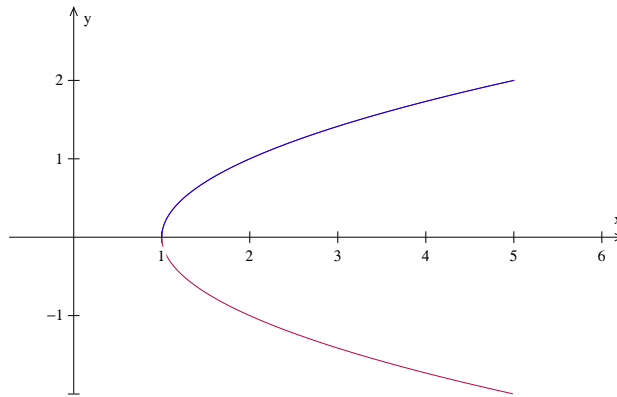
(a) Trace a curva $\mathcal{C}$.

(b) Determine a equação do círculo osculador da curva no ponto $(2, 1) \in \mathcal{C}$.

Rpta: Das equações

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t \end{cases} \quad \text{obtem-se} \quad x = y^2 + 1$$

Portanto o gráfico de $\mathcal{C}$ está contido no gráfico da Parábola $x = y^2 + 1$



Logo, a curvatura no ponto $(2, 1) = r(1)$ é $k(1) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$.

Portanto o raio de curvatura no ponto $(2, 1) = r(1)$ é $\rho(1) = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Para calcular o centro do círculo de curvatura, basta lembrar que: o vetor tangente a curva no ponto $(2, 1) = r(1)$ é dado por $r'(1) = (2, 1)$, daí temos que :

$$T(1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{ e } N(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Logo o centro do círculo de curvatura é:

$$C = r(1) + \rho(1)N(1) = (2, 1) + \frac{5\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{9}{2}, -4\right)$$

Finalmente , a equação do círculo de curvatura é

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y + 4)^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2$$