

Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

Nome:

Exercicios de cálculo II (Funções de várias variáveis)

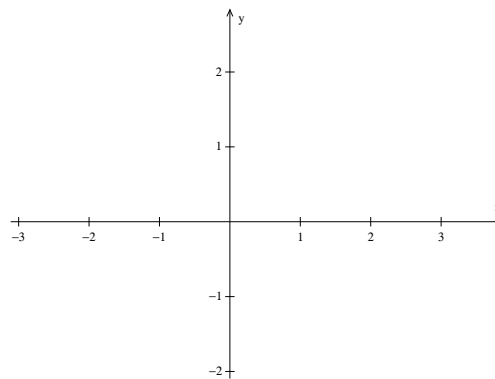
Curitiba, 5 de Abril de 2017

1. Determine e esboce os dominios das seguintes funções:

(i) $f(x, y) = \sqrt{xy}$

solução:

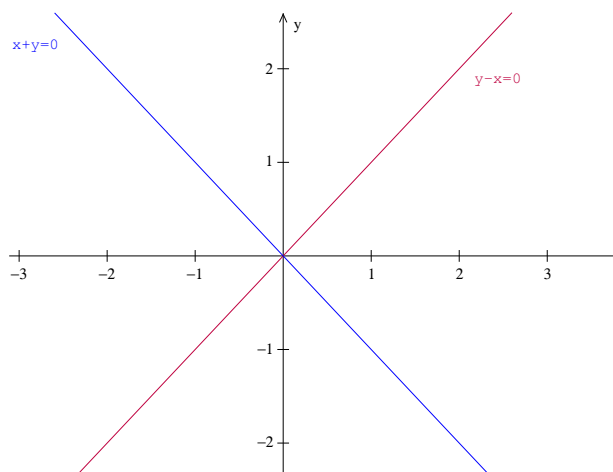
$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 0\}$$



(ii) $f(x, y) = \sqrt{y-x} \ln(x+y)$

solução:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y-x \geq 0 \text{ e } x+y > 0\}$$



2. Calcule o limite, se ele existir, ou mostre que ele não existe

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{4x^4 + y^4}$$

solução: Denotemos por

$$f(x, y) = \frac{3xy}{4x^4 + y^4}$$

Se escolhermos o caminho $x = 0$, obtemos:

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Se escolhermos o caminho $y = x^3$, obtemos:

$$\lim_{(x,x^3) \rightarrow (0,0)} f(x, x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{4 + x^8} = \frac{3}{4}.$$

Por tanto o limite não existe.

$$(ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$$

solução:

Seja

$$f(x, y) = \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} = \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

onde $h = x - 1$ e $k = y - 2$.

Por tanto:

$$(x, y) \rightarrow (1, 2) \quad \text{se e somente se} \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

denotemos por $g(h, k) = \frac{hk}{h^2 + k^2}$, então:

Se escolhermos o caminho $h = 0$ ($x = 1$), obtemos:

$$\lim_{(0,k) \rightarrow (0,0)} g(0, k) = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Se escolhermos o caminho $h = k$ ($y = x + 1$), obtemos:

$$\lim_{(k,k) \rightarrow (0,0)} g(k, k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto o limite não existe.

3. Regra da cadeia

- (i) Calcule $\frac{dz}{dt}$, onde $z = xy + x^2$, com $x = e^t \cos t$ e $y = e^{-t}$.

solução:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (y + 2x)(e^t \cos t - e^t \sin t) + (x)(-e^{-t})$$

- (ii) Um circuito elétrico consiste de um resistor R e de uma força eletromotriz V .

Num dado instante, $V = 80 \text{ volts}$ e aumenta a uma taxa de 5 volts/min , enquanto que $R = 40 \text{ ohms}$ e decresce a uma taxa de 2 ohms/min . Da Lei de Ohm, sabe-se

que a corrente é dada por $I = V/R$. Calcule $\frac{dI}{dt}$.

solução:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dV} \frac{dV}{dt} + \frac{dI}{dR} \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{1}{R}\right) \frac{dV}{dt} + \left(-\frac{V}{R^2}\right) \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\frac{1}{40}\right)(5) + \left(-\frac{80}{40^2}\right)(-2) = 0,225$$

4. Determine as equações do plano tangente e reta normal às superfícies abaixo, no ponto especificado.

- (i) $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$, $P(-1, 2, 1)$.

solução:

seja $f(x, y, z) = xyz - 4xz^3 + y^3$, então:

$$\nabla f(x, y, z) = (yz - 4z^3, xz + 3y^2, xy - 12xz^2)$$

$$\nabla f(-1, 2, 1) = (-2, 11, 10) \neq \vec{0}$$

então é vetor normal a superfície no ponto $(-1, 2, 1)$, logo o plano tangente e reta normal tem por equação:

$$\pi_t : -2x + 11y + 10z = 34$$

$$l_t : (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(-2, 11, 10)$$

- (ii) $z = \frac{2x + y}{x - 2y}$, $P(3, 1, 7)$

solução: Da equação $z = \frac{2x+y}{x-2y}$, temos: $xz - 2yz - 2x - y = 0$

se consideramos a superfície $f(x, y, z) = xz - 2yz - 2x - y = 0$ então:

$$\nabla f(x, y, z) = (z - 2, -2z - 1, x - 2y)$$

$$\nabla f(3, 1, 7) = (5, -15, 1) \neq \vec{0}$$

entao é vetor normal a superfície no ponto $(3, 1, 7)$, logo o plano tangente e reta normal tem por equação:

$$\pi_t : 5x - 15y + z = 7$$

$$l_t : (x, y, z) = (3, 1, 7) + \lambda(5, -15, 1)$$