Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica
Prof. Juan Carlos Vila Bravo

---

**$1^{ra}$ prova de cálculo III**
Curitiba, 04 Abril de 2012

1. Encontre a solução geral da equação diferencial ordinária linear de primeira ordem
$$(xy - x^2)dx + dy = 0$$

2. Verifique que a equação diferencial dada não é exata. Multiplique a equação diferencial dada por um fator integrante apropriado e verifique que a nova equação diferencial é exata. Resolva-a
$$(y + xy + 2y^2)dx + (x + 4y)dy = 0$$

3. Resolva a seguinte equação diferencial $y' + 2y^2 = 4xy + \frac{y}{x} - 2x^2$ utilizando a mudança de variável $y = x + \frac{1}{z}$.

4. Suponhamos que temos 1 $gr$ de un estranho material radioativo que decai a uma taxa proporcional à raíz quadrada da quantidade presente no instante $t$. Apos um ano, observou-se a existencia de 0.25 $gr$. Depois de quantos anos teremos $0.1gr$ ? Comprovar que este material desintegra-se totalmente num tempo finito e calcular ese tempo.

5. Considere a familia de hipérbolas $xy = C$. Escrever a equação diferencial das trajetórias ortogonais a essa familia de hipérbolas. Achar as trajectorias ortogonaias a essa familia de hipérbolas (curvas que as cortan perpendicularmente).

---

BOA SORTE !

1ª Prova Cálculo III

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

**Nota:**

Disciplina:

Professor:

Data: 04 / 04 /

Eq. Linear:

$$(xy - x^3)dx + dy = 0$$

$$(xy - x^3) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\boxed{y' + xy = x^3}$$

Fator integrante: $u(x) = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$

$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + x e^{\frac{x^2}{2}} y = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right)' = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

Integrando:

$$e^{\frac{x^2}{2}} y = \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx + C$$

$$= \int x^2 \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' dx + C$$

$$= x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - \int 2x e^{\frac{x^2}{2}} dx + C$$

$$= x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2 e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

$$\left(y + xy + 2y^2\right)dx + (x + 4y)\,dy = 0$$

$$M(x,y) = y + xy + 2y^2 \quad \wedge \quad N(x,y) = x + 4y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + x + 4y \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ ∴ A eq. diferencial não é Exata.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x + 4y$$

∴ $$\boxed{\frac{M_y - N_x}{N} = 1}$$ ..... Função de $x$.

Neste caso o factor integrante é

$$u(x) = e^{\int\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)dx} = e^{\int dx} = e^{x}$$

Multiplicando a Equação pelo factor Integrante:

$$\underbrace{e^{x}\left(y + xy + 2y^2\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{e^{x}(x + 4y)}_{N(x,y)} dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M_y &= e^{x}(1 + x + 4y) \\ N_x &= e^{x}(x+4y) + e^{x}(1) \end{aligned}\right] \Rightarrow$$ Portanto a Eq. agora Exata.

Uma função $\varphi(x,y)$ tal que:

Integrando ② em relação a $y$:

$$\varphi(x,y) = e^{x}\left(xy + 2y^2\right) + c(x)$$

derivando em relação a $x$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{x}(xy + 2y^2) + e^{x}(y) + c'(x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{x}\left(y + xy + 2y^2\right) + c'(x) \quad \ldots \text{③}$$

De ① e ③, tem-se:

$$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c.\ \text{const.}$$

$$c(x) = 0$$

$\therefore$ A solução da Eq. diferencial é:

$$\boxed{e^{x}\left(xy + 2y^2\right) = c}$$ Solução na forma Implícita.

Equação: $y' + 2y^2 = 4xy + \frac{y}{x} - 2x^2$

Usar a mudança de variável:

$$y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

Substituindo:

$$\left(1 - \frac{z'}{z^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{z}\right)^2 = \left(4x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{z}\right) - 2x$$

$$\frac{z'}{z^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{4\frac{x}{z}} + \frac{1}{z^2} = \cancel{4x^2} + \cancel{4\frac{x}{z}} + \cancel{1} + \frac{1}{xz} - \cancel{\ }$$

$$-Z' + 1 = \frac{Z}{x}$$

$$Z' + \frac{1}{x} Z = 1$$

ltiplicando por $x$ :

$$x Z' + 1 \cdot Z = x$$

$$(xZ)' = x$$

$$xZ = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{Z = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}}$$

ou

$$Z = \frac{x^2 + 2C}{2x}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = x + \frac{2x}{x^2 + 2C}}$$

$y(t)$ · quantidade do material:

$$\therefore \quad y'(t) \propto \sqrt{y(t)}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y'(t) = k\sqrt{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = k\,y^{1/2} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{y^{1/2}} = k\,dt}$$

integrando $2y^{1/2} = kt + c$

$$\boxed{y^{1/2} = \frac{k}{2}t + \frac{c}{2}}$$

$$\boxed{y = \left(\frac{kt}{2}\right)^2}$$ Solução da Eq. diferen

$y(0) = 1 \Rightarrow 1^{1/2} = 0 + \frac{c}{2} \Rightarrow \boxed{c = 2}$

$$\therefore \boxed{y^{1/2} = \frac{k}{2}t + 1}$$

$y(1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \frac{k(1)}{2} + 1$

$$\frac{1}{2} = \frac{k}{2} + 1$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{k}{2} \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

$$\therefore \boxed{\left(y(t)\right)^{1/2} = -\frac{1}{2}t + 1}$$

$= ?\,;\ y(t_0) = \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^{1/2} = -\frac{1}{2}t_0 + 1 \Rightarrow \boxed{t_0 = 2 - \frac{2}{\sqrt{10}}}$

$= ?\,;\ y(t_1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}t_1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = 2 \text{ anos}}$

Derivando em relação a $x$

$$xy = c \Longrightarrow y + xy' = 0$$

isolando $y'$, obtem-se:

$$\boxed{y'_{(x)} = \frac{-y}{x}}$$

o curvas ortogonais satisfazem a seguinte Eq. Difer

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x\,dx - y\,dy = 0}$$

Resolvendo esta Eq. diferencial, obtem-se

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + K$$

ou $$\boxed{\frac{x^2}{2K} - \frac{y^2}{2K} = 1}$$ Família de Hipérboles