Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica   Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} prova de cálculo II

Curitiba, 26 de Março de 2012

1. Esboce o gráfico da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (3t, 1 - 9t^2)$ com $t \in \mathbb{R}$.

2. Se a curva $\mathcal{C}$ é dada por $x = 3t^2 + 1, \;\; y = 4t, \;\; z = e^{t-1}$, determine a equação da reta tangente no ponto $P(4, 4, 1)$.

3. Determine a curvatura da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (\dfrac{1}{1+t}, \dfrac{1}{1-t})$ no ponto $(\frac{2}{3}, 2)$.

4. Determine o comprimento da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \text{sen } t, e^t)$ de $t = 0$ até $t = \pi$.

5. A posição de uma particula é dada por: $\sigma(t) = (e^{-t})i + (e^{2t})j$ quando $t \geq 0$

   5i) Em que pontos da trajetoria da particula a reta tangente é paralela à reta $x + 4y = 2$.

   5ii) Determine a curvatura da curva $\sigma(t)$ no ponto $(2, \frac{1}{4})$

UFPR

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

Nota: ____________

Disciplina: ____________

Curso: ____________ Professor: ____________

Aluno: Gabarito

Turma: ____________ Data: ___/___/___

1 $\gamma(t) = (3t, 1-9t^2)$

$x = 3t$
$y = 1 - 9t^2$ $\Rightarrow$ $y = 1 - 9\left(\frac{x}{3}\right)^2$

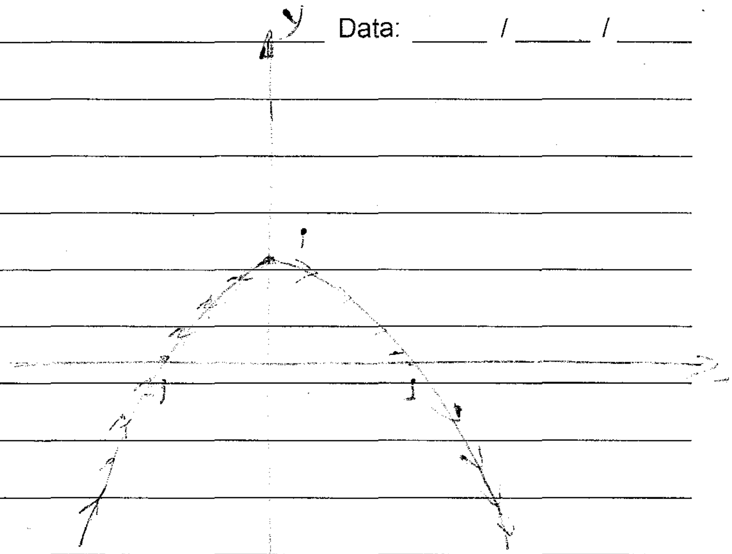
$y = 1 - x^2$

$t \in \mathbb{R}$ $\quad$ $y - 1 = -x^2$

$t^2 \geq 0$

$-9t^2 \leq 0$

$1 - 9t^2 \leq 1$



$$\boxed{\text{graf}(\gamma(t)) = \text{graf}(y = 1 - x^2)}$$

2 $\gamma(t) = (3t^2+1, 4t, e^{t-1})$

$\gamma'(t) = (6t, 4, e^{t-1})$

$P(4,4,1) = \gamma(1) \Rightarrow \gamma'(1) = (6, 4, 1)$

$r_t : (x,y,z) = (4,4,1) + \lambda(6,4,1)$ . . Reta tangente

3 $\gamma(t) = \left(\frac{1}{1+t}, \frac{1}{1-t}\right)$

$x = \frac{1}{1+t} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1+t$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} = 2 - \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{1-t} \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - t$

$\frac{1}{y} = \frac{2x-1}{x}$

$$y = \frac{x}{2x-1} \Rightarrow \frac{x}{2x-1} = 2$$

$$x = 2(2x-1)$$

$$f(x) = \frac{x}{2x-1} \qquad x = 4x-2$$

$$2 = 3x$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1(2x-1) - x(2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(2x-1)^2} = -(2x-1)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(2x-1)^{-3}(2) = 4(2x-1)^{-3} = \frac{4}{(2x-1)^3}$$

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{\{1 + (f'(x))^2\}^{3/2}} \qquad f'\left(\frac{2}{3}\right) = -9$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \times 27$$

$$K\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4 \times 27}{\{1 + 81\}^{3/2}} = \frac{4 \times 27}{82\sqrt{82}}$$

4.

$$\gamma(t) = \left(e^t\cos t,\ e^t \sin t,\ e^t\right)$$

$$\gamma'(t) = \left(e^t\cos t - e^t \sin t,\ e^t \sin t + e^t \cos t,\ e^t\right)$$

$$\gamma'(t) = e^t\left(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t,\ 1\right)$$

$$\|\gamma'(t)\| = e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1}$$

$$= e^t\sqrt{3}$$

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} e^t\sqrt{3}\,dt = \sqrt{3}\left(e^{\pi} - 1\right)$$

5.

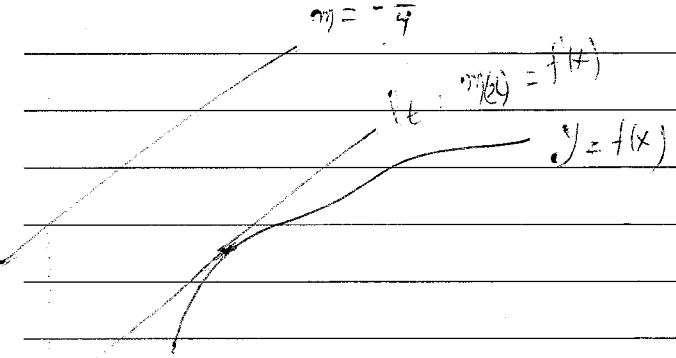
$$\gamma(t) = \left(e^{-t},\ e^{2t}\right)$$

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = e^{-2t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y = 1 \\ \boxed{y = \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$$

reta: $x + 4y = 2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$

$$m = -\frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow m(x) = -\frac{2}{x^3}$$



$$\frac{-2}{x^3} = -\frac{1}{4}$$

$$x^3 = 8$$

$$\boxed{x = 2}$$

o ponto é $= \left(2, \frac{1}{4}\right)$

(ii)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$f'' = \frac{6}{x^4} \Rightarrow f''(2) = \frac{6}{16}$$

$$K(2) = \frac{\left(\frac{6}{16}\right)}{\left\{1 + \frac{1}{16}\right\}^{3/2}} = \frac{6/\cancel{16}}{\frac{17}{\cancel{16}}\sqrt{\frac{17}{16}}} = \frac{6/1}{\frac{17\sqrt{17}}{4}} = \frac{24}{17\sqrt{17}}$$