Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} prova de cálculo II

Curitiba, 27 de Agosto de 2014

1. Determinar a equação da reta tangente à curva $\sigma(t) = (\cos t, \text{sen } t, 1 - 2\text{sen } t)$ no ponto $(-1, 0, 1)$.

2. Considere a curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (t^3 - 3t, t^3 - 5t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (i) Determine o ponto onde a curva $\mathcal{C}$ tem reta tangente paralela à reta
   $$-7x + 9y + 4 = 0.$$

   (ii) Em que pontos a reta tangente é vertical?

   (iii) Em que pontos a reta tangente é horizontal?

3. Encontre o comprimento da curva $\sigma(t) = (t^3, t^2)$ com $t \in [1, 3]$.

4. Encontre uma equação para o círculo de curvatura da curva $r(t) = (3\cos t, 5\text{sen } t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, no ponto $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$.

5. A função posição de uma partícula em movimento é dada por $r(t) = (t^2, 5t, t^2 - 16t)$.

   (i) Em que ponto da trajetória a velocidade e aceleração são ortogonais ?

   (ii) Em que ponto da trajetória sua velocidade escalar é mínima?

6. **PROBLEMA QUENTE:**

   Mostre que o traço de $\sigma(t) = (\cos t, \text{sen } t, 1 - \text{sen } t)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma curva plana. Determine o plano que a contém o traço de $\sigma(t)$. Determine os pontos da curva $\sigma(t)$ onde a curvatura é máxima ? e mínima?

Formulario:

Comprimento de arco $L(\mathcal{C}) = \displaystyle\int_a^b ||\sigma'(t)||dt....$

Curvatura $k = \dfrac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} = \dfrac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{3/2}} = \dfrac{||\sigma'(t) \times \sigma''(t)||}{||\sigma'(t)||^3}.$

Torção: $\tau = -\dfrac{[\ \sigma'(t) \times \sigma''(t)\ ] \cdot \sigma'''(t)}{||\sigma'(t) \times \sigma''(t)||^2}$

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas

Nota: ______________

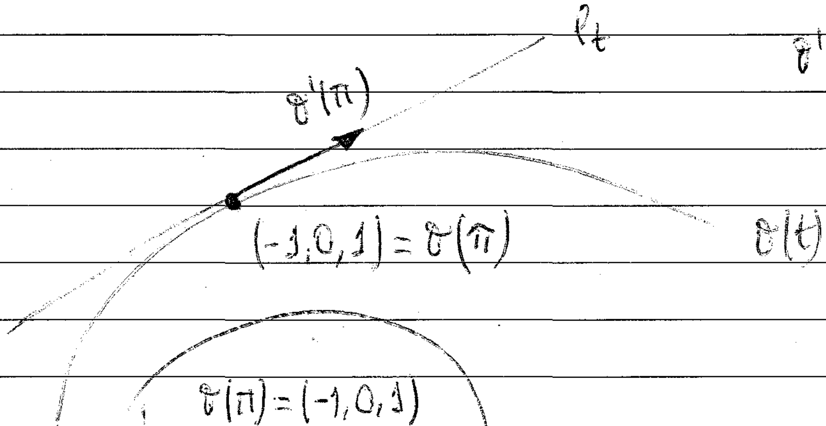
Disciplina: ______________________________

Professor: ______________________________

Data: ____ / ____ / ____

$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 - 2\operatorname{sen} t)$

$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2\ldots$



$\sigma(\pi) = (-1, 0, 1)$

$\sigma'(\pi) = (0, -1, 2)$

$l_t : (x, y, z) = \sigma(\pi) + \lambda\, \sigma'(\pi)$

$l_t : (x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda (0, -1, 2)$ Reta tangente passando Pelo ponto $\sigma(\pi) = (-1, 0, 1)$

$$l_t : \begin{cases} x = -1 \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$r(t) = (t^3 - 3t, t^3 - 5t - 1)$ $t \in \mathbb{R}$

$r'(t) = (3t^2 - 3, 3t^2 - 5)$

l_t

) Os pontos onde temos reta tangente paralela à reta $-7x+9y+4=0$ são:

$$r(2) = (2, -3)$$

e

$$r(-2) = (-2, 1)$$

(ii) Em que pontos temos reta tangente vertical?

$$r'(t) \perp i \iff 3t^2-3=0$$

$$\therefore \quad t = \pm 1$$

$$r(1) = (-2, -5)$$

$$r(-1) = (2, 3)$$

(iii) Em que pontos temos reta tangente Horizontal?

$$r'(t) \perp \vec{j} \iff 3t^2-5=0$$

$$t^2 = \frac{5}{3}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$r\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) =$$

$$r\left(-\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) =$$

] $r(t) = (t^3, t^2)$ com $1 \le t \le 3$

$$L(\mathcal{C}) = \int_1^{3} t\sqrt{9t^2+4}\,dt = \left[\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left(9t^2+4\right)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left\{85^{3/2} - 13^{3/2}\right\} = \frac{1}{27}\left\{85\sqrt{85} - 13\right.$$

$\gamma(t) = (3\cos t, 5\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Elipse: $\boxed{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1}$

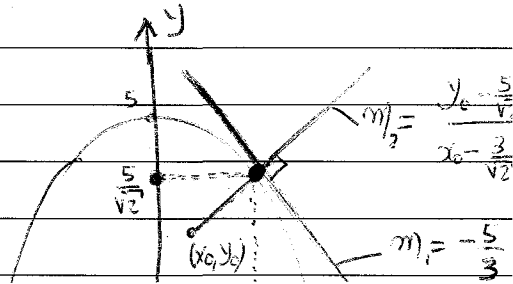
Curvatura no ponto $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right) = \gamma\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$K(t) = \frac{\left|x''(t)\,y'(t) - x'(t)\,y''(t)\right|}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}^{\,3}} \quad \text{em} \quad t = \frac{\pi}{4}$$

$x(t) = 3\cos t$ | $x'(t) = -3\,\text{sen}\,t$ | $x''(t) = -3\cos t$

$y(t) = 5\,\text{sen}\,t$ | $y'(t) = 5\cos t$ | $y''(t) = -5\,\text{sen}\,t$

$$K\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{15}{17\sqrt{17}}$$



$\rho(\;\;) = 17\sqrt{17}$

$$\begin{cases} y_0 - \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5}\left(x_0 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) & \text{(1)} \\ \left(x_0 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{17\sqrt{17}}{15}\right)^2 & \text{(2)} \end{cases}$$

De (1) em (2)

$$\left(x_0 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{25}\left(x_0 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{17^2 \times 17}{15^2}$$

$$\frac{\cancel{34}^{\,2}}{\cancel{25}_{\,1}}\left(x_0 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{17^2 \times \cancel{17}^{\,1}}{\cancel{15^2}_{\,9}}$$

$$\left(x_0 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{17^2}{9} \cdot \frac{1}{2}$$

$$x_0 - \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{17}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{17}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_0 = -\frac{8}{3\sqrt{2}}$$

$$y_0 - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{5} \times \frac{17}{3\sqrt{2}}$$

$$y_0 - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{17}{5\sqrt{2}}$$

$$y_0 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{17}{5\sqrt{2}}$$

$$y_0 = \frac{8}{5}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(x + \frac{8}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{5\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{17}{15}\sqrt{17}\right)^2.$$

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas

1912 - 2012

Nota: ____________

Disciplina: ____________

Professor: ____________

Data: ___ / ___ / ___

$$r'(t) \cdot r''(t) = 0$$

$$(2t, 5, 2t-16) \cdot (2, 0, 2) = 0$$

$$4t + 4t - 32 = 0$$

$$8t = 32$$

$$t = 4 \Rightarrow \boxed{r(4) = (16, 20, -48)}$$

$$v(t) = \|r'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 25 + 4t^2 - 64t + 16^2}$$

$$v(t) = \sqrt{8t^2 - 64t + 281}$$

Achar o t onde $v(t)$ é mínimo.

$$v'(t) = \frac{1}{2} \frac{(16t - 64)}{\sqrt{8t^2 - 64t + 281}} = 0$$

Ponto crítico.

$$v'(t) = \frac{1}{2} \frac{16(t-4)}{\sqrt{8t^2 - 64t + 281}}$$

$$\boxed{t = 4}$$

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \sin t)$

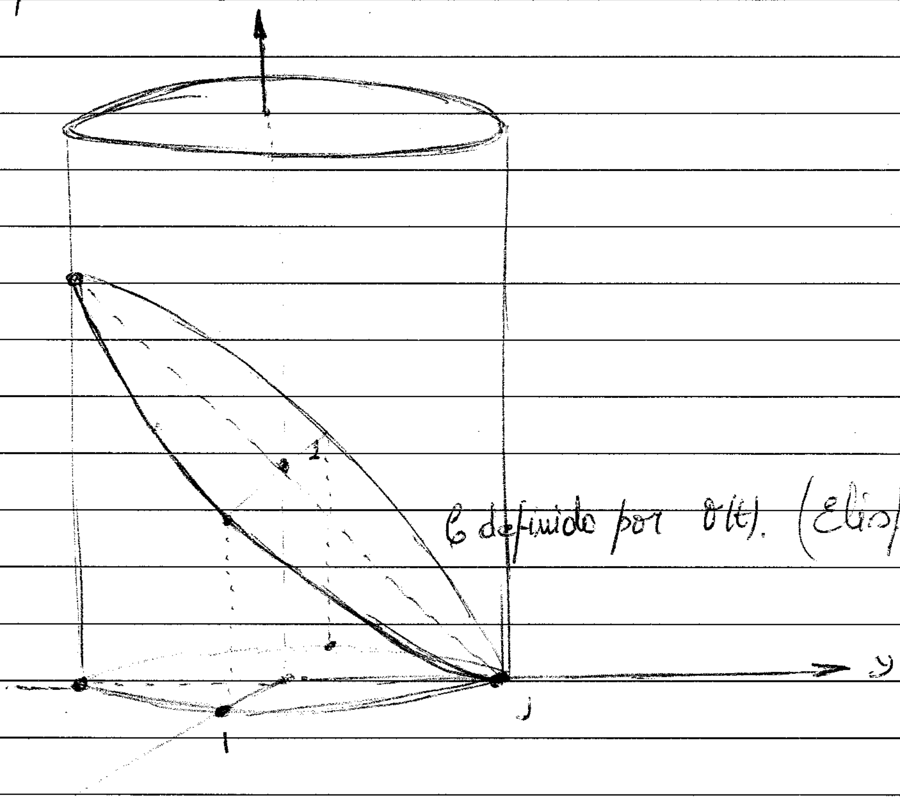
$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 - \sin t \end{array} \right.$$

$\mathcal{C}$ esta no cilindro x^2+y

tambem temos $y + z = 1$

$\therefore$ $\boxed{\mathcal{C} \text{ esta no plano } y + z = 1}$

$\mathcal{C}$ esta na intersegão do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $y+z=1$



$\mathcal{C}$ definido por $\sigma(t)$. (Elipse)