Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

2^{da} prova de Cálculo I

Curitiba, 26 Março de 2014

1. **limites de funções** Calcule, caso existam, os limites abaixo. Se não existirem justifique.

   (a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{3x^2+3x-6}{x^2+2x-3}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{|x-2|}{x^2-4}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{\ln(x+3)}{x+2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

2. **Gráfico de uma função**

   (i) Ache as assíntotas verticais, horizontais e obliquas do gráfico da seguinte função:

   $$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

   (ii) Represente aproximadamente o gráfico da função $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

3. Calcular os valores de $a, b, \cancel{c}$ de tal forma que a seguinte função seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} ax - x^2 + b, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 2ax^2 + 2b, & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ ax^2 - ax - 2b, & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

1 Limite de funções.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+3x-6}{x^2+2x-3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(3x+6)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+6}{x+3} = \dfrac{9}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-2|}{x^2-4} = \dfrac{|-1|}{-3} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\ln(x+3)}{x+2} = \dfrac{\ln 1}{0} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \underset{u=x+2}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(u+1)}{u} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right) = 0$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{-x} = \left[\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} =$

2 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$Dom(f) = \{x\in\mathbb{R} \; ; \; x\neq 0\} \Rightarrow x=0$. Asintota Vertical.

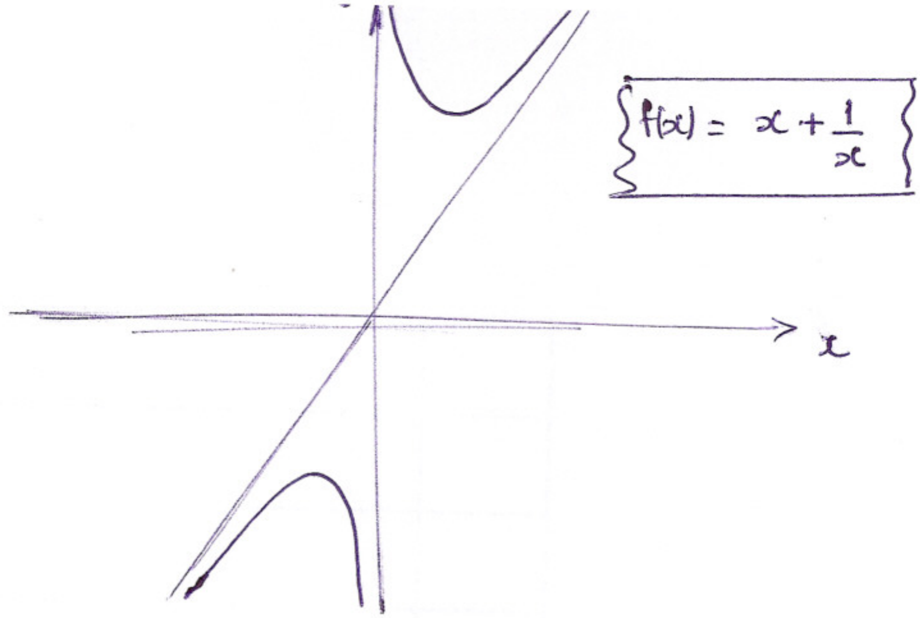
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ asintota Horizontal.

Asintota obliqua : $\exists\, m\neq 0$ e b ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - [mx+b] =$

$0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - [mx+b] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \dfrac{1}{x} - mx - b\right)$

$= (1-m)(\pm\infty) + 0 - b$

$\therefore \boxed{m=1}$ e $\boxed{b=0}$



$\boxed{3}$ Calcular a, b de tal forma que a seguinte função seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} ax - x^2 + b, & \text{se } x \le 1 \\ 2x - 2ax^2 + 2b, & \text{se } 1 < x \le 3 \\ ax^2 - ax - 2b, & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$a - 1 + b = 2 - 2a + 2b \Rightarrow 3a - b = 3$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$6 - 18a + 2b = 9a - 3a - 2b \Rightarrow -24a + 4b = -6$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 3a - b = 3 \\ -24a + 4b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ e } b = -\frac{9}{2}$$