Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica

Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} prova de cálculo II

Curitiba, 20 de Abril de 2011

1. (10-ptos) Mostre que o seguinte limites não existe: $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3y\sqrt{x}}{5x+6y^2}$

2. (20-ptos) Determine, se existir, o plano tangente ao gráfico das funções dadas nos pontos indicados.

   (a) $2x^2+y^2-z^2=0$ no ponto: $P(0,0,0)$.

   (b) $ye^z+xz-x^2-y^2=0$ no ponto $Q(0,1,0)$.

3. (20-ptos) A altura de um cone circular é de $h=100cm$ e decresce a razão de $10cm/seg$. O raio da base é de $r=50cm$ e cresce a razão de $5cm/seg$. Com que velocidade está variando o volume, quando $h=100cm$ e $r=50cm$?

4. (10-ptos)Usando diferencial calcule o valor aproximado de $(1,001)^{3,02}$.

5. (20-ptos)Seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1,3), B(3,3), C(1,7)$ e $D(6,15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor $\vec{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção do vetor $\vec{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\vec{AD}$.

6. (20-ptos) Os cursos de dois rios (dentro dos limites de uma determinada região) são representados aproximadamente pela parábola $y=x^2$ e pela reta $x-y-2=0$. Deve-se unir esses rios por meio de um canal retilíneo que tenha o menor comprimento possível. Por quais pontos devemos traça-lo? Qual será sua extensão ?

BOA SORTE !

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas

UFPR 100 Anos 1912 - 2012

Nota:

Disciplina:

Curso: ENg. Química.

Professor: EU

Aluno: EU

Turma:

Data: / /

Gabarito. 1era Prova. Cálculo II

$\boxed{1}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{3y\sqrt{x}}{5x+6y^2}$$

C_1: eixo x $(y=0)$ $\Rightarrow$ $f(x,0) = \dfrac{0}{5x} = 0$ $\therefore$ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$

C_2: $y=\sqrt{x} \Rightarrow f(x,\sqrt{x}) = \dfrac{3\sqrt{x}\sqrt{x}}{5x+6(\sqrt{x})^2} = \dfrac{3x}{5x+6x} = \dfrac{3}{11} \Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{x}}} f(x,y) = \frac{3}{11}$

$$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

$\boxed{2}$ a) $\nexists \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\nexists \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ $\therefore$ $\nexists$ Plano tangente.

b)

$$ye^z + xz - x^2 - y^2 = 0$$

$$F(x,y,z) = 0$$

$$\nabla F(x,y,z) = (z-2x,\ e^z-2y,\ ye^z+x)$$

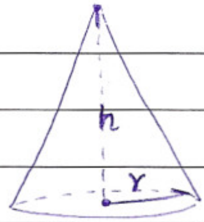
$$\nabla F(0,1,0) = (0,-1,1)$$

Plano tangente: $(x-0,\ y-1,\ z-0)\cdot(0,-1,1) = 0$

$$-y+1+z = 0$$

$$\boxed{-y+z=-1}$$

$\boxed{3}$



$h = 100\ cm \quad , \quad \dfrac{dh}{dt} = -10\ cm/seg.$

$r = 50\ cm \quad , \quad \dfrac{dr}{dt} = 5\ cm/seg.$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = V_r \frac{dr}{dt} + V_h \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi r}{3}\frac{dr}{dt} h + \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{\partial h}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi}{3}(50)(5)(100) + \frac{1}{3}\pi (50)^2(-10)$$

$$= \frac{20\pi(50)^2}{3} - \frac{10}{3}(50)^2\pi$$

$$= \frac{10\pi(50)^2}{3}.$$

$\boxed{4}$ $f(x,y) = x^y$ com x. proximo de 1
y - proximimo de 3.

$\hookrightarrow$ Linerizar $f(x,y)$ no ponto $(1,3)$

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

Onde $(x_0,y_0) = (1,3) \quad \wedge \quad (x,y) = (1,001, 3.02)$

$f(x,y) = x^y = e^{y\ln x} \longrightarrow f(1,3) = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y\ln x}\frac{y}{x} = x^y\left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y\ln x}\ln x = x^y(\ln x) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 0$$

$$L(x,y) = 1 + 3(x-1) + 0(y-3)$$

$$L(x,y) = 3x - 2$$

$$L(1.001, 3.02) = 3(1.001) - 2)$$
$$= 3.003 - 2$$
$$= 1.003$$

$$(1.001)^{3.02} \simeq 1.003.$$

$\boxed{5}$

$A(1,3)$
$B(3,3)$
$C(1,7)$
$D(6,15)$

$\overrightarrow{AB} = B - A$
$\overrightarrow{AB} = (2,0)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = 2$

$\overrightarrow{AC} = C - A$
$\overrightarrow{AC} = (0,4)$
$\|\overrightarrow{AC}\| = 4$

$\overrightarrow{AD} = D - A$
$\overrightarrow{AD} = (5,12)$
$\|\overrightarrow{AD}\| = 13$

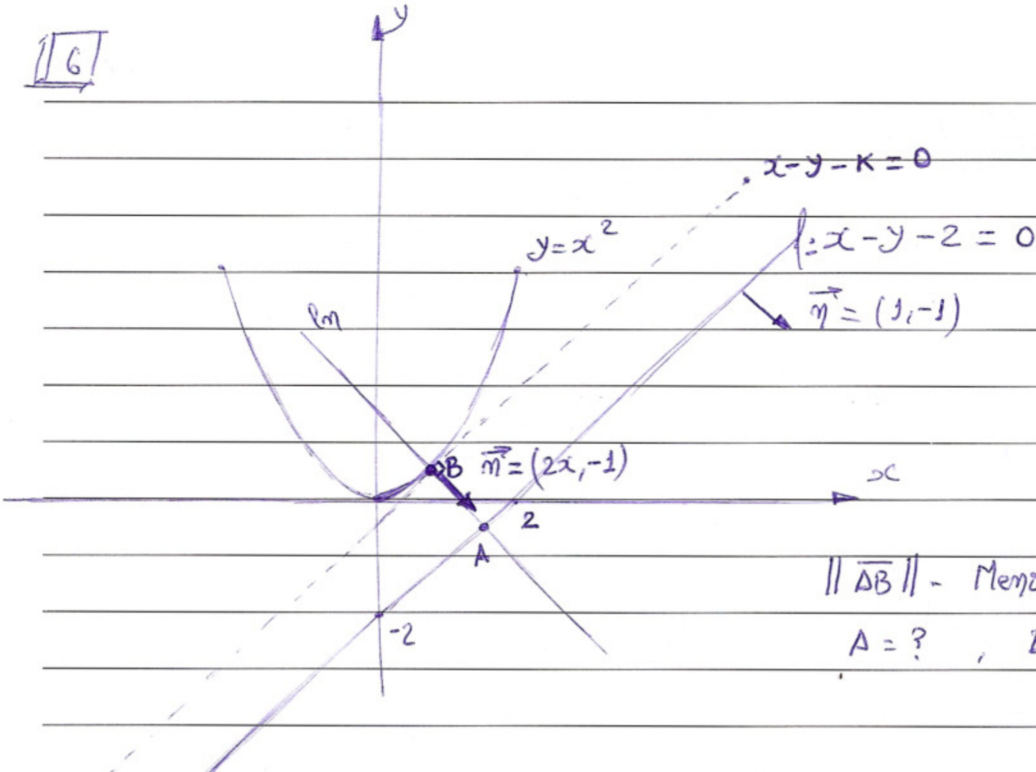
$$D_{\overrightarrow{AB}} f(A) = 3 \Rightarrow \nabla f(A) \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 3 \Rightarrow 2\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 6 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 3$$

$$D_{\overrightarrow{AC}} f(A) = 26 \Rightarrow \nabla f(A) \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = 26 \Rightarrow 4\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 104 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 26$$

$$D_{\overrightarrow{AD}} f(A) = \nabla f(A) \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \frac{(3,26)\cdot(5,12)}{13} = \frac{15 + 312}{13} = \frac{327}{13}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 52 \\ \hline 312 \\ 15 \\ \hline 327 \end{array}$$

6



$\| \overline{AB} \|$ - Menor comprimento

$A = ?$, $B = ?$

B. ponto na curva $y = x^2$ onde a reta tangente é paralela a $x - y - 2 = 0$

$\therefore \quad (2x, -1) \parallel (1, -1) \quad \therefore \quad 2x = 1$

$x = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{1}{4}$

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Seja $A(x, y) \in \ell \ \therefore \quad \overrightarrow{BA} \parallel (1, -1)$

$\Downarrow$

$x - y = 2$

$\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{4}\right) = \lambda(1, -1)$

$$\frac{x - 1/2}{1} = \frac{y - \frac{1}{4}}{-1} = \lambda$$

$$-x + \frac{1}{2} = y - \frac{1}{4}$$

$$x + y = \frac{3}{4}$$

$\therefore \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = \frac{3}{4} \end{cases}$

$2x = \frac{11}{4}$

$x = \frac{11}{8}$

$y = x - 2$

$y = \frac{11}{8} - 2$

$y = -\frac{5}{8}$

Os pontos são:

$A\left(\frac{11}{8}, \frac{-5}{8}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$