LAURENCE D. HOFFMANN & GERALD L. BRADLEY

CÁLCULO

Um Curso Moderno e Suas Aplicações

9ª
Edição

gen | LTC

ÍNDICE DE APLICAÇÕES SELECIONADAS

BIOLOGIA, SAÚDE E ECOLOGIA

CIÊNCIAS FÍSICAS E GEOMETRIA

CIÊNCIAS SOCIAIS

CÁLCULO

Um Curso Moderno e Suas Aplicações

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Visão Geral da Nona Edição

Cálculo – Um Curso Moderno e Suas Aplicações pode ser usado em um curso de cálculo de um ou dois semestres por estudantes que têm o equivalente a dois anos de álgebra no Ensino Médio. Nossa introdução ao cálculo aplicado a contextos do mundo real proporciona uma compreensão sólida e intuitiva dos conceitos básicos de que os estudantes necessitam para uma carreira nos campos de negócios, economia, finanças e investimentos, biologia, ciências ambientais e da saúde, ciências físicas e ciências sociais. Procuramos ensinar as técnicas do cálculo diferencial e integral sem sacrificar o rigor matemático. Enunciamos as principais definições e teoremas de forma precisa e generalista, oferecendo, sempre que possível, uma motivação e uma interpretação intuitiva ou geométrica. Nosso objetivo foi tornar todos os conceitos e idéias fáceis de compreender. Além disso, apresentamos muitas aplicações práticas do cálculo que os alunos poderão encontrar em suas carreiras e em estudos de extensão.

A Oitava Edição de *Cálculo – Um Curso Moderno e Suas Aplicações* foi um grande sucesso. Nos últimos cinco anos, mais de 100.000 estudantes do mundo inteiro usaram a obra como livro-texto. Quando perguntados sobre que fatores tornam o livro mais interessante para o curso que fizeram ou estão fazendo, os usuários mencionam a ênfase em aplicações, a abordagem voltada para a solução de problemas, o estilo direto e conciso e as extensas listas de exercícios. Nosso objetivo sempre foi ajudar os professores a organizar a matéria de tal forma que cada seção do texto corresponda a uma única aula e cada capítulo contenha uma variedade de assuntos suficiente para uma prova. Os alunos precisam saber de que forma o cálculo pode ser aplicado à sua área de interesse. Para ajudar os professores a adequar as aplicações a uma determinada turma, organizamos as seções de aplicações de acordo com sua utilidade na área de negócios e economia ou de ciências sociais e biológicas. Os exercícios aplicados são rotulados para facilitar a identificação e as mais de 400 aplicações aparecem em um índice atrás da primeira e da quarta capas.

Embora os resultados obtidos com a Oitava Edição tenham sido excelentes, muitos resenhistas e usuários apresentaram sugestões para melhorar o texto. Essas pessoas nos proporcionaram uma ajuda inestimável para preparar a Nona Edição. Elas nos ajudaram a realçar os tópicos e aplicações mais importantes que tornam este livro apropriado para estudantes de negócios, economia e ciências sociais. Também chamaram a atenção para a necessidade de exercícios mais numerosos e sofisticados, cobertura mais enxuta e explicações mais claras a respeito de certos tópicos e dados atualizados para manter nossas aplicações práticas atraentes e relevantes. Com grande esforço e atenção aos detalhes, implementamos essas sugestões, o que resultou em uma Nona Edição mais eficaz, tanto para alunos como para professores.

Melhoramentos desta Edição

Há vários melhoramentos significativos e importantes nesta Nona Edição, muitos dos quais foram introduzidos em resposta a recomendações de usuários e resenhistas.

Melhor Cobertura dos Tópicos

Todas as seções do livro foram cuidadosamente analisadas e submetidas a uma revisão minuciosa para assegurar que a apresentação fosse a mais clara possível. Passos adicionais e quadros de definição foram acrescentados sempre que necessário para maior clareza e precisão, e discussões e introduções foram reescritas para melhorar a apresentação. Uma lista mais detalhada das modificações, capítulo por capítulo, é apresentada mais adiante neste prefácio.

Novos Exercícios

Duzentos novos problemas convencionais e aplicados foram acrescentados às listas já extensas de exercícios. Com base em sugestões dos usuários, problemas convencionais foram acrescentados para assegurar que os alunos praticassem o suficiente para adquirir conhecimentos básicos. Além disso, muitos novos problemas aplicados foram introduzidos para demonstrar a importância prática dos assuntos estudados. Estes novos problemas se referem a muitos campos de estudo, como economia, negócios, biologia, medicina e outras áreas das ciências sociais. Foi feito um grande esforço para atualizar os exemplos e exercícios aplicados sempre que possível.

Lembretes

O objetivo dos Lembretes é chamar a atenção do aluno para conceitos importantes da álgebra e da trigonometria que estão sendo usados em exemplos e discussões. Eles são colocados na margem, perto do local onde o assunto é abordado, para alertar os alunos sem desviar a atenção do texto principal. Lançados na Oitava Edição, fizeram tanto sucesso que decidimos introduzir novos Lembretes em pontos estratégicos do texto na Nona Edição.

Modelagem Matemática

O papel da modelagem matemática aparece como tema recorrente neste livro em aplicações que envolvem tanto economia e negócios, como ciências sociais. A introdução à modelagem no Capítulo 1 foi revista e ampliada e é reforçada por muitos novos exemplos e exercícios em todos os capítulos do livro. Na Nona Edição, novas discussões a respeito de modelagem foram acrescentadas no texto sobre integração do Capítulo 5 e no texto sobre equações diferenciais do Capítulo 6.

Tecnologia

Os quadros Explore! da Nona Edição foram atualizados para aumentar a compatibilidade com calculadoras modernas como a TI-84 Plus e revistos para torná-los mais claros. As seções Atualização do Explore! foram também revistas para fornecer sugestões e soluções mais claras para alguns quadros Explore!

Introdução às Calculadoras Gráficas

A introdução às calculadoras gráficas que aparece nas páginas xix a xxvi foi atualizada para a Nona Edição para torná-la compatível com calculadoras modernas como a TI-84 Plus. A matéria inclui instruções relativas às teclas mais comuns das calculadoras, a terminologia das calculadoras e instruções para aplicações mais avançadas das calculadoras que são apresentadas com detalhes em vários pontos do texto. A Introdução às Calculadoras pode servir como referência básica para alunos pouco familiarizados com o uso de calculadoras gráficas ou como orientação para usos mais ambiciosos no caso de alunos com alguma experiência.

Mudanças Principais, Capítulo por Capítulo

Os usuários de versões anteriores deste livro poderão estar interessados na lista detalhada de mudanças a seguir. Esta lista chama atenção para os muitos melhoramentos introduzidos nesta edição para atender às sugestões dos resenhistas e usuários.

Capítulo 1: Funções, Gráficos e Limites

- Foram acrescentados muitos novos problemas convencionais e aplicados a áreas como poluição do ar, arquitetura, gestão de custos, receita, produção, corretagem de imóveis e outras.
- A introdução à modelagem matemática da Seção 1.4 foi revista e ampliada e os diferentes passos foram destacados.
- A subseção da Seção 1.4 a respeito do Equilíbrio do Mercado foi revista para torná-la mais clara.

Capítulo 2: Derivação: Conceitos Básicos

- Foram acrescentados muitos novos problemas convencionais e aplicados a áreas como cardiologia, despesas domésticas, custo de produção, depreciação, produção industrial, qualidade de vida e outras.
- A introdução à derivada na Seção 2.1 foi revista e ampliada para maior clareza e riqueza de detalhes.
- Um exemplo que serve de introdução às tangentes horizontais foi acrescentado à Seção 2.3.

Capítulo 3: Aplicações Adicionais da Derivada

- Foram acrescentados muitos novos problemas convencionais e aplicados a áreas como gestão de custos, propaganda, custo médio, botânica, gastos do governo, construção civil, estoques, hipotecas, distribuição populacional, disseminação de uma doença, distribuição de eleitores e outras.

- A subseção da Seção 3.2 a respeito de Pontos de Inflexão foi revista para maior clareza e um novo quadro de definições e um novo quadro de procedimentos foram acrescentados.

Capítulo 4: Funções Logarítmicas e Exponenciais

- Foram acrescentados muitos novos problemas convencionais e aplicados a áreas como a concentração de um medicamento no sangue e o tempo necessário para triplicar um valor.
- A subseção da Seção 4.2 a respeito das Propriedades dos Logaritmos foi revista para maior clareza e uma nova tabela que mostra as propriedades correspondentes das funções logarítmicas e exponenciais foi acrescentada.

Capítulo 5: Integração

- Foram acrescentados muitos novos problemas convencionais e aplicados a áreas como produção média, conservação, horticultura, prêmios de loterias, valor atual de um investimento, temperatura e outros.
- A discussão do valor médio de uma função na Seção 5.4 foi consideravelmente modificada, com exemplos revistos, discussão ampliada e novos quadros de definições.
- A Seção 5.6 foi revista e consideravelmente ampliada. Novas subseções a respeito de Densidade Populacional e de Volume de um Sólido de Revolução foram introduzidas, juntamente com novos exemplos, figuras e quadros de definições, e a discussão a respeito de sobrevivência e renovação foi ampliada e generalizada.

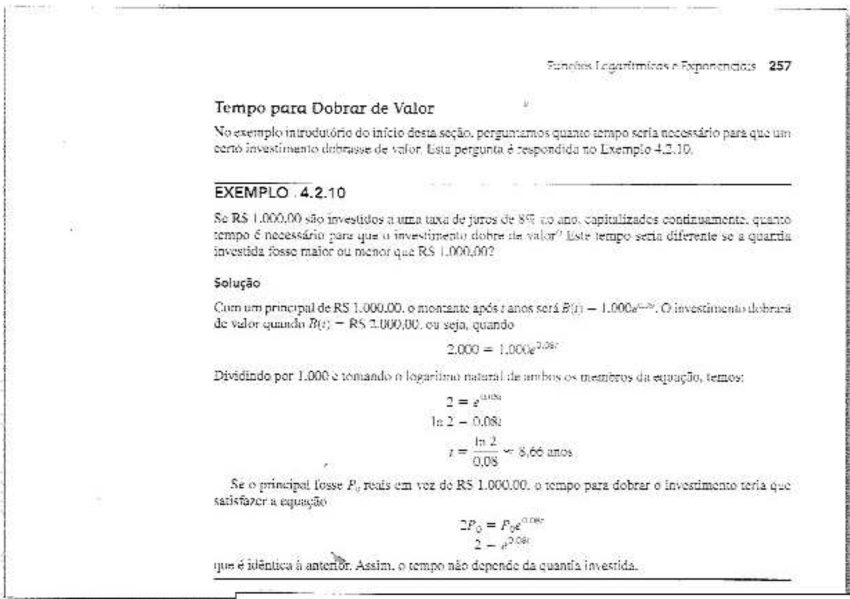
Capítulo 6: Outros Tópicos de Integração

- Foram acrescentados muitos novos problemas convencionais e aplicados a áreas como excedente do consumidor, valor futuro de um investimento, rejeitos nucleares, densidade populacional, eficiência dos operários e outras.
- A introdução às equações diferenciais da Seção 6.2 foi revista e ampliada com uma discussão a respeito de modelagem. Uma nova subseção sobre Crescimento Logístico e vários novos exemplos e figuras foram acrescentados para melhorar esta seção.
- Um novo exemplo comercial a respeito da interpretação de dados com integração numérica foi introduzido na Seção 6.4.

Capítulo 7: Cálculo de Várias Variáveis

- Foram acrescentados muitos novos problemas convencionais e aplicados a áreas como distribuição de mão-de-obra, amortização de dívidas, construção civil, demanda dos consumidores, retorno constante de escala, paisagismo, embalagens, vendas no varejo e outras.
- Foi introduzida uma nova subseção na Seção 7.2, intitulada A Regra da Cadeia para Derivadas, com uma nova discussão, novos quadros de definições e procedimentos, novos exemplos computacionais e aplicados e uma nova lista de problemas.
- A discussão a respeito do método dos multiplicadores de Lagrange na Seção 7.5 foi revista para maior clareza e o quadro de procedimentos foi atualizado.
- Foram introduzidas na Seção 7.6 subseções a respeito de Integrais Duplas em Regiões Não-retangulares e Aplicações das Integrais Duplas.

CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DESTE LIVRO



Tempo para Dobrar de Valor

No exemplo introdutório do início desta seção, perguntamos quanto tempo seria necessário para que um certo investimento dobrasse de valor. Esta pergunta é respondida no Exemplo 4.2.10.

EXEMPLO 4.2.10

Se R$ 1.000,00 são investidos a uma taxa de juros de 8% ao ano, capitalizados continuamente, quanto tempo é necessário para que o investimento dobre de valor? Este tempo seria diferente se a quantia investida fosse maior ou menor que R$ 1.000,00?

Solução

Com um principal de R$ 1.000,00, o montante após t anos será $B(t) = 1.000e^{0,08t}$. O investimento dobrará de valor quando $B(t) = $ R$ 2.000,00, ou seja, quando

$$2.000 = 1.000e^{0,08t}$$

Dividindo por 1.000 e tomando o logaritmo natural de ambos os membros da equação, temos:

$$2 = e^{0,08t}$$
$$\ln 2 = 0,08t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0,08} \approx 8,66 \text{ anos}$$

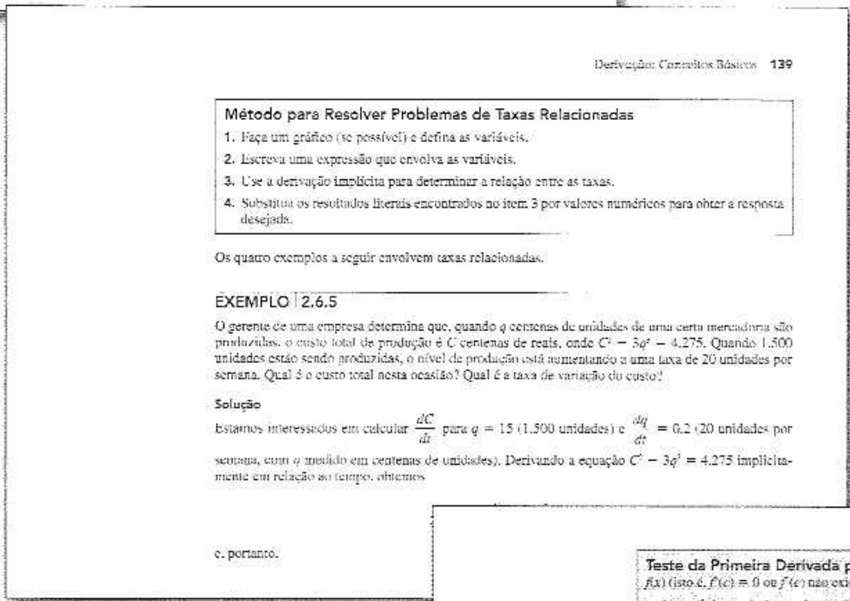
Se o principal fosse P_0 reais em vez de R$ 1.000,00, o tempo para dobrar o investimento teria que satisfazer a equação

$$2P_0 = P_0e^{0,08t}$$
$$2 = e^{0,08t}$$

que é idêntica à anterior. Assim, o tempo não depende da quantia investida.

Aplicações

Em todo o texto, foi feito um grande esforço para assegurar que os tópicos fossem aplicados a problemas práticos logo depois de serem introduzidos, apresentando métodos para lidar tanto com cálculos de rotina como com problemas aplicados. Esses métodos e estratégias de solução de problemas são introduzidos em problemas aplicados e praticados nas listas de exercícios. Muitos novos exemplos aplicados foram introduzidos nesta Nona Edição a partir de uma grande variedade de fontes, com uma atenção especial para eliminar dados obsoletos. Uma lista completa de todas as aplicações usadas no texto pode ser encontrada no Índice de Aplicações atrás da primeira e da quarta capas.



Método para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

1. Faça um gráfico (se possível) e defina as variáveis.
2. Escreva uma expressão que envolva as variáveis.
3. Use a derivação implícita para determinar a relação entre as taxas.
4. Substitua os resultados literais encontrados no item 3 por valores numéricos para obter a resposta desejada.

Os quatro exemplos a seguir envolvem taxas relacionadas.

EXEMPLO 2.6.5

O gerente de uma empresa determina que, quando q centenas de unidades de uma certa mercadoria são produzidas, o custo total de produção é C centenas de reais, onde $C^2 - 3q^2 = 4.275$. Quando 1.500 unidades estão sendo produzidas, o nível de produção está aumentando a uma taxa de 20 unidades por semana. Qual é o custo total nesta ocasião? Qual é a taxa de variação do custo?

Solução

Estamos interessados em calcular $\frac{dC}{dt}$ para $q = 15$ (1.500 unidades) e $\frac{dq}{dt} = 0,2$ (20 unidades por semana, com q medido em centenas de unidades). Derivando a equação $C^2 - 3q^2 = 4.275$ implicitamente em relação ao tempo, obtemos

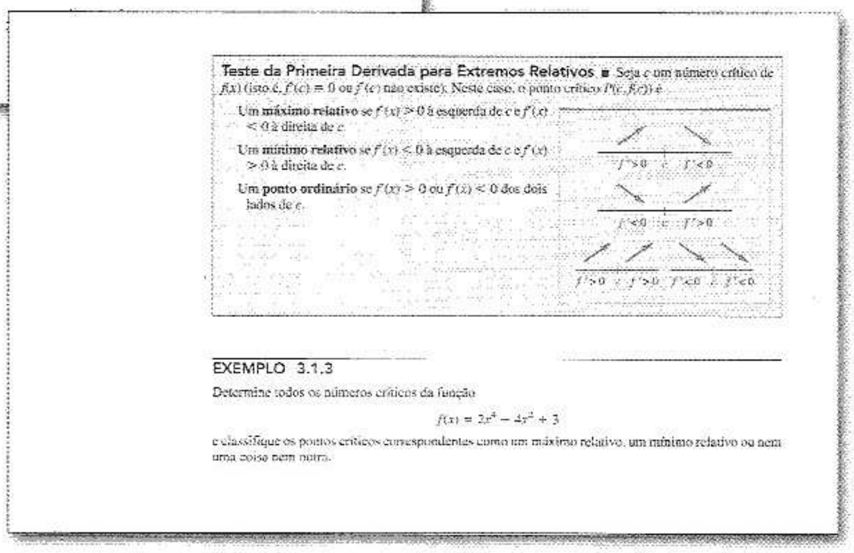
e, portanto,

Exemplos e Quadros de Procedimentos

Neste livro, procuramos facilitar o entendimento de tópicos novos através da apresentação de técnicas detalhadas de solução de problemas. Estas técnicas são ilustradas através de exemplos e resumidas em quadros introduzidos em pontos estratégicos do texto.

Definições

Definições e conceitos importantes são destacados do texto para facilitar a busca por parte do aluno.



Teste da Primeira Derivada para Extremos Relativos ■ Seja c um número crítico de $f(x)$ (isto é, $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe). Neste caso, o ponto crítico $P(c, f(c))$ é

Um máximo relativo se $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita de c.

Um mínimo relativo se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita de c.

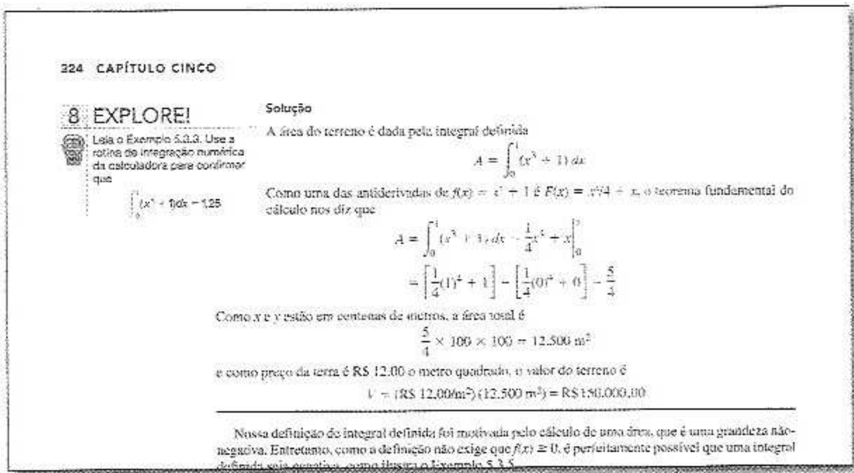
Um ponto ordinário se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ dos dois lados de c.

EXEMPLO 3.1.3

Determine todos os números críticos da função

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$$

e classifique os pontos críticos correspondentes como um máximo relativo, um mínimo relativo ou nem uma coisa nem outra.


324 CAPÍTULO CINCO

8 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.3.3. Use a rotina de integração numérica da calculadora para confirmar que

$\int_0^1 (x^3 + 1)dx = 1{,}25$

Solução

A área do terreno é dada pela integral definida

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\,dx$$

Como uma das antiderivadas de $f(x) = x^3 + 1$ é $F(x) = x^4/4 + x$, o teorema fundamental do cálculo nos diz que

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x\Big|_0^1 = \left[\frac{1}{4}(1)^4 + 1\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^4 + 0\right] = \frac{5}{4}$$

Como x e y estão em centenas de metros, a área total é

$$\frac{5}{4} \times 100 \times 100 = 12.500\ m^2$$

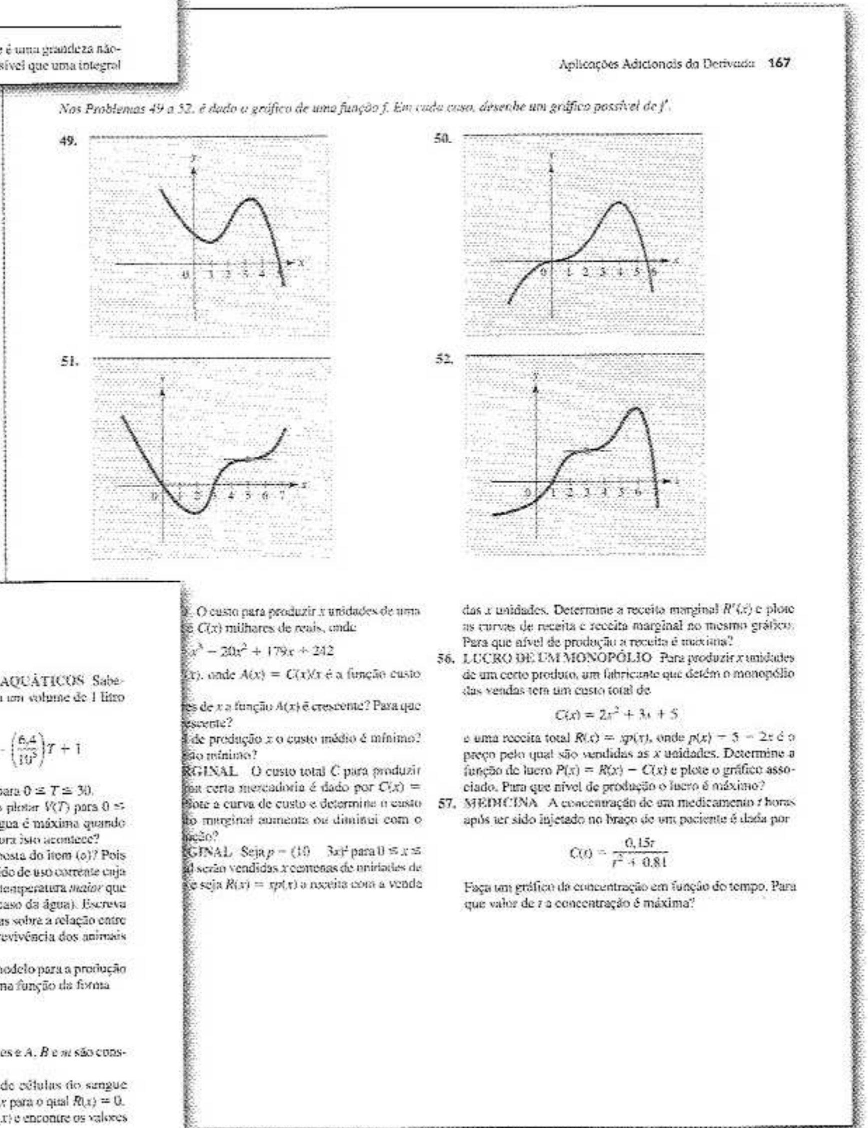
e como preço da terra é R\$ 12,00 o metro quadrado, o valor do terreno é

$$V = (R\$\ 12{,}00/m^2)(12.500\ m^2) = R\$\ 150.000{,}00$$

Nossa definição de integral definida foi motivada pelo cálculo de uma área, que é uma grandeza não-negativa. Entretanto, como a definição não exige que $f(x) \geq 0$, é perfeitamente possível que uma integral definida seja negativa, como ilustra o Exemplo 5.3.5.

Lembretes

Estas observações, posicionadas nas margens, são usadas para chamar a atenção do aluno para conceitos importantes da álgebra e da trigonometria que estão sendo usados em exemplos e discussões. Discussões mais detalhadas destes conceitos podem ser encontradas no Apêndice A: Revisão de Álgebra.


Aplicações Adicionais da Derivada 167

Nos Problemas 49 a 52, é dado o gráfico de uma função f. Em cada caso, desenhe um gráfico possível de f'.

49.

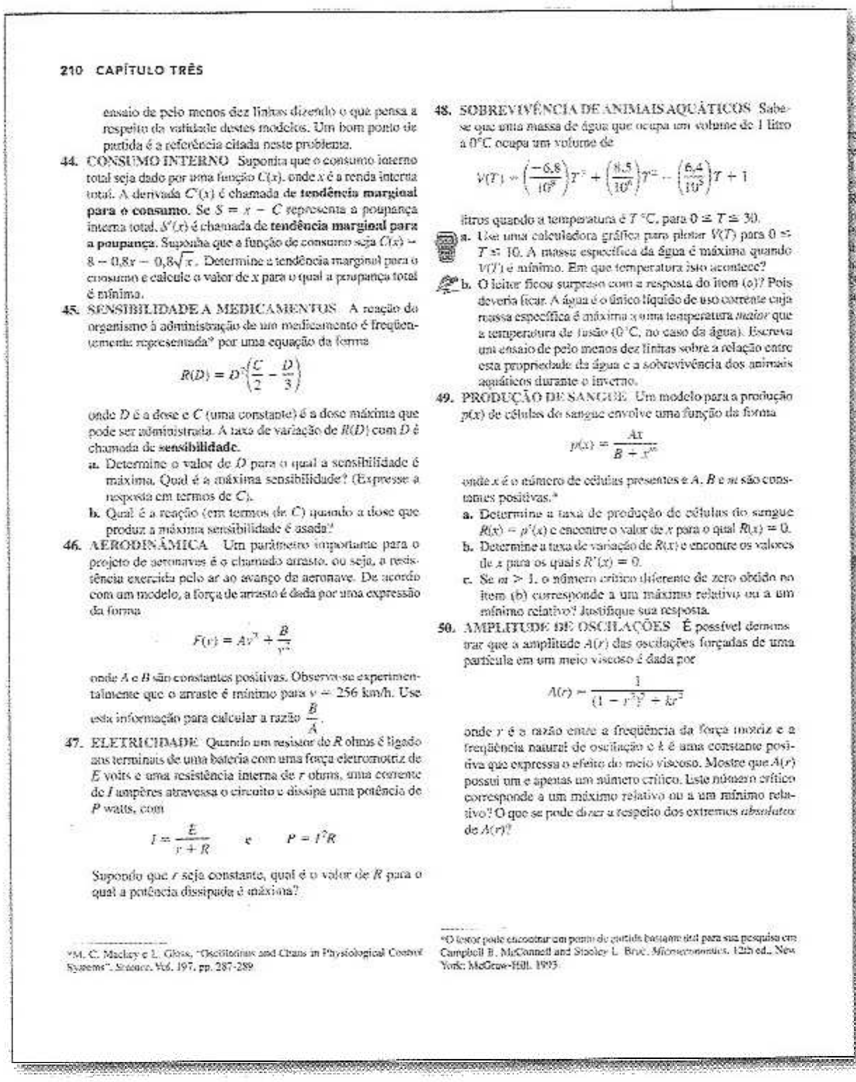
50.

51.

52.

Listas de Exercícios

As listas de exercícios foram consideradas um ponto forte das edições anteriores; a Nona Edição oferece 200 novos problemas para aumentar ainda mais a eficácia destas listas. Foram introduzidos novos problemas convencionais para que os estudantes desenvolvessem o domínio de certas habilidades básicas e novos problemas práticos para demonstrar a aplicação da matéria a situações do dia-a-dia. As respostas dos problemas ímpares de cada seção, dos exercícios de verificação e dos problemas ímpares de revisão de cada capítulo aparecem no final do livro.


210 CAPÍTULO TRÊS

ensaio de pelo menos dez linhas dizendo o que pensa a respeito da validade destes modelos. Um bom ponto de partida é a referência citada neste problema.

44. CONSUMO INTERNO Suponha que o consumo interno total seja dado por uma função $C(x)$, onde x é a renda interna total. A derivada $C'(x)$ é chamada de **tendência marginal para o consumo**. Se $S = x - C$ representa a poupança interna total, $S'(x)$ é chamada de **tendência marginal para a poupança**. Suponha que a função de consumo seja $C(x) = 8 - 0{,}8x - 0{,}8\sqrt{x}$. Determine a tendência marginal para o consumo e calcule o valor de x para o qual a poupança total é mínima.

45. SENSIBILIDADE A MEDICAMENTOS A reação do organismo à administração de um medicamento é freqüentemente representada* por uma equação da forma

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

onde D é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de $R(D)$ com D é chamada de **sensibilidade**.

a. Determine o valor de D para o qual a sensibilidade é máxima. Qual é a máxima sensibilidade? (Expresse a resposta em termos de C.)

b. Qual é a reação (em termos de C) quando a dose que produz a máxima sensibilidade é usada?

46. AERODINÂMICA Um parâmetro importante para o projeto de aeronaves é o chamado arrasto, ou seja, a resistência exercida pelo ar ao avanço de aeronave. De acordo com um modelo, a força de arrasto é dada por uma expressão da forma

$$F(v) = Av^2 + \frac{B}{v^2}$$

onde A e B são constantes positivas. Observa-se experimentalmente que o arraste é mínimo para $v = 256$ km/h. Use esta informação para calcular a razão $\frac{B}{A}$.

47. ELETRICIDADE Quando um resistor de R ohms é ligado aos terminais de uma bateria com uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms, uma corrente de I ampères atravessa o circuito e dissipa uma potência de P watts, com

$$I = \frac{E}{r + R} \quad \text{e} \quad P = I^2R$$

Supondo que r seja constante, qual é o valor de R para o qual a potência dissipada é máxima?

48. SOBREVIVÊNCIA DE ANIMAIS AQUÁTICOS Sabe-se que uma massa de água que ocupa um volume de 1 litro a 0°C ocupa um volume de

$$V(T) = \left(\frac{-6{,}8}{10^8}\right)T^3 + \left(\frac{8{,}5}{10^6}\right)T^2 - \left(\frac{6{,}4}{10^5}\right)T + 1$$

litros quando a temperatura é T °C, para $0 \leq T \leq 30$.

a. Use uma calculadora gráfica para plotar $V(T)$ para $0 \leq T \leq 10$. A massa específica da água é máxima quando $V(T)$ é mínimo. Em que temperatura isto acontece?

b. O leitor ficou surpreso com a resposta do item (a)? Pois deveria ficar. A água é o único líquido de uso corrente cuja massa específica é máxima a uma temperatura *maior* que a temperatura de fusão (0°C, no caso da água). Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre a relação entre esta propriedade da água e a sobrevivência dos animais aquáticos durante o inverno.

49. PRODUÇÃO DE SANGUE Um modelo para a produção $p(x)$ de células do sangue envolve uma função da forma

$$p(x) = \frac{Ax}{B + x^m}$$

onde x é o número de células presentes e A, B e m são constantes positivas.*

a. Determine a taxa de produção de células do sangue $R(x) = p'(x)$ e encontre o valor de x para o qual $R(x) = 0$.

b. Determine a taxa de variação de $R(x)$ e encontre os valores de x para os quais $R'(x) = 0$.

c. Se $m > 1$, o número crítico diferente de zero obtido no item (b) corresponde a um máximo relativo ou a um mínimo relativo? Justifique sua resposta.

50. AMPLITUDE DE OSCILAÇÕES É possível demonstrar que a amplitude $A(r)$ das oscilações forçadas de uma partícula em um meio viscoso é dada por

$$A(r) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + kr^2}}$$

onde r é a razão entre a freqüência da força motriz e a freqüência natural de oscilação e k é uma constante positiva que expressa o efeito do meio viscoso. Mostre que $A(r)$ possui um e apenas um número crítico. Este número crítico corresponde a um máximo relativo ou a um mínimo relativo? O que se pode dizer a respeito dos extremos *absolutos* de $A(r)$?

*M. C. Mackey e L. Glass, "Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems", *Science*, Vol. 197, pp. 287-289.

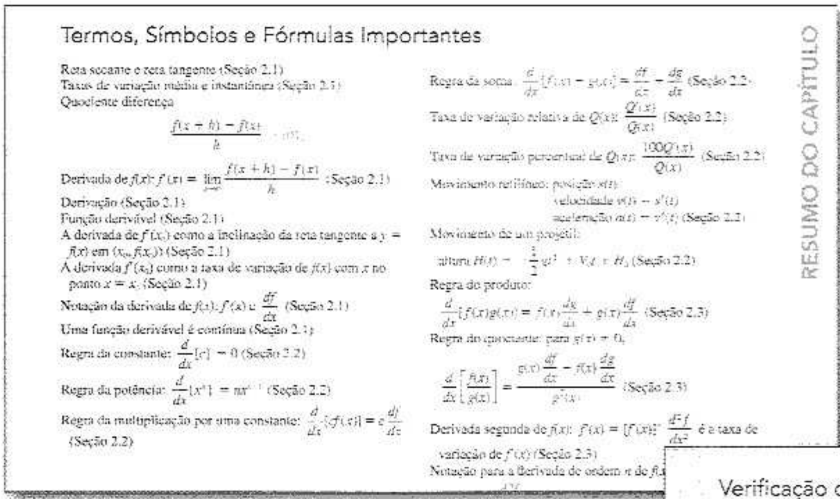
*O leitor pode encontrar um ponto de partida bastante útil para sua pesquisa em Campbell R. McConnell and Stanley L. Brue, *Microeconomics*, 12th ed., New York: McGraw-Hill, 1993.

Ensaios

Todas as séries de exercícios incluem ensaios sobre questões levantadas nos exemplos e exercícios, indicados pelo símbolo ✍. Estes ensaios testam a capacidade crítica dos estudantes e os estimulam a realizar pesquisas independentes, explorando a linguagem da matemática.

Exercícios com Calculadoras

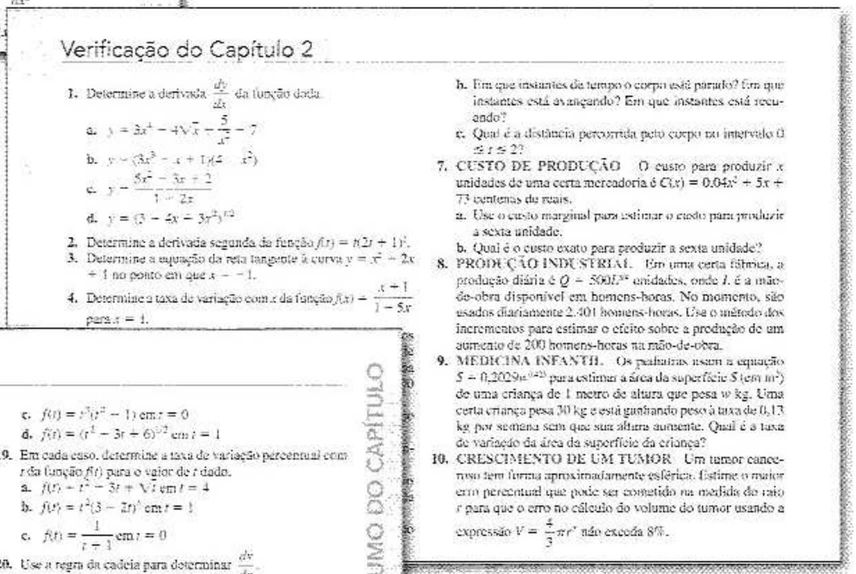
Toda lista de exercícios inclui vários problemas que devem ser resolvidos com o auxílio de uma calculadora gráfica. Estes problemas estão indicados pelo símbolo .



Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

Resumo do Capítulo

O Resumo do Capítulo ajuda o estudante a rever os conceitos importantes de cada capítulo. A parte de Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes contém uma lista dos termos técnicos e fórmulas matemáticas que foram discutidos no capítulo.



Verificação do Capítulo 2

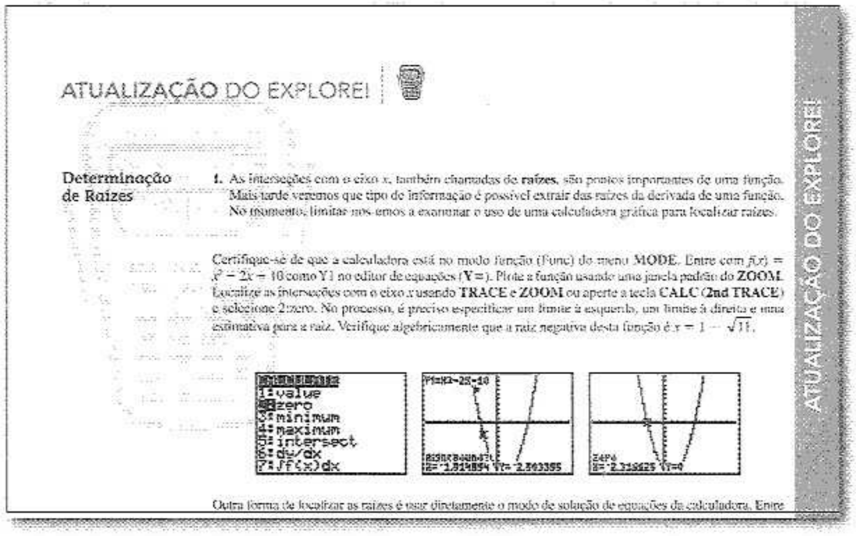
Exercícios de Verificação

Os estudantes podem usar os exercícios de verificação para testar sua compreensão dos conceitos introduzidos no capítulo. Todas as respostas aparecem no final do livro.

Problemas de Revisão

Problemas de Revisão

Uma lista extensa de exercícios convencionais e aplicados aparece no final de cada capítulo, oferecendo mais uma oportunidade para o aluno testar seus conhecimentos e sua capacidade de resolver problemas.



ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

Determinação de Raízes

1. As interseções com o eixo x, também chamadas de **raízes**, são pontos importantes de uma função. Mais tarde veremos que tipo de informação é possível extrair das raízes da derivada de uma função. No momento, limitar-nos-emos a examinar o uso de uma calculadora gráfica para localizar raízes.

Certifique-se de que a calculadora está no modo função (Func) do menu **MODE**. Entre com $f(x) = x^2 - 2x - 10$ como Y1 no editor de equações (**Y=**). Plote a função usando uma janela padrão do **ZOOM**. Localize as interseções com o eixo x usando **TRACE** e **ZOOM** ou aperte a tecla **CALC** (**2nd TRACE**) e selecione 2:zero. No processo, é preciso especificar um limite à esquerda, um limite à direita e uma estimativa para a raiz. Verifique algebricamente que a raiz negativa desta função é $x = 1 - \sqrt{11}$.

Outra forma de localizar as raízes é usar diretamente o modo de solução de equações da calculadora. Entre

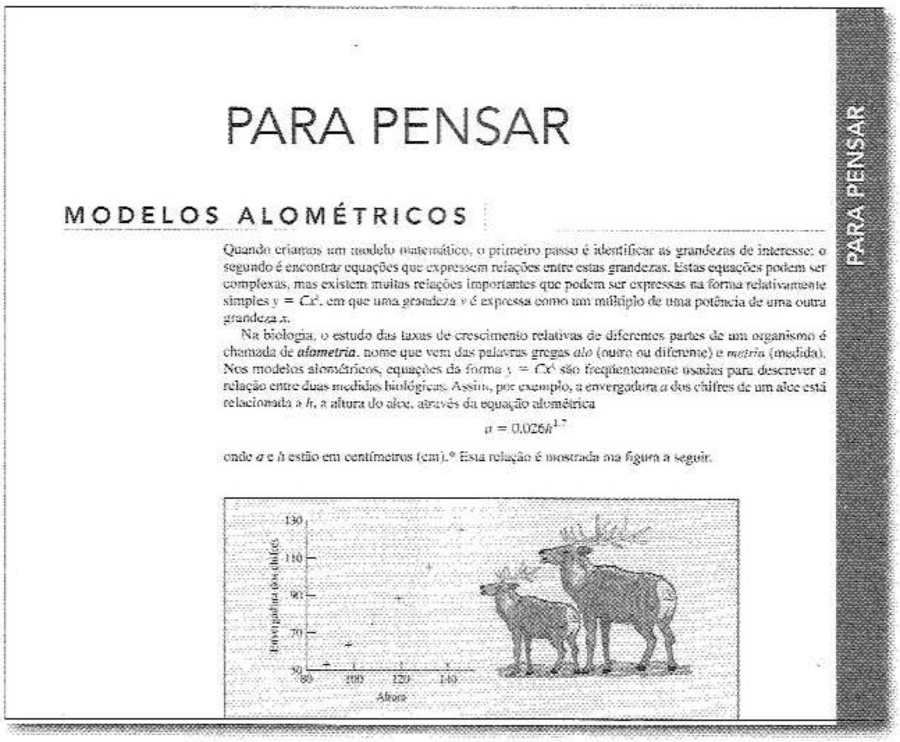
ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

Explore!

Para aqueles que se interessam em usar uma calculadora gráfica no curso, os quadros Explore! oferecem uma forma alternativa de estudar a matéria. Estas explorações, ligadas a exemplos específicos, continuam a orientar os alunos no uso de calculadoras gráficas e a testar seu conhecimento dos tópicos abordados. Cada capítulo termina com uma seção de Atualização do Explore! na qual são apresentadas soluções e sugestões para alguns quadros Explore! do capítulo.

Para Pensar

Os ensaios do módulo Para Pensar mostram aos alunos de que forma a matéria apresentada no capítulo pode ser usada para construir modelos matemáticos úteis, explicando ao mesmo tempo o processo de modelagem. As listas de exercícios que acompanham cada ensaio constituem um excelente ponto de partida para projetos de classe e podem ser examinadas em sala ou servir como base para discussões de grupo.



PARA PENSAR

MODELOS ALOMÉTRICOS

Quando criamos um modelo matemático, o primeiro passo é identificar as grandezas de interesse; o segundo é encontrar equações que expressem relações entre estas grandezas. Estas equações podem ser complexas, mas existem muitas relações importantes que podem ser expressas na forma relativamente simples $y = Cx^k$, em que uma grandeza y é expressa como um múltiplo de uma potência de uma outra grandeza x.

Na biologia, o estudo das taxas de crescimento relativas de diferentes partes de um organismo é chamada de ***alometria***, nome que vem das palavras gregas *alo* (outro ou diferente) e *metria* (medida). Nos modelos alométricos, equações da forma $y = Cx^k$ são freqüentemente usadas para descrever a relação entre duas medidas biológicas. Assim, por exemplo, a envergadura a dos chifres de um alce está relacionada a h, a altura do alce, através da equação alométrica

$$a = 0.026h^{1.7}$$

onde a e h estão em centímetros (cm).* Esta relação é mostrada na figura a seguir.

PARA PENSAR

Para o Professor

Os professores que adotarem o livro podem solicitar à LTC materiais suplementares de apoio pedagógico, em inglês. O pedido deve ser encaminhado a:

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional
A/C Editorial Técnico
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21–3970-9480
Fax: 21–2221-3202
ltc@ltceditora.com.br
www.ltceditora.com.br

Comentários e Sugestões

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Encorajamos os comentários dos leitores que podem ser encaminhados à LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional, no endereço: Travessa do Ouvidor, 11 — Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico ltc@ltceditora.com.br.

Agradecimentos

Como nas edições anteriores, procuramos ouvir tanto a opinião de professores que adotam nosso livro como a dos que usam outros livros-textos em busca de possíveis melhoramentos. Nossos leitores forneceram muitas informações detalhadas a respeito do conteúdo do livro e da necessidade de mudanças e muitas delas que introduzimos foram conseqüência direta dessas sugestões. Uma parte considerável do sucesso deste texto se deve a essas valiosas contribuições e agradecemos a todas as pessoas envolvidas no processo

Faiz Al-Rubaee, *University of North Florida*
George Anastassiou, *University of Memphis*
Dan Anderson, *University of Iowa*
Don Bensy, *Suffolk County Community College*
Neal Brand, *University of North Texas*
Randall Brian, *Vincennes University*
Paul W. Britt, *Louisiana State University — Baton Rouge*
Albert Bronstein, *Purdue University*
James F. Brooks, *Eastern Kentucky University*
Beverly Broomell, *SUNY — Suffolk*
Laura Cameron, *University of New Mexico*
Rick Carey, *University of Kentucky*
Steven Castillo, *Los Angeles Valley College*
Deanna Caveny, *College of Charleston*
Gerald R. Chachere, *Howard University*
Terry Cheng, *Irvine Valley College*
William Chin, *DePaul University*
Lynn Cleaveland, *University of Arkansas*
Dominic Clemence, *North Carolina A&T State University*
Charles C. Clever, *South Dakota State University*
Peter Colwell, *Iowa State University*
Cecil Coone, *Southwest Tennessee Community College*
Charles Brian Crane, *Emory University*
Raul Curto, *University of Iowa*
Jean F. Davis, *Texas State University — San Marcos*
John Davis, *Baylor University*
Karahi Dints, *Northern Illinois University*
Ken Dodaro, *Florida State University*
Eugene Don, *Queens College*
Dora Douglas, *Wright State University*
Peter Dragnev, *Indiana University — Purdue University, Fort Wayne*
Bruce Edwards, *University of Florida*
Margaret Ehrlich, *Georgia State University*
Maurice Ekwo, *Texas Southern University*
George Evanovich, *St. Peter's College*
Haitao Fan, *Georgetown University*
Klaus Fischer, *George Mason University*
Michael Freeze, *University of North Carolina — Wilmington*
Constantine Georgakis, *DePaul University*
Sudhir Goel, *Valdosta State University*
Ronnie Goolsby, *Winthrop College*
Lauren Gordon, *Bucknell University*
Angela Grant, *University of Memphis*
John Gresser, *Bowling Green State University*
Murli Gupta, *George Washington University*
Doug Hardin, *Vanderbilt University*
Jonathan Hatch, *University of Delaware*
Celeste Hernandez, *Richland College*
William Hintzman, *San Diego State University*
Matthew Hudock, *St. Philips College*
Joel W. Irish, *University of Southern Maine*
Zonair Issac, *Vanderbilt University*
Erica Jen, *University of Southern California*
Shafiu Jibrin, *Northern Arizona University*
Victor Kaftal, *University of Cincinnati*
Sheldon Kamienny, *University of Southern California*
Georgia Katsis, *DePaul University*
Fritz Keinert, *Iowa State University*
Melvin Kiernan, *St. Peter's College*
Donna Krichiver, *Johnson County Community College*
Harvey Lambert, *University of Nevada*
Donald R. LaTorre, *Clemson University*
Melvin Lax, *California State University — Long Beach*
Robert Lewis, *El Camino College*
W. Conway Link, *Louisiana State University — Shreveport*
James Liu, *James Madison University*
Yingjie Liu, *University of Illinois — Chicago*
Jeanette Martin, *Washington State University*
James E. McClure, *University of Kentucky*
Mark McCombs, *University of North Carolina*
Ann B. Megaw, *University of Texas — Austin*
Fabio Milner, *Purdue University*
Kailash Misra, *North Carolina State University*
Mohammad Moazzam, *Salisbury State University*
Rebecca Muller, *Southeastern Louisiana University*
Karla Neal, *Louisiana State University*
Cornelius Nelan, *Quinnipiac University*
Devi Nichols, *Purdue University — West Lafayette*
Jaynes Osterberg, *University of Cincinnati*

Ray Otto, *Wright State University*
Hiram Paley, *University of Illinois*
Virginia Parks, *Georgia Perimeter College*
Shahla Peterman, *University of Missouri — St. Louis*
Murray Peterson, *College of Marin*
Lefkios Petevis, *Kirkwood Community College*
Cyril Petras, *Lord Fairfax Community College*
Natalie Priebe, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Georgia Pyrros, *University of Delaware*
Richard Randell, *University of Iowa*
Mohsen Razzaghi, *Mississippi State University*
Nathan P. Ritchey, *Youngstown State University*
Arthur Rosenthal, *Salem State College*
Judith Ross, *San Diego State University*
Robert Sacker, *University of Southern California*
Katherine Safford, *St. Peter's College*
Mansour Samimi, *Winston-Salem State University*
Dolores Schaffner, *University of South Dakota*
Thomas J. Sharp, *West Georgia College*
Robert E. Sharpton, *Miami-Dade Community College*
Anthony Shershin, *Florida International University*
Minna Shore, *Florida International University*
Ken Shores, *Arkansas Tech University*
Jane E. Sieberth, *Franklin University*
Marlene Sims, *Kennesaw State University*
Brian Smith, *Parkland College*
Nancy Smith, *Kent State University*
Joseph F. Stokes, *Western Kentucky University*
Hugo Sun, *California State University — Fresno*
Keith Stroyan, *University of Iowa*
Martin Tangora, *University of Illinois — Chicago*
Tuong Ton-That, *University of Iowa*
Lee Topham, *North Harris Community College*
George Trowbridge, *University of New Mexico*
Dinh Van Huynh, *Ohio University*
Maria Elena Verona, *University of Southern California*
Kimberly Vincent, *Washington State University*
Karen Vorwerk, *Westfield State College*
Charles C. Votaw, *Fort Hays State University*
Hiroko Warshauer, *Southwest Texas State University*
Pam Warton, *Bowling Green State University*
Jonathan Weston-Dawkes, *University of North Carolina*
Henry Wyzinski, *Indiana University — Northwest*
Paul Yun, *El Camino College*
Xiao-Dong Zhang, *Florida Atlantic University*
Jay Zimmerman, *Towson University*

Agradecimentos especiais aos que fizeram a revisão do texto e dos problemas, incluindo Devilyna Nichols, Cindy Trimble, Brad Davis e Jaqui Bradley. Reginald Luke e Cindy Trimble ajudaram a criar os quadros de Explore! desta edição. Agradecimentos especiais também a Cornelius Nelan e Charles Brian Crane por apresentarem muitas sugestões específicas, detalhadas, que foram particularmente úteis para a preparação desta Nona Edição. Finalmente, queremos agradecer à nossa equipe na McGraw-Hill, Liz Covello, Nancy Anselment, David Dietz, Dan Seibert e Vicki Krug por sua paciência, dedicação e apoio.

INTRODUÇÃO ÀS CALCULADORAS

A discussão a seguir é uma breve introdução ao uso de calculadoras gráficas. Uma calculadora gráfica típica é a TI-84 Plus, fabricada pela Texas Instruments, Inc. Esta introdução e as Atualizações do Explore! utilizam esta calculadora com o sistema operacional* OS 2.30. O teclado da calculadora TI-84 Plus (Silver Edition) dispõe das teclas padrão para números, edição e movimento do cursor, além de teclas para operações matemáticas e científicas, plotagem de gráficos e programação. Para instruções mais específicas, consulte o manual da sua calculadora.

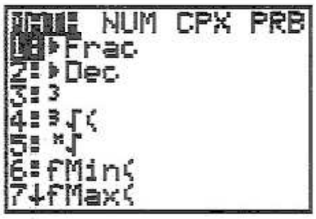


FIGURA 1

FIGURA 2

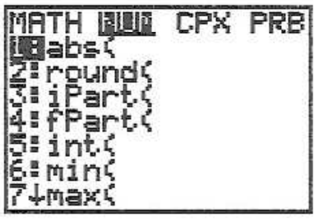


FIGURA 3

Operações Gerais

Apertando a tecla **MATH**, por exemplo, obtemos um menu com várias opções (Figuras 1 e 2) que podem ser selecionadas digitando o número correspondente ou apertando a tecla do cursor para baixo até iluminar a opção desejada e apertando a tecla **ENTER**. Observe que quando o cursor chega na extremidade inferior da tela aparecem opções adicionais como **8:nDeriv(** e **0:Solver**. Apertando a tecla do cursor para a direita, temos acesso a outras telas (Figura 3), uma das quais apresentando o menu numérico **NUM** cuja primeira opção é a função valor absoluto. As outras telas apresentam o menu de números complexos (**CPX**) e o menu de probabilidade (**PRB**).

Duas teclas coloridas permitem o acesso a outras funções da calculadora: a tecla verde **ALPHA** é usada para digitar letras e símbolos, enquanto a tecla azul **2nd** é usada para digitar os comandos de cor azul. Assim, por exemplo, apertando **2nd** e depois **MODE**(**QUIT**) chegamos a uma "tela mãe" na qual podem ser escritos textos ou cálculos. Experimente escrever o texto que aparece na Figura 4. Para obter o espaço em branco, use a seqüência de teclas **ALPHA** e **0**. É possível manter a tecla **ALPHA** acionada pressionando **2nd ALPHA**. O sinal de igualdade está disponível como primeira opção do menu **TEST(2nd MATH)**, como na Figura 5. Podemos usar o armazenamento na memória das variáveis alfanuméricas para executar cálculos numéricos. Assim, por exemplo, é possível usar a tecla **STO→** (logo acima da tecla **ON**) para criar a tela que aparece na Figura 6, em que é obtido o valor da hipotenusa de um triângulo retângulo.

FIGURA 4

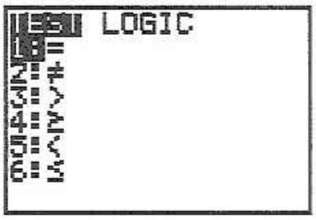


FIGURA 5

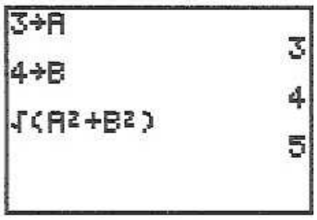


FIGURA 6

*O sistema operacional mais recente para a calculadora TI-84 pode ser baixado no site da Texas Instruments, http://education.ti.com/.

Solução de Equações Uma forma mais eficaz de resolver equações é usar a opção **EQUATION SOLVER** do menu **MATH**. Na Figura 7, por exemplo, escrevemos a equação do teorema de Pitágoras com todos os termos do lado direito da equação. Apertando **ENTER**, obtemos a tela da Figura 8, com os valores numéricos de 5 para A e 13 para C, em uma tentativa de obter o valor de B. Digitando um valor inicial razoável para B e executando o comando verde **SOLVE(ALPHA ENTER)**, obtemos a solução (Figura 9). Observe que podemos escolher qualquer variável como incógnita, fornecendo os valores das outras variáveis.

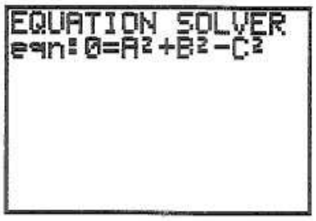


FIGURA 7

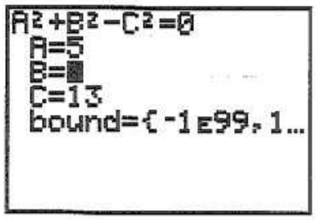


FIGURA 8

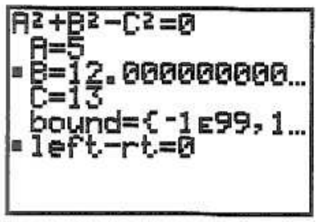


FIGURA 9

Modo A característica principal de uma calculadora gráfica é a capacidade de calcular, plotar e analisar as muitas funções que aparecem no cálculo. Suponha que você esteja interessado na relação entre as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 5 - x$. Pressione a tecla **MODE** e observe a configuração inicial que aparece na Figura 10. Note na linha 4 que estamos no modo função (**FUNC**) e não no modo paramétrico (**PAR**), polar (**POL**) ou seqüencial (**SEQ**). A opção **CONNECTED** da linha 5 se refere ao fato de que os gráficos podem ser gerados na forma de linhas contínuas em vez de uma série de pontos (**DOT**). A opção **SEQUENTIAL** da linha 6 se refere à ordem na qual os gráficos são gerados, um após outro, em vez de todos ao mesmo tempo (opção **SIMUL**). Pressionando a tecla **Y=**, chamada de "editor de equações", situada no canto superior esquerdo do teclado, e colocando $f(x)$ em Y1 e $g(x)$ em Y2, obtemos a tela que aparece na Figura 11.

FIGURA 10

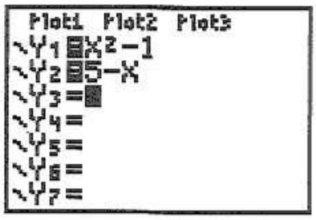


FIGURA 11

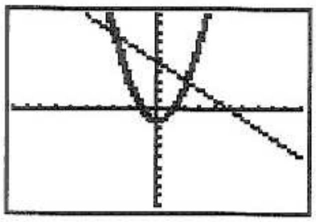


FIGURA 12

Estilo do Gráfico Podemos escolher diferentes estilos para plotar cada função movendo o cursor para a esquerda do símbolo Y da função desejada e acionando várias vezes a tecla **ENTER**. Os estilos disponíveis, na ordem em que aparecem, são negrito, sombreado acima da função, sombreado abaixo da função, ponto com linha, ponto sem linha, tracejado e de volta ao estilo inicial simples. Pressionando a tecla **ENTER** uma vez com o cursor à esquerda de Y1, obtemos o estilo negrito para o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$, como mostra a Figura 12.

Janelas de Observação A maioria das calculadoras gráficas oferece várias opções para as dimensões da janela de observação. Na TI-84 Plus, o acesso a estas janelas de observação se dá através da tecla **ZOOM** (situada no meio da linha superior do teclado). Acionando essa tecla, obtemos a tela da Figura 13. Uma janela padrão, **6:ZStandard**, produz o gráfico da Figura 14. As dimensões desta "janela padrão" são $-10 \leq X \leq 10$ e $-10 \leq Y \leq 10$, com a escala dos eixos indicadas por divisões unitárias rotuladas como $X_{scl} = 1$ e $Y_{scl} = 1$, respectivamente. Pressionando a tecla **WINDOW**, obtemos a tela que aparece na Figura 15.

FIGURA 13

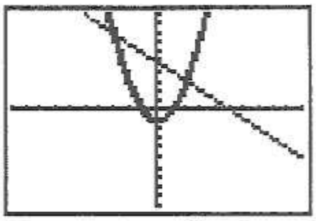


FIGURA 14

FIGURA 15

Janela Decimal

Outra opção interessante para a janela de observação é a "janela decimal" **4:ZDecimal**, que pode ser especificada no menu **ZOOM**. As dimensões da janela decimal são representadas na forma $[-4.7, 4.7]1$ por $[-3.1, 3.1]1$ para indicar as faixas de valores ao longo dos eixos X e Y, respectivamente, onde o número 1 depois dos colchetes indica que $X_{scl} = 1$ e $Y_{scl} = 1$ (veja a Figura 16). As dimensões especiais da janela decimal permitem que o cursor percorra os valores decimais da variável X em incrementos de 0.1. Modificando as dimensões Y desta janela, podemos obter uma visão melhor dos gráficos das duas funções, como mostra a Figura 17, na qual $-2 \leq Y \leq 10$. Quando as dimensões da janela são modificadas, a tecla **GRAPH** (situada no canto superior direito do teclado) deve ser usada para obter o gráfico desejado, que aparece na Figura 18.

FIGURA 16

FIGURA 17

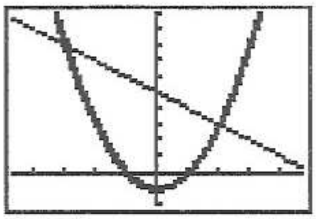


FIGURA 18

Modo Trace

Para movimentar o cursor ao longo do gráfico de uma função, podemos usar a tecla **TRACE** (situada na linha superior do teclado) e as teclas de cursor para a direita ou para a esquerda, como mostra a Figura 19. Observe que os valores de x do ponto indicado são decimais, já que o gráfico foi gerado usando uma janela decimal. As teclas de cursor para cima e para baixo podem ser usadas para escolher outra função, no caso a função $g(x) = 5 - x$, como mostra a Figura 20. Poderíamos continuar a acompanhar os gráficos das duas funções para determinar os pontos de interseção, um dos quais é o ponto (2, 3), como mostra a Figura 21.

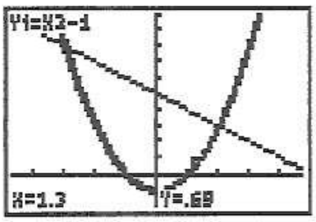


FIGURA 19

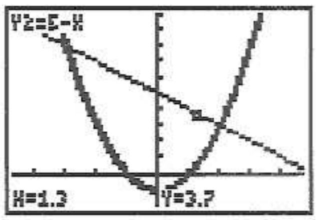


FIGURA 20

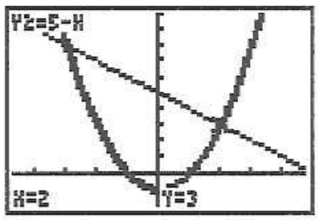


FIGURA 21

Determinação de Interseções

Para demonstrar outro recurso das calculadoras gráficas, vamos examinar a opção de determinação de interseções da TI-84 Plus, selecionada através da tecla **CALC** (**2nd TRACE**), que aparece na Figura 22. Observe que também podemos determinar valores da função, raízes, valores máximos e mínimos e executar algumas operações de cálculo. Vamos determinar o outro ponto de interseção de $f(x)$ e $g(x)$. Escolha a opção **5:intersect** e identifique as duas curvas e um ponto de interseção estimado, acionando **ENTER** sucessivamente para ter acesso aos diferentes passos do processo (Figura 23). A calculadora fornece as coordenadas do ponto de interseção mais próximo do ponto estimado, como mostra a Figura 24.

FIGURA 22

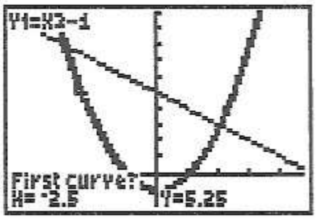


FIGURA 23

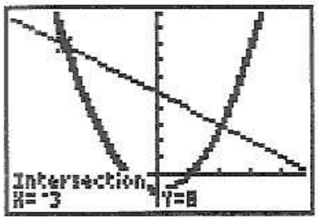


FIGURA 24

Representação Simbólica

Outro recurso útil de uma calculadora gráfica é a capacidade de representar funções simbolicamente. Já colocamos funções em Y1 e Y2 do editor de equações, **Y=**. Há muitas ocasiões nas quais precisamos usar estes símbolos em equações e expressões. Suponha, por exemplo, que estamos interessados em escrever Y1(5) para calcular o valor da função $f(x) = x^2 - 1$ no ponto $x = 5$. O que devemos fazer? O símbolo **Y1** (ou **Y2**) pode ser encontrado pressionando a tecla **VARS**, movendo o cursor para a direita até **Y-VARS**, selecionando a opção **1:Function** e escolhendo **Y1** (ou **Y2**). Estes passos estão ilustrados nas Figuras 25 a 27.

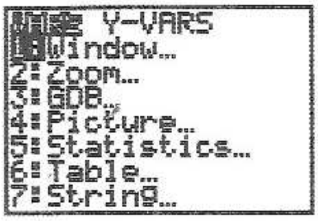


FIGURA 25

FIGURA 26

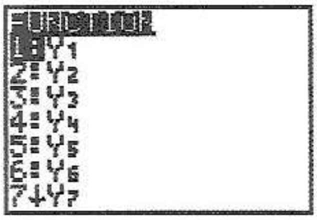


FIGURA 27

Os símbolos Y1 e Y2 podem ser manipulados em combinações funcionais, como se fossem funções $f(x)$ e $g(x)$. Desta forma, é possível calcular somas de funções, produtos de funções e funções compostas, além de efetuar translações e outras transformações. Como exemplo, vamos plotar o gráfico de Y3 = Y1(X + 2). Antes, porém, temos que cancelar Y1 e Y2, para que os gráficos correspondentes não apareçam na tela. Para isso, deslocamos o cursor para o sinal de igualdade e pressionamos **ENTER**, como mostra a Figura 28, na qual as funções Y1 e Y2 foram canceladas. O gráfico resultante, usando a janela padrão **ZOOM** e com a tecla **TRACE** ativada, aparece na Figura 29. Qual é a equação dessa função? Finalmente, cancele Y3 e entre com Y4 = Y1(Y2), a função composta $f(g(x))$. O gráfico correspondente aparece na Figura 30. Qual é a equação desta função?

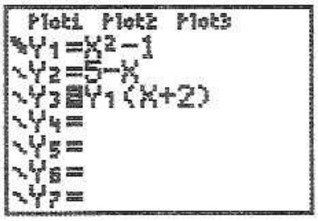


FIGURA 28

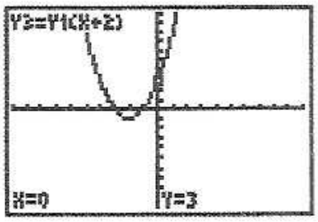


FIGURA 29

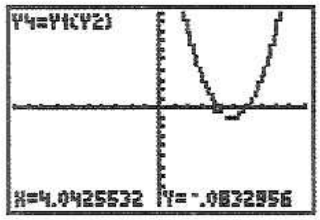


FIGURA 30

A Escolha da Janela

Um dos maiores problemas na hora de criar o gráfico de uma função é escolher uma janela que permita observar todas as partes relevantes do gráfico. A janela padrão ou decimal disponível por intermédio da tecla **ZOOM** pode não ser adequada. Consultar uma tabela de valores pode ser a melhor forma de ter uma idéia das dimensões mais apropriadas para a janela. Como exemplo, vamos determinar as dimensões mais adequadas de uma janela para representar o gráfico da função $f(x) = 15 + 30x/(x^2 + 1)$, que colocamos em Y1. Em primeiro lugar, criamos uma tabela para investigar o comportamento da função nas vizinhanças da origem. Pressione **2nd WINDOW (TBL SET)** e mude as especificações da tabela para obter um valor inicial $x = -3$ e incrementos de uma unidade, ou seja, faça TblStart $= -3$ e ΔTbl $= 1$, como mostra a Figura 31. Em seguida, acione **TABLE (2nd GRAPH)** para obter a tabela de valores que aparece na Figura 32.

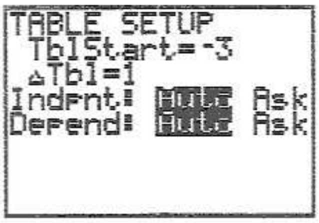


FIGURA 31

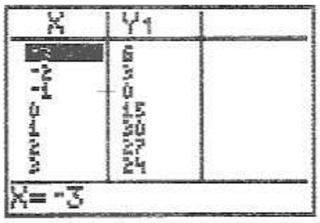


FIGURA 32

FIGURA 33

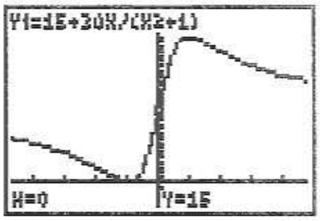


FIGURA 34

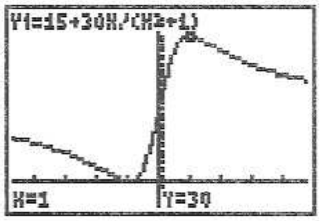


FIGURA 35

Observando a tabela de valores, temos uma boa idéia da faixa de valores da função e, portanto, das dimensões da janela com a qual devemos trabalhar. Parece que vamos escolher uma faixa de valores para y um pouco maior que [0, 30], como, por exemplo, $-5 \leqslant Y \leqslant 35$. Como a faixa de valores de x deve ser maior que $[-3, 3]$, usamos uma janela decimal modificada, como $-4.7 \leqslant X \leqslant 4.7$. Acione as seguintes teclas: **ZOOM**, **4:ZDecimal** e **WINDOW** e mude as especificações da janela para as que aparecem na Figura 33. Estas dimensões podem ser expressas como [4.7; 4.7]1 por $[-5, 35]1$. Finalmente, acionamos **GRAPH** para criar o gráfico que aparece na Figura 34, onde a tecla **TRACE** identifica a função e a posição do cursor no gráfico.

O gráfico da Figura 34 possui aparentemente apenas um ponto de máximo, situado nas vizinhanças de $x = 1$. Neste caso, a tecla **TRACE** pode ser particularmente útil, já que a janela decimal modificada permite deslocar o cursor ao longo da curva usando incrementos decimais, como mostra a Figura 35. Como a maioria das calculadoras gráficas, a TI-84 Plus dispõe de um comando para localizar máximos e mínimos. Aperte as teclas **CALC** (**2nd TRACE**) e **4:maximum**, como mostra a Figura 36. Depois de especificar o limite à esquerda (Figura 37), o limite à direita (Figura 38) e uma estimativa para a coordenada x (Figura 38), acionando a tecla **ENTER** sucessivamente, a calculadora determina o ponto de máximo, que é especificado como $x = 0.99999881$ na Figura 40. Observe que este valor pode ser arredondado para $x = 1$ se levarmos em conta os limites de erro da calculadora, o que corresponde ao valor exato do máximo, como será visto no Capítulo 3.

FIGURA 36

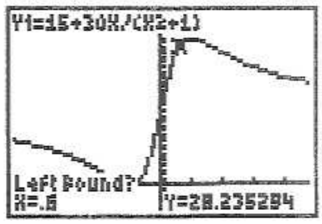


FIGURA 37

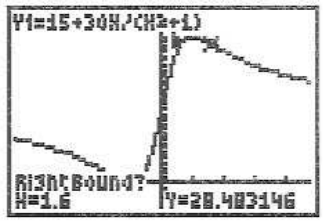


FIGURA 38

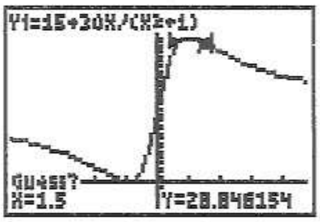


FIGURA 39

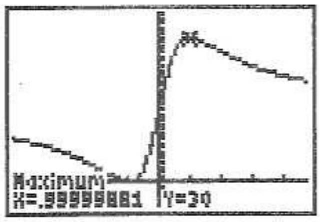


FIGURA 40

Modelagem

Outro recurso importante de uma calculadora gráfica é a capacidade de modelar dados estatísticos, isto é, de determinar e plotar a melhor função que representa uma série de dados obtidos experimental ou teoricamente. Considere a seguinte tabela de dados para a população dos Estados Unidos (em milhões de habitantes) em diferentes décadas, de acordo com o *Britannica Almanac 2003*.

Ano	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
População	131,67	151,33	179,32	203,30	226,54	248,72	281,42

O primeiro passo consiste em armazenar estes dados em uma tabela. Aperte a tecla **STAT**, situada no meio do teclado, e escolha a primeira opção **1:Edit** (Figura 41), o que faz aparecer na tela três das seis listas possíveis, L1 a L6, além de uma lista sem nome. Você talvez tenha de escolher a opção **5: SetUp Editor** se uma destas três listas estiver faltando. Em seguida, entre com os dados, como mostra a Figura 42. Se uma das colunas já estiver preenchida com outros dados, desloque o cursor para o alto da lista, aperte a tecla **CLEAR** e desloque o cursor para baixo, apagando todos os dados antigos, como foi feito para a lista L3 na Figura 43.

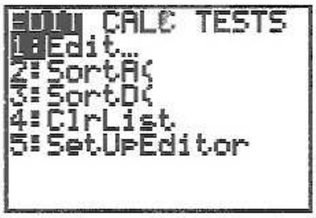


FIGURA 41

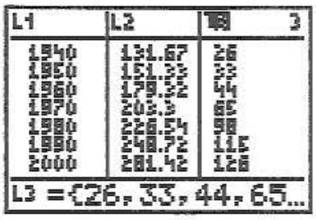


FIGURA 42

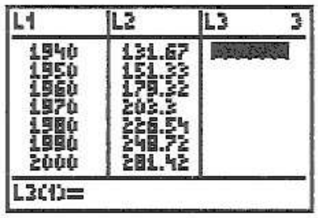


FIGURA 43

A segunda fase do processo de apresentação de dados consiste em criar os gráficos estatísticos. Aperte a tecla **STAT PLOT** (**2nd Y=**) para chegar a uma tela com três opções para o gráfico, como mostra a Figura 44. Escolha a primeira opção e selecione as opções que aparecem nas cinco linhas, uma a uma, da forma indicada na Figura 45. Na Linha 2, especificamos o tipo de dados, deslocando o cursor para a direita e apertando a tecla **ENTER** várias vezes em sucessão para escolher, na ordem, uma das seguintes opções: gráfico de pontos, gráfico de linhas, histograma, *boxplot* com pontos anômalos, *boxplot* normal, gráfico normal. Escolhemos a primeira opção, gráfico de pontos, para plotar os dados. Na linha 3, especificamos que a coordenada x (**XList**) corresponde à variável Ano (L1, na tabela); na linha 4, especificamos que a coordenada y (**YList**) corresponde à variável População (L2, na tabela). Na linha 4, especificamos que a marca para indicar os pontos no gráfico é um pequeno quadrado.

FIGURA 44

FIGURA 45

Depois de escolher os parâmetros do gráfico, acione a tecla **ZOOM** e selecione a opção **9:ZoomStart**, como mostra a Figura 46, para produzir o gráfico que aparece na Figura 47, lembrando que a tecla **TRACE** pode ser usada para identificar as coordenadas de cada ponto. Como o gráfico parece ser uma linha reta, vamos procurar a função da forma Y = aX + b que melhor se ajusta aos dados. Este processo é chamado de regressão linear e utiliza o método dos mínimos quadrados de Gauss para determinar os coeficientes a e b da função linear que mais se aproxima dos pontos dados. Prepare uma tela limpa, aperte a tecla **STAT**, use o cursor para selecionar **CALC** e escolha a opção **4:LinReg(ax+b)**, como mostra a Figura 48. Acione **ENTER** e entre com os símbolos L1, L2 e Y1 separados por vírgulas, como mostra a Figura 49. Lembre-se de que a função Y1 pode ser obtida através da seqüência **VARS**, **Y-VARS**, **1:Function**, **1:Y1**. Finalmente, aperte **ENTER** para obter os resultados desejados, que aparecem na Figura 50.

FIGURA 46

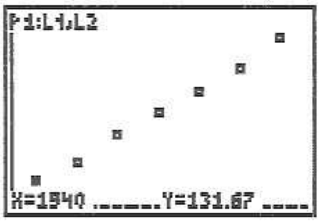


FIGURA 47

FIGURA 48

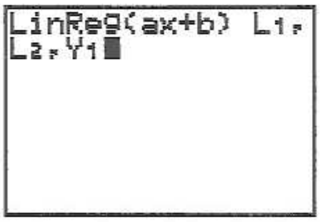


FIGURA 49

FIGURA 50

O coeficiente de regressão a representa a inclinação da função Y1 e seu valor, $a \approx 2.47$, indica que a população dos Estados Unidos aumentou, em média, de 2,47 milhões de habitantes por década. O ponto de interseção com o eixo y, $b \approx -4.660$, não tem significado físico, pois corresponderia à população dos Estados Unidos no ano zero, muito antes da época em que os dados foram colhidos. O número identificado como r é o coeficiente de correlação, um valor entre -1 e 1 que indica se existe uma boa correlação entre os dados e a equação usada para descrevê-los. Como $r \approx 0.9986$, concluímos que uma função linear se ajusta bem aos dados, como também pode ser visto no gráfico a seguir.

Acione as teclas **ZOOM** e **9:ZoomStat** e observe os pontos e a função de regressão da Figura 51. Pressionando a tecla **TRACE**, vemos, por exemplo, que para X = 1970, a população era Y = 203,30 milhões (Figura 51), enquanto a população prevista com base na equação linear é 203,19 milhões, como mostra a Figura 52. No modo **TRACE**, as teclas cursor para cima e cursor para baixo podem ser usadas para selecionar os pontos ou a reta de regressão. Com o cursor sobre a reta, podemos também digitar qualquer valor para X dentro da faixa de valores dos dados, como $X = 2003$, e o valor previsto para y, 284,65 milhões, no caso, aparece na tela, como mostra a Figura 53.

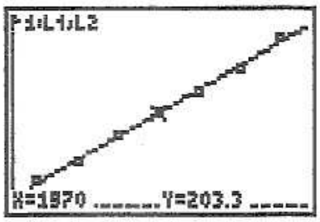


FIGURA 51

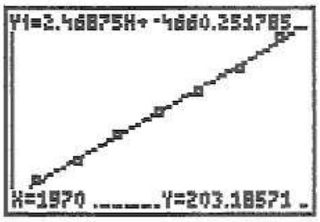


FIGURA 52

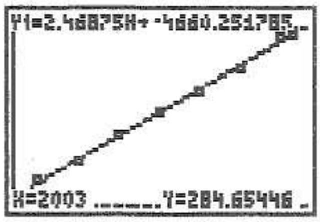


FIGURA 53

Os demógrafos esperam que uma população cresça exponencialmente, já que a taxa de crescimento de uma população em geral é proporcional à própria população. Vamos tentar ajustar aos dados uma função exponencial. Pressione **STAT**, desloque o cursor para **CALC** e selecione a opção **0:ExpReg**, como na Figura 54. Entre com L1, L2, Y2 depois do comando ExpReg, para que a curva exponencial seja colocada na posição Y2 do editor de equações. Finalmente, aperte a tecla **ENTER** para obter os resultados desejados, que aparecem na Figura 55. Na Figura 56, cancelamos Y1 e mudamos Y2 para o estilo negrito para mostrar qual seria a população prevista para 2003, com base em um crescimento exponencial.

FIGURA 54

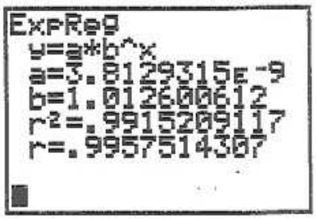


FIGURA 55

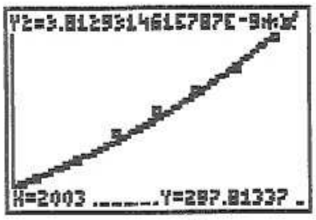


FIGURA 56

Regressão Polinomial

Concluímos este exemplo de análise de dados ajustando uma função polinomial aos dados de população. Vamos usar uma curva da forma $Y3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$, ou seja, um polinômio do quarto grau, caso em que a regressão é chamada de regressão quártica. Aperte **STAT**, desloque o cursor para **CALC** e selecione a opção **7:QuartReg** que aparece na Figura 48. Entre com L1, L2 e Y3, como na Figura 57, e aperte **ENTER** para obter os resultados que aparecem nas Figuras 58 e 59.

FIGURA 57

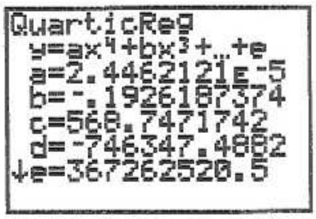


FIGURA 58

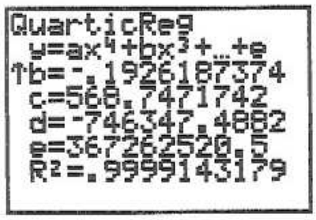


FIGURA 59

Finalmente, aperte **Y=**, cancele Y1 e Y2 e mostre apenas Y3, como na Figura 60. A previsão para 2003 neste caso, obtida no modo **TRACE**, é de 295,36 milhões de habitantes, como mostra a Figura 61.

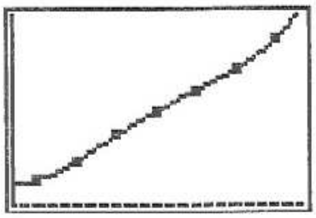


FIGURA 60

FIGURA 61

O Bureau de Recenseamento dos Estados Unidos usa técnicas sofisticadas de modelagem para prever a população futura dos Estados Unidos [*Projections of the Population of the U.S. by Age, Sex, and Location: 1995-2050* (2002), U.S. Bureau of the Census]. A projeção oficial para o ano 2010 é de 299,86 milhões de habitantes. Como os três modelos de regressão se comparam com esta projeção? A comparação aparece na tabela a seguir:

População Prevista (milhões)	2010	R^2
Regressão linear	301,94	0,998618
Regressão exponencial	325,10	0,991521
Regressão quártica	339,71	0,999914
Projeção oficial	299,86	

Com base nos 7 pontos dados (População dos Estados Unidos por Décadas, 1940-2000), os três modelos de regressão superestimam a população em relação à projeção do Bureau de Recenseamento, sendo que o modelo linear é o que mais se aproxima da projeção. A regressão quártica é a que apresenta a melhor correlação, de acordo com o valor R^2 do quadrado do coeficiente de correlação. Isto, porém, não quer dizer muita coisa, já que um polinômio de grau suficientemente elevado $(n - 1)$ pode ser ajustado perfeitamente a qualquer conjunto de dados.

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES, GRÁFICOS E LIMITES

SEÇÃO 1.1 Funções

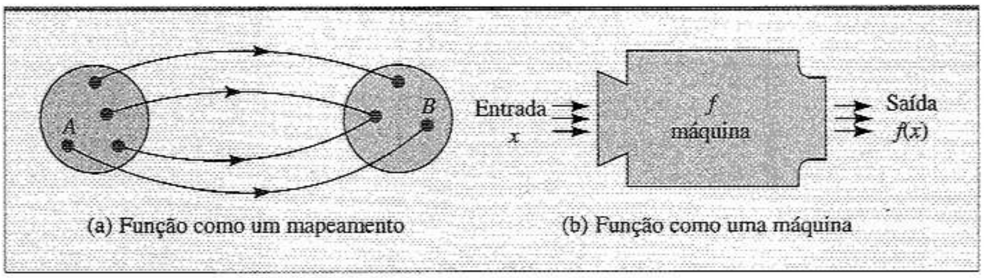
Em muitas situações da vida prática, o valor de uma grandeza depende do valor de uma segunda grandeza. Assim, por exemplo, a demanda de carne pode depender do preço do produto, a poluição do ar em uma cidade pode depender do número de veículos nas ruas e o valor de uma garrafa de vinho pode depender do ano em que o vinho foi fabricado. Relações como estas muitas vezes podem ser representadas matematicamente através de **funções**.

Em termos gerais, uma função consiste em dois conjuntos e uma regra que associa os elementos de um conjunto aos elementos do outro. Suponhamos, por exemplo, que o leitor esteja interessado em determinar o efeito do preço sobre o número de unidades vendidas de um certo produto. Para estudar esta relação, é preciso conhecer o conjunto de preços admissíveis, o conjunto de vendas possíveis e uma regra para associar cada preço a um determinado número de unidades vendidas. A definição de função que vamos adotar é a seguinte:

> **Função** ■ **Função** é uma regra que associa a cada objeto de um conjunto A um e apenas um objeto de um conjunto B. O conjunto A é chamado de **domínio** da função e o conjunto B é chamado de **contradomínio**.

Na maioria das funções examinadas neste livro, o domínio e o contradomínio são conjuntos de números reais e a função é representada pela letra f ou outra letra do alfabeto. O valor que a função f associa a um número x pertencente ao domínio é representado como $f(x)$ (que se lê "f de x") e freqüentemente representado por uma expressão matemática, como no seguinte exemplo: $f(x) = x^2 + 4$.

Pode ser interessante pensar em uma função como um "mapeamento" de números em A para números em B (Figura 1.1a), ou em uma "máquina" que transforma um número do conjunto A em um número do conjunto B usando o processo especificado pela regra funcional (Figura 1.1b). Assim, por exemplo, a função $f(x) = x^2 + 4$ pode ser imaginada como uma "máquina f" que recebe uma entrada x, eleva esta entrada ao quadrado e soma 4 para obter uma saída $y = x^2 + 4$. Seja como for que você encare a relação funcional, é importante lembrar que existe apenas um número no contradomínio associado a cada número do domínio (entrada). Aqui está um exemplo:



(a) Função como um mapeamento (b) Função como uma máquina

FIGURA 1.1 Interpretações da função $f(x)$.

1 EXPLORE!

Entre com $f(x) = x^2 + 4$ na calculadora. Calcule os valores da função para $x = -3, -1, 0, 1$ e 3. Prepare uma tabela de valores. Faça o mesmo para a função $g(x) = x^2 - 1$. Explique como se comporta a diferença entre $f(x)$ e $g(x)$ quando x varia.

EXEMPLO 1.1.1

Determine $f(3)$ para $f(x) = x^2 + 4$.

Solução

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13$$

Observe a conveniência e simplicidade da notação funcional. No Exemplo 1.1.1, a expressão compacta $f(x) = x^2 + 4$ define perfeitamente a função; além disso, podemos indicar que o número cuja função associada a 3 é 13 escrevendo simplesmente $f(3) = 13$.

Muitas vezes é conveniente representar uma relação funcional através de uma equação do tipo $y = f(x)$; neste contexto, x e y são chamadas de **variáveis**. Em particular, como o valor numérico de y é determinado pelo valor de x, y é chamada de **variável dependente** e x de **variável independente**. Observe que não há nada de especial nos símbolos x e y; a função $y = x^2 + 4$, por exemplo, também poderia ser escrita na forma $s = t^2 + 4$ ou na forma $w = u^2 + 4$.

A notação funcional também pode ser usada para descrever dados tabulares. Assim, por exemplo, a Tabela 1.1 mostra as taxas escolares médias cobradas nos Estados Unidos pelos cursos superiores privados de quatro anos em intervalos de cinco anos, entre 1973 e 2003.

Ano Escolar Terminando em	Período n	Taxas
1973	1	US\$1.898
1978	2	US\$2.700
1983	3	US\$4.639
1988	4	US\$7.048
1993	5	US\$10.448
1998	6	US\$13.785
2003	7	US\$18.273

FONTE: *Annual Survey of Colleges*, The College Board, New York.

TABELA 1.1 Taxas Escolares Médias dos Cursos Superiores Privados de Quatro Anos

Podemos descrever estes dados como uma função f definida pela regra:

$$f(n) = \begin{bmatrix} \text{taxas escolares médias no final do} \\ \text{enésimo período de 5 anos} \end{bmatrix}$$

Neste caso, $f(1) = 1.898$, $f(2) = 2.700, \ldots, f(7) = 18.273$. Observe que o domínio de f é o conjunto de números inteiros $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$.

Os Exemplos 1.1.2 e 1.1.3 ilustram o uso da notação funcional. Observe que no Exemplo 1.1.2 são usadas letras diferentes de f e x para designar a função e a variável independente.

Lembrete

Se a e b são dois números inteiros, $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$. No caso do Exemplo 1.1.2, $a = 1$ e $b = 2$; $x^{1/2}$ é outra forma de escrever $\sqrt{x}$.

EXEMPLO 1.1.2

Se $g(t) = (t - 2)^{1/2}$, determine (se possível) $g(27)$, $g(5)$, $g(2)$ e $g(1)$.

Solução

A função pode ser escrita na forma $g(t) = \sqrt{t - 2}$. (Expoentes fracionários são discutidos no Apêndice A1). Assim,

2 EXPLORE!

Entre com $g(x) = \sqrt{x-2}$ na calculadora como Y1 = $\sqrt{x-2}$. Na tela inicial, entre com Y1(27), Y1(5) e Y1(2) ou com Y1({27, 5, 2}), onde as chaves são usadas para indicar uma lista de valores. O que acontece quando você cria Y1(1)?

$$g(27) = \sqrt{27-2} = \sqrt{25} = 5$$
$$g(5) = \sqrt{5-2} = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$$
e
$$g(2) = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$$

Entretanto, $g(1)$ não é definida, já que

$$g(1) = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$$

e os números negativos não possuem raízes quadradas reais.

As funções são muitas vezes definidas através de duas ou mais expressões, com cada expressão definindo a função em um subconjunto do domínio. Um função definida desta forma é chamada de **função definida por partes**. Segue um exemplo deste tipo de função.

EXEMPLO 1.1.3

Determine $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ e $f(2)$ para

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{para } x < 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

3 EXPLORE!

Crie uma função simples definida por partes usando as funções de álgebra booleana da calculadora. Entre com Y1 = 2(X < 1) + (−1)(X ≥ 1) no editor de funções. Observe o gráfico desta função usando a Janela Decimal do **ZOOM**. Que valores assume Y1 para X = −2, 0, 1 e 3?

Solução

Como $x = -\frac{1}{2}$ satisfaz à desigualdade $x < 1$, usamos a primeira expressão para obter

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-1/2 - 1} = \frac{1}{-3/2} = -\frac{2}{3}$$

Por outro lado, $x = 1$ e $x = 2$ satisfazem à desigualdade $x \geq 1$ e, portanto, para calcular $f(1)$ e $f(2)$ usamos a segunda parte da expressão:

$$f(1) = 3(1)^2 + 1 = 4 \qquad \text{e} \qquad f(2) = 3(2)^2 + 1 = 13$$

Determinação do Domínio ■ A menos que seja especificado de outra forma, se uma expressão (ou várias expressões, como no Exemplo 1.1.3) é usada para definir uma função f, o domínio de f é o conjunto de todos os números para os quais $f(x)$ é definida (como um número real). Este é o chamado **domínio natural** de f. Para determinar o domínio natural de uma função, é preciso excluir, por exemplo, os números x que resultam em uma divisão por 0 ou na raiz quadrada de um número negativo. Este processo é ilustrado no Exemplo 1.1.4.

4 EXPLORE!

Entre com $f(x) = 1/(x-3)$ na calculadora como Y1 e observe o gráfico usando a Janela Decimal do **ZOOM**. Use **TRACE** para examinar os valores da função entre X = 2,5 e X = 3,5. O que você observa em X = 3? Entre com $g(x) = \sqrt{x-2}$ como Y1 e observe o gráfico usando a Janela Decimal do **ZOOM**. Use **TRACE** para examinar os valores da função entre X = 0 e X = 3, a intervalos de 0,1. Quando os valores de Y começam a aparecer? O que isto indica a respeito do domínio de $g(x)$?

EXEMPLO 1.1.4

Determine o domínio e o contradomínio das funções a seguir.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ **b.** $g(t) = \sqrt{t-2}$

Solução

a. Como a divisão por qualquer número diferente de zero é possível, a domínio de f é o conjunto de todos os números $x \neq 3$. O contradomínio de f é o conjunto de todos os números y exceto 0, já que para qualquer $y \neq 0$ existe um x tal que $y = \dfrac{1}{x-3}$; este valor de x é dado pela expressão $x = 3 + \dfrac{1}{y}$.

b. Como os números negativos não têm uma raiz quadrada real, $g(t)$ pode ser calculada apenas para $t - 2 \geq 0$; assim, o domínio de g é o conjunto de todos os números para os quais $t \geq 2$. O contradomínio de g é o conjunto de todos os números não-negativos, porque para qualquer desses números existe um t tal que $y = \sqrt{t-2}$; este valor de t é dado pela expressão $t = y^2 + 2$.

Funções Usadas na Economia

Existem várias funções básicas que aparecem freqüentemente nos problemas de economia. A **função demanda** $p = D(x)$ é uma função que relaciona o preço unitário p de um produto ao número x de unidades que os consumidores se dispõem a comprar por este preço. A **receita total** é dada pela expressão

$$\begin{aligned} R(x) &= (\text{número de unidades vendidas})(\text{preço unitário}) \\ &= xp = xD(x) \end{aligned}$$

Se $C(x)$ é o **custo total** para produzir x unidades, o **lucro** obtido com a venda destas unidades pelo preço unitário p é dado pela função

$$P(x) = R(x) - C(x) = xD(x) - C(x)$$

Estes termos são usados no Exemplo 1.1.5.

EXEMPLO 1.1.5

Uma pesquisa de mercado mostra que os consumidores comprarão x mil unidades de uma certa marca de cafeteira se o preço unitário for

$$p = -0{,}27x + 51$$

reais. O custo para produzir as x mil unidades é

$$C(x) = 2{,}23x^2 + 3{,}5x + 85$$

mil reais.

a. Determine as funções demanda, receita e lucro, $D(x)$, $R(x)$ e $P(x)$, para este processo de produção.
b. Para que valores de x a produção das cafeteiras é lucrativa?

Solução

a. Como a função demanda é $D(x) = -0{,}27x + 51$, a receita é

$$R(x) = xD(x) = -0{,}27x^2 + 51x$$

mil reais e o lucro é

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -0{,}27x^2 + 51x - (2{,}23x^2 + 3{,}5x + 85) \\ &= -2{,}5x^2 + 47{,}5x - 85 \end{aligned}$$

mil reais.

b. A produção é lucrativa para $P(x) > 0$. Temos:

$$\begin{aligned} P(x) &= -2{,}5x^2 + 47{,}5x - 85 \\ &= -2{,}5(x^2 - 19x + 34) \\ &= -2{,}5(x-2)(x-17) \end{aligned}$$

Como o coeficiente $-2{,}5$ é negativo, $P(x) > 0$ apenas se os termos $(x-2)$ e $(x-17)$ tiverem sinais diferentes, isto é, se $x - 2 > 0$ e $x - 17 < 0$. Assim, a produção é lucrativa para $2 < x < 17$.

Lembrete

O produto de dois números é positivo se os números têm o mesmo sinal e negativo se têm sinais diferentes. Assim, $ab > 0$ se $a > 0$ e $b > 0$ e também se $a < 0$ e $b < 0$. Por outro lado, $ab < 0$ se $a < 0$ e $b > 0$ ou se $a > 0$ e $b < 0$.

O Exemplo 1.1.6 ilustra o uso da notação funcional em uma situação prática. Para facilitar a interpretação da expressão matemática, é comum usar letras que lembrem as grandezas pertinentes. (Neste exemplo, a letra C representa o "custo" e n o "número" de produtos fabricados.)

5 EXPLORE!

Leia o enunciado do Exemplo 1.1.6 e entre com a função de custo $C(q)$ em Y1 como $X^3 - 30X^2 + 500X + 200$. Construa uma **TABELA** de valores para $C(q)$ com o valor inicial TblStart de X = 5 e um incremento ΔTbl de 1 unidade. Observe na tabela o custo para fabricar a 10^a unidade.

EXEMPLO 1.1.6

O custo total em reais para fabricar n unidades de um certo produto é dado pela função $C(n) = n^3 - 30n^2 + 500n + 200$.

a. Determine o custo de fabricação de 10 unidades do produto.
b. Determine o custo de fabricação da 10^a unidade do produto.

Solução

a. O custo de fabricação de 10 unidades é o valor da função de custo para $n = 10$:

$$\begin{aligned}\text{Custo de 10 unidades} &= C(10)\\ &= (10)^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200\\ &= \text{R\$}3.200{,}00\end{aligned}$$

b. O custo de fabricação da 10^a unidade é a diferença entre o custo de fabricação de 10 unidades e o custo de fabricação de 9 unidades:

$$\text{Custo da } 10^a \text{ unidade} = C(10) - C(9) = 3.200 - 2.999 = \text{R\$}201{,}00$$

Composição de Funções

Existem muitas situações nas quais uma grandeza é dada como uma função de uma variável que, por sua vez, pode ser escrita como uma função de outra variável. Combinando as funções de forma apropriada, pode ser possível expressar a grandeza original em função da segunda variável. Este processo é conhecido como **composição de funções** ou **composição funcional**.

Suponha, por exemplo, que os ambientalistas estimem que em uma cidade com p habitantes a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia é $c(p)$ partes por milhão e que um estudo demográfico indique que a população da cidade dentro de t anos será $p(t)$ mil habitantes. Qual deverá ser a concentração de monóxido de carbono nesta cidade daqui a t anos? Para responder a esta pergunta, bastaria substituir a expressão usada para calcular o valor de $p(t)$ na expressão usada para calcular o valor de $c(p)$; o resultado seria uma expressão para calcular o valor de c em função de t, $c(t)$.

Voltaremos ao problema da poluição no Exemplo 1.1.11, com expressões concretas para $c(p)$ e $p(t)$, mas antes vamos ver alguns exemplos de como as funções compostas são formadas e calculadas. A definição de composição funcional é a seguinte:

Composição de Funções ■ Dadas as funções $f(u)$ e $g(x)$, a composição $f(g(x))$ é a função formada substituindo u por $g(x)$ na expressão de $f(u)$.

Observe que a função composta $f(g(x))$ "faz sentido" apenas se o domínio de f contém o contradomínio de g. Na Figura 1.2, a função composta é mostrada como uma "linha de montagem" na qual a "matéria-prima" x é convertida em um "produto intermediário" $g(x)$, que por sua vez é convertido em um "produto final" $f(g(x))$.

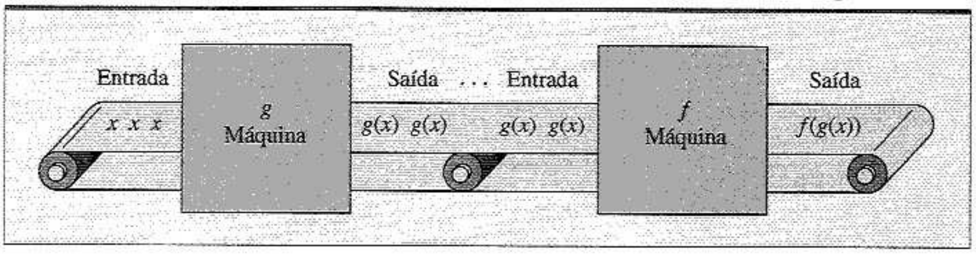


FIGURA 1.2 A função composta $f(g(x))$ como uma linha de montagem.

EXEMPLO 1.1.7

Determine a função composta $f(g(x))$ para $f(u) = u^2 + 3u + 1$ e $g(x) = x + 1$.

Solução

Substitua u por $x + 1$ na expressão de $f(u)$ para obter

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x+1)^2 + 3(x+1) + 1 \\ &= (x^2 + 2x + 1) + (3x + 3) + 1 \\ &= x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

NOTA Invertendo os papéis de f e g na definição de função composta, é possível definir a composição $g(f(x))$; as funções $f(g(x))$ e $g(f(x))$ *não* são necessariamente iguais. No caso do Exemplo 1.1.7, por exemplo, escrevemos primeiro

$$g(w) = w + 1 \qquad \text{e} \qquad f(x) = x^2 + 3x + 1$$

e depois substituímos w por $x^2 + 3x + 1$ para obter

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (x^2 + 3x + 1) + 1 \\ &= x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

que é igual a $f(g(x)) = x^2 + 5x + 5$ apenas para $x = -3/2$ (o leitor pode verificar que isto é verdade). ■

6 EXPLORE!

Entre no editor de funções com $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 3$ como Y1 e Y2, respectivamente. Cancele a seleção de Y1 e Y2. Faça Y3 = Y1(Y2) e Y4 = Y2(Y1). Mostre graficamente (usando a janela padrão) e analiticamente (através dos valores de uma tabela) que $f(g(x))$, representada por Y3, e $g(f(x))$, representada por Y4, não são a mesma função. Quais são as equações explícitas destas duas funções compostas?

O Exemplo 1.1.7 também poderia ter sido enunciado, de modo mais conciso, da seguinte forma: determine a função composta $f(x + 1)$, onde $f(u) = u^2 + 3u + 1$. O Exemplo 1.1.8 ilustra o uso desta notação compacta.

7 EXPLORE!

Leia o Exemplo 1.1.8. Entre com $f(x) = 3x^2 + 1/x + 5$ como Y1. Faça Y2 = Y1(X − 1). Construa uma tabela de valores e Y1 e Y2 para X = 0, 1,..., 6. O que você observa a respeito dos valores de Y1 e Y2?

EXEMPLO 1.1.8

Determine $f(x-1)$ para $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x} + 5$.

Solução

À primeira vista, o problema pode parecer confuso, já que a letra x aparece como variável independente na expressão que define f e também como parte da expressão $x - 1$. Para compreender melhor o enunciado, pode ser interessante escrever a expressão de f usando outro símbolo para a variável independente:

$$f(\square) = 3(\square)^2 + \frac{1}{\square} + 5$$

Para determinar $f(x - 1)$, basta substituir os quadrados pela expressão $x - 1$:

$$f(x-1) = 3(x-1)^2 + \frac{1}{x-1} + 5$$

Ocasionalmente, pode ser possível "desmontar" uma função composta $g(h(x))$ e identificar a "função externa" $g(u)$ e a "função interna" $h(x)$ a partir da qual foi formada. O processo é ilustrado no Exemplo 1.1.9.

EXEMPLO 1.1.9

Se $f(x) = 5/(x - 2) + 4(x - 2)^3$, determine as funções $g(u)$ e $h(x)$ para que $f(x) = g(h(x))$.

Solução

A forma da função dada é

$$f(x) = \frac{5}{\square} + 4(\square)^3$$

onde os dois quadrados contêm a expressão $x - 2$. Assim, podemos fazer $f(x) = g(h(x))$, onde

$$\underbrace{g(u) = \frac{5}{u} + 4u^3}_{\textit{função externa}} \quad \text{e} \quad \underbrace{h(x) = x - 2}_{\textit{função interna}}$$

Na verdade, existe um número infinito de pares de funções $g(u)$ e $h(x)$ que satisfazem à condição pedida no Exemplo 1.1.9. [Por exemplo: $g(u) = \frac{5}{u+1} + 4(u+1)^3$ e $h(x) = x - 3$.] O par de funções escolhido na solução deste exemplo é o mais natural e o que reflete mais claramente a estrutura da função original $f(x)$.

EXEMPLO 1.1.10

O **quociente diferença** é uma expressão da forma

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

onde f é uma função dada de x e h é um número. O quociente diferença será usado no Capítulo 2 para definir a *derivada*, um dos conceitos fundamentais do cálculo. Determine o quociente diferença para a função $f(x) = x^2 - 3x$.

Solução

Aplicando a definição de quociente diferença, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h)] - [x^2 - 3x]}{h} \\ &= \frac{[\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - 3x - 3h] - [\cancel{x^2} - 3x]}{h} && \textit{expandindo o numerador} \\ &= \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} && \textit{combinando os termos do numerador} \\ &= 2x + h - 3 && \textit{dividindo por n} \end{aligned}$$

O Exemplo 1.1.11 ilustra a aplicação de uma função composta a um problema prático.

EXEMPLO 1.1.11

Os ambientalistas estimam que em uma certa cidade a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia será $c(p) = 0{,}5p + 1$ partes por milhão quando a cidade tiver uma população de p mil habitantes. Um estudo demográfico indica que a população da cidade dentro de t anos será $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$ mil habitantes.

a. Determine a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia em função do tempo.
b. Daqui a quanto tempo a concentração de monóxido de carbono atingirá o valor de 6,8 partes por milhão?

Solução

a. Como a concentração de monóxido de carbono está relacionada à variável p através da equação

$$c(p) = 0{,}5p + 1$$

e a variável p está relacionada à variável t através da equação

$$p(t) = 10 + 0{,}1t^2$$

a função composta

$$c(p(t)) = c(10 + 0{,}1t^2) = 0{,}5(10 + 0{,}1t^2) + 1 = 6 + 0{,}05t^2$$

expressa a concentração de monóxido de carbono no ar em função da variável t.

b. Fazendo $c(p(t)) = 6{,}8$ e explicitando t, temos:

$$\begin{aligned} 6 + 0{,}05t^2 &= 6{,}8 \\ 0{,}05t^2 &= 0{,}8 \\ t^2 &= \frac{0{,}8}{0{,}05} = 16 \\ t &= \sqrt{16} = 4 \quad \textit{desprezando } t = -4 \end{aligned}$$

Assim, a concentração de monóxido de carbono atingirá o valor de 6,8 partes por milhão daqui a 4 anos.

PROBLEMAS | 1.1

Nos Problemas 1 a 11, calcule os valores indicados da função dada.

1. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$; $f(0), f(-2), f(1)$

2. $h(t) = (2t + 1)^3$; $h(-1), h(0), h(1)$

3. $g(x) = x + \frac{1}{x}$; $g(-1), g(1), g(2)$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; $f(2), f(0), f(-1)$

5. $h(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 4}$; $h(2), h(0), h(-4)$

6. $g(u) = (u + 1)^{3/2}$; $g(0), g(-1), g(8)$

7. $f(t) = (2t - 1)^{-3/2}$; $f(1), f(5), f(13)$

8. $g(x) = 4 + |x|$; $g(-2), g(0), g(2)$

9. $f(x) = x - |x - 2|$; $f(1), f(2), f(3)$

10. $h(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{para } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$; $h(3), h(1), h(0), h(-3)$

11. $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{para } t < -5 \\ t + 1 & \text{para } -5 \leq t \leq 5 \\ \sqrt{t} & \text{para } t > 5 \end{cases}$; $f(-6), f(-5), f(16)$

Nos Problemas 12 a 15, determine se o domínio da função dada é o conjunto dos números reais.

12. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

13. $g(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

14. $h(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

15. $f(t) = \sqrt{1 - t}$

Nos Problemas 16 a 21, determine o domínio da função dada.

16. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$

17. $g(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

18. $f(t) = \frac{t + 1}{t^2 - t - 2}$

19. $f(x) = \sqrt{2x + 6}$

20. $h(s) = \sqrt{s^2 - 4}$

21. $f(t) = \frac{t + 2}{\sqrt{9 - t^2}}$

Nos Problemas 22 a 29, determine a função composta $f(g(x))$.

22. $f(u) = u^2 + 4$, $g(x) = x - 1$

23. $f(u) = 3u^2 + 2u - 6$, $g(x) = x + 2$

24. $f(u) = (2u + 10)^2$, $g(x) = x - 5$

25. $f(u) = (u - 1)^3 + 2u^2$, $g(x) = x + 1$

26. $f(u) = \frac{1}{u}$, $g(x) = x^2 + x - 2$

27. $f(u) = \frac{1}{u^2}$, $g(x) = x - 1$

28. $f(u) = u^2$, $g(x) = \frac{1}{x - 1}$

29. $f(u) = \sqrt{u + 1}$, $g(x) = x^2 - 1$

Nos Problemas 30 a 33, determine o quociente diferença de f, ou seja, o valor de $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

30. $f(x) = 2x + 3$

31. $f(x) = x^2$

32. $f(x) = 4x - x^2$

33. $f(x) = \frac{1}{x}$

Nos Problemas 34 a 37, determine as funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e os valores de x (se existirem) para os quais $f(g(x)) = g(f(x))$.

34. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 1 - x$

35. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - 3x$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{4 - x}{2 + x}$

37. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

Nos Problemas 38 a 45, determine a função composta indicada.

38. $f(x + 1)$ onde $f(x) = x^2 + 5$

39. $f(x - 2)$ onde $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

40. $f(x + 3)$ onde $f(x) = (2x - 6)^2$

41. $f(x - 1)$ onde $f(x) = (x + 1)^5 - 3x^2$

42. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ onde $f(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$

43. $f(x^2 + 3x - 1)$ onde $f(x) = \sqrt{x}$

44. $f(x^2 - 2x + 9)$ onde $f(x) = 2x - 20$

45. $f(x + 1)$ onde $f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

Nos Problemas 46 a 51, determine funções $h(x)$ e $g(u)$ tais que $f(x) = g(h(x))$.

46. $f(x) = (x^5 - 3x^2 + 12)^3$

47. $f(x) = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 3$

48. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

49. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

50. $f(x) = \sqrt{x + 4} - \dfrac{1}{(x + 4)^3}$

51. $f(x) = \sqrt[3]{2 - x} + \dfrac{4}{2 - x}$

52. CUSTO DE FABRICAÇÃO Suponha que o custo total em reais para fabricar n unidades de um certo produto seja dado pela função

$$C(n) = n^3 - 30n^2 + 400n + 500.$$

a. Determine o custo de fabricação de 20 unidades.
b. Determine o custo de fabricação da 20ª unidade.

53. EFICIÊNCIA NO TRABALHO Um estudo de eficiência no turno da manhã mostra que, em média, um operário que chega no trabalho às 8 h terá montado

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$$

aparelhos de televisão x horas depois.

a. Quantos aparelhos um operário já montou, em média, às 10 h da manhã? [*Sugestão:* às 10 h, $x = 2$.]
b. Quantos aparelhos um operário monta, em média, entre 9 h e 10 h da manhã? [*Sugestão:* às 10 h, $x = 2$.]

54. VARIAÇÃO DA TEMPERATURA Suponha que t horas depois da meia-noite a temperatura em Miami seja $C(t) = -\dfrac{1}{6}t^2 + 4t + 10$ graus Celsius.

a. Qual é a temperatura às 2 h da manhã?
b. Qual é a variação de temperatura das 18 h até as 21 h?

55. VARIAÇÃO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t anos um certo bairro terá uma população de $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ mil habitantes.

a. Qual será a população do bairro daqui a 9 anos?
b. Qual será o aumento da população durante o 9º ano?
c. O que acontece com $P(t)$ para grandes valores de t? Interprete o resultado.

56. PSICOLOGIA EXPERIMENTAL Para estudar a rapidez com que os animais aprendem, um estudante de psicologia executou um experimento no qual um rato teve que percorrer várias vezes um labirinto. Suponha que o tempo necessário para o rato encontrar a saída do labirinto na enésima tentativa seja dado aproximadamente por

$$f(n) = 3 + \frac{12}{n}$$

minutos.

a. Qual é o domínio da função f?
b. Para que valores de n a função $f(n)$ tem significado no contexto deste experimento?
c. Quanto tempo o rato levou para encontrar a saída do labirinto na terceira tentativa?
d. Em que tentativa o rato conseguiu encontrar a saída pela primeira vez em 4 minutos ou menos?
e. De acordo com a função f dada, o que acontece com o tempo necessário para que o rato encontre a saída do labirinto quando o número de tentativas aumenta? O rato conseguirá, depois de um certo número de tentativas, encontrar a saída em menos de 3 minutos?

57. CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA Os biólogos descobriram que a velocidade do sangue em uma artéria é função da distância entre o sangue e o eixo central da artéria. De acordo com a **lei de Poiseuille,*** a velocidade (em centímetros por segundo) do sangue que está a r centímetros do eixo central de uma artéria é dado pela função $V(r) = C(R^2 - r^2)$, onde C é uma constante e R é o raio da artéria. Suponha que para uma certa artéria, $C = 1{,}76 \times 10^5$ e $R = 1{,}2 \times 10^{-2}$ cm.

a. Determine a velocidade do sangue no eixo central da artéria.

*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, pp. 101-103.

b. Determine a velocidade do sangue a meio caminho entre o eixo central e a parede da artéria.

58. CUSTO DE DISTRIBUIÇÃO Suponha que o número de operários-horas necessário para distribuir catálogos telefônico para $x\%$ das residências em uma certa região rural seja dado pela função $f(x) = \dfrac{600x}{300 - x}$.

a. Qual é o domínio da função f?

b. Para que valores de x a função $f(x)$ tem significado neste contexto?

c. Quantos operários-horas são necessários para distribuir catálogos para 50% das residências?

d. Quantos operários-horas são necessários para distribuir catálogos para todas as residências?

e. Que porcentagem das residências terá recebido novos catálogos depois de 150 operários-horas de trabalho?

59. ECOLOGIA Observações mostram que, em uma ilha de A quilômetros quadrados, o número de espécies de animais é dado aproximadamente por $s(A) = 2{,}9\sqrt[3]{A}$.

a. Quantas espécies existem, em média, em uma ilha de 8 quilômetros quadrados?

b. Se s_1 é o número médio de espécies de animais em uma ilha de área A e s_2 é o número médio de espécies em uma ilha de área $2A$, qual é a relação entre s_1 e s_2?

c. Qual deve ser a área de uma ilha para que possua cerca de 100 espécies de animais?

60. DENSIDADE POPULACIONAL Observações mostram que, no caso de mamíferos herbívoros, o número N de animais por quilômetro quadrado é dado aproximadamente pela expressão $N = \dfrac{912}{m^{0,73}}$, onde m é a massa do animal em quilogramas.

a. Supondo que os alces de uma reserva tenham, em média, uma massa de 300 kg, qual é o número esperado de alces por quilômetro quadrado?

b. Usando esta fórmula, estima-se que existe menos de um animal de uma certa espécie por quilômetro quadrado. Qual é a maior massa possível, em média, para um animal desta espécie?

c. Uma certa espécie de animal possui, em média, uma massa duas vezes maior que os animais de uma segunda espécie. Se uma certa reserva contém 100 animais da espécie maior, qual é o número esperado de animais da espécie menor?

61. VACINAÇÃO Durante um programa nacional para vacinar a população contra um certo tipo de gripe, as autoridades descobrem que o custo para vacinar $x\%$ da população é dado aproximadamente por $f(x) = \dfrac{150x}{200 - x}$ milhões de reais.

a. Qual é o domínio da função f?

b. Para que valores de x a função $f(x)$ tem significado neste contexto?

c. Qual é o custo para vacinar 50% da população?

d. Qual é o custo para vacinar os 50% restantes da população?

e. Que porcentagem da população terá sido vacinada após serem gastos 37,5 milhões de reais no programa?

62. MOVIMENTO DE UMA BOLA Deixa-se cair uma bola do alto de um edifício. A altura da bola (em metros) após t segundos é dada pela função $H(t) = -4{,}9t^2 + 80$.

a. A que altura está a bola após 2 segundos?

b. Que distância percorre a bola durante o terceiro segundo após o início da queda?

c. Qual é a altura do edifício?

d. Quanto tempo a bola leva para chegar ao solo?

63. POLUIÇÃO DO AR Os ambientalistas estimam que em uma certa cidade a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia será $c(p) = 0{,}4p + 1$ partes por milhão quando a cidade tiver uma população de p mil habitantes. Um estudo demográfico indica que a população da cidade dentro de t anos será $p(t) = 8 + 0{,}2t^2$ mil habitantes.

a. Determine a concentração média de monóxido de carbono no ar durante o dia em função do tempo.

b. Qual será a concentração de monóxido de carbono daqui a 2 anos?

c. Daqui a quanto tempo a concentração de monóxido de carbono atingirá o valor de 6,2 partes por milhão?

64. CUSTO DE PRODUÇÃO Em uma fábrica, o custo de produção de n unidades de uma certa mercadoria é $C(n) = n^2 + n + 900$ reais. Em um dia típico, são fabricadas $n(t) = 25t$ unidades durante t horas de trabalho.

a. Expresse o custo de produção em função de t.

b. Quanto é gasto na produção nas primeiras três horas de trabalho?

c. Quantas horas de trabalho são necessárias para que o custo de produção chegue a R$ 11.000,00?

Nos Problemas 65 a 68, a função demanda $D(x)$ e a função custo total $C(x)$ de um certo produto são dadas em função no nível de produção x. Em cada caso, determine:

(a) A receita $R(x)$ e o lucro $P(x)$.

(b) Todos os valores de x para os quais a produção é lucrativa.

65. $D(x) = -0{,}02x + 29$
$C(x) = 1{,}43x^2 + 18{,}3x + 15{,}6$

66. $D(x) = -0{,}37x + 47$
$C(x) = 1{,}38x^2 + 15{,}15x + 115{,}5$

67. $D(x) = -0{,}5x + 39$
$C(x) = 1{,}5x^2 + 9{,}2x + 67$

68. $D(x) = -0{,}09x + 51$
$C(x) = 1{,}32x^2 + 11{,}7x + 101{,}4$

69. DEMANDA Um importador americano de café do Brasil estima que os consumidores locais comprarão aproximadamente $Q(p) = \dfrac{4.374}{p^2}$ quilogramas de café por semana se o preço for p dólares por quilograma. O preço estimado do café após t semanas é

$$p(t) = 0{,}04t^2 + 0{,}2t + 12$$

dólares por quilograma.

a. Expresse a demanda semanal de café em função de t.

b. Quantos quilogramas de café os consumidores estarão comprando após 10 semanas?

c. Após quantas semanas a demanda de café será 30,375 quilogramas?

70. Qual é o domínio de $f(x) = (7x^2 - 4)/(x^3 - 2x + 4)$?

71. Qual é o domínio de $f(x) = (4x^2 - 3)/(2x^2 + x - 3)$?

72. Para $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ e $g(x) = x^3 - 1{,}2$, determine $g(f(4{,}8))$ com duas casas decimais.

73. Para $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ e $g(x) = x^3 - 1{,}2$, determine $f(g(2{,}3))$ com duas casas decimais.

74. **CUSTO DA EDUCAÇÃO** A Tabela 1.2 mostra os gastos fixos anuais (mensalidade, taxas escolares, casa e comida) de um estudante universitário americano, por tipo de instituição, em dólares constantes (ajustados pela inflação) de 2002 para os anos escolares de 1987–1988 a 2002–2003. Defina o **índice de custo da educação** (ICE) para um dado ano escolar como a razão entre o custo fixo total neste ano e o custo fixo total no ano escolar que terminou em 1990 tomado como referência. Assim, por exemplo, para instituições públicas de 4 anos no ano escolar que terminou em 2000, o índice de custo da educação é

$$\text{ICE}(2000) = \frac{8.311}{6.476} = 1{,}28$$

a. Calcule o ICE de um estudante de uma escola privada de 4 anos para cada um dos 16 anos escolares que aparecem na tabela. Qual é o aumento médio anual do ICE no período de 156 anos para este tipo de instituição?

b. Calcule o ICE para os quatro tipos de instituição no ano escolar que terminou em 2003 e discuta os resultados.

c. Escreva um parágrafo a respeito do índice de custo da educação. Ele pode continuar aumentando indefinidamente? O que acha que acabará por acontecer?

75. **VALOR DA EDUCAÇÃO** A Tabela 1.3 mostra a receita média em dólares constantes (ajustados para a inflação) de 2002 para vários níveis de instrução no caso de um americano com 18 anos de idade ou mais na década de 1991–2000. Defina o **índice de valor da educação** (IVE) para um dado nível de instrução em um dado ano como a razão entre a receita média nesse ano de uma pessoa com este nível de instrução e a receita média de uma pessoa com o menor nível de instrução considerado (segundo grau incompleto). Assim, por exemplo, para uma pessoa com terceiro grau completo em 1995, o índice de valor da educação é

$$\text{IVE}(1995) = \frac{43.450}{16.465} = 2{,}64$$

a. Calcule o IVE para todos os anos da década de 1991 a 2000 no caso de uma pessoa com o terceiro grau incompleto.

b. Compare o IVE do ano 2000 para os quatro níveis de instrução que exigem o segundo grau completo. Discuta os resultados.

TABELA 1.2 Gastos Fixos Anuais (Mensalidade, Taxas Escolares, Casa e Comida) por Tipo de Instituição, em Dólares Constantes (Ajustados pela Inflação) de 2002

Tipo/Ano	87–88	88–89	89–90	90–91	91–92	92–93	93–94	94–95	95–96	96–97	97–98	98–99	99–00	00–01	01–02	02–03
Pública 2 a	1.112	1.190	1.203	1.283	1.476	1.395	1.478	1.517	1.631	1.673	1.701	1.699	1.707	1.752	1.767	1.914
Privada 2 a	10.640	11.159	10.929	11.012	11.039	11.480	12.130	12.137	12.267	12.328	12.853	13.052	13.088	13.213	13.375	14.202
Pública 4 a	6.382	6.417	6.476	6.547	6.925	7.150	7.382	7.535	7.680	7.784	8.033	8.214	8.311	8.266	8.630	9.135
Privada 4 a	13.888	14.852	14.838	15.330	15.747	16.364	16.765	17.216	17.560	17.999	18.577	18.998	19.368	19.636	20.783	21.678

Todos os dados são **médias brutas**, que refletem os preços médios cobrados pelas instituições. FONTE: *Annual Survey of Colleges*. The College Board, New York, NY.

TABELA 1.3 Receita Média para Vários Níveis de Instrução em Dólares Constantes de 2002

Nível de Instrução/Ano	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Sem segundo grau	16.582	16.344	15.889	16.545	16.465	17.135	17.985	17.647	17.346	18.727
Segundo grau completo	24.007	23.908	24.072	24.458	25.180	25.289	25.537	25.937	26.439	27.097
Terceiro grau incompleto	27.017	26.626	26.696	26.847	28.037	28.744	29.263	30.304	30.561	31.212
Terceiro grau completo	41.178	41.634	43.529	44.963	43.450	43.505	45.150	48.131	49.149	51.653
Pós-graduação completa	60.525	62.080	69.145	67.770	66.581	69.993	70.527	69.777	72.841	72.175

FONTE: página do U.S. Census Bureau na Internet (www.census.gov/hhcs/income/histinc/p28).

SEÇÃO 1.2 | O Gráfico de uma Função

Os gráficos têm impacto visual e também mostram informações que podem não ser evidentes em descrições verbais ou algébricas. Dois gráficos típicos aparecem na Figura 1.3.

O gráfico da Figura 1.3a mostra a variação da produção industrial de um certo país durante um período de quatro anos. Observe que o ponto mais alto do gráfico aparece próximo do final do terceiro ano, mostrando que a produção passou por um máximo naquela ocasião.

O gráfico da Figura 1.3b mostra o aumento da população em uma situação na qual fatores ambientais impõem um limite superior ao tamanho da população. De acordo com o gráfico, a *taxa de aumento* da população aumenta a princípio e depois diminui, quando o tamanho da população se aproxima do limite.

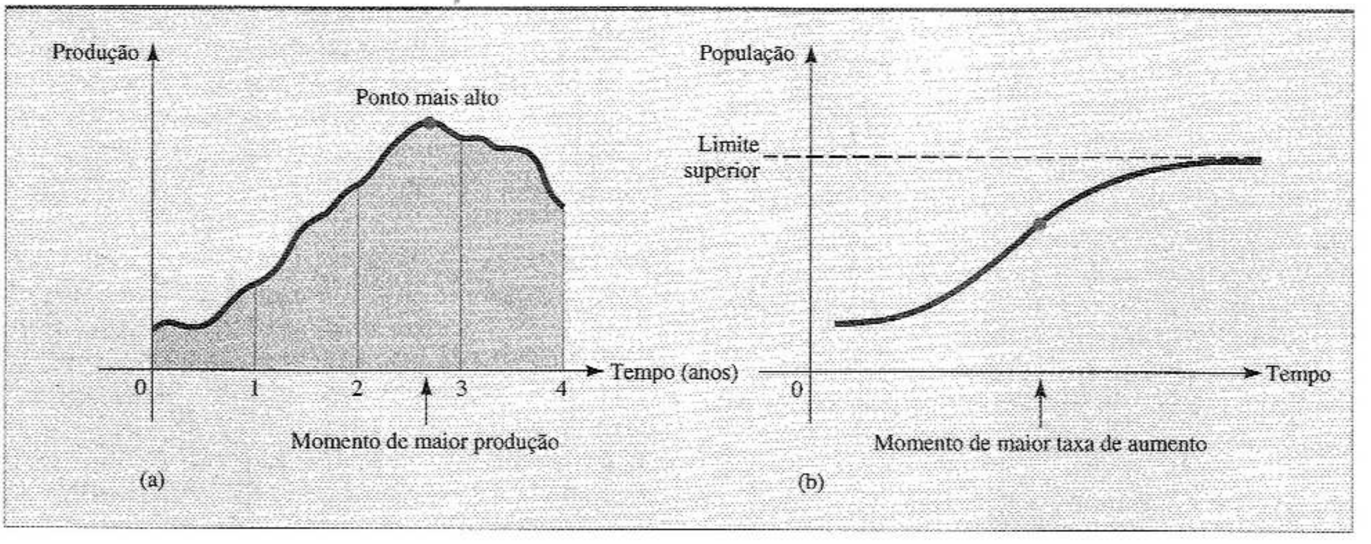


FIGURA 1.3 (a) Função produção. (b) Função do aumento da população.

Para representar geometricamente a função $y = f(x)$ em um gráfico, costuma-se usar um sistema de coordenadas retangulares no qual as unidades da variável independente x são marcadas no eixo horizontal e as unidades da variável dependente y são marcadas no eixo vertical.

Gráfico de uma Função ■ O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y), onde x é o domínio de f e $y = f(x)$, ou seja, todos os pontos da forma $(x, f(x))$.

No Capítulo 3, estudaremos técnicas eficientes para desenhar gráficos de funções. No caso de muitas funções, porém, é possível fazer um esboço razoável plotando uns poucos pontos, como ilustra o Exemplo 1.2.1.

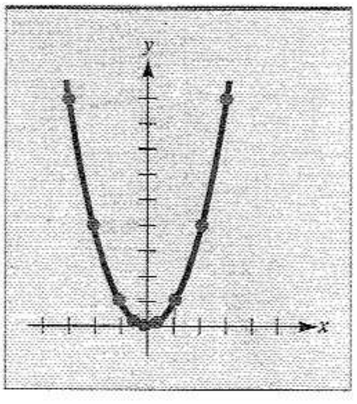


FIGURA 1.4 Gráfico de $y = x^2$.

EXEMPLO 1.2.1

Faça um gráfico da função $f(x) = x^2$.

Solução

Comece por construir a seguinte tabela:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Em seguida, plote os pontos (x, y) e ligue-os através de uma curva suave, como na Figura 1.4.

8 EXPLORE!

Entre com $f(x) = x^2$ no editor de equações como Y1 usando o estilo negrito para traçar o gráfico. Represente $g(x) = x^2 + 2$ por Y2 = Y1 + 2 e $h(x) = x^2 - 3$ por Y3 = Y1 − 3. Use uma janela decimal para mostrar a relação entre os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ e o de $f(x)$. Cancele a seleção de Y2 e Y3 e defina Y4 = Y1(X + 2) e Y5 = Y1(X − 3). Explique qual é relação entre os gráficos de Y1, Y4 e Y5.

NOTA É possível traçar muitas curvas diferentes passando pelos pontos do Exemplo 1.2.1. A Figura 1.5 mostra algumas possibilidades. Não há garantia de que a curva que traçamos a partir dos pontos disponíveis seja o verdadeiro gráfico de f. Entretanto, quanto mais pontos plotarmos, mais o gráfico se aproximará da função real. ■

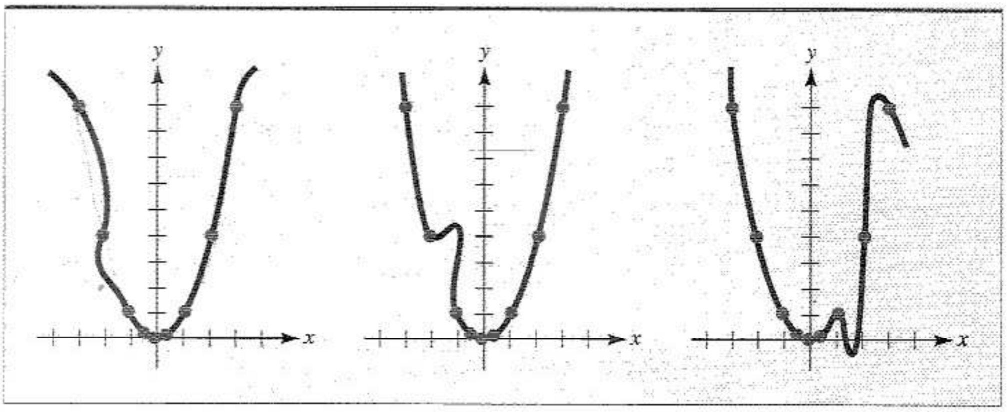


FIGURA 1.5 Gráficos de outras funções que passam pelos pontos do Exemplo 1.2.1.

O Exemplo 1.2.2 ilustra o traçado do gráfico de uma função definida por mais de uma expressão matemática.

9 EXPLORE!

Certas funções que são definidas por partes podem ser introduzidas na calculadora usando funções booleanas. Assim, por exemplo, a função valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

pode ser representada por Y1 = X(X ≥ 0) + (−X)(X < 0). Represente a função do Exemplo 1.2.2 usando funções booleanas e plote a função com uma janela de observação apropriada. [*Sugestão:* Será necessário representar o intervalo 0 < X < 1 pela expressão booleana (0 < X)(X < 1).]

EXEMPLO 1.2.2

Faça um gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{para } 1 \leq x < 4 \\ 3 & \text{para } x \geq 4 \end{cases}$$

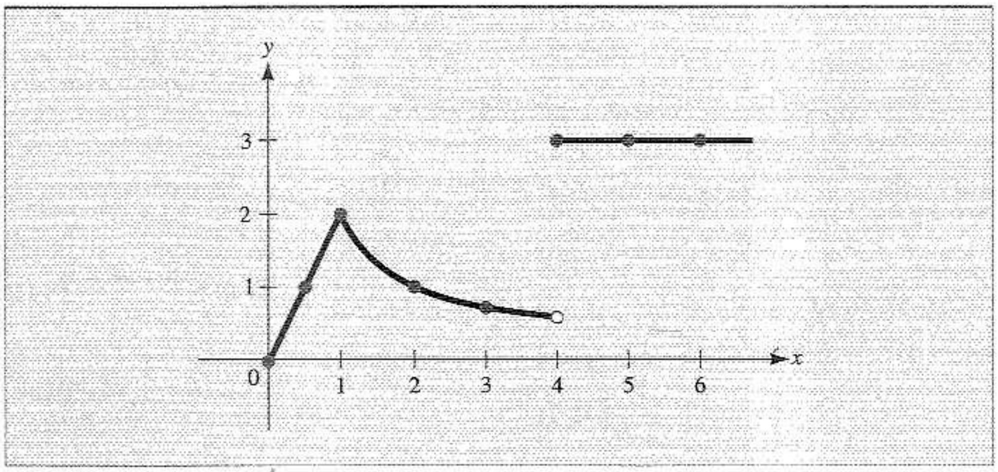
Solução

Ao fazer uma tabela de valores para esta função, não se esqueça de usar a expressão apropriada para cada valor de x. Usando a expressão $f(x) = 2x$ para $0 \leq x < 1$, a expressão $f(x) = 2/x$ para $1 \leq x < 4$ e a expressão $f(x) = 3$ para $x \geq 4$, é possível compilar a seguinte tabela:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	2	1	$\frac{2}{3}$	3	3	3

Em seguida, plote os pontos $(x, f(x))$ e desenhe o gráfico (Figura 1.6). Observe que os trechos para $0 \leq x < 1$ e $1 \leq x < 4$ estão ligados pelo ponto (1, 2), mas o trecho para $x \geq 4$ está separado do resto do gráfico. [O "ponto aberto" em (4, 1/2) mostra que o gráfico se aproxima deste ponto mas o ponto não faz parte do gráfico.]

FIGURA 1.6 Gráfico de
$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ 2/x & 1 \leq x < 4 \\ 3 & x \geq 4 \end{cases}$$



Pontos de Interseção

Os pontos em que um gráfico cruza o eixo x são chamados de **pontos de interseção com o eixo x** e os pontos em que o gráfico cruza o eixo y são chamados de **pontos de interseção com o eixo y**. Os pontos de interseção são pontos importantes de um gráfico e podem muitas vezes ser determinados algebricamente.

10 EXPLORE!

Use a calculadora para determinar os pontos em que a função $f(x) = -x^2 + x + 2$ intercepta o eixo x, primeiro graficamente, usando a tecla **ZOOM**, e depois numericamente, através da rotina para localizar raízes. Faça o mesmo para a função $g(x) = x^2 + x - 4$. Qual é o valor numérico dessas raízes, deixando indicados os radicais?

Como Encontrar os Pontos de Interseção com os Eixos x e y

Para encontrar os pontos de interseção de um gráfico com o eixo x, faça $y = 0$ e determine o valor de x. Para encontrar os pontos de interseção com o eixo y, faça $x = 0$ e determine o valor de y. No caso de uma função f, o único ponto de interseção com o eixo y é $y_0 = f(0)$, mas a determinação dos pontos de interseção com o eixo x pode ser difícil.

EXEMPLO 1.2.3

Faça um gráfico da função $f(x) = -x^2 + x + 2$. Mostre todos os pontos de interseção com os eixos x e y.

Solução

O ponto de interseção com o eixo y é $f(0) = 2$. Para encontrar os pontos de interseção com o eixo x, é preciso resolver a equação $f(x) = 0$. Fatorando o polinômio, temos:

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 \\ -(x+1)(x-2) &= 0 \quad \textit{fatorando} \\ x = -1,\ x &= 2 \quad \textit{uv} = 0 \textit{ se e apenas se } u = 0 \textit{ ou } v = 0 \end{aligned}$$

Assim, os pontos de interseção com o eixo x são $(-1, 0)$ e $(2, 0)$.

Finalmente, fazemos uma tabela de valores e plotamos os pontos $(x, f(x))$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10

A Figura 1.7 mostra o gráfico de f.

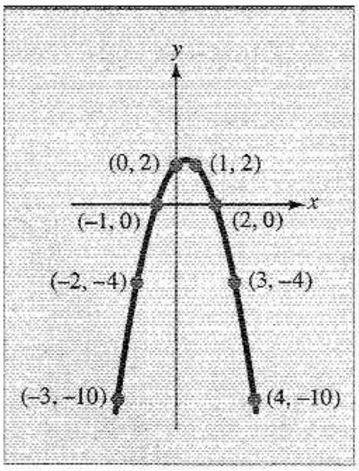


FIGURA 1.7 Gráfico de $f(x) = -x^2 + x + 2$.

NOTA O polinômio do Exemplo 1.2.3 não é difícil de fatorar; em casos mais complicados, o leitor pode recorrer aos métodos de fatoração descritos no Apêndice A2.

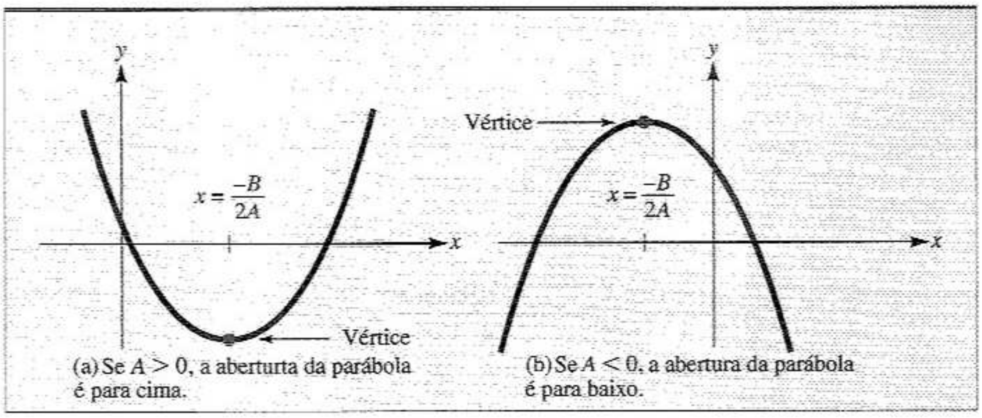
Gráficos de Parábolas

As curvas das Figuras 1.4 e 1.7 são chamadas de **parábolas**. O gráfico de uma função do tipo $y = Ax^2 + Bx + C$ é sempre uma parábola, contanto que $A \neq 0$. Todas as parábolas têm "forma de U" e a abertura da parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ é voltada para cima se $A > 0$ e para baixo se $A < 0$. O "pico" ou "vale" da parábola recebe o nome de **vértice** e sempre ocorre no ponto em que $x = \dfrac{-B}{2A}$ (veja a Figura 1.8; veja também o Problema 58). Estas características da parábola podem ser determinadas com o auxílio dos métodos de cálculo que serão discutidos no Capítulo 3. Para fazer um esboço razoável da parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, basta conhecer três características da curva:

1. A localização do vértice $\left(\text{o ponto em que } x = \dfrac{-B}{2A}\right)$
2. Se a parábola se abre para cima ($A > 0$) ou para baixo ($A < 0$)
3. As interseções com os eixos x e y

No Exemplo 1.2.3, a parábola $y = -x^2 + x + 2$ se abre para baixo (já que $A = -1$ é negativo) e o vértice (ponto mais alto) fica em $x = \dfrac{-B}{2A} = \dfrac{-1}{2(-1)} = \dfrac{1}{2}$.

FIGURA 1.8 Gráfico da parábola $y = Ax^2 + Bx + C$.



No Capítulo 3, vamos apresentar um método no qual primeiro usamos o cálculo para plotar o gráfico de uma função de interesse prático e em seguida interpretamos este gráfico para obter informações úteis a respeito da função, como os valores máximos e mínimos. No Exemplo 1.2.4, antecipamos este método usando o que sabemos a respeito do gráfico de uma parábola para determinar a receita máxima obtida em um processo de produção.

EXEMPLO 1.2.4

Um fabricante determina que, quando x centenas de unidades de um certo produto são produzidas, podem ser todas vendidas por um preço unitário dado pela função demanda $p = 60 - x$ reais. Para que nível de produção a receita é máxima? Qual é esta receita máxima?

Solução

A receita obtida produzindo x centenas de unidades e vendendo todas estas unidades por $60 - x$ reais cada uma é dada por $R(x) = x(60 - x)$. Observe que $R(x) \geq 0$ apenas para $0 \leq x \leq 60$. O gráfico da função receita

$$R(x) = x(60 - x) = -x^2 + 60x$$

é uma parábola com a abertura voltada para baixo (já que $A = -1 < 0$) cujo ponto mais alto (vértice) fica em

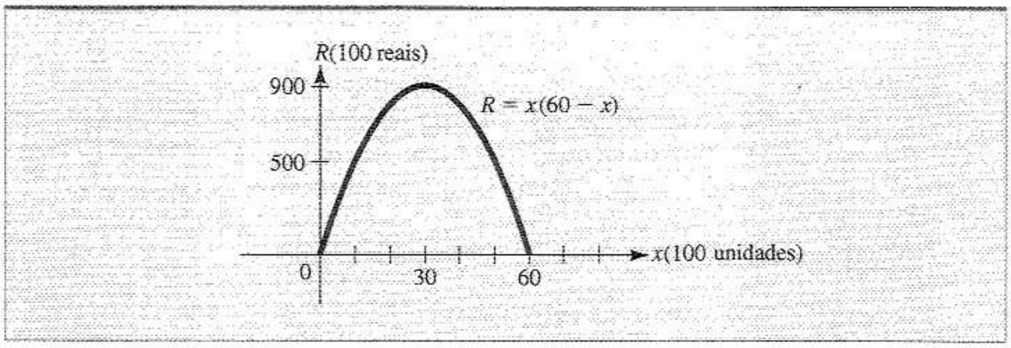
$$x = \frac{-B}{2A} = \frac{-60}{2(-1)} = 30$$

como mostra a Figura 1.9. Assim, a receita é maximizada quando $x = 30$ centenas de unidades são produzidas e a receita máxima correspondente é

$$R(30) = 30(60 - 30) = 900$$

centenas de reais. O fabricante deve produzir 3.000 unidades e com este nível de produção a receita esperada é R$ 90.000,00.

FIGURA 1.9 Função receita.



Observe que também podemos determinar o valor máximo de $R(x) = -x^2 + 60x$ completando o quadrado:

$$\begin{aligned} R(x) &= -x^2 + 60x = -(x^2 - 60x) && \textit{colocando } -1 \textit{, em evidência} \\ &= -(x^2 - 60x + \underbrace{900) + 900}_{-900\,+\,900} && \textit{somando e subtraindo } (-60/2)^2 = 900 \textit{ para completar o quadrado} \\ &= -(x - 30)^2 + 900 \end{aligned}$$

Assim, $R(30) = 0 + 900 = 900$ e para $c \neq 30$, temos:

$$R(c) = -(c - 30)^2 + 900 < 900 \qquad \textit{já que } -(c - 30)^2 < 0$$

e, portanto, a receita máxima é 900 para $x = 30$.

Interseções de Gráficos

Às vezes é necessário determinar o ponto (ou pontos) em que duas funções são iguais. Assim, por exemplo, um economista pode estar interessado em calcular o preço para o qual a demanda de um produto é igual à oferta ou um analista político pode querer prever quanto tempo a popularidade de um candidato da oposição levará para se igualar à do candidato da situação. Algumas destas aplicações serão discutidas na Seção 1.4.

Em termos geométricos, os valores de x para os quais duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são iguais são as coordenadas x dos pontos de interseção das duas curvas. Na Figura 1.10, os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se interceptam em dois pontos, P e Q. Para determinar algebricamente os pontos de interseção, basta igualar $f(x)$ e $g(x)$ e calcular o valor (ou valores) de x. O Exemplo 1.2.5 ilustra este processo.

Lembrete

Uma **equação do segundo grau** da forma $Ax^2 + Bx + C = 0$ tem soluções reais se e apenas se $B^2 - 4AC \geq 0$, caso em que as soluções são dadas pela chamada fórmula de Báskara:

$$r_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

e

$$r_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Este resultado, que é usado no Exemplo 1.2.5, também aparece no Apêndice A2.

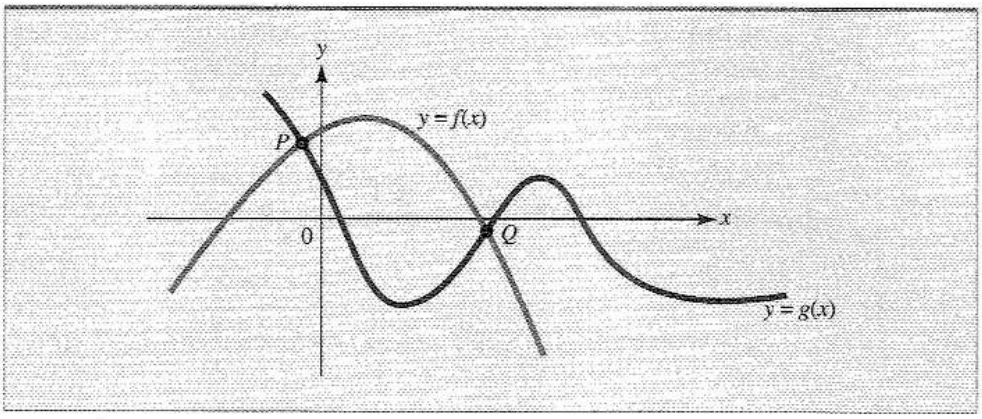


FIGURA 1.10 As curvas de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se interceptam nos pontos P e Q.

11 EXPLORE!

Leia o Exemplo 1.2.5 e use a calculadora para determinar todos os pontos de interseção das curvas de $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = x^2$. Determine também as raízes de $g(x) - f(x) = x^2 - 3x - 2$. O que é possível concluir a partir destes resultados?

EXEMPLO 1.2.5

Determine todos os pontos de interseção das funções $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = x^2$.

Solução

Precisamos resolver a equação $x^2 = 3x + 2$. Escrevendo a equação na forma $x^2 - 3x - 2 = 0$ e aplicando a fórmula de Báskara, temos:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

As soluções são

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx 3{,}56 \qquad \text{e} \qquad x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \approx -0{,}56$$

(Os cálculos foram feitos em uma calculadora, com uma precisão de duas casas decimais.)

Determinando as coordenadas y correspondentes a partir da equação $y = x^2$, verificamos que os pontos de interseção são aproximadamente (3,56; 12,67) e (−0,56; 0,31). (Em conseqüência de erros de arredondamento, o leitor obterá valores ligeiramente diferentes para as coordenadas y se substituir os mesmos valores de x na equação $y = 3x + 2$.) A Figura 1.11 mostra as duas curvas e os pontos de interseção.

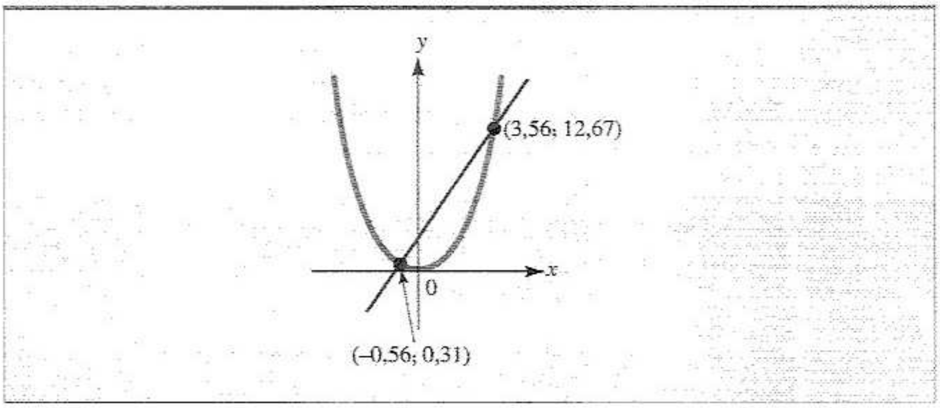


FIGURA 1.11 Interseções das curvas de $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = x^2$.

Funções Potência, Polinômios e Funções Racionais

Função potência é uma função da forma $f(x) = x^n$, onde n é um número real. Assim, por exemplo, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{-3}$ e $f(x) = x^{1/2}$ são funções potência. O mesmo se pode dizer de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $f(x) = \sqrt[3]{x}$, que podem ser escritas como $f(x) = x^{-2}$ e $f(x) = x^{1/3}$, respectivamente.

Polinômio é uma função da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde n é um número não-negativo e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes. Se $a_n \neq 0$, o número inteiro n é o **grau** do polinômio. Assim, por exemplo, a função $f(x) = 3x^5 - 6x^2 + 7$ é um polinômio de quinto grau. É possível demonstrar que o gráfico de um polinômio de grau n é uma curva contínua que não cruza o eixo x mais de n vezes. A Figura 1.12 mostra os gráficos de três diferentes polinômios do terceiro grau.

12 EXPLORE!

Use a calculadora para plotar o polinômio do terceiro grau $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 3$. Estime a posição dos pontos de interseção com o eixo x e determine os valores exatos usando a rotina para calcular raízes da calculadora.

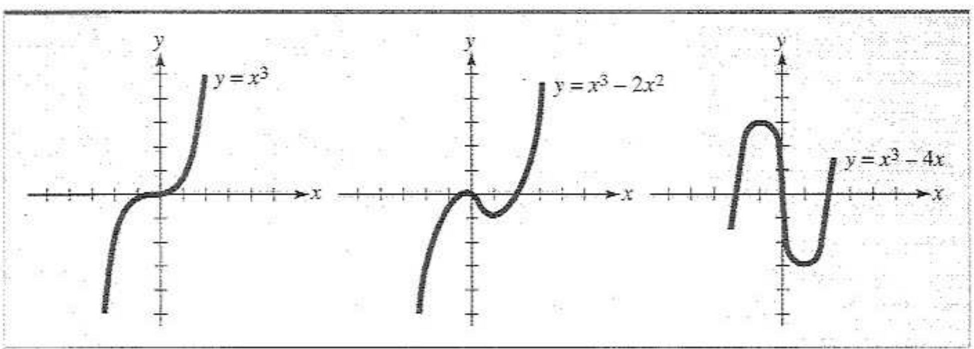
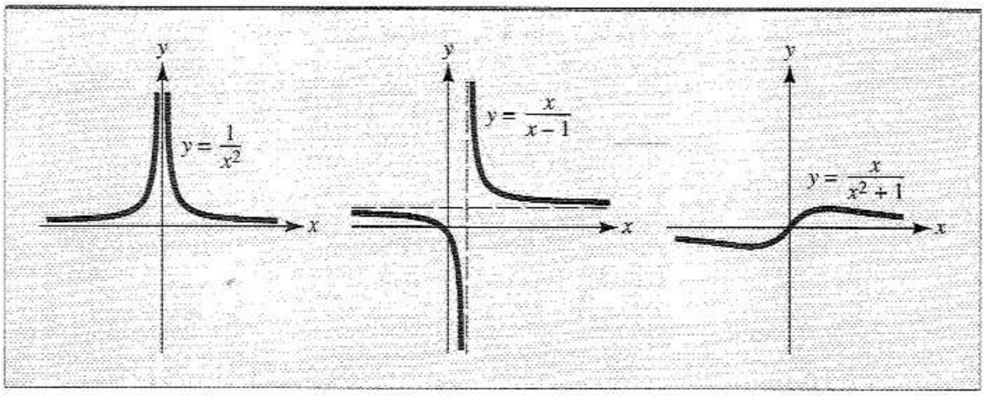


FIGURA 1.12 Três polinômios de terceiro grau.

O quociente $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ de dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é chamado de **função racional**. Muito exemplos e exercícios deste livro envolvem funções deste tipo. A Figura 1.13 mostra os gráficos de três funções racionais. Os métodos usados para traçar estes gráficos serão discutidos na Seção 3.3 do Capítulo 3.

FIGURA 1.13 Gráficos de três funções racionais.

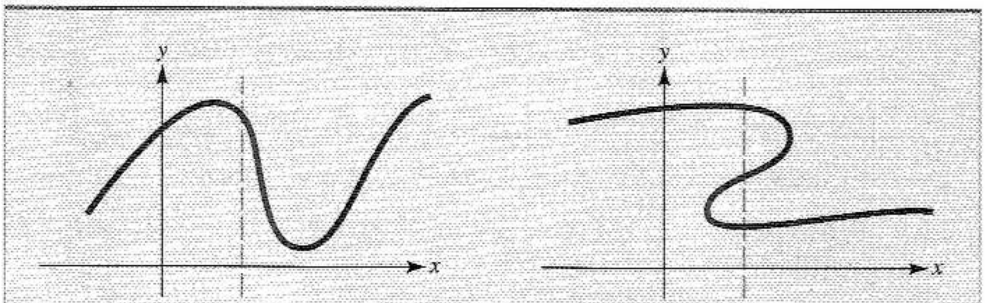


O Teste da Reta Vertical

É importante chamar a atenção para o fato de que nem toda curva é o gráfico de uma função (Figura 1.14). Suponha, por exemplo, que o círculo $x^2 + y^2 = 5$ fosse o gráfico de uma certa função $y = f(x)$. Nesse caso, como os pontos $(1, 2)$ e $(1, -2)$ pertencem ao círculo, teríamos $f(1) = 2$ e $f(1) = -2$, o que não estaria de acordo com a definição de função, segundo a qual existe um e *apenas* um objeto no contradomínio associado a cada objeto do domínio. Este exemplo sugere a seguinte regra geométrica para determinar se uma curva é o gráfico de uma função.

Teste da Reta Vertical ■ Uma curva é o gráfico de uma função se e apenas se nenhuma reta vertical intercepta a curva mais de uma vez.

FIGURA 1.14 Teste da reta vertical.



(a) Gráfico de uma função

(b) Gráfico de uma curva que não é uma função

PROBLEMAS | 1.2

Nos Problemas 1 e 2, classifique cada função como um polinômio, uma função potência ou uma função racional. Se a função não é de nenhum desses tipos, classifique-a como "diferente".

1. **a.** $f(x) = x^{1,4}$
b. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8$
c. $f(x) = (3x - 5)(4 - x)^2$
d. $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{4x + 7}$

2. **a.** $f(x) = -2 + 3x^2 + 5x^4$
b. $f(x) = \sqrt{x} + 3x$
c. $f(x) = \dfrac{(x - 3)(x + 7)}{-5x^3 - 2x^2 + 3}$
d. $f(x) = \left(\dfrac{2x + 9}{x^2 - 3}\right)^3$

Nos Problemas 3 a 18, faça o gráfico da função dada, mostrando todas as interseções com os eixos x e y.

3. $f(x) = x$

4. $f(x) = x^2$

5. $f(x) = x^3$

6. $f(x) = x^4$

7. $f(x) = 2x - 1$

8. $f(x) = 2 - 3x$

9. $f(x) = x(2x + 5)$

10. $f(x) = (x - 1)(x + 2)$

11. $f(x) = -x^2 - 2x + 15$

12. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

13. $f(x) = \sqrt{x}$

14. $f(x) = -x^3 + 1$

15. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{para } x < 2 \\ 3 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{para } x < 1 \\ 1 - 2x & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 9 - x & \text{para } x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 & \text{para } x > 2 \end{cases}$

Nos Problemas 19 a 24, determine os pontos de interseção (se existirem) entre as curvas dadas e desenhe os gráficos correspondentes.

19. $y = 3x + 5$ e $y = -x + 3$

20. $y = 3x + 8$ e $y = 3x - 2$

21. $y = x^2$ e $y = 3x - 2$

22. $y = x^2 - x$ e $y = x - 1$

23. $3y - 2x = 5$ e $y + 3x = 9$

24. $2x - 3y = -8$ e $3x - 5y = -13$

Nos Problemas 25 a 28, é dado o gráfico de uma função f(x). Em cada caso, determine

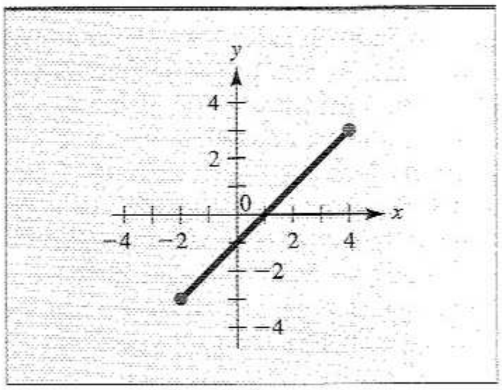
(a) A interseção com o eixo y.

(b) Todas as interseções com o eixo x.

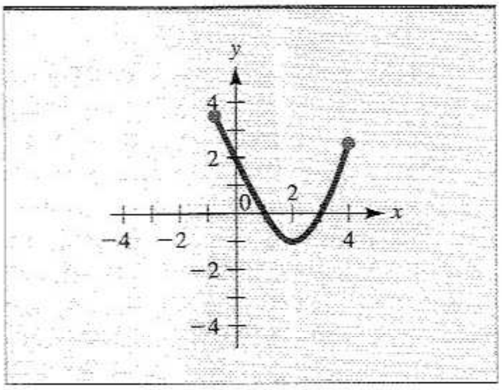
(c) O maior valor de f(x) e o(s) valor(es) correspondente(s) de x.

(d) O menor valor de f(x) e o(s) valor(es) correspondente(s) de x.

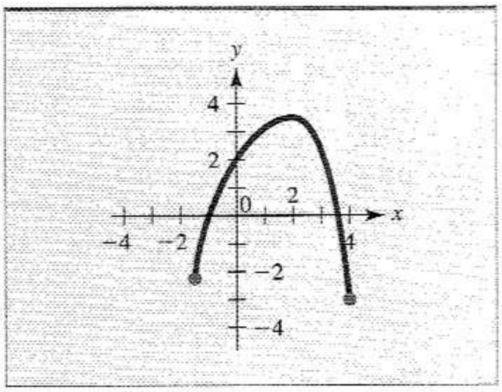
25.



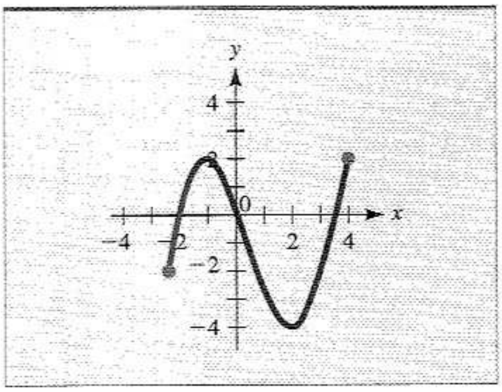
26.



27.



28.



29. CUSTO DE FABRICAÇÃO Um fabricante pode produzir gravadores por um custo de R$ 40,00 a unidade. Estima-se que se os gravadores forem vendidos por x reais a unidade, os consumidores comprarão $120 - x$ gravadores por mês. Expresse o lucro mensal do fabricante em função do preço, faça um gráfico desta função e use o gráfico para estimar o preço ótimo de venda.

30. VENDAS A VAREJO Uma livraria pode obter um atlas de uma editora por um preço de R$ 10,00 o exemplar e estima que, se vender o atlas a x reais o exemplar, aproximadamente $20(22 - x)$ exemplares serão vendidos por mês. Expresse o lucro mensal da livraria com a venda dos atlas em função do preço, faça um gráfico desta função e use o gráfico para estimar o preço ótimo de venda.

31. GASTO DOS CONSUMIDORES Suponha que $x = -200p + 12.000$ unidades por mês de um certo produto sejam vendidas quando o preço é p reais a unidade. O gasto mensal total E dos consumidores é a quantia total gasta pelos consumidores em um mês para adquirir o produto.

a. Expresse o gasto total mensal dos consumidores E em função do preço unitário p e desenhe o gráfico de $E(p)$.
b. Discuta o significado, em termos econômicos, dos pontos em que a função $E(p)$ intercepta o eixo p.
c. Use o gráfico do item (a) para estimar o preço para o qual o gasto mensal dos consumidores é máximo.

32. MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL Se um objeto é arremessado verticalmente para cima a partir do solo com uma velocidade inicial de 50 metros por segundo, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada pela função $H(t) = -4{,}9t^2 + 49t$.

a. Faça um gráfico da função $H(t)$.
b. Use o gráfico do item (a) para determinar em que instante o objeto se chocará com o solo.
c. Use o gráfico do item (a) para determinar a altura máxima atingida pelo objeto.

33. LUCRO Suponha que, quando o preço de um certo produto é p reais por unidade, x centenas de unidades são compradas pelos consumidores, onde $p = -0{,}05x + 38$. O custo para produzir x centenas de unidades é $C(x) = 0{,}02x^2 + 3x + 574{,}77$ centenas de reais.

a. Expresse o lucro P obtido com a venda de x centenas de unidades em função de x. Desenhe o gráfico da função lucro.
b. Use a curva obtida no item (a) para determinar o nível de produção x que resulta no maior lucro possível. Que preço unitário p corresponde a este lucro máximo?

34. CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA Como vimos no Problema 57 da Seção 1.1, a velocidade do sangue a r centímetros do eixo central de uma artéria é dado pela função $S(r) = C(R^2 - r^2)$, onde C é uma constante e R é o raio da artéria.* Qual é o domínio desta função? Desenhe o gráfico de $S(r)$.

35. SEGURANÇA NAS ESTRADAS Quando um automóvel está se movendo a v quilômetros por hora, um motorista médio necessita de D metros de visibilidade para frear com segurança, onde $D = 0{,}008v^2 + 0{,}028v$. Desenhe o gráfico de $D(v)$.

36. TARIFAS POSTAIS Em 2006, o preço de uma encomenda normal para a mesma cidade era R$ 6,50 para o primeiro quilograma e R$ 0,50 para cada quilograma ou fração de quilograma adicional. Seja $Q(p)$ a quantia necessária para enviar um pacote de peso p, para $0 \leq p \leq 10$.

a. Descreva $Q(p)$ como uma função definida por partes.
b. Desenhe o gráfico de $Q(p)$.

37. ALUGUEL DE IMÓVEIS Uma empresa imobiliária aluga 150 apartamentos em Belo Horizonte. Todos os apartamentos podem ser alugados por R$ 1.200,00 por mês, mas, para cada aumento de R$ 100,00 no aluguel acima deste valor, mais cinco apartamentos ficam vagos.

a. Expresse a receita total R obtida com o aluguel dos apartamentos em função do preço p do aluguel, supondo que todos os apartamentos sejam alugados pelo mesmo preço.
b. Desenhe o gráfico da função receita obtida no item (a).
c. Qual deve ser o aluguel cobrado pela empresa para que a receita seja a maior possível? Qual é esta receita?

38. ALUGUEL DE IMÓVEIS Suponha que a empresa do Problema 37 gaste R$ 500,00 para manter e anunciar cada apartamento desocupado.

a. Expresse a receita mensal total R com o aluguel dos apartamentos em função do preço do aluguel p.
b. Desenhe o gráfico da função receita obtido no item (a).
c. Qual deve ser o aluguel cobrado pela empresa para que a receita seja a maior possível? Qual é esta receita?

39. POLUIÇÃO DO AR As emissões de chumbo são uma das principais causas da poluição do ar nos Estados Unidos. Usando dados colhidos pela U.S. Environmental Protection Agency na década de 1990, é possível mostrar que a expressão

$$N(t) = -35t^2 + 299t + 3.347$$

fornece aproximadamente a emissão total N de chumbo (em milhares de toneladas) ocorrida nos Estados Unidos t anos após o ano base de 1990.

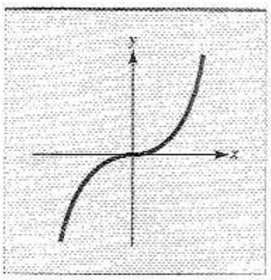
a. Plote a função poluição $N(t)$.
b. De acordo com esta expressão, qual deveria ter sido a emissão de chumbo em 1995? (De acordo com os dados oficiais, a poluição foi da ordem de 3.924 milhares de toneladas.)
c. De acordo com esta expressão, em que ano da década de 1990 a 2000 a poluição de chumbo foi maior?
d. Esta expressão pode ser usada para prever o nível atual de emissão de chumbo? Justifique sua resposta.

40. ARQUITETURA Uma passarela sobre uma estrada tem forma parabólica, 6 metros de largura e altura suficiente para permitir a passagem de um caminhão com 5 metros de altura e 4 metros de largura.

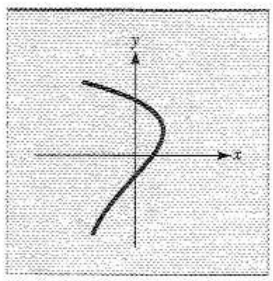
a. Supondo que a equação do arco seja da forma $y = ax^2 + b$, use as informações dadas para determinar os valores de a e b. Explique por que esta hipótese é razoável.
b. Desenhe o arco usando os resultados do item (a).

Nos Problemas 41 a 44, use o teste da reta vertical para determinar se a curva dada é o gráfico de uma função.

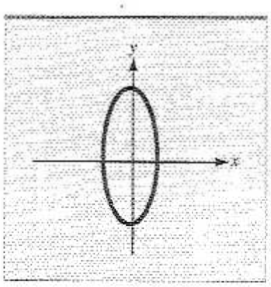
41.



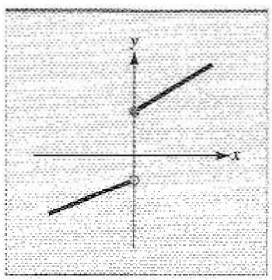
42.



43.



44.



*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, pp. 101-103.

45. Que janela de observação deve ser usada para obter um gráfico adequado da função do segundo grau

$$f(x) = 9x^2 - 3.600x - 358.200?$$

46. Que janela de observação deve ser usada para obter um gráfico adequado da função do segundo grau

$$f(x) = 4x^2 - 2.400x + 355.000?$$

47. **a.** Plote as funções $y = x^2$ e $y = x^2 + 3$. Qual é a relação entre os dois gráficos?

b. Sem fazer nenhum cálculo adicional, plote a função $y = x^2 - 5$.

c. Suponha que $g(x) = f(x) + c$, onde c é uma constante. Qual é a relação entre os gráficos de f e g? Justifique sua resposta.

48. **a.** Plote as funções $y = x^2$ e $y = -x^2$. Qual é a relação entre os dois gráficos?

b. Suponha que $g(x) = -f(x)$. Qual é a relação entre os gráficos de f e g? Justifique sua resposta.

49. **a.** Plote as funções $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$. Qual é a relação entre dois gráficos?

b. Sem fazer nenhum cálculo adicional, plote a função $y = (x + 1)^2$.

c. Suponha que $g(x) = f(x - c)$, onde c é uma constante. Qual é a relação entre os gráficos de f e g? Justifique sua resposta.

50. O aluguel de um certo equipamento custa R$ 90,00 mais R$ 21,00 por dia de uso.

a. Faça uma tabela mostrando o número de dias durante os quais o equipamento permanece alugado e o custo do aluguel para 2 dias, 5 dias, 7 dias e 10 dias.

b. Escreva uma expressão algébrica para o custo y em função do número de dias x.

c. Faça um gráfico da expressão do item (b).

51. Uma fábrica de cortadores de grama determinou que um empregado novo é capaz de montar N aparadores por dia após t dias de treinamento, onde

$$N(t) = \frac{45t^2}{5t^2 + t + 8}$$

a. Faça uma tabela mostrando o número de cortadores montados para tempos de treinamento $t = 2$ dias, 3 dias, 5 dias, 10 dias e 50 dias.

b. Com base na tabela do item (a), o que você acha que acontece com $N(t)$ para tempos de treinamento muito longos?

c. Use uma calculadora para plotar $N(t)$.

52. Use uma calculadora para plotar no mesmo gráfico as funções $y = x^4$, $y = x^4 - x$, $y = x^4 - 2x$ e $y = x^4 - 3x$, com uma janela $[-2, 2]1$ por $[-2, 5]1$. Que efeito tem o segundo termo, proporcional a x, sobre a forma das curvas? Repita para as funções $y = x^4$, $y = x^4 - x^3$, $y = x^4 - 2x^3$ e $y = x^4 - 3x^3$. Ajuste as dimensões da janela para ver melhor as novas curvas.

53. Faça o gráfico de $f(x) = \dfrac{-9x^2 - 3x - 4}{4x^2 + x - 1}$ e determine os valores de x para os quais a função é definida.

54. Faça o gráfico de $f(x) = \dfrac{8x^2 + 9x + 3}{x^2 + x - 1}$ e determine os valores de x para os quais a função é definida.

55. Faça o gráfico de $g(x) = -3x^3 + 7x + 4$ e determine os pontos de interseção com o eixo x.

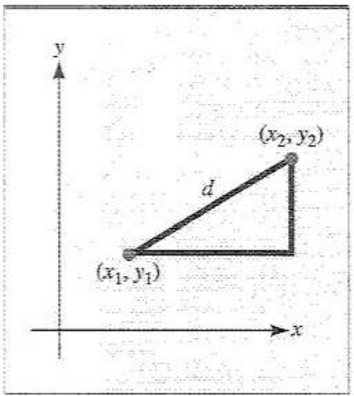
56. Mostre que a distância d entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada pela expressão

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

[*Sugestão:* Aplique o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento de reta que liga os pontos dados.] Use a expressão anterior para calcular a distância entre os seguintes pontos:

a. $(5, -1)$ e $(2, 3)$

b. $(2, 6)$ e $(2, -1)$



PROBLEMA 56

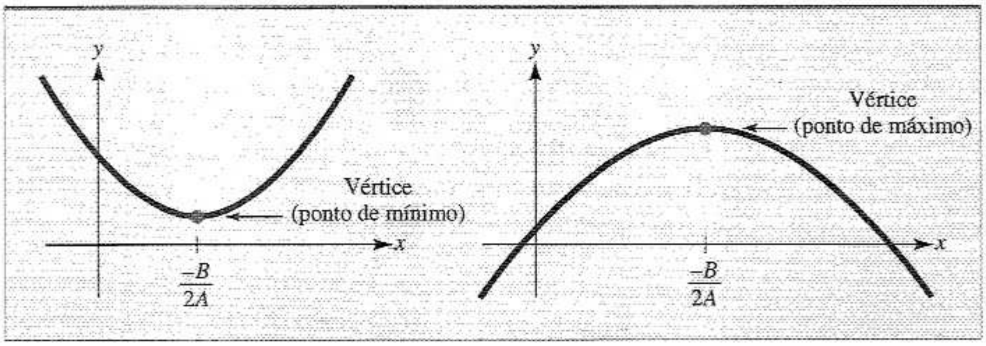
57. Use a fórmula da distância entre dois pontos do Problema 56 para mostrar que uma circunferência com centro no ponto (a, b) e raio R é expressa pela equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

58. Mostre que o vértice da parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ $(A \neq 0)$ corresponde ao ponto para o qual $x = \dfrac{-B}{2A}$.

[*Sugestão:* Mostre primeiro que $Ax^2 + Bx + C = A\left[\left(x + \dfrac{B}{2A}\right)^2 + \left(\dfrac{C}{A} - \dfrac{B^2}{4A^2}\right)\right]$. Em seguida, note que o valor máximo ou mínimo de $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ corresponde ao ponto para o qual $x = \dfrac{-B}{2A}$.]

PROBLEMA 58



SEÇÃO 1.3 Funções Lineares

Em muitas situações reais, a taxa com que uma grandeza varia em relação a outra é constante. O exemplo a seguir foi tirado da economia.

13 EXPLORE!

Entre com a função de custo Y1 = 50 *x* + {200, 300, 400} no editor de equações, usando chaves para indicar três valores diferentes do custo fixo. Defina uma janela de observação [0, 5]1 por [−100, 700]100 para observar o efeito da variação do custo fixo.

EXEMPLO 1.3.1

O custo total de um fabricante consiste em um custo fixo de R\$ 200,00 e um custo variável de R\$ 50,00 por unidade produzida. Expresse o custo total em função do número de unidades produzidas e desenhe o gráfico associado.

Solução

Seja x o número de unidades produzidas e $C(x)$ o custo total correspondente. Nesse caso,

$$\text{Custo total} = (\text{custo unitário})(\text{número de unidades}) + \text{custo fixo}$$

onde

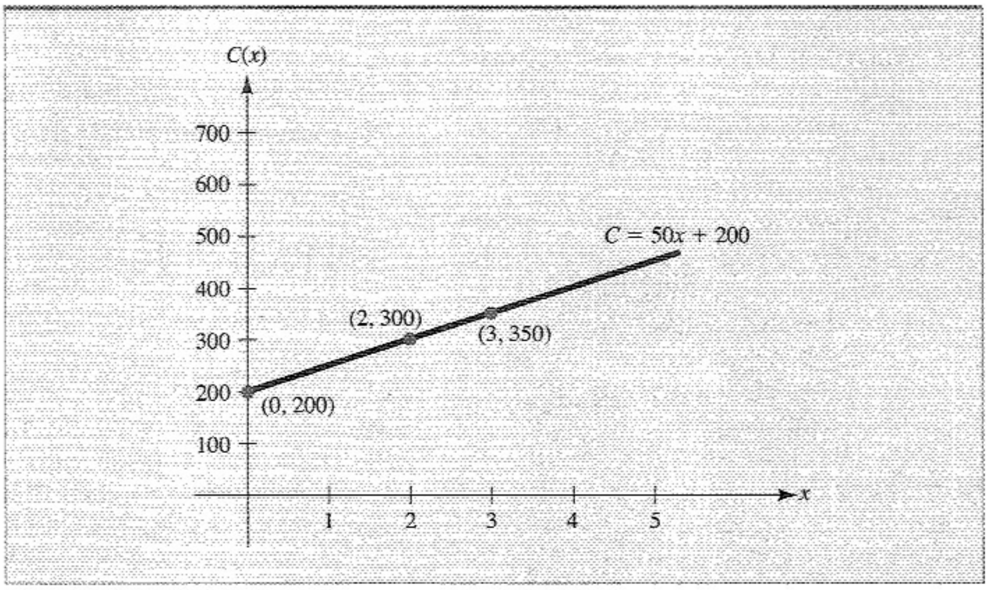
$$\begin{aligned} \text{Custo unitário} &= 50 \\ \text{Número de unidades} &= x \\ \text{Custo fixo} &= 200 \end{aligned}$$

Assim,

$$C(x) = 50x + 200$$

O gráfico desta função de custo aparece na Figura 1.15.

FIGURA 1.15 Função de custo $C(x) = 50x + 200$.



No Exemplo 1.3.1, o custo total aumenta à taxa constante de R$ 50,00 por unidade; assim, o gráfico da Figura 1.15 é uma linha reta cuja ordenada aumenta de 50 unidades cada vez que a abscissa aumenta de 1.

Uma função cujo valor varia a uma taxa constante em relação à variável independente é chamada de **função linear**, já que o gráfico de uma função deste tipo é uma linha reta. Em termos algébricos, função linear é qualquer função da forma

$$f(x) = a_1x + a_0$$

onde a_0 e a_1 são constantes. Assim, por exemplo, as funções $f(x) = \frac{3}{2} + 2x$, $f(x) = -5x$ e $f(x) = 12$ são lineares. As funções lineares são freqüentemente escritas na forma

$$y = mx + b$$

onde m e b são constantes. Esta notação será usada na discussão a seguir.

Função Linear ■ Função linear é uma função que varia a uma taxa constante em relação à variável independente.

O gráfico de uma função linear é uma linha reta.

A equação de uma função linear pode ser escrita na forma

$$y = mx + b$$

onde m e b são constantes.

Inclinação de uma Reta

Um agrimensor pode dizer que um morro com uma "elevação" de 2 metros para cada metro de "extensão" tem uma **inclinação**

$$m = \frac{\text{elevação}}{\text{extensão}} = \frac{2}{1} = 2$$

A inclinação do gráfico de uma função pode ser medida da mesma forma. Suponhamos, por exemplo, que os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pertençam a uma mesma reta (Figura 1.16). Entre estes pontos, x varia de $x_2 - x_1$ e y varia de $y_2 - y_1$. A inclinação da reta é dada pela razão

$$\text{Inclinação} = \frac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Às vezes é conveniente usar o símbolo Δy em vez de $y_2 - y_1$ para representar a variação de y. O símbolo Δy é chamado de "delta y". Da mesma forma, o símbolo Δx é usado para representar a variação $x_2 - x_1$.

Inclinação de uma Reta ■ A inclinação de uma reta não-vertical passando pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada pela expressão

$$\text{Inclinação} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

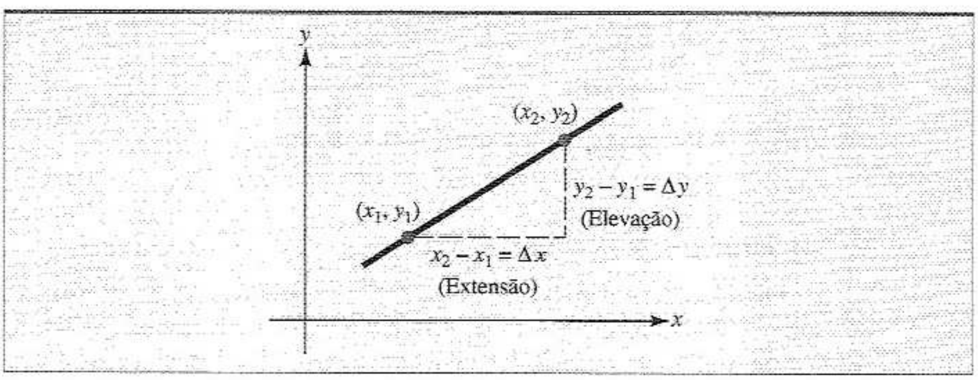


FIGURA 1.16 Inclinação $= \frac{y_2 - y_1}{x^2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

O uso desta expressão é ilustrado no Exemplo 1.3.2.

EXEMPLO 1.3.2

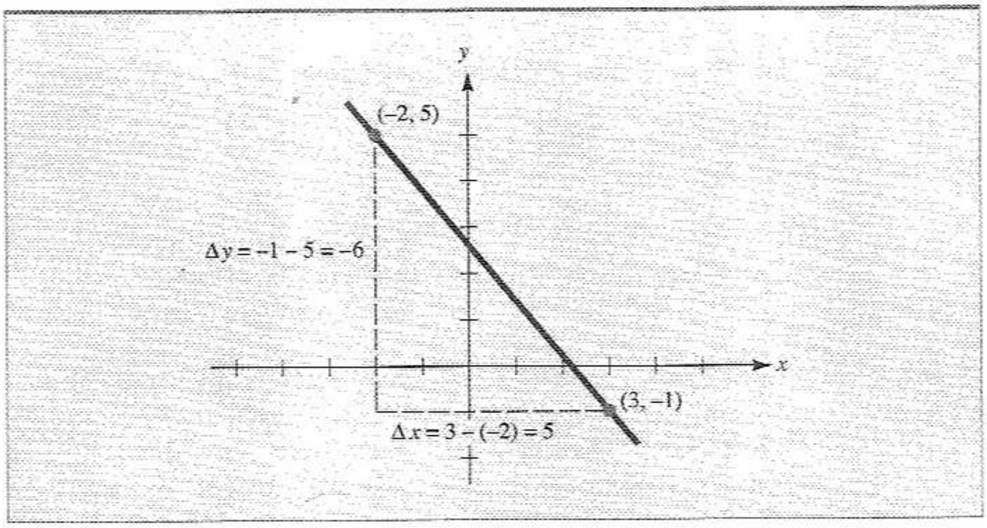
Calcule a inclinação da reta que liga os pontos $(-2, 5)$ e $(3, -1)$.

Solução

$$\text{Inclinação} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-5}{3-(-2)} = \frac{-6}{5}$$

A reta está ilustrada na Figura 1.17.

FIGURA 1.17 Reta passando pelos pontos $(-2, 5)$ e $(3, -1)$.



O sinal e o valor absoluto da inclinação de uma reta indicam a direção e o grau de inclinação, respectivamente. A inclinação é positiva se a altura aumenta à medida que x aumenta e negativa se a altura diminui à medida que x aumenta. O valor absoluto da inclinação é grande se a reta é muito inclinada e pequeno se a reta é pouco inclinada (veja a Figura 1.18).

14 EXPLORE!

Entre com os valores de inclinação (2; 1; 0, 5; −0,5; −1; −2) na Lista 1, usando o menu **STAT** e a opção **EDIT**. Plote uma família de linhas retas passando pela origem, semelhante à que aparece na Figura 1.18, entrando com Y1 = L1•X no editor de equações. Plote usando uma janela decimal do **ZOOM** e use o comando **TRACE** para obter os valores das diferentes retas no ponto X = 1.

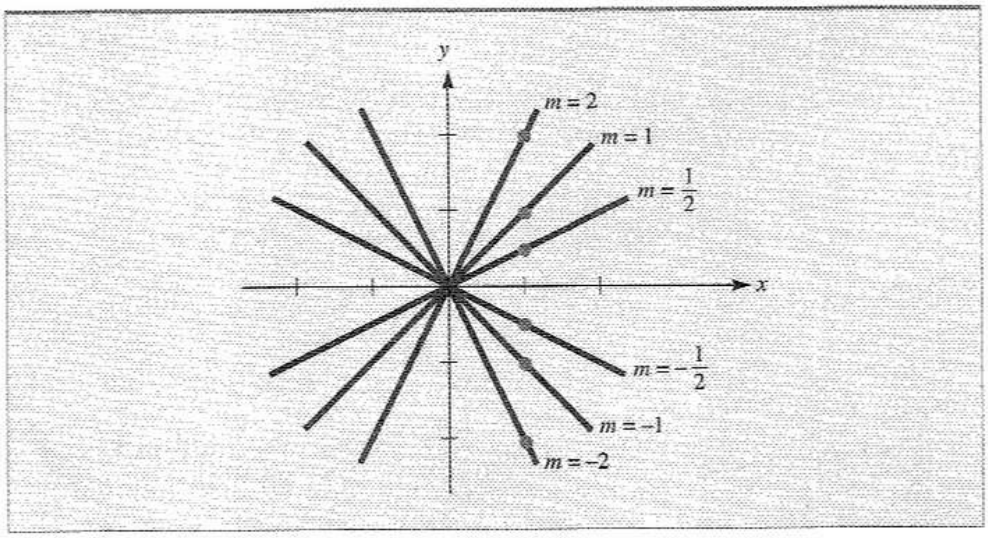


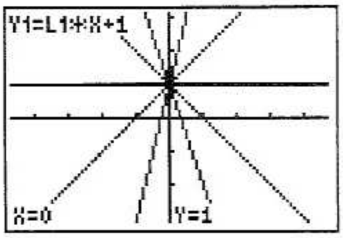
FIGURA 1.18 Direção e grau de inclinação de uma reta.

Retas Horizontais e Verticais

As retas horizontais e verticais (Figuras 1.19a e 1.19b) têm equações particularmente simples. No caso de uma reta horizontal, todos os pontos têm a mesma coordenada y; assim, a função linear correspondente é da forma $y = b$, onde b é uma constante. A inclinação de uma reta horizontal é nula, já que y não varia quando x varia.

No caso de uma reta vertical, todos os pontos têm a mesma coordenada x; assim, a função linear correspondente é da forma $x = c$, onde c é uma constante. A inclinação de uma reta vertical não é definida, já que, como x não varia quando y varia, o denominador da razão $\dfrac{\text{variação de } y}{\text{variação de } x}$ é nulo.

15 EXPLORE!



Determine os três valores de inclinação que devem ser colocados na Lista 1 para que a função Y1 = L1*X + 1 produza na tela da calculadora o gráfico mostrado na figura.

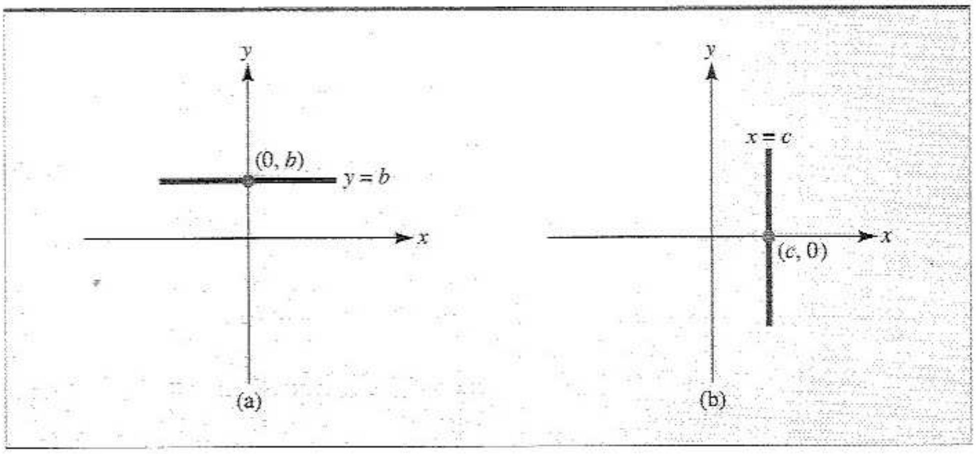


FIGURA 1.19 Retas horizontal e vertical.

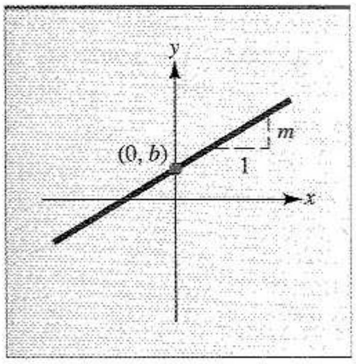


FIGURA 1.20 Inclinação e interseção com o eixo y da reta $y = mx + b$.

Forma Inclinação-Interseção da Equação de uma Reta

As constantes m e b na equação $y = mx + b$ de uma reta não-vertical se prestam a uma interpretação geométrica. O coeficiente m é a inclinação da reta. Para verificar que isto é verdade, suponha que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sejam dois pontos sobre a reta $y = mx + b$. Nesse caso, $y_1 = mx_1 + b$ e $y_2 = mx_2 + b$ e, portanto,

$$\text{Inclinação} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

A constante b da equação $y = mx + b$ é o valor de y correspondente a $x = 0$; assim, b é a ordenada do ponto em que a reta $y = mx + b$ intercepta o eixo y e o ponto $(0, b)$ é o ponto de interseção com o eixo y (Figura 1.20).

Como as constantes m e b na equação $y = mx + b$ correspondem à inclinação e à interseção com o eixo y, respectivamente, esta forma da equação de uma reta é conhecida como **forma inclinação-interseção.**

Forma Inclinação-Interseção da Equação de uma Reta ■ A equação

$$y = mx + b$$

é a equação de uma reta cuja inclinação é m e cujo ponto de interseção com o eixo y é o ponto $(0, b)$.

A forma inclinação-interseção da equação de uma reta é particularmente útil quando informações geométricas (como a inclinação ou a interseção com o eixo y) devem ser obtidas a partir da representação algébrica da reta. Um exemplo típico é apresentado a seguir.

EXEMPLO 1.3.3

Determine a inclinação e a interseção com o eixo y da reta $3y + 2x = 6$ e desenhe o gráfico associado.

Solução

Expresse a equação $3y + 2x = 6$ na forma inclinação-interseção, $y = mx + b$, explicitando y:

$$3y = -2x + 6 \qquad \text{ou} \qquad y = -\frac{2}{3}x + 2$$

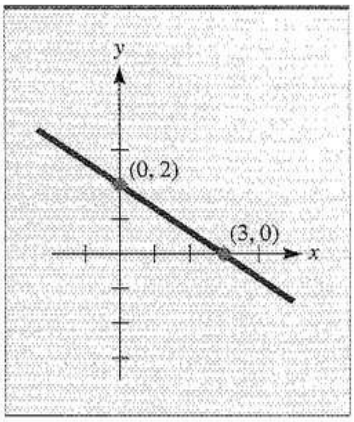


FIGURA 1.21 A reta $3y + 2x = 6$.

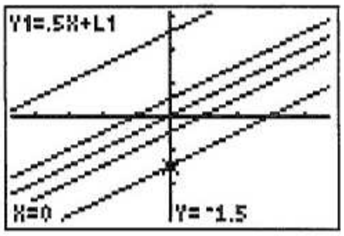
Por inspeção, a inclinação é $\frac{-2}{3}$ e a interseção com o eixo y é o ponto (0, 2).

Para desenhar o gráfico de uma função linear, basta plotar dois pontos pertencentes à função e ligá-los por uma linha reta. Neste caso, já conhecemos um ponto, o ponto de interseção com o eixo y (0, 2). Uma escolha conveniente para a coordenada x do segundo ponto é $x = 3$, já que a coordenada y correspondente é $y = -\frac{2}{3}(3) + 2 = 0$. Fazendo passar uma linha reta pelos pontos (0, 2) e (3, 0), obtemos o gráfico da Figura 1.21.

Forma Ponto-Inclinação da Equação de uma Reta

As informações geométricas a respeito de uma reta podem ser obtidas facilmente a partir da forma inclinação-interseção, $y = mx + b$. Existe, porém, outra forma para a equação de uma linha reta que é mais conveniente nos casos em que as propriedades geométricas são conhecidas e o objetivo é determinar a equação da reta.

16 EXPLORE!



Determine os valores do ponto de interseção com o eixo y que devem ser colocados na Lista 1 para que a função Y1 = 0,5X + L1 produza na tela da calculadora o gráfico mostrado na figura.

Forma Ponto-Inclinação da Equação de uma Reta ■ A equação

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

é a equação de uma reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem uma inclinação m.

A forma ponto-inclinação da equação de uma reta é simplesmente a fórmula da inclinação em outra roupagem. Para verificar que isto é verdade, suponha que o ponto (x, y) esteja sobre uma reta que passa pelo ponto dado (x_0, y_0) e tem uma inclinação m. Usando os pontos (x, y) e (x_0, y_0) para calcular a inclinação, temos a equação

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

que pode ser colocada na forma ponto-inclinação

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

simplesmente multiplicando ambos os membros por $x - x_0$.

Os Exemplos 1.3.4 e 1.3.5 ilustram o uso da forma ponto-inclinação da equação de uma reta.

EXEMPLO 1.3.4

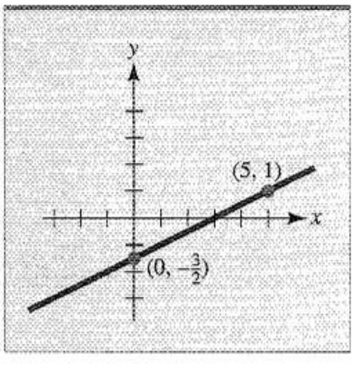


FIGURA 1.22 A reta $y = x/2 - 3/2$.

Determine a equação da reta que passa pelo ponto (5, 1) e cuja inclinação é igual a $\frac{1}{2}$.

Solução

Use a expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$ com $(x_0, y_0) = (5, 1)$ e $m = \frac{1}{2}$ para obter a equação

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 5)$$

que pode ser escrita na forma

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

O gráfico associado aparece na Figura 1.22.

Para praticar, resolva o problema proposto no Exemplo 1.3.4 usando a forma inclinação-interseção. Observe que a solução baseada na forma ponto-inclinação é mais rápida.

No Capítulo 2, a forma ponto-inclinação será usada para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado. O Exemplo 1.3.5 ilustra o uso da forma ponto-inclinação para determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos dados.

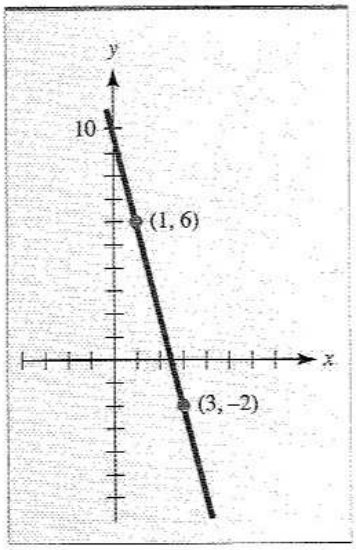


FIGURA 1.23 A reta $y = -4x + 10$.

EXEMPLO 1.3.5

Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(3, -2)$ e $(1, 6)$.

Solução

Calcule a inclinação

$$m = \frac{6 - (-2)}{1 - 3} = \frac{8}{-2} = -4$$

e use a forma ponto-inclinação com $(1, 6)$ com o ponto dado (x_0, y_0) para obter

$$y - 6 = -4(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = -4x + 10$$

É fácil verificar que a equação resultante seria a mesma se o ponto $(3, -2)$ tivesse sido usado como ponto dado (x_0, y_0). O gráfico associado aparece na Figura 1.23.

NOTA A forma geral da equação de uma reta é $Ax + By + C = 0$, onde A, B e C são constantes e A e B não são ambas iguais a 0. Se $B = 0$, a reta é vertical; se $B \neq 0$, a equação $Ax + By + C = 0$ pode ser escrita na forma

$$y = \left(\frac{-A}{B}\right)x + \left(\frac{-C}{B}\right)$$

Comparando esta equação com a forma inclinação-interseção, vemos que a inclinação da reta é dada por $m = -A/B$ e a interseção com o eixo y por $b = -C/B$. Se $A = 0$, a reta é horizontal (a inclinação é 0). ■

Aplicações Práticas

Se a taxa de variação de uma grandeza em relação a uma segunda grandeza é constante, a função que relaciona as duas grandezas é necessariamente linear. A taxa de variação constante é igual à inclinação da reta correspondente. Os Exemplos 1.3.6 e 1.3.7 ilustram as técnicas que podem ser usadas para determinar as funções lineares apropriadas neste tipo de situação.

EXEMPLO 1.3.6

Desde o início do ano, o preço do pacote de macarrão nos supermercados vem subindo a uma taxa constante de 2 centavos por mês. No dia primeiro de novembro, o preço era R$ 1,56. Expresse o preço do macarrão em função do tempo e determine quanto custava o pacote de macarrão no início do ano.

Solução

Seja x o número de meses que se passaram desde o início do ano e y o preço do pacote de macarrão (em centavos). Como a taxa de variação de y em relação a x é constante, a função que relaciona y a x é linear e o gráfico associado é uma linha reta. Como o preço y aumenta de 2 cada vez que x aumenta de 1, a inclinação da reta é igual a 2. Como o preço era 156 centavos (R$ 1,56) em primeiro de novembro, 10 meses após o início do ano, a reta deve passar pelo ponto $(10, 156)$. Para escrever uma equação que expresse y em função de x, use a forma ponto-inclinação

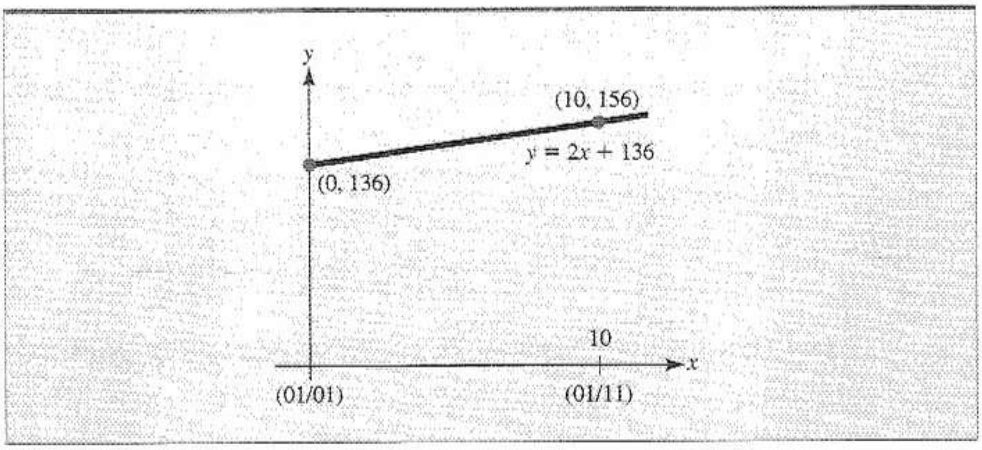
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

com $\quad m = 2,\ x_0 = 10,\ y_0 = 156$

para obter $\quad y - 156 = 2(x - 10) \quad$ ou $\quad y = 2x + 136$

O gráfico associado aparece na Figura 1.24. Observe que o ponto de interseção com o eixo y é $(0,136)$, o que significa que o preço do pacote de macarrão no início do ano era R$ 1,36.

FIGURA 1.24 Preço do macarrão: $y = 2x + 136$.



Nem sempre é fácil saber de que forma duas grandezas estão relacionadas simplesmente examinando uma tabela com pares de valores, x e y, destas grandezas. Em muitos casos, pode ser útil plotar um gráfico para verificar se os pontos (x, y) seguem uma tendência clara (estão sobre uma reta, por exemplo). O exemplo a seguir é ilustrativo.

TABELA 1.4 Índice de Desemprego nos EUA no Período de 1991-2000

Ano	Número de Anos após 1991	Índice de Desemprego (%)
1991	0	6,8
1992	1	7,5
1993	2	6,9
1994	3	6,1
1995	4	5,6
1996	5	5,4
1997	6	4,9
1998	7	4,5
1999	8	4,2
2000	9	4,0

FONTE: U.S. Bureau of Labor Statistics, Bulletin 2307; e *Employment and Earnings*, revista mensal.

EXEMPLO 1.3.7

A Tabela 1.4 mostra o índice de desemprego nos Estados Unidos no período de 1991-2000. Faça um gráfico com tempo (medido em anos a partir de 1991) no eixo x e o índice de desemprego no eixo y. Os pontos seguem uma tendência clara? Com base nos dados disponíveis, qual você calcula que tenha sido o índice de desemprego no ano de 2005?

Solução

A Figura 1.25 mostra um gráfico traçado com base nos dados da Tabela 1.4. Observe que, com exceção do ponto inicial (0; 6,8), a variação é aproximadamente linear. Isto não é suficiente para concluirmos que o índice de desemprego varia linearmente com o tempo, mas o gráfico sugere que podemos obter informações úteis determinando a linha reta que "melhor se ajusta" aos dados experimentais de acordo com algum critério. No "método dos mínimos quadrados", um dos mais usados, a reta é escolhida para que a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos da reta e os pontos experimentais seja a menor possível. O método dos mínimos quadrados, que será discutido com detalhes na Seção 7.4 do Capítulo 7, está disponível na maioria das calculadoras científicas. Aplicando o método aos dados deste exemplos,

17 EXPLORE!

Coloque os dados da Tabela 1.4 em L1 e L2 do editor de dados **STAT**, onde L1 é o número de anos a partir de 1991 e L2 é o índice de desemprego. Depois de colocar a calculadora no modo de gráficos de estatística usando as teclas **STAT** e **STAT PLOT**, observe o gráfico de pontos e a reta de ajuste por mínimos quadrados que aparecem na Figura 1.25.

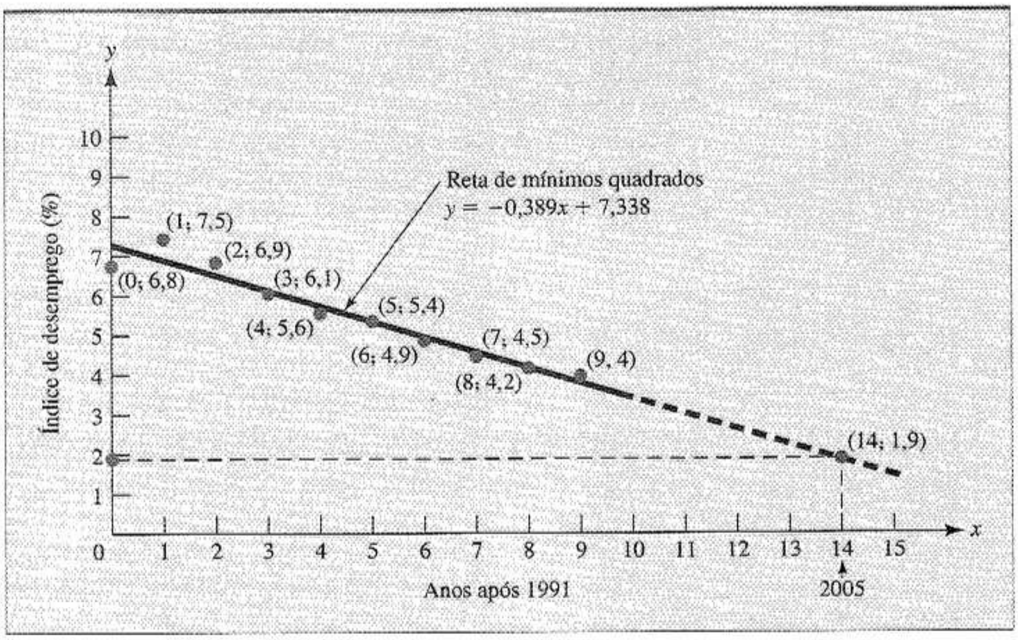


FIGURA 1.25 Índice de desemprego nos Estados Unidos no período de 1991-2000.

obtemos a "reta ajustada" $y = -0{,}389x + 7{,}338$, mostrada na Figura 1.25. Podemos usar esta reta para estimar o índice de desemprego em 2005 (ou seja, para $x = 14$):

$$y(14) = -0{,}389(14) + 7{,}338 = 1{,}892$$

Assim, com base em uma extrapolação por mínimos quadrados dos dados conhecidos, estimamos que o índice de desemprego em 2005 foi aproximadamente 1,9%.

NOTA É preciso tomar cuidado ao fazer previsões por extrapolação a partir de dados conhecidos, especialmente quando o número de dados é pequeno, como no Exemplo 1.3.7. Em particular, a economia começou a dar sinais de enfraquecimento a partir do ano de 2000, mas a reta de mínimos quadrados da Figura 1.25 prevê que o índice de desemprego continue a diminuir indefinidamente. Isto é razoável? No Problema 59, o leitor é convidado a investigar o assunto usando a Internet para obter os valores do índice de desemprego nos anos posteriores a 2000 e comparando estes novos dados com os valores previstos pela reta de mínimos quadrados. ■

Retas Paralelas e Perpendiculares

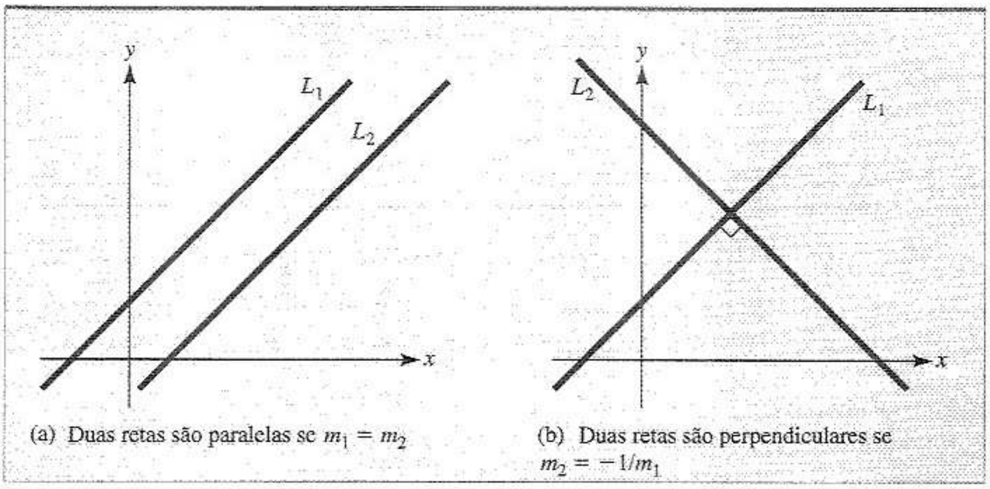
Às vezes é necessário ou conveniente saber se duas retas dadas são paralelas ou perpendiculares. Uma reta vertical é paralela apenas a outras retas verticais e perpendicular a qualquer reta horizontal. Os casos que envolvem retas não verticais podem ser analisados da forma a seguir.

Retas Paralelas e Perpendiculares ■ Sejam m_1 e m_2 as inclinações de duas retas não-verticais L_1 e L_2. Nesse caso,

L_1 e L_2 são **paralelas** se e apenas se $m_1 = m_2$.

L_1 e L_2 são **perpendiculares** se e apenas se $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$.

Estes critérios estão ilustrados na Figura 1.26. As demonstrações geométricas ficam a cargo do leitor (Exercícios 60 e 61). Encerramos esta seção com um exemplo que ilustra o uso destes critérios.



(a) Duas retas são paralelas se $m_1 = m_2$

(b) Duas retas são perpendiculares se $m_2 = -1/m_1$

FIGURA 1.26 Retas paralelas e perpendiculares.

18 EXPLORE!

Entre com Y1 = AX + 2 e Y2 = (−1/A)X + 5 no editor de equações. Vá para a tela inicial, entre com diferentes valores de A e observe as duas curvas usando uma janela quadrada do **ZOOM**. O que você nota para diferentes valores de A (A ≠ 0)? Escreva as coordenadas do ponto de interseção em termos do valor de A.

EXEMPLO 1.3.8

Seja L a reta $4x + 3y = 3$.

a. Determine a equação de uma reta L_1 paralela a L, passando pelo ponto $P(-1, 4)$.

b. Determine a equação de uma reta L_2 perpendicular a L, passando pelo ponto $Q(2, -3)$.

Solução

Escrevendo a equação $4x + 3y = 3$ na forma inclinação-interseção, $y = -\dfrac{4}{3}x + 1$, verificamos que a inclinação da reta L é $m_L = -\dfrac{4}{3}$.

a. Qualquer reta paralela a L deve ter também uma inclinação $m = -\dfrac{4}{3}$. Como a reta pedida L_1 passa pelo ponto $P(-1, 4)$, temos:

$$y - 4 = -\frac{4}{3}(x + 1)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$

b. Qualquer reta perpendicular a L deve ter uma inclinação $m = -\dfrac{1}{m_L} = \dfrac{3}{4}$. Como a reta pedida passa pelo ponto $Q(2, -3)$, temos:

$$y + 3 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$$

A Figura 1.27 mostra a linha L dada e as linhas pedidas L_1 e L_2.

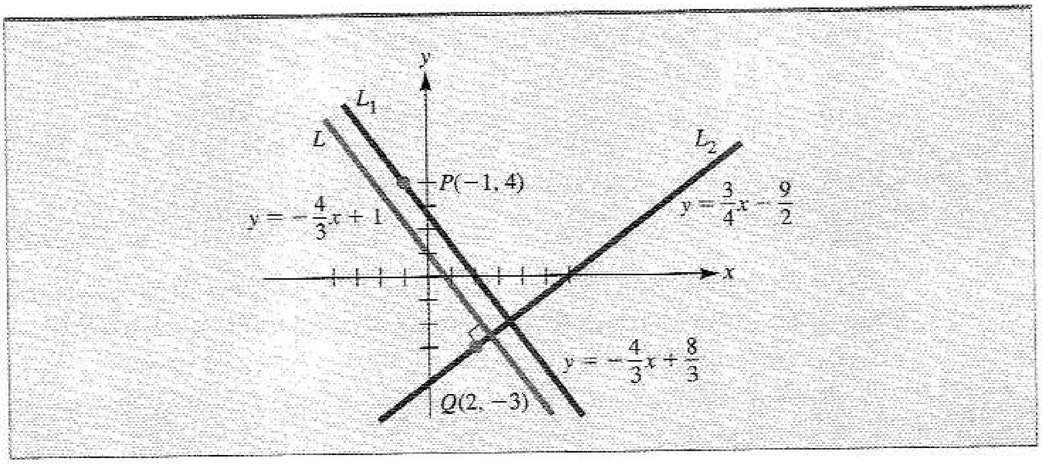


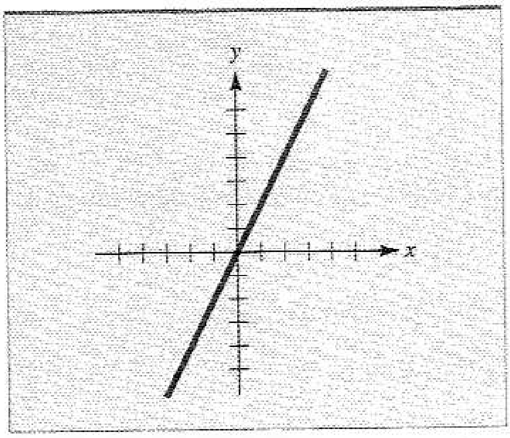
FIGURA 1.27 Retas paralela e perpendicular a uma reta dada L.

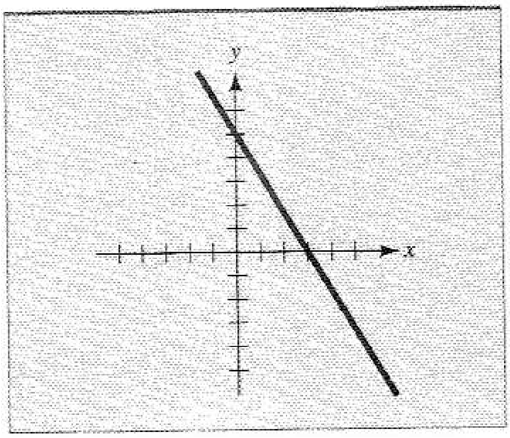
PROBLEMAS | 1.3

Nos Problemas 1 a 6, determine a inclinação (se possível) da reta que passa pelos pontos dados.

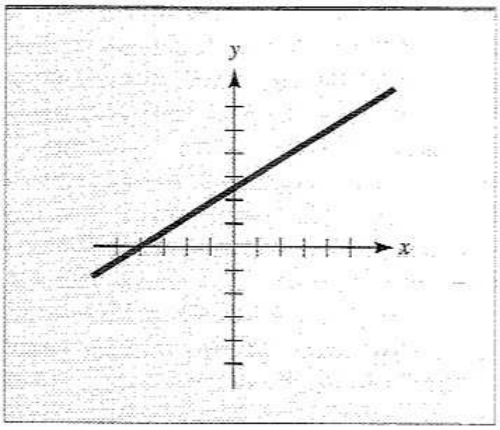
1. $(2, -3)$ e $(0, 4)$
2. $(-1, 2)$ e $(2, 5)$
3. $(2, 0)$ e $(0, 2)$
4. $(5, -1)$ e $(-2, -1)$
5. $(2, 6)$ e $(2, -4)$
6. $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{5}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{8}\right)$

Nos Problemas 7 a 10, determine a inclinação e as interseções da reta cuja equação é dada e escreva a equação da reta.

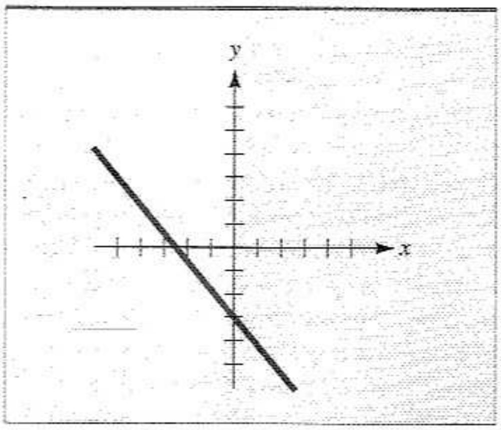
7. 

8. 

9.



10.



Nos Problemas 11 a 18, determine a inclinação e as interseções da reta cuja equação é dada e desenhe o gráfico associado.

11. $x = 3$

12. $y = 5$

13. $y = 3x$

14. $y = 3x - 6$

15. $3x + 2y = 6$

16. $5y - 3x = 4$

17. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 1$

18. $\dfrac{x + 3}{-5} + \dfrac{y - 1}{2} = 1$

Nos Problemas 19 a 34, escreva uma equação para a reta com as propriedades indicadas.

19. Passando pelo ponto (2, 0) com inclinação 1

20. Passando pelo ponto $(-1, 2)$ com inclinação $\dfrac{2}{3}$

21. Passando pelo ponto $(5, -2)$ com inclinação $-\dfrac{1}{2}$

22. Passando pelo ponto (0, 0) com inclinação 5.

23. Passando pelo ponto (2, 5) e paralelo ao eixo x

24. Passando pelo ponto (2, 5) e paralelo ao eixo y

25. Passando pelos pontos (1, 0) e (0, 1).

26. Passando pelos pontos $(2, 5)$ e $(1, -2)$

27. Passando pelos pontos $\left(-\dfrac{1}{5}, 1\right)$ e $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$

28. Passando pelos pontos $(-2, 3)$ e $(0, 5)$

29. Passando pelos pontos (1, 5) e (3, 5)

30. Passando pelos pontos $(1, 5)$ e $(1, -4)$

31. Passando pelo ponto (4, 1) e paralelo à reta $2x + y = 3$

32. Passando pelo ponto $(-2, 3)$ e paralelo à reta $x + 3y = 5$

33. Passando pelo ponto (3, 5) e perpendicular à reta $x + y = 4$

34. Passando pelo ponto $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ e perpendicular à reta $2x + 5y = 3$

35. CUSTO DE FABRICAÇÃO O custo total de fabricação de um produto é composto por um custo fixo de R$ 5.000,00 e um custo variável de R$ 60,00 por unidade. Expresse o custo total em função do número de unidades produzidas e desenhe o gráfico associado.

36. ALUGUEL DE AUTOMÓVEIS Uma certa locadora de automóveis cobra R$ 35,00 por dia mais 55 centavos por quilômetro rodado.

a. Expresse o custo para alugar um carro nesta locadora por 1 dia em função do número de quilômetros rodados e desenhe o gráfico associado.

b. Quanto custa alugar o carro por 1 dia para uma viagem de 50 quilômetros?

c. Quantos quilômetros o carro rodou se o preço do aluguel por 1 dia foi R$ 72,00?

37. MATRÍCULA Os alunos de uma universidade estadual são aconselhados a fazer uma pré-matrícula pelo correio nos dois primeiros meses do ano; os que não fizeram a pré-matrícula devem se matricular pessoalmente em março. A secretaria pode atender a 35 alunos por hora durante o período de matrícula. Quatro horas depois de aberto o período de matrícula, com a secretaria funcionando com sua capacidade máxima, 360 alunos (incluindo os que fizeram pré-matrícula) já estavam matriculados.

a. Expresse o número de alunos matriculados em função do tempo e desenhe o gráfico associado.

b. Quantos alunos se matricularam nas primeiras três horas do período de matrícula?

c. Quantos alunos fizeram pré-matrícula?

38. TAXA DE FREQÜÊNCIA A taxa cobrada por um clube de natação é R$ 250,00 para a temporada de verão, que dura 12 semanas. Caso alguém se inscreva depois de iniciada a temporada, a taxa é cobrada pro rata, ou seja, é reduzida linearmente.

a. Expresse a taxa em função do número de semanas transcorridas após iniciada a temporada de verão e desenhe o gráfico associado.

b. Determine o valor da taxa cobrada 5 semanas após iniciada a temporada.

39. DEPRECIAÇÃO LINEAR Um médico possui R$ 1.500,00 em livros de medicina que, para fins de imposto, sofrem uma depreciação linear que reduz seu valor a zero após um período de 10 anos. Expresse o valor dos livros em função do tempo e desenhe o gráfico associado.

40. DEPRECIAÇÃO LINEAR Um industrial compra R$ 20.000,00 em equipamentos que sofrem uma depreciação linear que reduz seu valor a R$ 1.000,00 após 10 anos.

a. Expresse o valor dos equipamentos em função do tempo e desenhe o gráfico associado.

b. Determine o valor dos equipamentos após 4 anos.

c. Após quanto tempo os equipamentos perdem totalmente o valor? Para o industrial talvez não seja interessante esperar tanto tempo para se desfazer dos equipamentos. Discuta os fatores que o industrial poderia levar em conta para decidir qual a melhor ocasião para vender os equipamentos.

41. CONSUMO DE ÁGUA Desde o início do mês, o reservatório de água de uma cidade vem perdendo água a uma taxa constante. No dia 12, o reservatório está com 200 milhões de litros de água; no dia 21, está apenas com 164 milhões de litros.

a. Expresse a quantidade de água no reservatório em função do tempo e desenhe o gráfico associado.

b. Quanta água havia no reservatório no dia 8?

42. CUSTO DE IMPRESSÃO Uma editora estima que o custo para imprimir entre 1.000 e 10.000 exemplares de um certo livro didático é R$ 50,00 por exemplar; entre 10.001 e 20.000, o custo é R$ 40,00 por exemplar; entre 20.001 e 50.000, o custo é R$ 35,00 por exemplar.

a. Que função $F(N)$ fornece o custo total para imprimir N exemplares do livro para $1.000 \leq N \leq 50.000$?

b. Desenhe o gráfico da função $F(N)$ do item (a).

43. PREÇOS DE AÇÕES O preço da oferta pública inicial (OPI) das ações de uma certa empresa foi R$ 10,00 por ação e a ação é negociada 24 horas por dia. Desenhe o gráfico do preço da ação durante um período de 2 anos para os seguintes casos:

a. O preço da ação aumenta a uma taxa constante durante os primeiros 18 meses até chegar a R$ 50,00 e diminui a uma taxa constante durante os 6 meses seguintes até chegar a R$ 25,00.

b. O preço aumenta a uma taxa constante durante 2 meses até chegar a R$ 15,00, diminui a uma taxa constante durante os 9 meses seguintes até chegar a R$ 8,00 e torna a aumentar a uma taxa constante até chegar a R$ 20,00.

c. O preço aumenta a uma taxa constante durante o primeiro ano até chegar a R$ 60,00. Um escândalo contábil faz com que o preço da ação caia instantaneamente para R$ 25,00 e o preço continua a cair durante os 3 meses seguintes, a uma taxa constante, até chegar a R$ 5,00. Em seguida, aumenta, a uma taxa constante, até chegar a R$ 12,00 no final do período de 2 anos.

44. UMA FÁBULA ANTIGA Na fábula de Esopo sobre a lebre e a tartaruga, a tartaruga se desloca com velocidade constante do início ao final da corrida. A lebre começa correndo muito mais depressa que a tartaruga, mas pára no meio da prova para tirar uma soneca. Quando a lebre acorda, vê que a tartaruga está muito próxima da linha de chegada e corre a toda velocidade, tentando alcançá-la, mas perde por uma pequena diferença. Plote no mesmo gráfico as distâncias percorridas pela lebre e pela tartaruga em função do tempo, da linha de partida até a linha de chegada.

45. CRESCIMENTO DE UMA CRIANÇA Nos Estados Unidos, a altura média H em centímetros de uma criança de A anos de idade é dada pela função $H = 6{,}5A + 50$. Use esta expressão para responder às perguntas que se seguem.

a. Qual é a altura média de uma criança de 7 anos?

b. Qual é a idade provável de uma criança com uma altura de 150 cm?

c. Qual é a altura média de um recém-nascido? Esta resposta parece razoável?

d. Qual é a altura média de um homem de 20 anos? Esta resposta parece razoável?

46. TRANSPORTE SOLIDÁRIO Para estimular os motoristas a adotarem o transporte solidário, o departamento de trânsito de uma cidade decidiu oferecer um desconto nos pedágios das pontes para os veículos que estiverem transportando quatro ou mais pessoas. No primeiro dia em que o plano entrou em vigor, há 30 dias, 157 veículos fizeram jus ao desconto. Desde então, o número de descontos vem aumentando a uma taxa constante; hoje, 247 veículos foram beneficiados.

a. Expresse o número de veículos que fizeram jus ao desconto em função do tempo e desenhe o gráfico associado.

b. Se a tendência continuar, quantos veículos farão jus ao desconto daqui a 14 dias?

47. CONVERSÃO DA TEMPERATURA

a. A temperatura em graus Fahrenheit é uma função linear da temperatura em graus Celsius. Use o fato de que 0°C = 32°F e 100°C = 212°F para escrever uma equação para esta função linear.

b. Use a função obtida no item (a) para converter 15 graus Celsius em graus Fahrenheit.

c. Converta 68 graus Fahrenheit em graus Celsius.

d. Que temperatura é a mesma tanto em graus Celsius quanto em Fahrenheit?

48. ENTOMOLOGIA Foi observado que o número de "cricris" que um grilo faz por minuto depende da temperatura. Os resultados experimentais são os seguintes (para $T < 3$°C, os grilos permanecem silenciosos):

Número de "cricris", C	0	5	10	20	60
Temperatura T (°C)	3	4	5	7	15

a. Expresse T como uma função linear de C.

b. Quantos "cricris" faz um grilo por minuto quando a temperatura ambiente é 25°C? Se um grilo faz 37 "cricris" em 30 segundos, qual é a temperatura ambiente?

49. VALORIZAÇÃO DE UM BEM O valor de um certo livro raro duplica a cada 10 anos. Em 1900, o livro valia 100 dólares.

a. Quanto valia o livro em 1930? Em 1990? No ano 2000?

b. O valor do livro é uma função linear do tempo? Responda a esta pergunta interpretando um gráfico apropriado.

50. POLUIÇÃO DO AR Em algumas regiões do mundo, observou-se que o número de mortes N por semana está relacionado à concentração x de dióxido de enxofre no ar. Suponha que tenha havido 97 mortes quando $x = 100$ mg/m^3 e 110 mortes quando $x = 500$ mg/m^3.

a. Qual é a relação funcional entre N e x?

b. Use a função obtida no item (a) para determinar o número de mortes por semana quando $x = 300$ mg/m^3. Para que concentração de dióxido de enxofre ocorrem 100 mortes por semana?

c. Leia a respeito dos efeitos da poluição sobre a taxa de mortalidade.* Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do assunto.

*Os seguintes artigos poderão servir como ponto de partida: D. W. Dockery, J. Schwartz and J. D. Spengler, "Air Pollution and Daily Mortality: Associations with Particulates and Acid Aerosols," *Environ. Res.*, Vol. 59, 1992, pp. 362-373; Y. S. Kim, "Air Pollution, Climate, Socioeconomics Status and Total Mortality in the United States," *Sci. Total Environ.*, Vol. 42, 1985, pp. 245-256.

51. EXAME VESTIBULAR As notas da prova de matemática do exame vestibular de uma universidade diminuíram a uma taxa constante durante vários anos. Em 1995, a nota média era 575; em 2000, era 545.

a. Expresse a nota média em função do tempo.

b. Se a tendência continuou, qual foi a nota média no ano 2005?

c. Se a tendência continuou, em que ano a nota média foi 527?

52. NUTRIÇÃO Cada 30 g do Alimento I contém 3 g de carboidratos e 2 g de proteínas; cada 30 g do Alimento II contém 5 g de carboidratos e 3 g de proteínas. Quando x g do Alimento I são misturados com y g do Alimento II, o alimento composto contém exatamente 73 g de carboidratos e 46 g de proteínas.

a. Explique por que existem $3x + 5y$ g de carboidratos no alimento composto e por que devemos ter $3x + 5y = 73$. Escreva uma equação semelhante para o teor de proteínas do alimento composto. Desenhe os gráficos das duas equações.

b. Quais são as coordenadas do ponto de interseção dos dois gráficos do item (a)? O que significa este ponto de interseção?

53. CONTABILIDADE Para fins fiscais, o valor nominal de certos ativos é calculado depreciando linearmente o valor original do bem ao longo de um certo período de tempo. Suponha que um bem com um valor inicial de V reais seja depreciado linearmente durante um período de N anos e no final deste período tenha um valor residual de S reais.

a. Expresse o valor nominal B do ativo t anos após o início da depreciação como uma função linear de t. [*Sugestão:* Observe que $B = V$ para $t = 0$ e $B = S$ para $t = N$.]

b. Suponha que um ativo de R$ 50.000,00 em equipamentos de escritório seja depreciado linearmente durante um período de 5 anos e que o valor residual seja R$ 18.000,00. Qual é o valor nominal dos equipamentos após três anos?

54. EFEITOS DO ÁLCOOL O álcool etílico é metabolizado pelo corpo humano a uma taxa constante (independente da concentração). Suponha que esta taxa seja de 10 mL por hora.

a. Quanto tempo é necessário para eliminar os efeitos de um litro de cerveja contendo 3% de álcool etílico?

b. Expresse o tempo T necessário para metabolizar o álcool etílico em função da quantidade A de álcool consumida.

c. Discuta de que forma a função obtida no item (b) pode ser usada para determinar um limite razoável para a quantidade de álcool ingerida em uma festa.

55. Use uma calculadora para plotar as retas $y = \frac{25}{7}x + \frac{13}{2}$ e $y = \frac{144}{45}x + \frac{630}{229}$ no mesmo gráfico, com uma janela $[-10, 10]1$ por $[-10, 10]1$. As duas retas são paralelas?

56. Use uma calculadora para plotar as funções $y = \frac{54}{270}x - \frac{63}{19}$ e $y = \frac{139}{695}x - \frac{346}{14}$ no mesmo gráfico, começando com uma janela $[-10, 10]1$ por $[-10, 10]1$. Ajuste a janela até que as duas retas sejam visíveis. Elas são paralelas?

57. ALUGUEL DE EQUIPAMENTOS Uma empresa aluga uma máquina industrial por uma quantia fixa de R$ 60,00 mais R$ 5,00 por hora de uso.

a. Faça uma tabela mostrando o número de horas de uso da máquina e o preço correspondente do aluguel para 2 horas, 5 horas, 10 horas e t horas.

b. Escreva uma expressão para o custo y em função do número de horas de uso t. Suponha que o tempo t seja medido em horas e frações decimais de hora. (Em outras palavras, suponha que t seja um número real positivo.)

c. Faça um gráfico da expressão obtida no item (b).

d. Use a expressão do item (b) para determinar, com precisão de centésimos de hora, o tempo de uso do equipamento, se a quantia cobrada pelo aluguel da máquina foi R$ 216,25.

58. ASTRONOMIA A tabela a seguir mostra a duração do ano (em anos da Terra), L, para todos os planetas do sistema solar, juntamente com a distância média do Sol, D, em unidades astronômicas (1 unidade astronômica é a distância média entre a Terra e o Sol).

Planeta	Distância Média do Sol, D	Duração do Ano, L
Mercúrio	0,388	0,241
Vênus	0,722	0,615
Terra	1,000	1,000
Marte	1,523	1,881
Júpiter	5,203	11,862
Saturno	9,545	29,457
Urano	19,189	84,013
Netuno	30,079	164,783
Plutão	39,463	248,420

FONTE: Kendrick Frazier, *The Solar System*, Alexandria, VA: Time/Life Books, 1985, p. 37.

a. Plote os pontos (D, L) em um gráfico. Parece haver uma relação linear entre as duas grandezas?

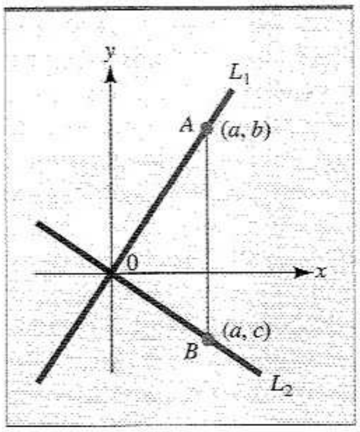
b. Calcule a razão $\frac{L^2}{D^3}$ para todos os planetas. Interprete o resultado expressando L em função de D.

c. O que o leitor descobriu no item (b) é uma das leis de Kepler, que recebeu este nome em homenagem ao astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Leia um artigo sobre Kepler e escreva a respeito do papel que ele desempenhou na história da ciência.

59. ÍNDICE DE DESEMPREGO Na solução do Exemplo 1.3.7, vimos que a reta que melhor se ajusta aos dados disponíveis, usando o critério dos mínimos quadrados, é descrita pela equação $y = -0{,}389x + 7{,}338$. Interprete a inclinação desta reta em termos da tendência do índice de desemprego. Os dados do exemplo vão apenas até o ano 2000. Use a Internet para descobrir qual foi o índice de desemprego nos Estados Unidos nos anos subseqüentes. Estes novos resultados estão de acordo com as estimativas obtidas a partir da reta de mínimos quadrados? Justifique sua resposta.

60. RETAS PARALELAS Mostre que duas retas não-verticais são paralelas se e apenas se tiverem a mesma inclinação.

61. RETAS PERPENDICULARES Mostre que se uma reta não-vertical L_1 de inclinação m_1 é perpendicular a uma reta L_2 de inclinação m_2, $m_2 = -1/m_1$. [*Sugestão:* Escreva expressões para as inclinações das retas L_1 e L_2 em função dos parâmetros a, b e c indicados na figura a seguir. Em seguida, aplique o teorema de Pitágoras e a expressão para a distância entre dois pontos dada no Problema 56 da Seção 1.2 ao triângulo retângulo OAB para obter a relação desejada entre m_1 e m_2.]



PROBLEMA 61

SEÇÃO 1.4 Modelos Funcionais

Os problemas práticos de economia, finanças e ciências físicas e biológicas são freqüentemente complexos demais para serem descritos por expressões matemáticas simples; um de nossos objetivos básicos é desenvolver métodos matemáticos para lidar com estes problemas. Para isso, vamos usar uma abordagem conhecida como **modelagem matemática**, que pode ser dividida em quatro estágios.

1º estágio (Formulação): Dada uma situação do mundo real (como a dívida externa do Brasil, a epidemia de AIDS ou o aquecimento global), adotamos um número suficiente de hipóteses simplificadoras para que o problema possa ser formulado matematicamente. Para isso, pode ser necessário colher e analisar dados e usar conhecimentos de diferentes setores para identificar as variáveis mais importantes e estabelecer relações matemáticas entre estas variáveis. O resultado desta formulação recebe o nome de **modelo matemático**.

2º estágio (Análise do Modelo): Usamos métodos matemáticos para analisar ou "resolver" o modelo matemático. Neste livro, o instrumento utilizado para isso será basicamente o cálculo, mas, na prática, outros instrumentos, como estatística, análise numérica e ciência da computação, podem ser aplicados a um determinado modelo.

3º estágio (Interpretação): Depois que o modelo matemático é analisado, as conclusões extraídas desta análise são aplicadas ao problema original, tanto para verificar se o modelo reflete corretamente a realidade como para fazer previsões. Assim, por exemplo, a análise do modelo de uma empresa pode indicar que o lucro será máximo quando 200 unidades de um certo produto forem fabricadas por mês.

4º estágio (Testes e Ajustes): Neste estágio final, o modelo é testado usando novos dados para verificar se as previsões advindas da análise estão corretas. Se as previsões não são confirmadas pelos novos dados, as hipóteses do modelo são modificadas e o processo de modelagem é repetido. No exemplo mencionado no 3º estágio, pode ser que o lucro comece a diminuir muito antes de a produção chegar a 200 unidades por mês; isto seria uma indicação de que o modelo não está correto e precisa ser modificado.

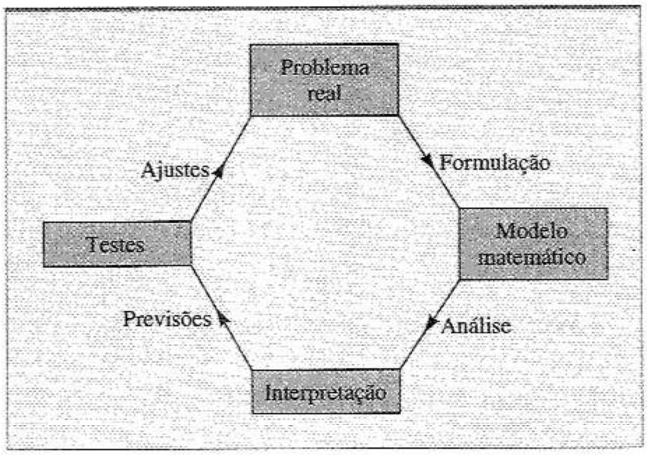


FIGURA 1.28 Diagrama para ilustrar o processo de modelagem matemática.

A Figura 1.28 mostra os quatro estágios da modelagem matemática. Em um bom modelo, o problema real é simplificado o bastante para que possa ser analisado matematicamente, mas não tanto que a essência da situação real seja desfigurada. Assim, por exemplo, se supusermos que o clima é perfeitamente periódico, com chuva a cada dez dias, o modelo resultante pode ser fácil de analisar, mas está muito distante da realidade.

Nas seções anteriores, usamos modelos para representar grandezas como o custo de produção, o preço, a demanda, a poluição do ar e o tamanho da população; muitos outros modelos serão discutidos no restante do livro. Alguns destes modelos, especialmente os que são analisados nas seções Para Pensar no final de cada capítulo, são mais detalhados e ilustram de que forma são tomadas as decisões a respeito das hipóteses e previsões. A formulação e análise de modelos matemáticos é uma das habilidades mais importantes que se aprende em um curso de cálculo, e o processo começa com a solução de problemas simples da vida cotidiana. Os Exemplos 1.4.1 a 1.4.8 ilustram algumas técnicas usadas para resolver estes problemas.

Eliminação de Variáveis

Nos Exemplos 1.4.1 e 1.4.2, a grandeza em que estamos interessados é expressa de forma mais natural em termos de duas variáveis. Para expressar a grandeza em função de apenas uma das variáveis, temos que eliminar a outra.

EXEMPLO 1.4.1

O departamento de estradas de rodagem está planejando construir uma área de piquenique para motoristas à beira de uma rodovia movimentada. O terreno deve ser retangular, com uma área de 5.000 metros quadrados, e deve ser cercado nos três lados que não dão para a rodovia. Expresse o comprimento da cerca, em metros, em função do comprimento do lado que dá para a rodovia.

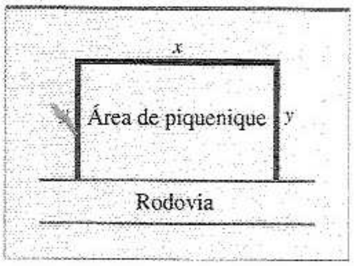


FIGURA 1.29 Área de piquenique.

Solução

Começamos por definir duas variáveis, x e y, que representam os lados da área de piquenique (Figura 1.29). O comprimento F da cerca pode ser facilmente expresso em termos destas duas variáveis:

$$F = x + 2y$$

Como o objetivo é expressar o comprimento da cerca em função apenas de x, devemos encontrar um meio de expressar y em função de x. Para isto, usamos o fato de que a área deve ser de 5.000 metros quadrados, escrevendo:

$$\underbrace{xy}_{\text{área}} = 5.000$$

Explicitando y, temos:

$$y = \frac{5.000}{x}$$

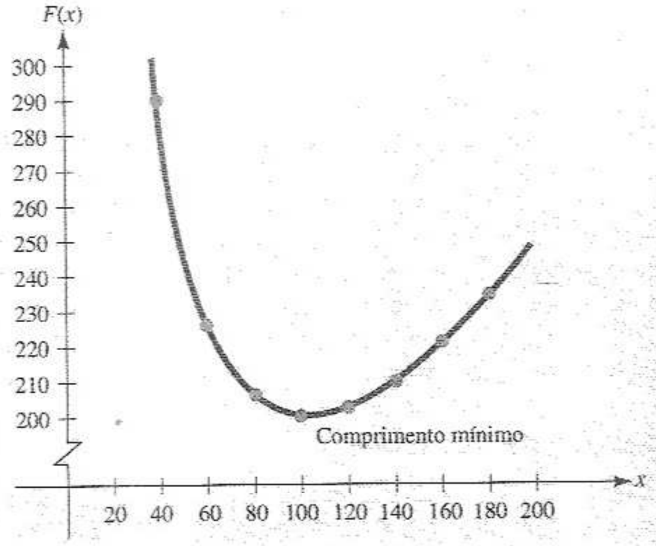
substituindo esta relação na expressão de F, temos:

$$F(x) = x + 2\left(\frac{5.000}{x}\right) = x + \frac{10.000}{x}$$

A Figura 1.30 mostra um gráfico desta função para $35 < x < 200$. Observe que o comprimento da cerca é mínimo para um certo valor de x. No Capítulo 3, vamos aprender como calcular este valor de x usando métodos matemáticos.

19 EXPLORE!

Entre com $f(x) = x + 10.000/x$ no editor de equações e use o comando de tabela (**TBLSET**) para procurar um mínimo de $f(x)$. Por exemplo: fixe o valor inicial de x (**TblStart**) em zero e escolha incrementos (**ΔTbl**) de 100, 50 e 10. Com base no resultado desta investigação preliminar, escolha uma janela apropriada para resolver o Exemplo 1.4.1.



x	$F(x)$
20	520
40	290
60	227
80	205
100	200
120	203
140	211
160	223
180	236

FIGURA 1.30 Comprimento da cerca: $F(x) = x + 10.000/x$.

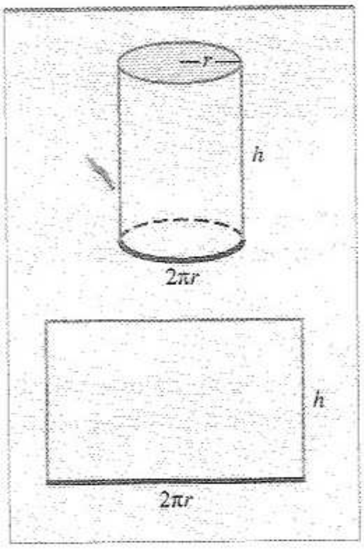


FIGURA 1.31 Lata cilíndrica.

EXEMPLO 1.4.2

Uma lata cilíndrica deve ter uma capacidade (volume) de 24π centímetros cúbicos. O preço do material usado para o fundo e a tampa da lata é 3 centavos por centímetro quadrado e o preço do material usado para o lado da lata é 2 centavos por centímetro quadrado. Expresse o custo do material necessário para construir uma lata em função do raio.

Solução

Seja r o raio da tampa e do fundo, h a altura da lata e C o custo (em centavos) do material necessário para construir uma lata. Nesse caso, temos:

$$C = \text{custo da tampa} + \text{custo do fundo} + \text{custo do lado}$$

onde, para cada componente do custo,

$$\begin{aligned}\text{Custo} &= (\text{custo por centímetro quadrado})(\text{número de centímetros quadrados})\\ &= (\text{custo por centímetro quadrado})(\text{área})\end{aligned}$$

A área da tampa (e do fundo) é πr^2 e o preço por centímetro quadrado do material usado na tampa e no fundo é 3 centavos. Assim, temos:

$$\text{Custo da tampa} = 3\pi r^2 \qquad \text{e} \qquad \text{Custo do fundo} = 3\pi r^2$$

20 EXPLORE!

Usando o comando de tabelas (**TBLSET**) da calculadora, escolha uma janela apropriada para plotar a função $C(r) = 6\pi r^2 + 96\pi/r$. Em seguida, usando **TRACE**, **ZOOM** ou uma rotina para determinar mínimos, encontre o raio para o qual o custo é mínimo no Exemplo 1.4.2. Quais são as dimensões da lata neste caso? Usando os comandos **TRACE** e **ZOOM**, determine o raio para o qual o custo é R$ 3,00. Existe um raio para o qual o custo é R$ 2,00?

Para determinar a área do lado da lata, imagine que a tampa e o fundo tenham sido retirados e o lado aberto para formar um retângulo, como na Figura 1.31. A altura do retângulo é altura h da lata; o comprimento é a circunferência $2\pi r$ da tampa (ou do fundo) da lata. Assim, a área do retângulo (e, portanto, do lado da lata) é $2\pi rh$ centímetros quadrados. Como o preço do material usado no lado da lata é 2 centavos por centímetro quadrado, temos:

$$\text{Custo do lado} = 2(2\pi rh) = 4\pi rh$$

Somando todos os custos, obtemos:

$$C = 3\pi r^2 + 3\pi r^2 + 4\pi rh = 6\pi r^2 + 4\pi rh$$

Como o objetivo é expressar o custo em função apenas do raio, precisamos encontrar um meio de expressar a altura h em função de r. Para isto, usamos o fato de que o volume $V = \pi r^2 h$ deve ser igual a 24π. Igualando $\pi r^2 h$ a 24π e explicitando h, temos:

$$\pi r^2 h = 24\pi \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{24}{r^2}$$

Agora podemos substituir h por este valor na expressão de C:

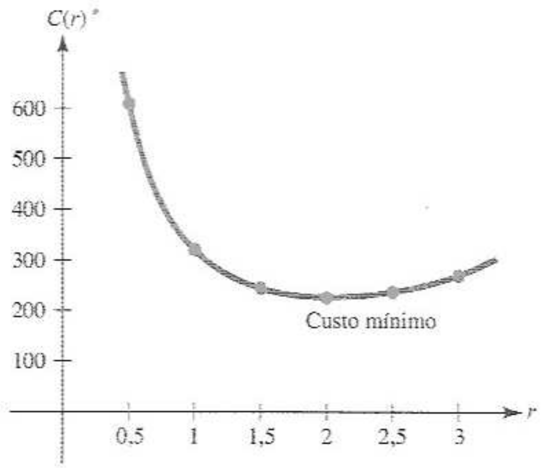
$$C(r) = 6\pi r^2 + 4\pi r\left(\frac{24}{r^2}\right)$$

ou

$$C(r) = 6\pi r^2 + \frac{96\pi}{r}$$

A Figura 1.32 mostra um gráfico desta função para $0{,}4 < x < 3{,}2$. Observe que o custo é mínimo para um certo valor de r. No Capítulo 3, vamos aprender como calcular este valor de r usando métodos matemáticos.

FIGURA 1.32 Função de custo: $C(r) = 6\pi r^2 + 96\pi/r$.



r	$C(r)$
0,5	608
1,0	320
1,5	243
2,0	226
2,5	238
3,0	270

EXEMPLO 1.4.3

Durante uma seca, os moradores do condado de Marin, na Califórnia, tiveram que enfrentar uma séria escassez de água. Para combater o desperdício, as autoridades aumentaram drasticamente as tarifas. O preço para uma família de quatro pessoas passou a ser de 1,22 dólares por 100 pés cúbicos de água para os primeiros 1.200 pés cúbicos, 10 dólares por 100 pés cúbicos para os 1.200 pés cúbicos seguintes e 50 dólares por 100 pés cúbicos para consumos maiores. Expresse o valor da conta de água para uma família de quatro pessoas em função do consumo de água em centenas de pés cúbicos.

Solução

Seja x o número de centenas de pés cúbicos de água consumidos pela família durante o mês e $C(x)$ a conta correspondente em dólares. Se $0 \leq x \leq 12$, o custo é simplesmente o custo por centena de pés cúbicos multiplicado pelo consumo em centenas de pés cúbicos:

$$C(x) = 1{,}22x$$

Se $12 < x \leq 24$, as primeiras 12 centenas de pés cúbicos custarão 1,22 dólares e portanto o custo total destas 12 unidades será $1{,}22(12) = 14{,}64$ dólares. Cada uma das $x - 12$ unidades restantes custará 10 dólares e, portanto, o custo total destas unidades será $10(x - 12)$ dólares. O custo das x unidades será, portanto,

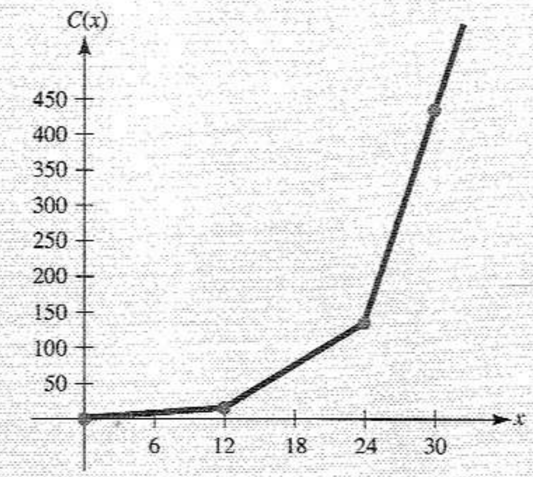
$$C(x) = 14{,}64 + 10(x - 12) = 10x - 105{,}36$$

Se $x > 24$, o custo das primeiras 12 unidades será $1{,}22(12) = 14{,}64$ dólares, o custo das 12 unidades seguintes será $10(12) = 120$ dólares e o custo das $x - 24$ unidades restantes será $50(x - 24)$ dólares. O custo total das x unidades será, portanto,

$$C(x) = 14{,}64 + 120 + 50(x - 24) = 50x - 1.065{,}36$$

Combinando as três expressões, temos:

$$C(x) = \begin{cases} 1{,}22x & \text{para } 0 \leq x \leq 12 \\ 10x - 105{,}36 & \text{para } 12 < x \leq 24 \\ 50x - 1.065{,}36 & \text{para } x > 24 \end{cases}$$



x	$C(x)$
0	0
12	14,64
24	134,64
30	434,64

FIGURA 1.33 Custo da água no condado de Marin.

A Figura 1.33 mostra o gráfico desta função. Observe que o gráfico é formado por três segmentos de reta, cada um mais inclinado que o anterior. Que aspecto da situação se reflete na inclinação crescente dos segmentos de reta?

Proporcionalidade

Na formulação de modelos matemáticos muitas vezes é necessário levar em conta relações de proporcionalidade. Três dos tipos mais importantes de proporcionalidade são definidos da seguinte forma:

Proporcionalidade ■ Dizemos que uma grandeza Q é

diretamente proporcional a x se $Q = kx$, onde k é uma constante

inversamente proporcional a x se $Q = k/x$, onde k é uma constante

proporcional ao produto xy se $Q = kxy$, onde k é uma constante

Segue um exemplo extraído da biologia.

EXEMPLO 1.4.4

Quando fatores ambientais impõem um limite superior ao número de indivíduos, uma população cresce a uma taxa que é proporcional ao produto do número de indivíduos pela diferença entre o limite superior e o número de indivíduos. Expresse a taxa de aumento da população em função do tamanho da população.

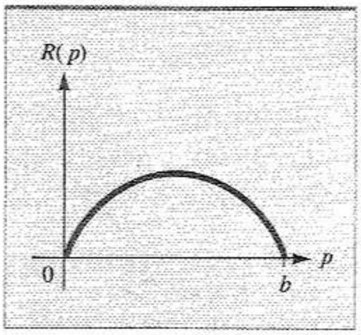


FIGURA 1.34 Gráfico da função $R(p) = kp(b - p)$.

Solução

Seja p o tamanho da população, $R(p)$ a taxa de aumento correspondente e b o limite superior imposto à população pelo ambiente. Nesse caso,

$$\text{Diferença entre a população e o limite superior} = b - p$$

e, portanto,

$$R(p) = kp(b - p)$$

onde k é uma constante.

A Figura 1.34 mostra um gráfico de $R(p)$. No Capítulo 3, vamos aprender como calcular o valor de p para o qual esta função é máxima usando métodos matemáticos.

Modelagem na Economia e nas Finanças

Os modelos econômicos e financeiros muitas vezes envolvem questões como fixação de preços, controle de custos e otimização de lucros. Vários destes modelos serão analisados no Capítulo 3. No exemplo a seguir, o lucro é expresso em função do preço de venda do produto.

EXEMPLO 1.4.5

Um fabricante produz um DVD a um custo de R$ 2,00 a unidade. Os DVDs vêm sendo vendidos a R$ 5,00 a unidade; por este preço, são vendidos 4.000 por mês. O fabricante pretende aumentar o preço do DVD e calcula que, para cada R$ 1,00 de aumento no preço, menos 400 serão vendidos por mês.

a. Expresse o lucro mensal do fabricante em função do preço de venda dos DVDs.
b. Faça um gráfico da função que expressa o lucro mensal. Para que preço o lucro é máximo? Qual é o lucro máximo?

Solução

a. Para começar, expresse em palavras a relação desejada:

$$\text{Lucro} = (\text{número de DVDs vendidos})(\text{lucro por DVD})$$

Como o objetivo é expressar o lucro em função do preço, a variável independente é o preço e a variável dependente é o lucro. Seja p o preço de venda dos DVDs e $P(p)$ o lucro mensal correspondente.

O passo seguinte consiste em expressar o número de DVDs vendidos em função da variável p. Sabemos que 4.000 são vendidos por mês quando o preço é R$ 5,00 e que são vendidas menos 400 por mês para cada aumento de R$ 1,00 no preço. Como o número de reais de aumento é igual à diferença $p - 5$ entre o novo preço de venda e o preço antigo, temos:

21 EXPLORE!

Entre com a função Y1 = $-400X^2 + 6.800X - 12.000$ no editor de equações. Use o comando **TBLSET** para fixar o valor inicial de x em 5 em TablStart com um incremento de 1 para ΔTbl. Escolha uma janela de observação apropriada para esta função de lucro e, usando **TRACE**, **ZOOM** ou uma rotina para determinar mínimos, confirme os resultados do Exemplo 1.4.5.

$$\begin{aligned}\text{Número de DVDs vendidos} &= 4.000 - 400(\text{número de aumentos de R\$ 1,00})\\ &= 4.000 - 400(p - 5)\\ &= 6.000 - 400p\end{aligned}$$

O lucro por DVD é simplesmente a diferença entre o preço de venda, p, e o custo, R$ 2,00. Assim,

$$\text{Lucro por DVD} = p - 2$$

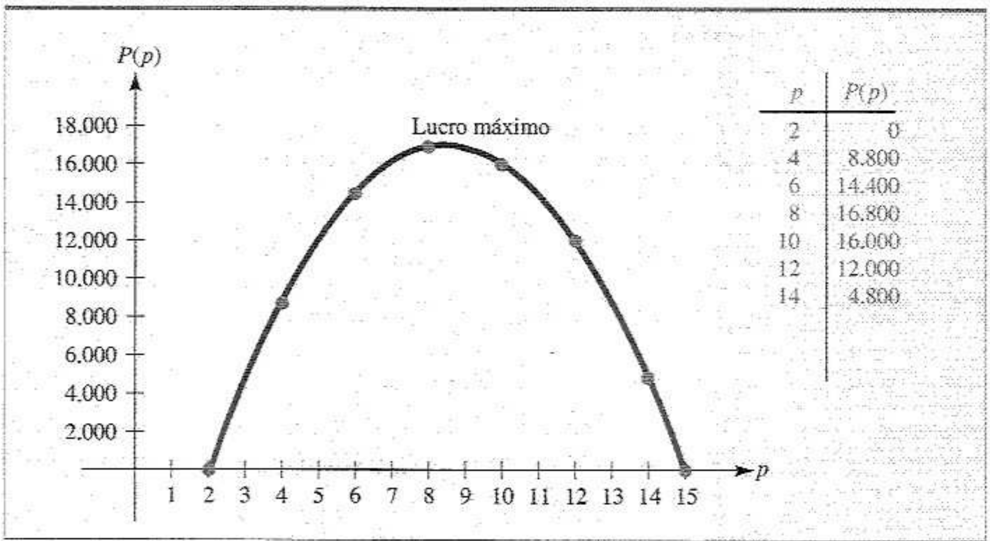
e o lucro total é dado por

$$\begin{aligned}P(p) &= (\text{número de DVDs vendido})(\text{lucro por DVD})\\ &= (6.000 - 400p)(p - 2)\\ &= -400p^2 + 6.800p - 12.000\end{aligned}$$

b. O gráfico de $P(p)$ é a parábola com a abertura voltada para baixo que aparece na Figura 1.35. O lucro é máximo para o valor de p que corresponde ao ponto mais alto da curva. Este ponto é o vértice da parábola, que, como sabemos, corresponde ao ponto cuja abscissa é dada por

$$p = \frac{-B}{2A} = \frac{-(6.800)}{2(-400)} = 8,5$$

FIGURA 1.35 Gráfico da função $P(p) = (6.000 - 400p)(p - 2)$.



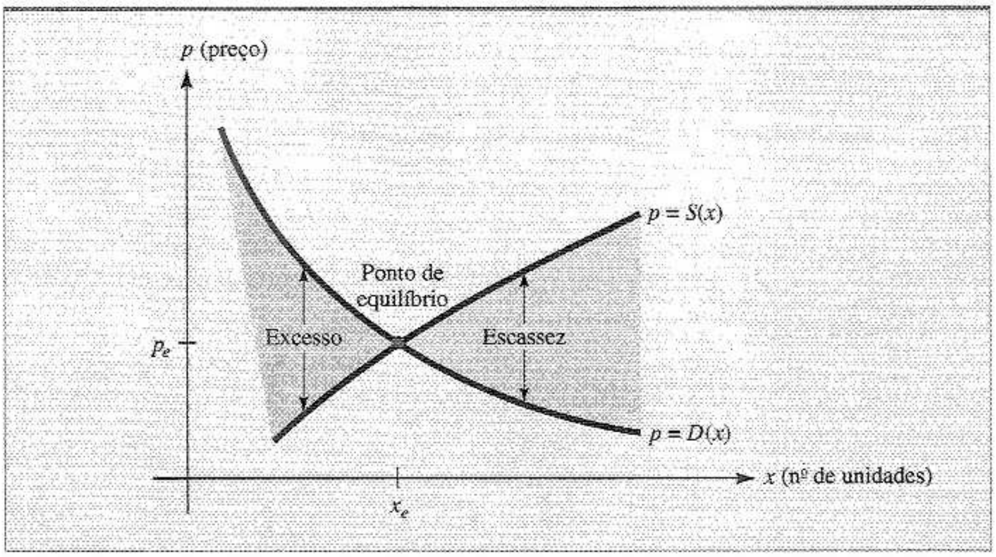
Assim, o lucro é máximo quando o fabricante cobra R$ 8,50 por DVD; o lucro máximo é

$$\begin{aligned} P_{\text{máx}} &= P(8{,}5) = -400(8{,}5)^2 + 6.800(8{,}5) - 12.000 \\ &= \text{R\$}16.900 \end{aligned}$$

Equilíbrio do Mercado

Como vimos na Seção 1.1, a **função demanda** $D(x)$ de um produto relaciona o número x de unidades produzidas ao preço unitário $p = D(x)$ pelo qual todas as x unidades são demandadas (vendidas) no mercado. Analogamente, a **função oferta** $S(x)$ fornece o preço $p = S(x)$ pelo qual os produtores estão dispostos a oferecer ao mercado x unidades do produto. Em geral, quando o preço de um produto aumenta, o número de unidades oferecidas pelo fabricante aumenta e o número de unidades demandadas pelos compradores diminui. Assim, quando o nível de produção x aumenta, o preço de oferta $p = S(x)$ tende a aumentar e o preço de demanda $p = D(x)$ tende a diminuir. Isto significa que uma curva típica de oferta é crescente e uma curva típica de demanda é decrescente, como mostra a Figura 1.36.

FIGURA 1.36 Equilíbrio do mercado: interseção das curvas de oferta e demanda.



De acordo com a **lei da oferta e da demanda**, em um mercado competitivo, a oferta tende a ser igual à demanda; quando isto ocorre, dizemos que o mercado está em **equilíbrio**. Assim, o equilíbrio do mercado ocorre exatamente no nível de produção x_e para o qual $S(x_e) = D(x_e)$. O preço unitário correspondente, p_e, recebe o nome de **preço de equilíbrio**. Assim, temos:

$$p_e = D(x_e) = S(x_e)$$

Quando o mercado não está em equilíbrio, dizemos que há **escassez** do produto se a demanda é maior que a oferta $[D(x) > S(x)]$ e **excesso** do produto se a oferta é maior que a demanda $[S(x) > D(x)]$. Esta terminologia é ilustrada na Figura 1.36 e no Exemplo 1.4.6.

22 EXPLORE!

Usando os dados do Exemplo 1.4.6, entre com as funções $S(x) = x^2 + 14$ em Y1 e $D(x) = 174 - 6x$ em Y2. Use uma janela [5, 35]5 por [0, 200]50 para observar as regiões de escassez e excesso. Verifique se a sua calculadora pode sombrear estas regiões com comandos como **SHADE(Y2, Y1)**. Que região é esta?

EXEMPLO 1.4.6

Uma pesquisa de mercado mostra que os fabricantes oferecerão x unidades de um certo produto ao mercado se o preço unitário for $p = S(x)$ reais e que o mesmo número de unidades será demandado (comprado) pelos consumidores quando o preço unitário for $p = D(x)$ reais, onde as funções oferta e demanda são dadas por

$$S(x) = x^2 + 14 \qquad \text{e} \qquad D(x) = 174 - 6x$$

a. Para que nível de produção x e preço unitário p o equilíbrio é atingido?

b. Plote no mesmo gráfico as curvas de oferta e de demanda, $p = S(x)$ e $p = D(x)$ e discuta a forma dessas curvas.

Solução

a. O equilíbrio do mercado é atingido quando

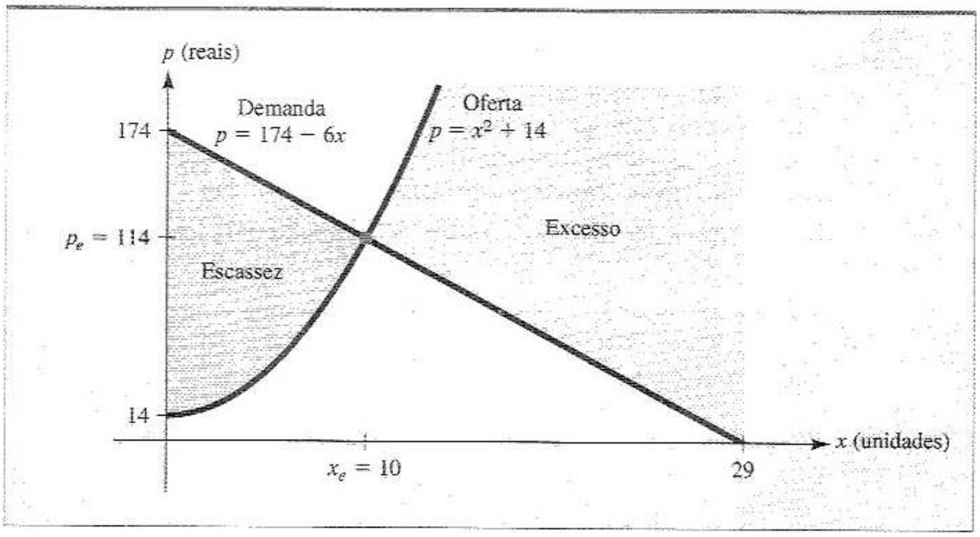
$$\begin{aligned} S(x) &= D(x) \\ x^2 + 14 &= 174 - 6x \\ x^2 + 6x - 160 &= 0 && \textit{subtraindo } 174 - 6x \textit{ de ambos} \\ (x - 10)(x + 16) &= 0 && \textit{os membros fatorando} \\ x = 10 \quad \text{ou} \quad x &= -16 \end{aligned}$$

Como apenas os valores positivos do nível de produção x têm significado físico, desprezamos a solução $x = -16$ e concluímos que o equilíbrio acontece para $x = x_e = 10$. O preço de equilíbrio pode ser obtido fazendo $x = 10$ na função oferta ou na função demanda. Temos:

$$p_e = D(10) = 174 - 6(10) = 114$$

b. Como se pode ver na Figura 1.37, a curva de oferta é uma parábola e a curva de demanda é uma linha reta. Observe que a oferta é zero até o preço unitário atingir o valor de R$ 14,00 e que a demanda é 29 unidades quando o preço unitário é 0. Para $0 \le x \le 10$, existe uma escassez do produto, já que a curva de oferta está abaixo da curva de demanda. A curva de oferta intercepta a curva de demanda no ponto de equilíbrio (10, 114); para $10 < x \le 29$, existe um excesso do produto.

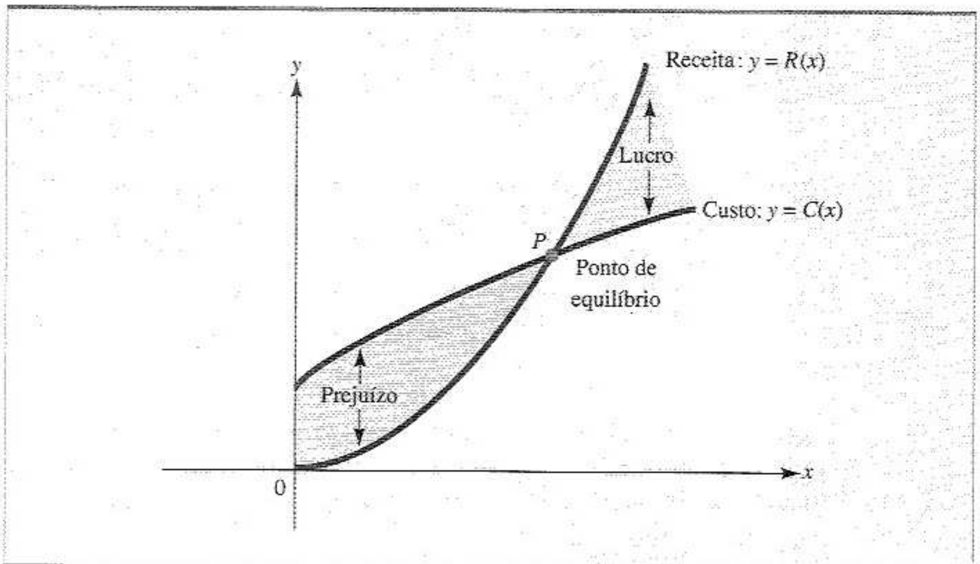
FIGURA 1.37 Curvas de oferta e demanda e ponto de equilíbrio.



Análise de Equilíbrio

As interseções de curvas surgem naturalmente no campo das finanças por causa da **análise de equilíbrio**. Em uma situação típica, um fabricante está interessado em saber quantas unidades de um certo

FIGURA 1.38 Curvas de custo e receita, com um ponto de equilíbrio.



produto terá que vender para que a receita total seja igual ao custo total. Suponha que x seja o número de unidades fabricadas e vendidas e $C(x)$ e $R(x)$ sejam as funções que representam o custo total e a receita total, respectivamente. A Figura 1.38 mostra um par típico de curvas de custo e receita.

Por causa dos custos fixos, a curva de custo está inicialmente acima da curva de receita; assim, para um baixo nível de produção, o fabricante tem prejuízo, enquanto para um alto nível de produção, a receita total ultrapassa o custo total e o fabricante tem lucro. O ponto em que as duas curvas se interceptam é chamado de **ponto de equilíbrio** porque é neste ponto que o custo e a receita se equilibram e o fabricante não tem lucro nem prejuízo. Segue um exemplo.

EXEMPLO 1.4.7

Um fabricante pretende vender um certo produto por R$ 110,00 a unidade. O custo total é constituído por um custo fixo de R$ 7.500,00 e um custo de produção de R$ 60,00 por unidade.

a. Quantas unidades o fabricante deve vender para não ter prejuízo?
b. Qual é o lucro ou prejuízo do fabricante quando 100 unidades são vendidas?
c. Quantas unidades o fabricante deve vender para ter um lucro de R$ 1.250,00?

23 EXPLORE!

Usando os dados do Exemplo 1.4.7, entre com as funções $C(x) = 7.500 + 60x$ em Y1 e $R(x) = 110x$ em Y2. Usando uma janela de observação [0, 250]50 por [−1.000, 20.000]5.000 com **TRACE** e **ZOOM** ou uma rotina para determinar interseções, confirme a posição do ponto de equilíbrio.

Solução

Se x é o número de unidades fabricadas e vendidas, a receita total é dada por $R(x) = 110x$ e o custo total por $C(x) = 7.500 + 60x$.

a. Para determinar o ponto de equilíbrio, fazemos $R(x)$ igual a $C(x)$ e explicitamos x:

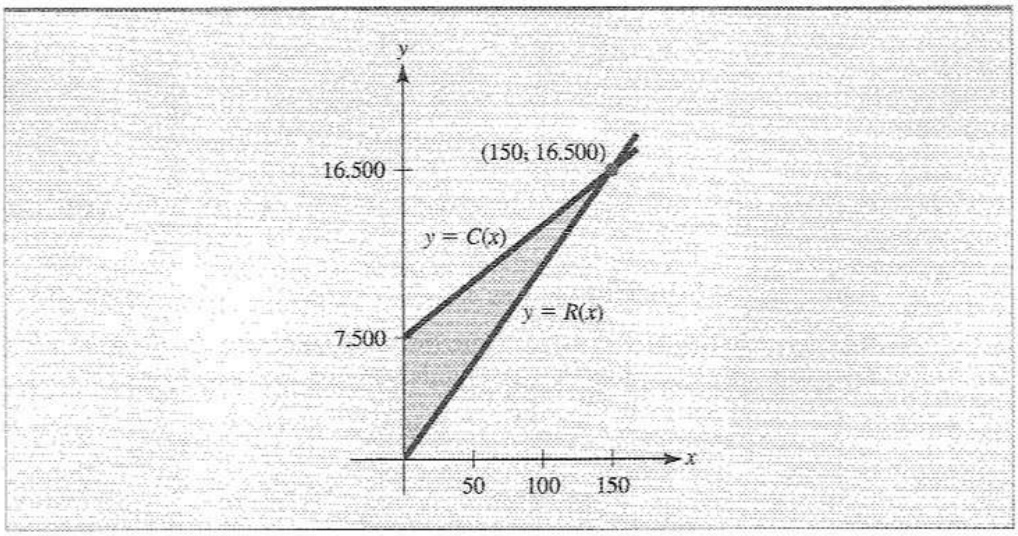
$$110x = 7.500 + 60x$$
$$50x = 7.500$$

e portanto

$$x = 150$$

Assim, o fabricante tem que vender 150 unidades para não ter prejuízo (veja Figura 1.39).

FIGURA 1.39 Curvas de receita $R(x) = 110x$, e custo $C(x) = 7.500 + 60x$.



b. O lucro $P(x)$ é igual à diferença entre a receita e o custo. Assim,

$$P(x) = R(x) - C(x) = 110x - (7.500 + 60x) = 50x - 7.500$$

O lucro com a venda de 100 unidades é

$$P(100) = 50(100) - 7.500$$
$$= -2.500$$

O sinal negativo indica um lucro negativo (ou seja, um prejuízo), o que já era esperado, já que 100 unidades é um valor menor que o valor de equilíbrio, 150 unidades. Isto significa que o fabricante terá um prejuízo de R$ 2.500,00 se vender apenas 100 unidades.

c. Para determinar o número de unidades que devem ser vendidas para obter um lucro de R$ 1.250,00, basta fazer $P(x) = 1.250$ e explicitar x. Temos:

$$P(x) = 1.250$$
$$50x - 7.500 = 1.250$$
$$50x = 8.750$$
$$x = \frac{8.750}{50} = 175$$

e, portanto, será necessário vender 175 unidades para obter o lucro estipulado.

O Exemplo 1.4.8 mostra como a análise de equilíbrio pode ser usada como um instrumento para tomada de decisões.

24 EXPLORE!

Leia o Exemplo 1.4.8. Entre com $C_1(x) = 25 + 0,6x$ em Y1 e com $C_2(x) = 30 + 0,5x$ em Y2 no editor de equações da calculadora. Use uma janela $[-25, 250]25$ por $[-10, 125]50$ de modo a determinar que faixa de distâncias é melhor usar cada locadora. No caso de uma distância percorrida maior que 100 quilômetros, seria melhor recorrer à locadora cuja função de aluguel é $C_1(x)$, $C_2(x)$ ou $C_3(x) = 23 + 0,55x$?

EXEMPLO 1.4.8

Uma certa locadora de automóveis cobra R$ 25,00 mais R$ 0,60 por quilômetro rodado. Outra locadora cobra R$ 30,00 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado. Qual das duas ofertas é a melhor?

Solução

A resposta depende do número de quilômetros rodados. Para viagens curtas, é mais barato alugar um carro na primeira locadora, mas para viagens longas é mais barato alugar um carro na segunda. A análise de equilíbrio pode ser usada para determinar o número de quilômetros para o qual o aluguel cobrado pelas duas locadoras é o mesmo.

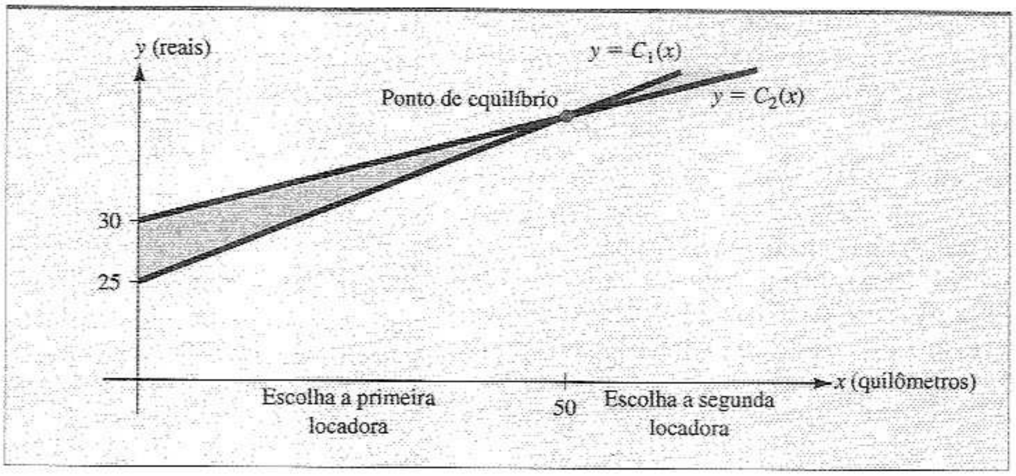
Suponha que o carro rode x quilômetros. Nesse caso, a primeira locadora cobrará $C_1(x) = 25 + 0,60x$ reais e a segunda cobrará $C_2(x) = 30 + 0,50x$ reais. Igualando as duas expressões e explicitando x, obtemos:

$$25 + 0,60x = 30 + 0,50x$$

e portanto $\quad 0,1x = 5 \quad$ ou $\quad x = 50$

Isto significa que o aluguel cobrado pelas duas locadoras será o mesmo se o carro rodar 50 quilômetros. Para distâncias menores, é melhor alugar o carro na primeira locadora; para distâncias maiores, é melhor alugar o carro na segunda. A situação está ilustrada na Figura 1.40.

FIGURA 1.40 Custos de aluguel de carros em duas locadoras.



PROBLEMAS | 1.4

1. **CERCANDO UM TERRENO** Um fazendeiro deseja cercar um pasto retangular usando 1.000 m de cerca. Se um dos lados mais compridos do pasto fica na margem de um rio (e, portanto, não precisa de cerca), expresse a área do pasto em função da largura.
2. **JARDINAGEM** Um jardineiro quer plantar um canteiro retangular cuja largura seja metade do comprimento. Expresse a área do jardim em função da largura.
3. A soma de dois números é 18. Expresse o produto dos números em função do número menor.
4. O produto de dois números é 318. Expresse a soma dos dois números em função do número menor.
5. **RECEITA DE VENDAS** O preço unitário de um certo produto é $p = 35x + 15$ centavos quando x unidades do produto são fabricadas. Se as x unidades são vendidas por este preço, expresse a receita obtida com a venda do produto em função de x.
6. **CERCANDO UM PARQUE** O departamento de parques e jardins de uma prefeitura pretende construir um parque retangular com uma área de 3.600 metros quadrados. O parque será cercado. Expresse o comprimento da cerca em função do comprimento de um dos lados do parque, desenhe o gráfico associado e estime as dimensões do parque para que o comprimento da cerca seja o menor possível.
7. **CÁLCULO DE ÁREAS** Expresse a área de um campo retangular cujo perímetro é 320 metros em função do comprimento de um dos lados. Desenhe o gráfico associado e estime as dimensões do campo para que a área seja máxima.
8. **EMBALAGENS** Uma caixa fechada, cuja base é quadrada, deve ter um volume de 1.500 centímetros cúbicos. Expresse a área total da superfície da caixa em função do lado da base.
9. **EMBALAGENS** Uma caixa fechada, cuja base é quadrada, tem uma área superficial de 4.000 centímetros quadrados. Expresse o volume da caixa em função do lado da base.

Para resolver os Problemas 10 a 14, você precisa saber que um cilindro de raio r e altura h tem um volume $V = \pi r^2 h$ e uma área lateral $S = 2\pi rh$. Lembre-se também de que um círculo de raio r tem uma área $A = \pi r^2$.

10. **EMBALAGENS** Uma lata de refrigerante, de forma cilíndrica, tem uma capacidade de 300 mL. Expresse a área superficial da lata em função do raio da tampa.
11. **EMBALAGENS** Uma lata de refrigerante, de forma cilíndrica, tem uma área superficial de 120π centímetros quadrados. Expresse o volume da lata em função do raio da tampa.
12. **EMBALAGENS** Uma lata cilíndrica fechada tem raio r e altura h.
    a. Se a área superficial S da lata é constante, expresse o volume V em termos de S e r.
    b. Se o volume V da lata é constante, expresse a área superficial S em termos de V e r.
13. **EMBALAGENS** Um recipiente cilíndrico deve conter 64π centímetros cúbicos de suco de laranja. O custo por centímetro quadrado para fazer a tampa e o fundo do recipiente, que são de metal, é duas vezes maior que o custo para fazer o lado, que é de papelão. Expresse o custo do recipiente em função do raio se o custo do lado é 0,02 centavo por centímetro quadrado.
14. **EMBALAGENS** Uma lata cilíndrica sem tampa foi feita com 27π centímetros quadrados de metal. Expresse o volume da lata em função do raio.
15. **AUMENTO DA POPULAÇÃO** Na ausência de limitações ambientais, a população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Expresse a taxa de aumento da população em função do tamanho da população.
16. **DECAIMENTO RADIOATIVO** Uma amostra de rádio decai a uma taxa proporcional ao número de átomos de rádio presentes na amostra. Expresse a taxa de decaimento em função do número de átomos de rádio.
17. **VARIAÇÃO DA TEMPERATURA** A taxa com que a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio externo. Expresse esta taxa em função da temperatura do corpo, supondo que a temperatura do meio externo seja T_m.
18. **DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA** A velocidade com que uma epidemia se espalha em uma comunidade é proporcional ao produto do número de pessoas doentes pelo número de pessoas saudáveis. Expresse esta velocidade em função do número de pessoas doentes, supondo que o número total de pessoas é N.
19. **CORRUPÇÃO NA POLÍTICA** A taxa de aumento do número de políticos envolvidos em um escândalo de corrupção é proporcional ao produto do número de políticos envolvidos pelo número de políticos que ainda não foram envolvidos. Expresse esta taxa em função do número de políticos envolvidos, supondo que o número total de políticos seja T.
20. **CUSTO DE PRODUÇÃO** Em uma certa fábrica, o custo de instalação é diretamente proporcional ao número de máquinas usadas e o custo de operação é inversamente proporcional ao número de máquinas usadas. Expresse o custo total em função do número de máquinas usadas.
21. **CUSTO DE TRANSPORTE** Um caminhão é contratado para transportar produtos de uma fábrica para um depósito. O motorista é pago por hora e, portanto, seu salário é inversamente proporcional à velocidade do caminhão. O consumo de combustível é diretamente proporcional à velocidade do caminhão. Expresse o custo total de operação do caminhão em função da velocidade.

MEDICAMENTOS PARA CRIANÇAS *Várias fórmulas diferentes foram propostas para calcular a dosagem apropriada para uma criança em termos da dosagem para adultos. Suponha que a dose para adultos de um certo medicamento seja A miligramas (mg) e C seja a dose apropriada para uma criança com N anos de idade. Nesse caso, de acordo com a* regra de Cowling,

$$C = \left(\frac{N+1}{24}\right)A$$

enquanto, pela regra de Friend,

$$C = \frac{2NA}{25}$$

Estas fórmulas são usadas nos Problemas 22 a 24.

22. Se a dose de ibuprofeno para adultos é $A = 300$ mg, qual é a dose para uma criança de 11 anos, de acordo com a regra de Cowling? E de acordo com a regra de Friend?

23. Suponha que a dose de um certo medicamento para adultos seja $A = 300$ mg e plote a dose do mesmo medicamento para crianças em função da idade N, de acordo com a regra de Cowling e a regra de Friend.

24. Para crianças de que idade a dose indicada pela regra de Cowling é igual à dose indicada pela regra de Friend? Para que idades a dose indicada pela regra de Cowling é maior que a indicada pela regra de Friend? Para que idades a dose indicada pela regra de Friend é maior?

25. DOSAGEM DE UM MEDICAMENTO PARA CRIANÇAS Como alternativa às regras de Cowling e de Friend, os pediatras às vezes usam a expressão

$$C = \frac{SA}{1,7}$$

para estimar a dose apropriada para uma criança cuja área superficial é S metros quadrados a partir de uma dose A do medicamento no caso de um adulto. A área superficial da criança, por sua vez, é estimada com o auxílio da expressão

$$S = 0,0072W^{0,425}H^{0,725}$$

onde W e H são, respectivamente, o peso da criança em quilogramas (kg) e a altura em centímetros (cm).

a. A dose para adultos de um certo medicamento é 250 mg. Qual é a dose recomendada para uma criança com 91 cm de altura e 18 kg de peso?

b. Um medicamento é receitado para duas crianças, uma das quais é duas vezes mais alta e duas vezes mais pesada que a outra. Mostre que a criança maior deve receber uma dose aproximadamente 2,22 vezes maior que a outra criança.

26. COMISSÃO DO LEILOEIRO Em geral, quando uma peça é comprada em um leilão, é necessário pagar não só o lance vencedor mas também a comissão do leiloeiro. Em uma certa casa de leilões, a comissão do leiloeiro é 17,5% do lance vencedor para quantias até R$ 50.000,00. No caso de quantias maiores, a comissão de 17,5% sobre os primeiros R$ 50.000,00 mais 10% do valor que exceder R$ 50.000,00.

a. Determine o valor total pago por um comprador (valor do lance mais comissão do leiloeiro) nesta casa de leilões para lances de R$ 1.000,00, R$ 25.000,00 e R$ 100.000,00.

b. Expresse o valor total pago em função do valor do lance. Plote esta função.

27. CUSTO DE TRANSPORTE Uma empresa de ônibus adotou a seguinte política de preços para grupos que desejam fretar um ônibus: grupos de 40 pessoas ou menos pagam uma quantia fixa de R$ 2.400,00 (40 vezes R$ 60,00). Nos grupos de 41 a 80 pessoas, o preço é de R$ 60,00 por pessoa menos 50 centavos para cada pessoa que exceder 40. Para grupos de mais de 80 pessoas, o preço é de R$ 40,00 por pessoa. Expresse a receita da empresa de ônibus em função do tamanho do grupo e desenhe o gráfico associado.

28. IMPOSTO DE RENDA A tabela a seguir mostra a tabela de imposto de renda para pessoas físicas nos Estados Unidos em 2004.

a. Expresse o valor do imposto de renda a pagar em função da renda líquida x para $0 \leq x \leq 146.750$ e desenhe o gráfico associado.

b. O gráfico do item (a) é formado por quatro segmentos de reta. Determine a inclinação de cada segmento. O que acontece com a inclinação à medida que a renda líquida aumenta? Explique o que isto significa na prática?

Se a Renda Líquida É		O Imposto de Renda É	
Maior Que	**Mas Menor Que**		**Da Quantia Que Exceder**
0	US$7.150	10%	0
US$7.150	US$29.050	US$715 + 15%	US$7.150
US$29.050	US$70.350	US$4.000 + 25%	US$29.050
US$70.350	US$146.750	US$14.325 + 28%	US$70.350

FONTE: Bankrate.com.

29. PREÇO DE INGRESSOS Um museu de história natural pratica a seguinte política de preços para o ingresso de grupos: grupos de menos de 50 pessoas pagam R$ 3,50 por pessoa, enquanto grupos de 50 pessoas ou mais pagam um preço reduzido de R$ 3,00 por pessoa.

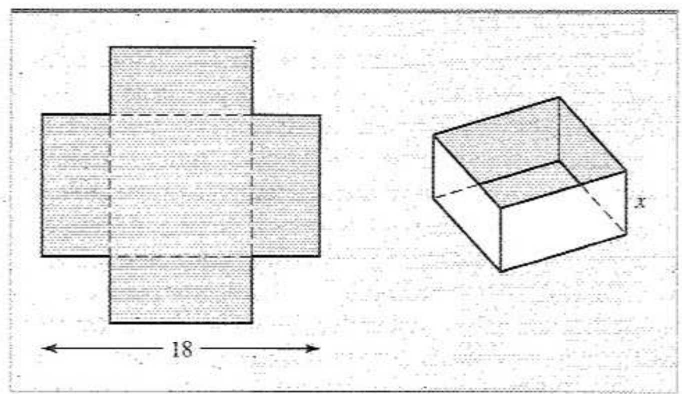
a. Expresse o custo total dos ingressos de um grupo em função do tamanho do grupo e desenhe o gráfico associado.

b. Quanto dinheiro um grupo de 49 pessoas economizará se conseguir recrutar mais um membro?

30. CUSTO DE FABRICAÇÃO Uma caixa fechada, cuja base é quadrada, tem um volume de 250 metros cúbicos. O material usado para fazer a tampa e o fundo custa R$ 2,00 o metro quadrado e o material usado para fazer os lados custa R$ 1,00 o metro quadrado. Expresse o custo da caixa em função do lado da base.

31. CUSTO DE FABRICAÇÃO Pretende-se construir uma caixa sem tampa por R$ 48,00. O preço do material usado para construir os lados da caixa é R$ 3,00 por metro quadrado e o do material usado para construir a base é R$ 4,00 por metro quadrado. Expresse o volume da caixa em função do lado da base.

32. CUSTO DE FABRICAÇÃO Uma caixa sem tampa é feita a partir de um pedaço quadrado de cartolina, de 18 centímetros por 18 centímetros, removendo um pequeno quadrado



PROBLEMA 32

de cada canto e dobrando as abas resultantes para formar os lados. Expresse o volume da caixa em função do lado x dos quadrados removidos. Desenhe o gráfico associado e estime o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo.

33. DIAGRAMAÇÃO DE UM CARTAZ Um cartaz de forma retangular contém 25 centímetros quadrados de texto cercado por margens de 2 centímetros de cada lado e 4 centímetros em cima e embaixo. Expresse a área total do cartaz em função da largura da parte impressa.

34. VENDAS A VAREJO Uma livraria pode encomendar um certo livro a uma editora por um preço de R$ 3,00 o exemplar. A livraria está vendendo o livro a R$ 15,00 o exemplar e por este preço tem vendido 200 exemplares por mês. A livraria pretende reduzir o preço para aumentar as vendas e calcula que, para cada R$ 1,00 de redução do preço, conseguirá vender mais 20 exemplares por mês. Expresse o lucro mensal da livraria com a venda deste livro em função do preço de venda, desenhe o gráfico associado e estime o preço ótimo de venda.

35. VENDAS A VAREJO Um fabricante tem vendido lâmpadas a R$ 30,00 a unidade e por este preço as vendas têm sido de 3.000 lâmpadas por mês. O fabricante pretende aumentar o preço e calcula que para cada R$ 1,00 de aumento, menos 1.000 lâmpadas serão vendidas por mês. O custo de produção é R$ 18,00 por lâmpada. Expresse o lucro mensal do fabricante em função do preço de venda das lâmpadas, desenhe o gráfico associado e estime o preço ótimo de venda.

36. DISTÂNCIA Um caminhão está 300 quilômetros a leste de um carro, viajando para oeste com uma velocidade constante de 30 quilômetros por hora. Enquanto isso, o carro está viajando para o norte com uma velocidade constante de 60 quilômetros por hora. Expresse a distância entre o carro e o caminhão em função do tempo.

37. CUSTO DE PRODUÇÃO Uma companhia recebeu uma encomenda do departamento de esportes de uma prefeitura para fabricar 8.000 pranchas de isopor. A companhia possui várias máquinas, cada uma das quais é capaz de produzir 30 pranchas por hora. O custo de programar as máquinas para produzir este tipo de prancha é de R$ 20,00 por máquina. Depois de programadas as máquinas, a operação é totalmente automática e pode ser supervisionada por um único funcionário, que ganha R$ 19,20 por hora para fazer este trabalho. Expresse o custo de fabricação das 8.000 pranchas em função do número de máquinas utilizadas, desenhe o gráfico associado e estime o número de máquinas que a companhia deve usar para minimizar o custo.

38. PRODUÇÃO AGRÍCOLA Um agricultor da Flórida calcula que se plantar 60 pés de laranja, a produção será, em média, de 400 laranjas por pé. A produção diminui de 4 laranjas por pé para cada árvore a mais plantada na mesma região. Expresse a produção total do agricultor em função do número adicional de árvores plantadas, desenhe o gráfico associado e estime o número total de pés de laranja que o agricultor deve plantar para maximizar a produção.

39. COLHEITA O preço de atacado de um saco de batatas é R$ 3,00 em primeiro de julho; após esta data, o preço cai de 2 centavos por saco por dia. Em primeiro de julho, a plantação de batatas de um agricultor já produziu o equivalente a 140 sacos e ele calcula que nos dias seguintes a produção deverá ser, em média, de um saco por dia. Expresse a receita do fazendeiro com a venda das batatas em função do dia da colheita, desenhe o gráfico associado e estime o dia em que o fazendeiro deve realizar a colheita para que a receita seja máxima.

EQUILÍBRIO DO MERCADO *Nos Problemas 40 a 43, as funções oferta e demanda, $S(x)$ e $D(x)$, são dadas para um certo produto em termos do nível de produção x. Em cada caso,*

(a) Determine o valor de x, x_e, para o qual ocorre o equilíbrio e o preço de equilíbrio correspondente, p_e.

(b) Plote no mesmo gráfico as curvas de oferta e de demanda, $p = S(x)$ e $p = D(x)$.

(c) Determine para que valores de x existe uma escassez do produto e para que valores existe um excesso do produto.

40. $S(x) = 4x + 200$ e $D(x) = -3x + 480$

41. $S(x) = 3x + 150$ e $D(x) = -2x + 275$

42. $S(x) = x^2 + x + 3$ e $D(x) = 21 - 3x^2$

43. $S(x) = 2x + 7{,}43$ e $D(x) = -0{,}21x^2 - 0{,}84x + 50$

44. OFERTA E DEMANDA Quando um liquidificador é vendido no varejo por p reais, os fabricantes fornecem $\frac{p^2}{10}$ liquidificadores aos varejistas e a demanda é de $60 - p$ aparelhos. Qual é o preço de mercado para o qual a oferta de liquidificadores é igual à demanda? Quantos liquidificadores são vendidos a este preço?

45. OFERTA E DEMANDA Os produtores fornecem ao mercado x unidades de um certo produto quando o preço unitário é $p = S(x)$ reais e os consumidores demandam (compram) x unidades quando o preço unitário é $p = D(x)$, onde

$$S(x) = 2x + 15 \qquad \text{e} \qquad D(x) = \frac{385}{x + 1}$$

a. Determine o nível de produção de equilíbrio x_e e o preço de equilíbrio p_e.
b. Plote as curvas de oferta e demanda no mesmo gráfico.
c. Em que ponto a curva de oferta intercepta o eixo y? Discuta o significado deste ponto em termos econômicos.

46. ESPIONAGEM O herói de um filme de espionagem escapou do quartel-general de uma quadrilha internacional de contrabandistas de diamantes, no pequeno país europeu de Azusa. Nosso herói, dirigindo um caminhão de leite roubado a 72 quilômetros por hora, tem uma dianteira de 40 minutos em relação aos perseguidores, que estão numa Ferrari a 168 quilômetros por hora. Se chegar à fronteira, que fica a 83,8 quilômetros do esconderijo dos bandidos, estará a salvo. Será que vai conseguir?

47. VIAGENS AÉREAS Dois aviões comerciais partem de Nova York com destino a Los Angeles, com 30 minutos de diferença. O primeiro viaja a 880 quilômetros por hora e o segundo a 1.040 quilômetros por hora. Quantos minutos após a partida do segundo avião este ultrapassa o primeiro?

48. ANÁLISE DE EQUILÍBRIO Um fabricante de móveis pode vender mesas de jantar por R$ 70,00. O custo total do fabricante é composto por um custo fixo de R$ 8.000 e um custo de produção de R$ 30,00 por mesa.

a. Quantas mesas o fabricante precisa vender para não ter prejuízo?
b. Quantas mesas o fabricante precisa vender para ter um lucro de R$ 6.000,00?
c. Qual será o lucro ou prejuízo do fabricante se vender 150 mesas?
d. Plote no mesmo gráfico a receita total e o custo total em função do número de mesas vendidas. Explique como é possível determinar o custo fixo a partir do gráfico.

49. DECISÃO EDITORIAL Um escritor recebe propostas de duas editoras interessadas em publicar seu último livro. A Editora A oferece uma comissão de 1% da receita líquida para os primeiros 30.000 exemplares vendidos e 3,5% para os exemplares que excederem 30.000 e espera lucrar R$ 2,00 com cada exemplar vendido. A Editora B não paga nenhuma comissão pelos primeiros 4.000 exemplares vendidos, mas oferece 2% de comissão para os exemplares que excederem 4.000 e espera lucrar R$ 3,00 com cada exemplar vendido. O autor espera vender N exemplares. Qual das duas ofertas é mais vantajosa para o escritor?

50. CONTA BANCÁRIA A taxa cobrada para manter uma conta corrente em um certo banco é R$ 12,00 por mês mais 10 centavos para cada cheque emitido. Outro banco cobra R$ 10,00 por mês mais 14 centavos por cheque. Defina um critério para decidir em qual dos dois bancos é mais vantajoso manter uma conta corrente.

51. FISIOLOGIA A pupila do olho humano é aproximadamente circular. Se a intensidade I da luz que entra o olho é proporcional à área da pupila, expresse I em função do raio r da pupila.

52. RECICLAGEM Para levantar fundos, uma organização beneficente está recolhendo garrafas usadas, que pretende vender a uma indústria para serem recicladas. Desde que a campanha começou, há 80 dias, a organização já recolheu 24 toneladas de garrafas, pelas quais a indústria se dispõe a pagar 1 centavo por quilo. Como, porém, as garrafas estão se acumulando mais depressa do que podem ser recicladas, a indústria já avisou que vai reduzir de 1 centavo por dia o preço que paga por 100 quilos de garrafas usadas. Supondo que a organização possa continuar a recolher a mesma quantidade de garrafas e que os custos de transporte tornem inviável realizar mais de uma viagem à indústria de garrafas, expresse a receita da organização com a venda de garrafas usadas em função do número de dias a mais que a campanha permaneça em vigor. Desenhe o gráfico associado e estime o número de dias que a organização deve esperar para encerrar a campanha de modo a maximizar a receita.

53. BIOQUÍMICA Na bioquímica, a constante de equilíbrio R de uma reação enzimática é dada pela equação

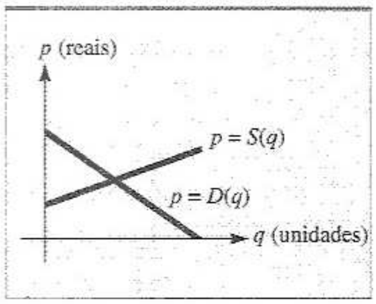
$$R = \frac{R_m[S]}{K_m + [S]}$$

onde K_m é uma constante (a chamada **constante de Michaelis**), R_m é o valor máximo de R e $[S]$ é a concentração do substrato.* Reescreva a equação de modo a expressar $y = \frac{1}{R}$ em função de $x = \frac{1}{[S]}$ e desenhe o gráfico desta função. (Este gráfico é conhecido como **gráfico duplamente recíproco de Lineweaver-Burk**.)

54. OFERTA E DEMANDA Os produtores fornecem ao mercado q unidades de um certo produto quando o preço unitário é $p = S(q)$ reais e os consumidores demandam (compram) q unidades quando o preço unitário é $p = D(q)$ reais, onde

$$S(q) = aq + b \qquad \text{e} \qquad D(q) = cq + d$$

onde a, b, c e d são constantes.
a. O que se pode dizer a respeito dos sinais dos coeficientes a, b, c e d se as inclinações das curvas de oferta e demanda são as que aparecem na figura a seguir?
b. Expresse o nível de produção de equilíbrio q_e e o preço de equilíbrio p_e em termos dos coeficientes a, b, c e d.
c. Use a resposta do item (b) para determinar o que acontece com o nível de produção de equilíbrio q_e quando a aumenta. O que acontece com q_e quando d aumenta?



PROBLEMA 54

55. LUCRO DE UMA EDITORA Uma editora gasta R$ 74.200,00 na preparação de um livro para ser impresso (composição, ilustrações, revisão etc.); o custo de impressão e encadernação é de R$ 5,50 por livro. O livro é vendido às livrarias por R$ 19,50 o exemplar.
a. Faça uma tabela mostrando o custo para produzir 2.000, 4.000, 6.000 e 8.000 livros. Use quatro algarismos significativos.
b. Faça uma tabela mostrando a receita com a venda de 2.000, 4.000, 6.000 e 8.000 livros. Use quatro algarismos significativos.
c. Escreva uma expressão matemática para o custo y em função do número x de livros impressos.
d. Escreva uma expressão matemática para a receita y em função do número x de livros impressos.
e. Use uma calculadora para plotar as duas funções no mesmo gráfico.
f. Use os comandos **TRACE** e **ZOOM** para determinar o ponto no qual o custo é igual à receita.
g. Use o gráfico para determinar quantos livros devem ser impressos e vendidos para que a editora tenha uma receita de R$ 85.000,00. Qual é o lucro (ou prejuízo) para este número de livros vendidos?

*Mary K. Campbell, *Biochemistry*, Philadelphia: Saunders College Publishing, 1991, pp. 221-226.

SEÇÃO 1.5 Limites

Como veremos em capítulos subseqüentes, o cálculo é um ramo extremamente poderoso da matemática, com um grande número de aplicações, como a plotagem de curvas, a otimização de funções, a análise de taxas de variação e a determinação de áreas, volumes e probabilidades. O que torna o cálculo poderoso e o distingue da álgebra é a noção de limite; esta seção tem por objetivo introduzir para o leitor este importante conceito. Nossa abordagem será mais intuitiva do que formal. As idéias apresentadas aqui servem de base para um desenvolvimento mais rigoroso das leis e procedimentos do cálculo e estão no cerne de boa parte da matemática moderna.

Abordagem Intuitiva do Conceito de Limite

Falando de maneira geral, o processo de determinar o limite consiste em investigar o comportamento de uma função $f(x)$ quando x se aproxima de um número c que pode ou não pertencer ao domínio de f. Os limites aparecem em um grande número de situações da vida real. O zero absoluto, por exemplo, a temperatura T_c na qual toda a agitação molecular cessa, é uma temperatura da qual podemos nos aproximar mas que jamais conseguimos atingir exatamente. Da mesma forma, os economistas que falam do lucro em um mercado ideal e os engenheiros que determinam a eficiência de um novo motor em condições ideais estão, na realidade, trabalhando com situações limite.

Para ilustrar o conceito de limite, considere um gerente que determina que, quando $x\%$ da capacidade de uma fábrica estão sendo usados, o custo total de operação é C centenas de milhares de reais, onde

$$C(x) = \frac{8x^2 - 636x - 320}{x^2 - 68x - 960}$$

A companhia tem uma política de manutenção preventiva que procura assegurar que a fábrica esteja sempre funcionando com 80% da capacidade máxima. Que custo o gerente deve esperar quando a fábrica está funcionando neste nível de produção ideal?

A princípio, pode parecer que o gerente pode responder a esta pergunta simplesmente calculando o valor de $C(80)$, mas ao fazer $x = 80$ na equação do custo obtemos a fração $\frac{0}{0}$, que não tem um valor definido. Entretanto, é possível calcular $C(x)$ para valores que se aproximam de x pela direita ($x > 80$, quando a fábrica está sendo temporariamente superutilizada) e pela esquerda ($x < 80$, quando a fábrica está sendo subutilizada). A tabela a seguir mostra alguns destes valores.

	x tende a 80 pela esquerda $\rightarrow$				$\leftarrow x$ tende a 80 pela direita		
x	79,8	79,99	79,999	80	80,0001	80,001	80,04
$C(x)$	6,99782	6,99989	6,99999	$\times$	7,000001	7,00001	7,00043

Os valores de $C(x)$ mostrados na linha inferior desta tabela sugerem que $C(x)$ se aproxima do número 7 quando x se aproxima de 80. Assim, é razoável que o gerente espere um custo de R$ 700.000,00 quando a fábrica está funcionando com 80% da capacidade máxima.

O comportamento da função que aparece neste exemplo pode ser descrito afirmando que "o limite de $C(x)$ quando x se aproxima de 80 é igual a 7", ou, em notação matemática,

$$\lim_{x \to 80} C(x) = 7$$

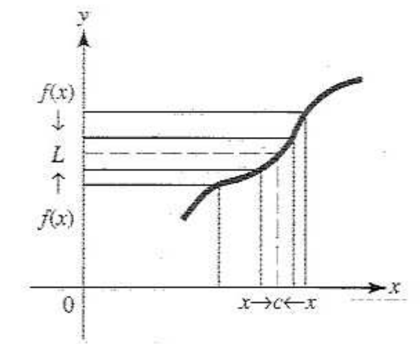
No caso geral, o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de um número c pode ser definido da seguinte maneira informal:

Limite ■ Se $f(x)$ se aproxima de um número L quando x se aproxima de um número c tanto pela esquerda como pela direita, L é o limite de $f(x)$ quando x tende a c, o que, em notação matemática, é escrito como

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Geometricamente, a relação $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que a ordenada do gráfico de $y = f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de c, como mostra a Figura 1.41. Esta interpretação é ilustrada, juntamente com o uso de tabelas para determinar limites, no Exemplo 1.5.1.

FIGURA 1.41 Se $\lim_{x \to c} f(x) = L$, a ordenada da curva tende para L quando x tende para c.



EXEMPLO 1.5.1

Use uma tabela para estimar o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

25 EXPLORE!

Plote a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ usando uma janela decimal modificada [0; 4,7]1 por [−1, 1; 2,1]1. Examine os valores próximos de $x = 1$. Construa uma tabela de valores usando um valor inicial de 0,97 para x e um incremento de 0,01. Descreva suas observações. Mude o valor inicial para 0,997 e o incremento para 0,001. O que acontece quando x tende a 1 pela esquerda? E pela direita? Qual é o valor mais apropriado de $f(x)$ em $x = 1$ para completar o gráfico?

Solução

Faça

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

e calcule $f(x)$ para uma série de valores de x que se aproximem de 1 pela esquerda e pela direita:

$x \to 1 \leftarrow x$

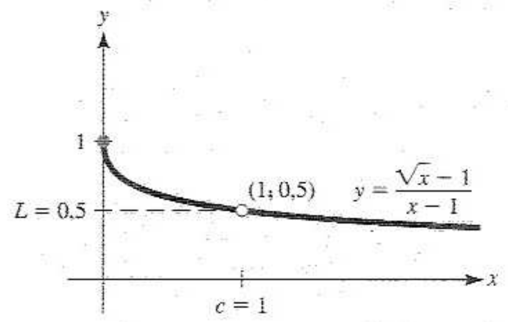
x	0,99	0,999	0,9999	1	1,00001	1,0001	1,001
$f(x)$	0,50126	0,50013	0,50001	$\times$	0,499999	0,49999	0,49988

Os números da linha de baixo sugerem que $f(x)$ tende para 0,5 quando x tende para 1, ou seja,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 0,5$$

O gráfico de $f(x)$ aparece na Figura 1.42. O cálculo do limite mostra que a ordenada do gráfico da função $y = f(x)$ tende para $L = 0,5$ quando x tende para 1. Este ponto corresponde ao "buraco" no gráfico de $f(x)$ nas coordenadas (1; 0,5). Vamos calcular o mesmo limite usando um método algébrico no Exemplo 1.5.6.

FIGURA 1.42 A função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ tende para $L = 0,5$ quando x tende para 1.



É importante não esquecer que os limites descrevem o comportamento de uma função *perto* de um ponto, mas não necessariamente *no* próprio ponto. Este fato está ilustrado na Figura 1.43. Para as três funções que aparecem na figura, o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 é igual a 4; entretanto, as funções

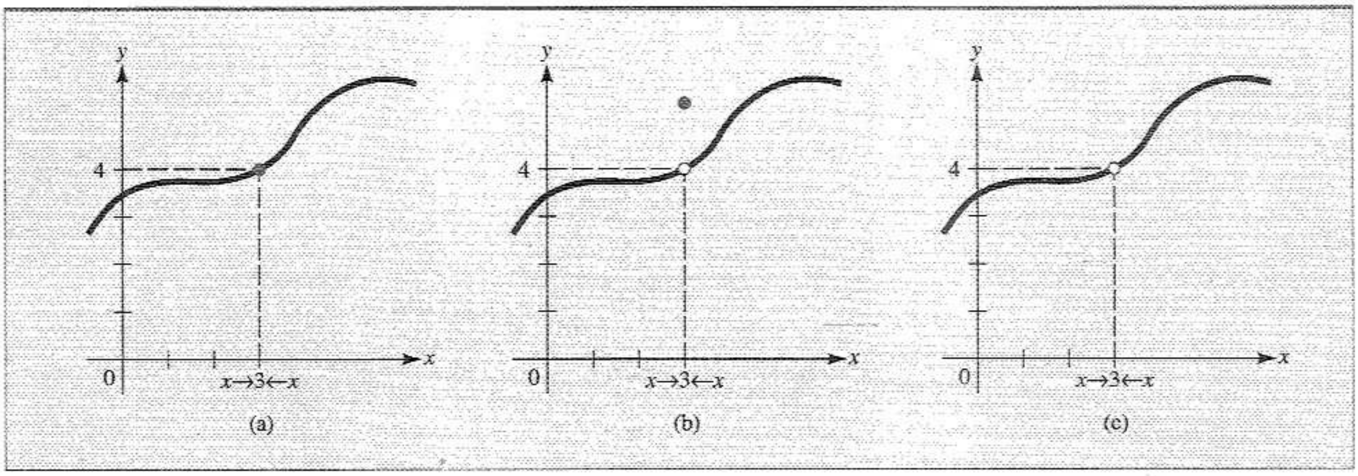


FIGURA 1.43 Três funções para as quais $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$.

têm valores bem diferentes em $x = 3$. Na função da Figura 1.43a, $f(c)$ é igual ao limite 4; na função da Figura 1.43b, $f(c)$ é diferente de 4; na função da Figura 1.43c, $f(c)$ não é definida.

A Figura 1.44 mostra os gráficos de duas funções que não têm um limite quando x tende a 2. O limite não existe na Figura 1.44a porque $f(x)$ tende a 5 quando x se aproxima de 2 pela direita e tende a um valor diferente, 3, quando x se aproxima de 2 pela esquerda. A função da Figura 1.44b não tem um limite finito quando x tende a 2 porque os valores de $f(x)$ se tornam cada vez maiores à medida que x se aproxima de 2 e, portanto, não tendem para um valor finito L. Estes chamados *limites infinitos* serão discutidos mais adiante nesta seção.

26 EXPLORE!

Plote a função $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$ usando uma janela [0, 4]1 por [−5, 40]5. Observe o gráfico dos dois lados de $x = 2$ para estudar o comportamento de $f(x)$ nas proximidades deste ponto. Construa uma tabela de valores usando um valor inicial de 1,97 para x e um incremento de 0,01. O que acontece com os valores de $f(x)$ quando x tende a 2?

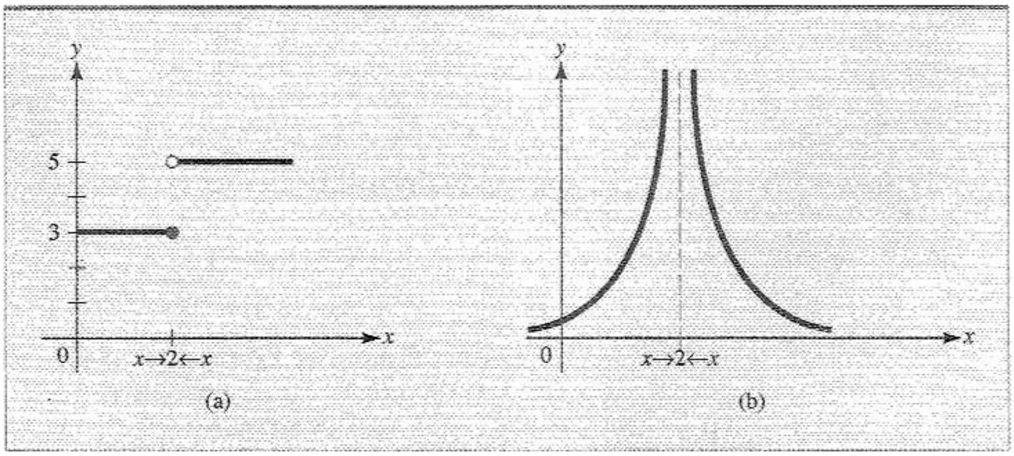


FIGURA 1.44 Duas funções para as quais $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

27 EXPLORE!

Plote a função

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$$

usando um gráfico de pontos e entrando com

$$Y1 = 3(X \le 2) + 5(X > 2)$$

no editor de funções da calculadora. Use a tecla **TRACE** para determinar os valores de y quando x está próximo de 2. Faz diferença se x se aproxima de 2 pela esquerda ou pela direita? Determine $f(2)$.

Propriedades dos Limites

Os limites obedecem a certas regras algébricas que podem ser usadas em computações. Estas regras, que certamente parecem plausíveis com base em nossa definição informal de limite, são demonstradas formalmente em cursos mais teóricos. Elas são importantes porque simplificam o cálculo dos limites de funções algébricas.

Propriedades Algébricas dos Limites ■ Se $\lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{x\to c} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

$$\lim_{x\to c} [kf(x)] = k \lim_{x\to c} f(x) \quad \text{para qualquer constante } k$$

$$\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)][\lim_{x\to c} g(x)]$$

(continua)

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} \quad \text{se} \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^p = [\lim_{x \to c} f(x)]^p \quad \text{se} \ [\lim_{x \to c} f(x)]^p \ \text{existir}$$

Em outras palavras, o limite de uma soma, de uma diferença, de um múltiplo, de um produto, de um quociente e de uma potência é a soma, diferença, múltiplo, produto, quociente e potência dos limites individuais, contanto que todas as expressões envolvidas sejam definidas.

Os dois limites elementares a seguir podem ser usados, junto com as regras dos limites, para calcular limites que envolvem expressões mais complexas.

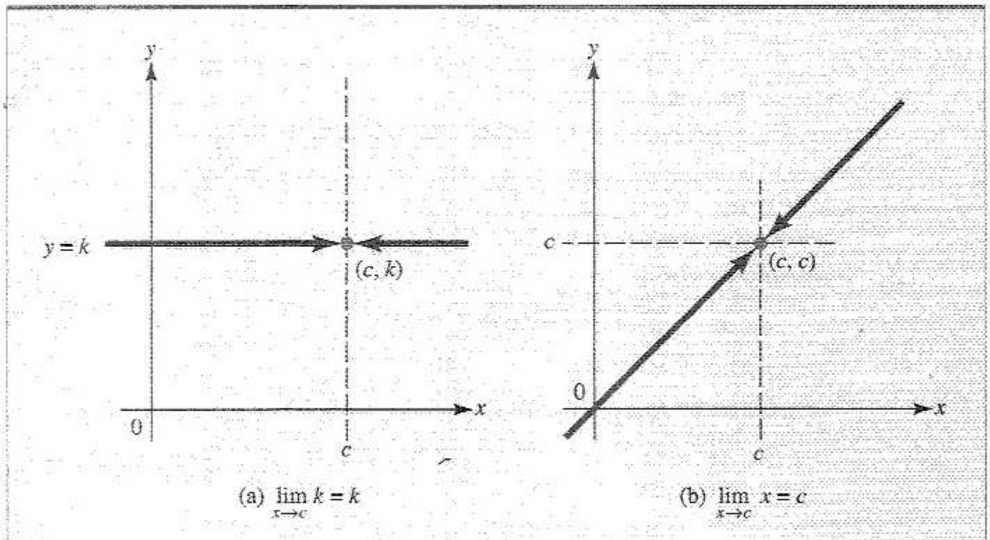
Limites de Duas Funções Lineares ■ Para qualquer constante k,

$$\lim_{x \to c} k = k \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to c} x = c$$

Em outras palavras, o limite de uma constante é a própria constante e o limite de $f(x) = x$ quando c tende a c é c.

Em termos geométricos, a expressão $\lim_{x \to c} k = k$ significa que a ordenada do gráfico da função constante $f(x) = k$ conserva o valor k quando x se aproxima de c. Analogamente, a expressão $\lim_{x \to c} x = c$ significa que a ordenada do gráfico da função linear $f(x) = x$ se aproxima de c quando x se aproxima de c. Os dois casos estão ilustrados na Figura 1.45.

FIGURA 1.45 Limites de duas funções lineares.



28 EXPLORE!

Plote a função $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ usando uma janela de observação [0, 2]0,5 por [0, 5]0,5. Use a tecla **TRACE** para $x = 1$ e observe que não há um valor correspondente de y. Prepare uma tabela com um valor inicial de 0,5 para x e um incremento de 0,1. Observe que é indicado um erro para $x = 1$, o que confirma que $f(x)$ não é definida neste ponto. Qual é o valor apropriado para preencher esta lacuna? Mude o valor inicial de x para 0,9 e o incremento para 0,01 para obter uma aproximação melhor. Finalmente, use a tecla **ZOOM** para observar a curva nas vizinhanças de $x = 1$ e estimar o valor limite da função neste ponto.

Cálculo de Limites

Os Exemplos 1.5.2 a 1.5.6 ilustram o uso das propriedades dos limites para calcular os limites de funções algébricas. No Exemplo 1.5.2, vamos determinar o limite de um polinômio.

EXEMPLO 1.5.2

Calcule $\lim_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8)$.

Solução

Usando as propriedades dos limites, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8) &= 3\left(\lim_{x \to -1} x\right)^3 - 4\left(\lim_{x \to -1} x\right) + \lim_{x \to -1} 8 \\ &= 3(-1)^3 - 4(-1) + 8 = 9\end{aligned}$$

No Exemplo 1.5.3, vamos determinar o limite de uma função racional cujo denominador não tende a zero.

EXEMPLO 1.5.3

Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^3 - 8}{x - 2}$.

Solução

Como $\lim\limits_{x\to 1} (x - 2) \neq 0$, podemos usar a regra do quociente para limites para obter

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 8}{x - 2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} (3x^3 - 8)}{\lim\limits_{x\to 1} (x - 2)} = \frac{3\lim\limits_{x\to 1} x^3 - \lim\limits_{x\to 1} 8}{\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 2} = \frac{3 - 8}{1 - 2} = 5$$

A partir das propriedades dos limites, é fácil obter as seguintes expressões, que podem ser usadas para calcular muitos limites que aparecem em problemas reais.

Limites de Polinômios e Funções Racionais ■ Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios,

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$$

e

$$\lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} \quad \text{para } q(c) \neq 0$$

No Exemplo 1.5.4, o denominador da função racional dada tende a zero, enquanto o numerador permanece diferente de zero. Quando isto acontece, podemos concluir que o limite não existe, já que o valor absoluto da fração aumenta indefinidamente e, portanto, não tende para um número finito.

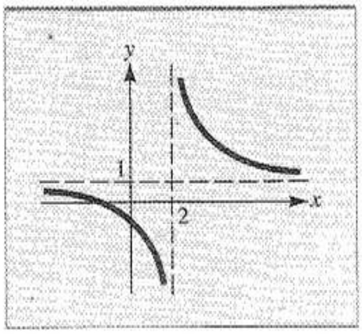


FIGURA 1.46 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

EXEMPLO 1.5.4

Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x + 1}{x - 2}$.

Solução

A regra do quociente não se aplica neste caso, já que o limite do denominador é

$$\lim_{x\to 2} (x - 2) = 0$$

Como o limite do numerador é $\lim\limits_{x\to 2} (x + 1) = 3$, que é diferente de zero, chegamos à conclusão de que o limite não existe.

O gráfico da função $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$, que aparece na Figura 1.46, dá uma idéia melhor do que realmente está acontecendo neste exemplo. Observe que $f(x)$ aumenta indefinidamente quando x se aproxima de 2 do lado direito e diminui indefinidamente quando x se aproxima de 2 do lado esquerdo.

29 EXPLORE!

Plote a função $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ usando uma janela decimal aumentada [−9,4; 9,4]1 por [−6,2; 6,2]1. Use a tecla **TRACE** para observar as vizinhanças do ponto $x = 2$ do lado esquerdo e do lado direito. Prepare uma tabela de valores usando um valor inicial de 1,97 para x e um incremento de 0,01. Descreva suas observações.

No Exemplo 1.5.5, tanto o numerador como o denominador de uma fração dada tendem a zero. Quando isto acontece, muitas vezes é possível simplificar algebricamente a fração para obter o limite desejado.

EXEMPLO 1.5.5

Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

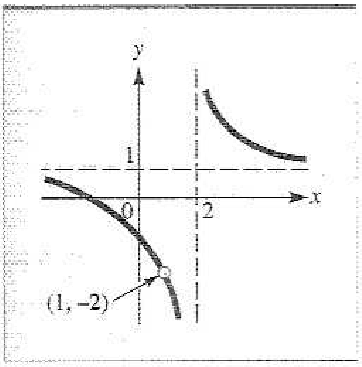


FIGURA 1.47 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Solução

Quando x tende a 1, tanto o numerador como o denominador tendem a zero e não podemos tirar nenhuma conclusão a respeito do valor do quociente. Obviamente, a função dada não é definida para $x = 1$. Para qualquer outro valor de x, porém, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$, obtendo o seguinte resultado:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \frac{x+1}{x-2} \qquad x \neq 1$$

(Como $x \neq 1$, não estamos dividindo por zero.) Agora podemos calcular o limite quando x tende a 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)} = \frac{2}{-1} = -2$$

O gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ aparece na Figura 1.47. Observe que se trata de um gráfico semelhante ao da Figura 1.46, mas com um buraco no ponto $(1, -2)$.

Em geral, quando tanto o numerador como o denominador de uma fração tendem a zero quando x tende a c, a primeira coisa a fazer é tentar simplificar a fração (como fizemos no Exemplo 1.5.5, dividindo o numerador e o denominador por $x - 1$). Na maioria dos casos, esta forma simplificada da fração é válida para todos os valores de x exceto $x = c$. Como estamos interessados no comportamento do quociente *nas vizinhanças* de $x = c$ e não *em* $x = c$, podemos usar a forma simplificada da fração para calcular o limite. No Exemplo 1.5.6, usamos esta técnica para obter o limite que estimamos usando uma tabela no Exemplo 1.5.1.

EXEMPLO 1.5.6

Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Solução

Lembrete

Sabemos que

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

No Exemplo 1.5.6, usamos esta identidade com $a = \sqrt{x}$ e $b = 1$.

Tanto o numerador como o denominador tendem a zero quando x tende a 1. Para simplificar a fração, racionalizamos o numerador (ou seja, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt{x} + 1$):

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \qquad x \neq 1$$

Agora podemos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Limites no Infinito

O comportamento "a longo prazo" é uma questão de interesse tanto para os economistas como para os físicos e biólogos. Assim, por exemplo, um biólogo por estar interessado em estimar o tamanho de uma colônia de bactérias após um longo tempo, ou um industrial pode querer saber qual será o custo médio para fabricar um certo produto se o nível de produção aumentar indefinidamente.

Na matemática, o símbolo de infinito, ∞, é usado para representar o aumento sem limite de uma variável ou o resultado deste aumento. Seguem as definições de dois limites no infinito que podem ser usadas para estudar o "comportamento a longo prazo".

Limites no Infinito ■ Se os valores da função $f(x)$ tendem para o número L quando x aumenta sem limite, escrevemos:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

(continua)

Analogamente, escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

quando os valores de $f(x)$ tendem para o número M quando x diminui sem limite.

Geometricamente, a notação $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ significa que quando x aumenta sem limite, a curva de $f(x)$ tende para a reta horizontal $x = L$, enquanto $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = M$ significa que a curva de $f(x)$ tende para a reta horizontal $y = M$ quando x diminui sem limite. As retas $y = L$ e $y = M$ que aparecem neste contexto recebem o nome de **assíntotas horizontais** da curva de $f(x)$. Existem várias formas de uma curva apresentar assíntotas horizontais, uma das quais é mostrada na Figura 1.48. Voltaremos a falar de assíntotas no Capítulo 3, como parte de uma discussão geral a respeito do uso do cálculo para traçar curvas.

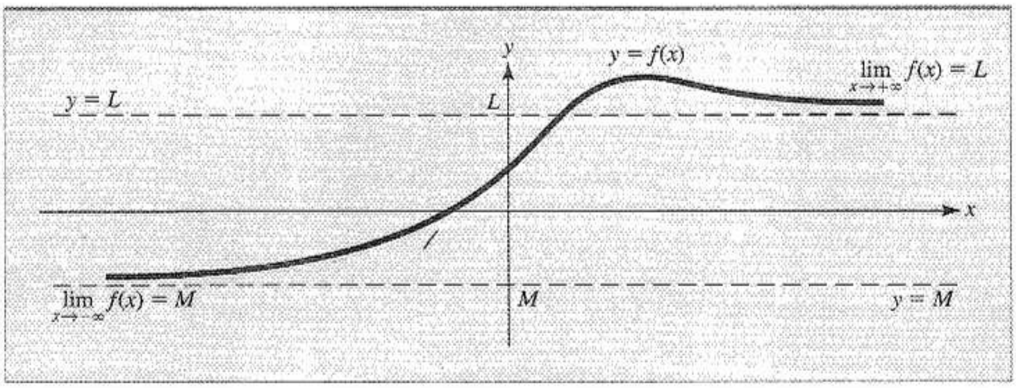


FIGURA 1.48 Gráfico para ilustrar limites no infinito e assíntotas horizontais.

As propriedades algébricas dos limites apresentadas anteriormente também se aplicam aos limites no infinito. Além disso, como qualquer potência inversa $1/x^k$ para $k > 0$ tende a zero quando x aumenta ou diminui sem limite, temos as seguintes regras:

Regras das Potências Inversas ■ Se A e k são constantes com $k > 0$ e x^k é definida para qualquer x,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{A}{x^k} = 0$$

O uso destas regras é ilustrado no Exemplo 1.5.7.

EXEMPLO 1.5.7

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1 + x + 2x^2}$

Solução

Para ter uma idéia do que acontece neste limite, calculamos o valor da função

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x + 2x^2}$$

para $x = 100$, 1.000, 10.000 e 100.000. Os resultados aparecem na tabela a seguir.

$x \longrightarrow +\infty$

x	100	1.000	10.000	100.000
$f(x)$	0,49749	0,49975	0,49997	0,49999

Os valores da função, que aparecem na linha de baixo da tabela, sugerem que $f(x)$ tende para 0,5 quando x tende para infinito. Para confirmar analiticamente esta observação, dividimos todos os termos

30 EXPLORE!

Plote a função $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x + 2x^2}$ usando uma janela $[-20, 20]5$ por $[0, 1]1$. Use a tecla **TRACE** para observar o gráfico para grandes valores de x, como $x = 30, 40$ etc. O que você observa nos valores correspondentes de y e no comportamento do gráfico? Qual você imagina que seja o valor de $f(x)$ quando $x \to \infty$?

de $f(x)$ pela maior potência de x que aparece no denominador, ou seja, por x^2. Isto nos permite determinar o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ aplicando uma das regras das potências inversas:

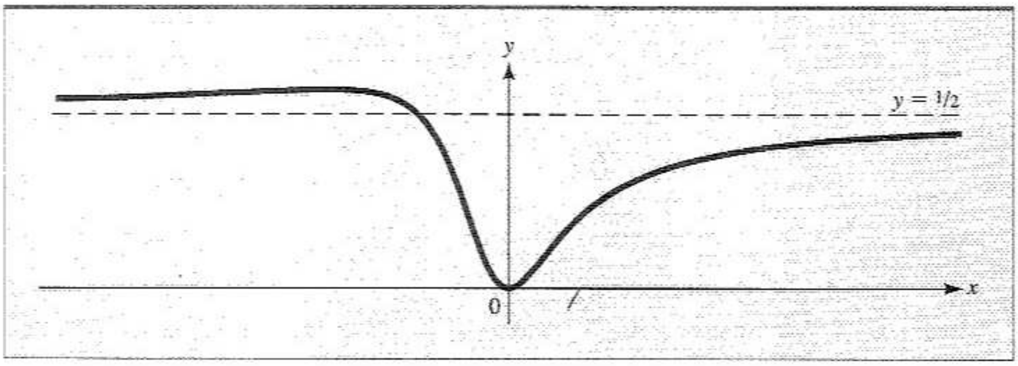
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1 + x + 2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2/x^2}{1/x^2 + x/x^2 + 2x^2/x^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^2 + \lim\limits_{x\to+\infty} 1/x + \lim\limits_{x\to+\infty} 2} \qquad \textit{aplicando várias propriedades algébricas dos limites}$$

$$= \frac{1}{0 + 0 + 2} = 0{,}5 \qquad \textit{aplicando uma das regras das potências inversas}$$

O gráfico de $f(x)$ é mostrado na Figura 1.49. Por praticidade, verifique também $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0{,}5$.

FIGURA 1.49 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x + 2x^2}$.



Segue uma descrição geral de um método para determinar um limite no infinito de uma função racional.

Método para Determinar um Limite no Infinito de $f(x) = p(x)/q(x)$

1º passo: Divida todos os termos de $f(x)$ pela maior potência de x que aparece no polinômio do denominador, $q(x)$.

2º passo: Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ usando as propriedades algébricas dos limites e as regras das potências inversas.

EXEMPLO 1.5.8

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 5x + 2}$.

Solução

A maior potência de x do denominador é x^2. Dividindo o numerador e o denominador por x^2, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 5x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + 3/x + 1/x^2}{3 - 5/x + 2/x^2} = \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}$$

EXEMPLO 1.5.9

Se uma cultura é plantada em um solo cujo teor de nitrogênio é N, a produtividade Y pode ser modelada pela função de *Michaelis-Menten*

$$Y(N) = \frac{AN}{B + N} \qquad N \geq 0$$

onde A e B são constantes positivas. O que acontece com a produtividade quando o teor de nitrogênio aumenta indefinidamente?

Solução

O limite que nos interessa é o seguinte:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty} Y(N) &= \lim_{N\to+\infty} \frac{AN}{B+N}\\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{AN/N}{B/N+N/N}\\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{A}{B/N+1} = \frac{A}{0+1}\\ &= A\end{aligned}$$

Assim, a produtividade tende para o valor constante A quando o teor N de nitrogênio aumenta indefinidamente. Por este motivo, A recebe o nome de *produtividade máxima possível*.

Limites Infinitos Dizemos que $\lim_{x\to c} f(x)$ é um **limite infinito** se $f(x)$ aumenta ou diminui sem limite quando $x \to c$. A rigor, este limite não existe, mas podemos fornecer uma informação adicional a respeito do comportamento da função escrevendo

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

se $f(x)$ aumenta sem limite quando $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

se $f(x)$ diminui sem limite quando $x \to c$. Esta notação é ilustrada no Exemplo 1.5.10 para o caso em que $x \to +\infty$.

EXEMPLO 1.5.10

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+2x+1}{x-3}$.

Solução

A potência mais alta de x no denominador é x. Dividindo o numerador e o denominador por x, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+2x+1}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+2+1/x}{1-3/x}$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2+2+\frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right) = 1$$

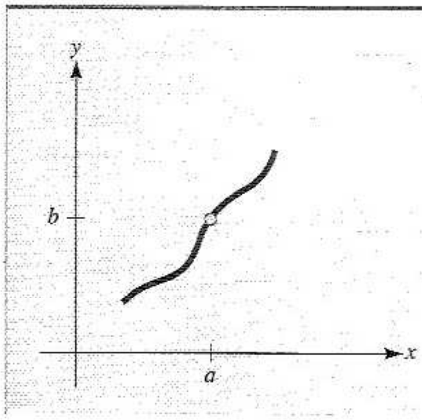
temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+2x+1}{x-3} = -\infty$$

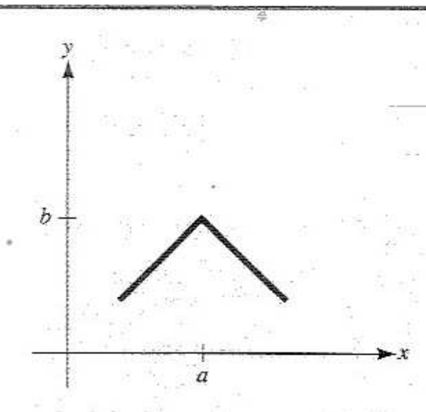
PROBLEMAS | 1.5

Nos Problemas 1 a 6, determine $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, *caso exista.*

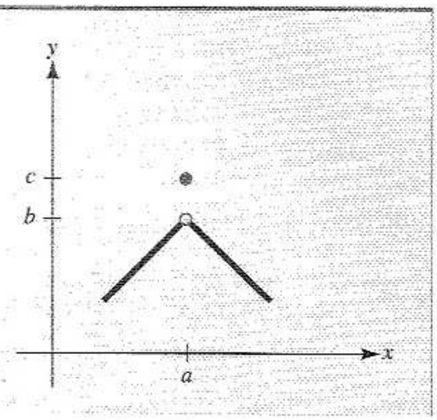
1.



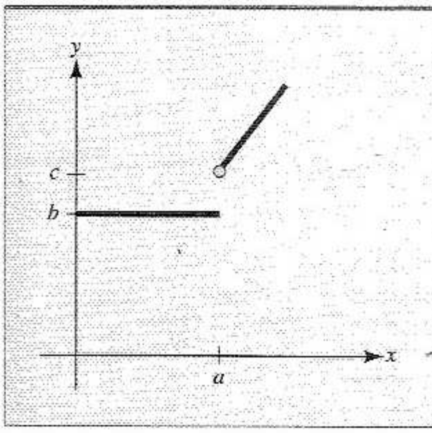
2.



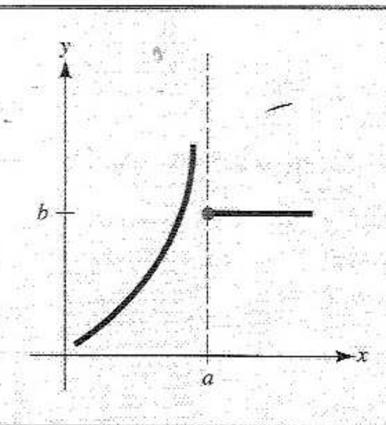
3.



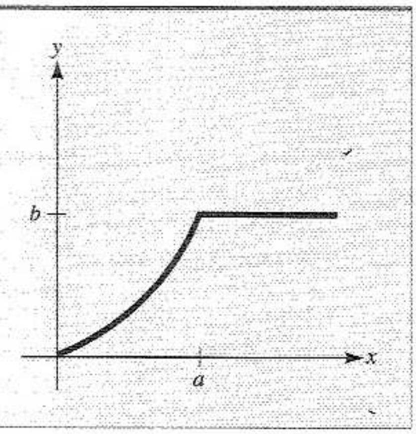
4.



5.



6.



Nos Problemas 7 a 26, determine o limite indicado, caso exista.

7. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2)$

8. $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 2x^2 + x - 3)$

9. $\lim\limits_{x \to 0} (x^5 - 6x^4 + 7)$

10. $\lim\limits_{x \to -1/2} (1 - 5x^3)$

11. $\lim\limits_{x \to 3} (x - 1)^2(x + 1)$

12. $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 1)(1 - 2x)^2$

13. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{x + 1}{x + 2}$

14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

15. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x + 3}{5 - x}$

16. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x + 3}{x - 3}$

17. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

18. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{x - 3}$

19. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$

20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

21. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{(x - 1)(x - 4)}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2}$

23. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$

24. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

25. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

26. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Nos Problemas 27 a 36, determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. *Se o valor limite for infinito, indique se é* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

27. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$

28. $f(x) = 1 - x + 2x^2 - 3x^3$

29. $f(x) = (1 - 2x)(x + 5)$

30. $f(x) = (1 + x^2)^3$

31. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x + 1}$

32. $f(x) = \dfrac{1 - 3x^3}{2x^3 - 6x + 2}$

33. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x^2 + 2x - 7}$

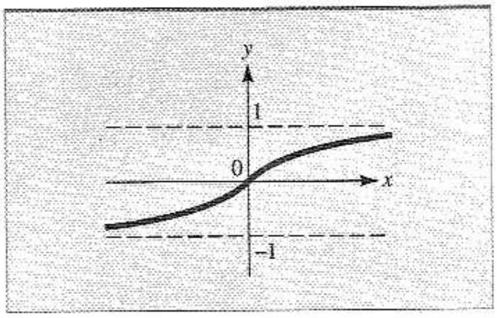
34. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{1 - 2x - x^3}$

35. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{2x - 9}$

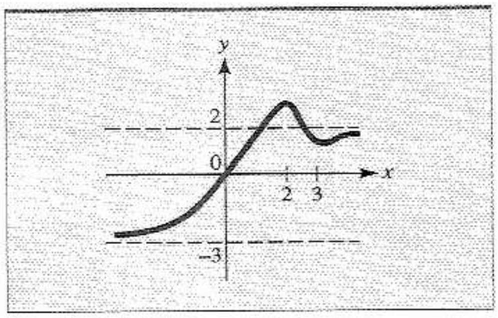
36. $f(x) = \dfrac{1 - 2x^3}{x + 1}$

Nos Problemas 37 e 38, o gráfico de uma função f(x) é dado. Use o gráfico para determinar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

37.



38.



Nos Problemas 39 a 42, complete a tabela calculando f(x) para os valores especificados de x. Em seguida, use a tabela para estimar o limite indicado ou mostrar que o limite não existe.

39. $f(x) = x^2 - x;\quad \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$							

40. $f(x) = x - \dfrac{1}{x};\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

x	−0,09	−0,009	0	0,0009	0,009	0,09
$f(x)$						

41. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1};\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$							

42. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1};\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

x	−1,1	−1,01	−1,001	−1	−0,999	−0,99	−0,9
$f(x)$							

Nos Problemas 43 a 50, calcule o limite indicado ou mostre que ele não existe usando as seguintes informações a respeito de limites das funções f(x) e g(x):

$$\lim_{x\to c} f(x) = 5 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to c} g(x) = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = 4$$

43. $\lim\limits_{x\to c} [2f(x) - 3g(x)]$

44. $\lim\limits_{x\to c} f(x)\,g(x)$

45. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

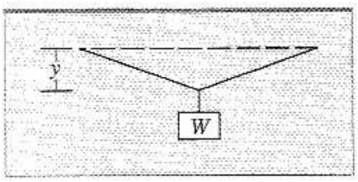
46. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{2f(x) - g(x)}{5g(x) + 2f(x)}$

47. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{g(x)}$

48. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2f(x) + g(x)}{x + f(x)}$

49. Um fio é estendido horizontalmente, como mostra a figura. Um experimento é executado no qual diferentes pesos são pendurados no centro do fio e os deslocamentos verticais correspondentes são medidos. Quando o peso é excessivo, o fio se rompe. Com base nos dados da tabela a seguir, qual é o maior deslocamento possível deste tipo de fio?

Peso W (kg)	15	16	17	18	17,5	17,9	17,99
Deslocamento y (cm)	1,7	1,75	1,78	Arrebenta	1,79	1,795	Arrebenta



PROBLEMA 49

50. PRODUÇÃO O gerente de uma empresa determina que t meses após começar a fabricação de um novo produto o número de unidades fabricadas deve ser P milhares, onde

$$P(t) = \frac{6t^2 + 5t}{(t + 1)^2}$$

O que acontece com a produção a longo prazo (ou seja, para $t \to \infty$)?

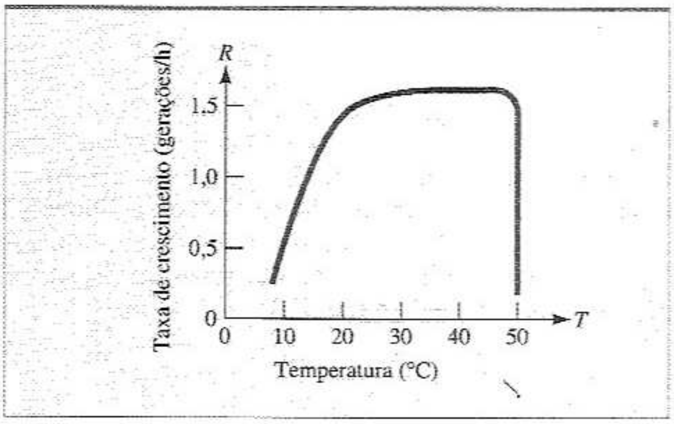
51. RENDA *PER CAPITA* Estudos mostram que daqui a t anos a população de um certo país será $p = 0{,}2t + 1500$ milhares de pessoas e que a renda bruta do país será E milhões de dólares, onde

$$E(t) = \sqrt{9t^2 + 0{,}5t + 179}$$

a. Expresse a renda *per capita* do país $P = E/p$ em função do tempo t. (Cuidado para não errar nas unidades.)

b. O que acontece com a renda *per capita* a longo prazo (para $t \to \infty$)?

52. COLÔNIAS DE BACTÉRIAS O gráfico a seguir mostra a variação da taxa de crescimento $R(T)$ com a temperatura T para uma colônia de bactérias.*



PROBLEMA 52

a. Qual o intervalo de temperaturas T no qual a taxa de crescimento $R(T)$ dobra de valor?

b. O que se pode dizer a respeito da taxa de crescimento para $25 < T < 45$?

c. O que acontece quando a temperatura atinge aproximadamente 45°C? Faz sentido calcular $\lim\limits_{T \to 50} R(T)$?

d. Escreva um parágrafo relatando como a temperatura afeta a taxa de crescimento das espécies.

53. ETOLOGIA Em algumas espécies de animais, a ingestão de alimentos é afetada pelo grau de vigilância que o animal mantém enquanto está comendo. Para resumir, é difícil comer bem se você tem que estar em guarda o tempo todo contra predadores que podem comê-lo. Em um modelo,** se o animal está se alimentando de plantas que permitem uma mordida de tamanho S, a ingestão de alimentos, $I(S)$, é dada por uma função da forma

$$I(S) = \frac{aS}{S + c}$$

onde a e c são constantes positivas.

a. O que acontece com a ingestão $I(S)$ quando o tamanho S da mordida aumenta indefinidamente? Interprete o resultado.

b. Leia um artigo a respeito dos vários modos como a ingestão de alimentos pode ser afetada pela existência de predadores. Em seguida, escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do modo como modelos matemáticos podem ser usados para estudar este tipo de comportamento na zoologia. A referência citada neste problema pode ser um bom ponto de partida.

54. PSICOLOGIA EXPERIMENTAL Para estudar o aprendizado em animais, um estudante de psicologia realizou um experimento em que um rato teve que atravessar várias vezes o mesmo labirinto. Suponha que o tempo que o rato levou para atravessar o labirinto na enésima tentativa tenha sido da ordem de

$$T(n) = \frac{5n + 17}{n}$$

minutos. O que acontece com este tempo quando o número n de tentativas aumenta indefinidamente? Interprete este resultado.

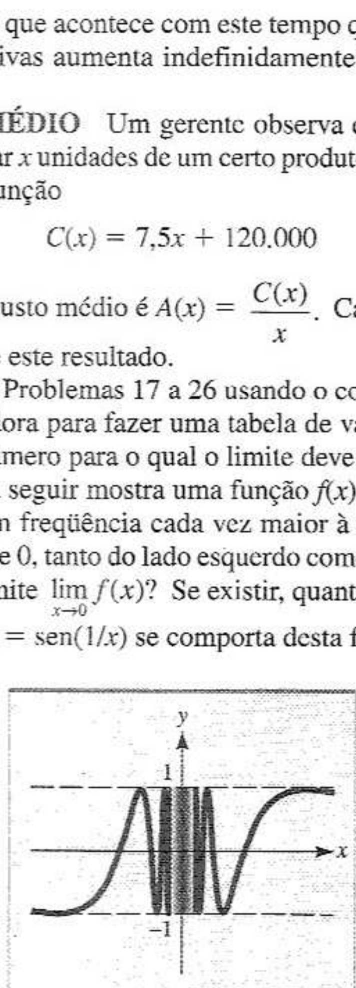
55. CUSTO MÉDIO Um gerente observa que o custo total para fabricar x unidades de um certo produto pode ser modelado pela função

$$C(x) = 7{,}5x + 120.000$$

(reais). O custo médio é $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$ e interprete este resultado.

56. Resolva os Problemas 17 a 26 usando o comando **TRACE** da calculadora para fazer uma tabela de valores de x e $f(x)$ perto do número para o qual o limite deve ser calculado.

57. O gráfico a seguir mostra uma função $f(x)$ que oscila entre 1 e -1 com freqüência cada vez maior à medida que x se aproxima de 0, tanto do lado esquerdo como do lado direito. Existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? Se existir, quanto vale? [*Nota:* A função $f(x) = \text{sen}(1/x)$ se comporta desta forma.]



PROBLEMA 57

58. Se R$ 1.000,00 são investidos a juros de 5% capitalizados n vezes por ano, o montante após 1 ano será $1.000(1 + 0{,}05x)^{1/x}$, onde $x = 1/n$ é o período de capitalização. Assim,

---

**Fonte:* Michael D. La Grega, Phillip L. Buckingham and Jeffrey C. Evans, *Hazardous Waste Management*. New York: McGraw-Hill, 1994, pp. 565-566. Reproduzido com permissão.

**A.W. Willius and C. Fitzgibbon, "Costs of Vigilance in Foraging Ungulates", *Animal Behavior*, Vol. 47, Pt. 2 (Feb. 1994).

por exemplo, se $n = 4$, o período de capitalização é 1/4 de ano, ou seja, 3 meses. No caso da chamada *capitalização contínua* dos juros, o montante após 1 ano é dado pelo limite

$$B = \lim_{x\to 0^+} 1.000(1 + 0{,}05x)^{1/x}$$

Estime o valor deste limite completando a segunda linha da tabela a seguir.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$1.000(1 + 0{,}05x)1/x$					

59. Calcule o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

em termos das constantes $a_0, a_1,..., a_n$ e $b_0, b_1,..., b_m$ nos seguintes casos:

a. $n < m$
b. $n = m$
c. $n > m$

[*Nota:* Existem duas respostas possíveis, dependendo dos sinais de a_n e b_m.]

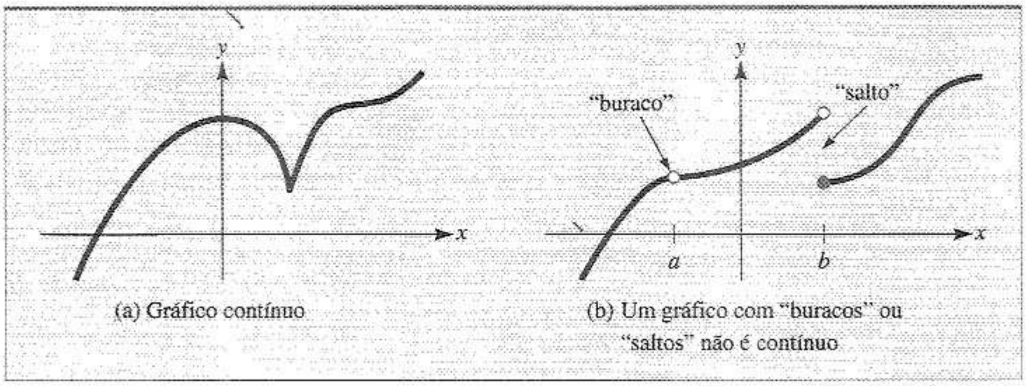
SEÇÃO 1.6 Limites Unilaterais e Continuidade

O dicionário define "contínuo" como "em que não há interrupção; seguido, sucessivo". Os fenômenos contínuos desempenham um papel importante na natureza. O crescimento de uma árvore, o movimento de um foguete e o aumento do volume da água em uma banheira que está sendo enchida são exemplos de fenômenos contínuos. Nesta seção, vamos discutir o que significa uma função ser contínua e examinar algumas propriedades importantes deste tipo de função.

Limites Unilaterais

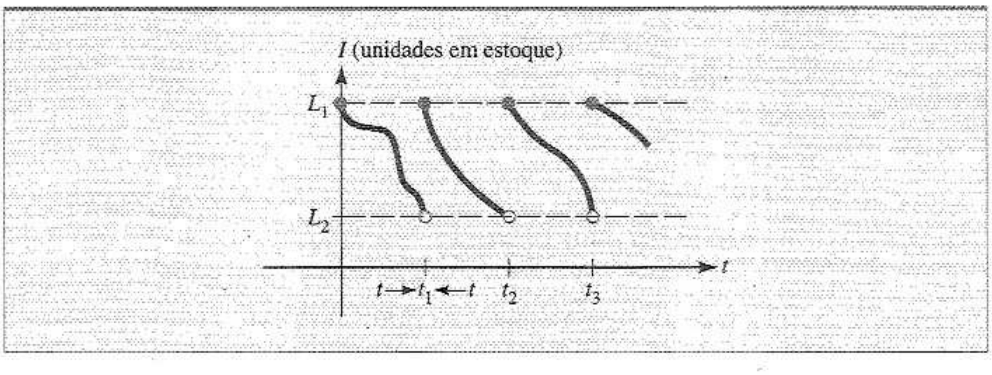
Informalmente, função contínua é aquela cujo gráfico pode ser traçado sem que a "caneta" se afaste do papel (Figura 1.50a). Nem todas as funções possuem esta propriedade, mas aquelas que a possuem desempenham um papel importante no cálculo. Uma função *não é* contínua quando seu gráfico possui um "buraco ou um salto" (Figura 1.50b), mas o que queremos dizer exatamente quando falamos em "buracos e saltos" de um gráfico? Para descrever matematicamente estas entidades, precisamos usar o conceito de **limite unilateral** de uma função, isto é, o limite no qual nos aproximamos do ponto considerado apenas pela esquerda ou pela direita e não pelos dois lados, como no limite "bilateral" definido na Seção 1.5.

FIGURA 1.50 Gráficos contínuos e descontínuos.



A Figura 1.51, por exemplo, mostra o gráfico do estoque I em função do tempo t para uma companhia que repõe o estoque até o nível L_1 sempre que o estoque cai abaixo de um certo nível mínimo L_2. (Esta

FIGURA 1.51 Limites unilaterais em um exemplo envolvendo um estoque *just in time*.



forma de gerenciar o estoque é conhecida como *just in time*). Suponha que a primeira reposição ocorra no instante $t = t_1$. Quando t tende para t_1 do lado esquerdo, o valor limite é L_2, mas quando t tende para t_1 do lado direito, o valor limite é L_1.

Para descrever os limites unilaterais, usaremos a notação a seguir.

Limites Unilaterais ■ Se $f(x)$ tende a L quando x tende a c pela equqerda ($x < c$), escrevemos $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$. Se $f(x)$ tende a M quando x tende a c pela direita ($x > c$), escrevemos $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = M$.

Usando esta notação no exemplo do estoque, temos:

$$\lim_{t \to t_1^-} I(t) = L_2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to t_1^+} I(t) = L_1$$

Seguem mais dois exemplos de limites unilaterais.

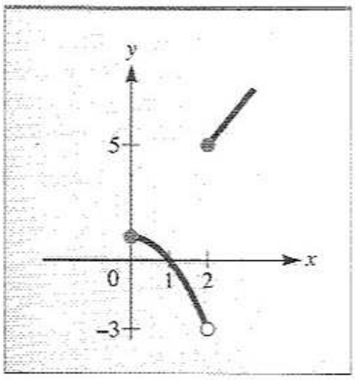


FIGURA 1.52 Gráfico de $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } 0 \le x < 2 \\ 2x + 1 & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

EXEMPLO 1.6.1

No caso da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } 0 \le x < 2 \\ 2x + 1 & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$$

determine os limites unilaterais $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Solução

O gráfico de $f(x)$ aparece na Figura 1.52. Como $f(x) = 1 - x^2$ para $0 \le x < 2$, temos:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (1 - x^2) = -3$$

Como $f(x) = 2x + 1$ para $x \ge 2$, temos:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5$$

31 EXPLORE!

Leia o Exemplo 1.6.2. Plote a função $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 4}$ usando uma janela [0; 9,4]1 por [−4, 4]1 para verificar qual é o limite quando x tende a 4 pela esquerda e pela direita. Verifique também qual é o valor de $f(x)$ para grandes valores positivos e negativos de x. O que você observa?

EXEMPLO 1.6.2

Calcule $\lim \dfrac{x - 2}{x - 4}$ quando x tende a 4 pela esquerda e pela direita.

Solução

Em primeiro lugar, observe que para $2 < x < 4$ a grandeza

$$f(x) = \frac{x - 2}{x - 4}$$

é negativa, de modo que quando x tende a 4 pela esquerda, $f(x)$ *diminui* sem limite. Indicamos este fato escrevendo

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x - 2}{x - 4} = -\infty$$

Analogamente, quando x tende a 4 pela direita (ou seja, com $x > 4$), $f(x)$ *aumenta* sem limite e escrevemos

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x - 2}{x - 4} = +\infty$$

O gráfico de f aparece na Figura 1.53.

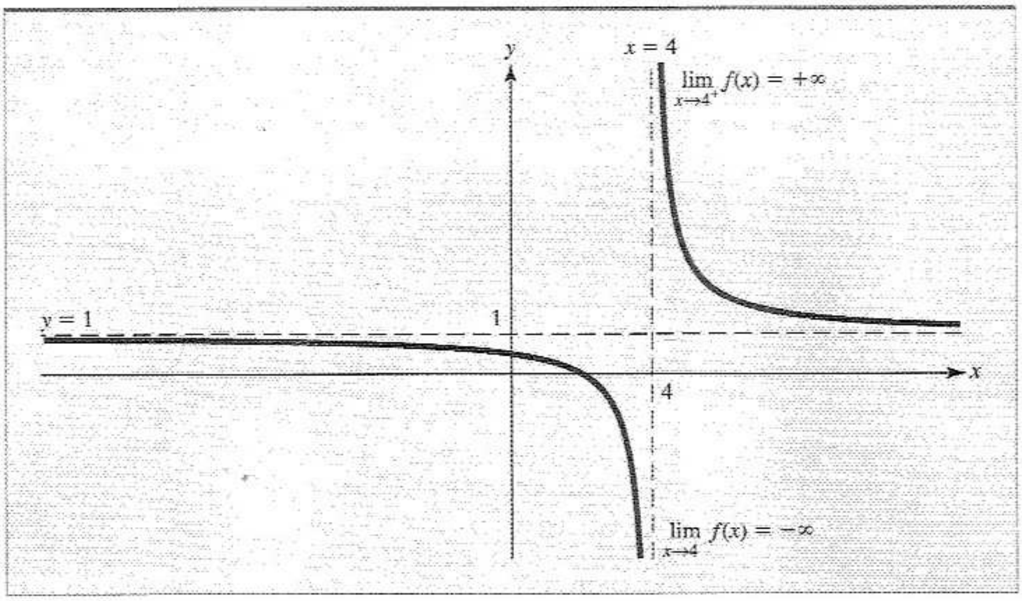


FIGURA 1.53 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x-2}{x-4}$.

Observe que o limite bilateral $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ *não* existe para a função do Exemplo 1.6.2, já que os valores de $f(x)$ não tendem para um único valor L quando x tende a 4 pelo lado esquerdo e pelo lado direito. O critério para a existência de um limite é o seguinte:

Existência de um Limite ■ O limite $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe se e apenas se os limites unilaterais $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ existirem e forem iguais, caso em que

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

32 EXPLORE!

Crie novamente a função linear por partes $f(x)$ definida no Explore! 27. Verifique graficamente que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$.

EXEMPLO 1.6.3

Determine se $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe, onde

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{para } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

Solução

Calculando os limites unilaterais em $x = 1$, encontramos

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = (1) + 1 = 2 \quad \textit{já que } f(x) = x + 1 \textit{ para } x < 1$$

e

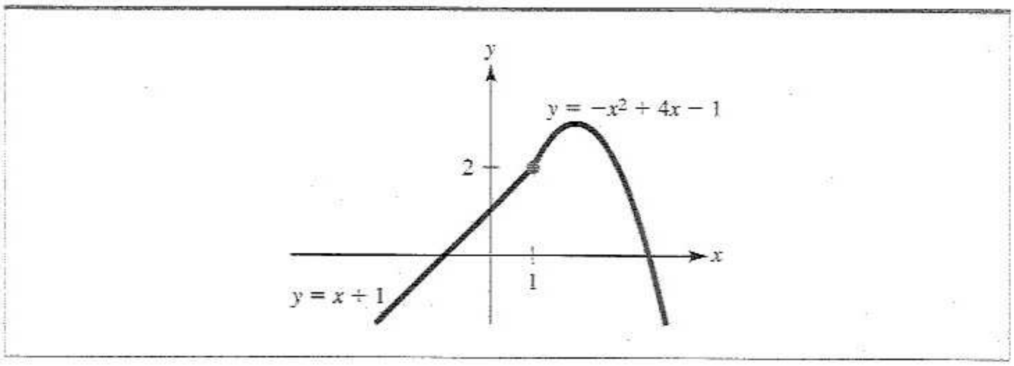
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2 + 4x - 1) \quad \textit{já que } f(x) = -x^2 + 4x - 1 \textit{ para } x \geq 1$$
$$= -(1)^2 + 4(1) - 1 = 2$$

Como os dois limites unilaterais são iguais, o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 existe e é dado por

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

O gráfico da função $f(x)$ aparece na Figura 1.54.

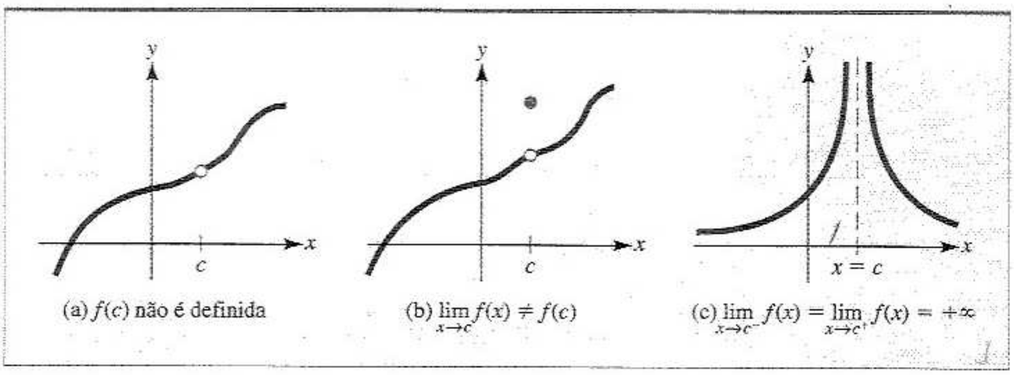
FIGURA 1.54 Gráfico de $f(x)= \begin{cases} x+1 & \text{se } x<1 \\ -x^2+4x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$.



Continuidade

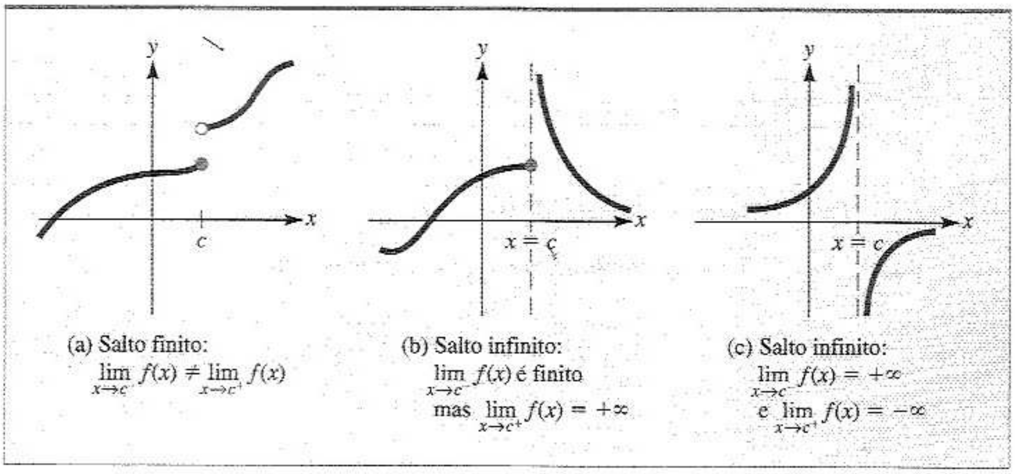
No início desta seção, observamos que uma função contínua é aquela cujo gráfico não possui "buracos ou saltos". Um "buraco" em um ponto $x = c$ pode surgir de várias formas, três das quais estão representadas na Figura 1.55.

FIGURA 1.55 Três formas pelas quais uma função pode possuir um "buraco" no ponto $x = c$.



O gráfico de $f(x)$ possui um "salto" no ponto $x = c$ se os limites unilaterais $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim_{x\to c^+} f(x)$ não são iguais. Três das formas pelas quais isto pode acontecer estão representadas na Figura 1.56.

FIGURA 1.56 Três formas pelas quais uma função pode possuir um "salto" no ponto $x = c$.



Quais são as propriedades que garantem que $f(x)$ não possui um "buraco" ou um "salto" no ponto $x = c$? A resposta é surpreendentemente simples: a função deve ser definida em $x = c$, deve ter um limite finito em $x = c$ e $\lim_{x\to c} f(x)$ deve ser igual a $f(c)$. Resumindo:

Continuidade ■ Uma função f é contínua no ponto c se três condições são satisfeitas:

a. $f(c)$ é definida

b. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe

c. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Se $f(x)$ não é contínua no ponto c, dizemos que o ponto c é um ponto de **descontinuidade.**

Continuidade de Polinômios e Funções Racionais

Como vimos na Seção 1.2, se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios,

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

e

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} \quad \text{se } q(c) \neq 0$$

De acordo com estas expressões, **um polinômio e uma função racional são contínuos em todos os pontos em que são definidos.** Esta afirmação é ilustrada nos Exemplos 1.6.4 a 1.6.7.

EXEMPLO 1.6.4

Mostre que o polinômio $p(x) = 3x^3 - x + 5$ é contínuo no ponto $x = 1$.

Solução

Temos que verificar se os três critérios de continuidade são satisfeitos. É evidente que $p(1)$ é definida, já que $p(1) = 7$. Além disso, $\lim_{x \to 1} p(x)$ existe e $\lim_{x \to 1} p(x) = 7$. Assim,

$$\lim_{x \to 1} p(x) = 7 = p(1)$$

como é necessário para que $p(x)$ seja contínua em $x = 1$.

33 EXPLORE!

Plote a função $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ usando a janela decimal expandida [−9,4; 9,4]1 por [−6,2; 6,2]1. A função é contínua? É contínua em $x = 2$? É contínua em $x = 3$? Examine também esta função usando uma tabela com um valor inicial de 1,8 para x e um incremento de 0,2.

EXEMPLO 1.6.5

Mostre que a função racional $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ é contínua em $x = 3$.

Solução

Observe que $f(3) = \dfrac{3+1}{3-2} = 4$. Como $\lim_{x \to 3} (x - 2) \neq 0$, temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-2} = \frac{\lim_{x \to 3} (x+1)}{\lim_{x \to 3} (x-2)} = \frac{4}{1} = 4 = f(3)$$

como é necessário para que $f(x)$ seja contínua em $x = 3$.

34 EXPLORE!

Entre com a função $h(x)$ do Exemplo 1.6.6(c) no editor de equações como Y1 = (X + 1)(X < 1) + (2 − X)(X ≥ 1). Use uma janela decimal e trace um gráfico de pontos. Esta função é contínua em $x = 1$? Use a tecla **TRACE** para obter o valor da função em $x = 1$ e para determinar os valores limites de y quando x tende a 1 pela esquerda e pela direita.

35 EXPLORE!

Plote a função $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ usando uma janela padrão. O gráfico parece contínuo? Use em seguida uma janela decimal modificada [−4,7; 4,7]1 por [0; 14,4]1 e descreva o que vê. Este caso é parecido com que caso do Exemplo 1.6.6?

EXEMPLO 1.6.6

Discuta a continuidade das seguintes funções:

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b.** $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ **c.** $h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x < 1 \\ 2 - x & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$

Solução

As funções dos itens (a) e (b) são racionais e, portanto, são contínuas em todos os pontos em que são definidas (ou seja, em todos os pontos nos quais o denominador não se anula).

a. $f(x) = 1/x$ é definida em todos os pontos exceto $x = 0$ e, assim, é contínua para qualquer valor de $x \neq 0$ (Figura 1.57a).

b. Como $x = -1$ é o único valor de x para o qual $g(x)$ não é definida, $g(x)$ é contínua para qualquer valor de $x \neq -1$ (Figura 1.57b).

c. Esta função é definida por partes. Começamos por verificar a continuidade em $x = 1$, o valor de x que é comum às duas partes. Verificamos que $\lim_{x \to 1} h(x)$ não existe, já que $h(x)$ tende a 2 pela esquerda e a 1 pela direita. Assim, $h(x)$ não é contínua em $x = 1$ (Figura 1.57c). Entretanto, como os polinômios $x + 1$ e $2 - x$ são contínuos para qualquer valor de x, $h(x)$ é contínua para qualquer valor de $x \neq 1$.

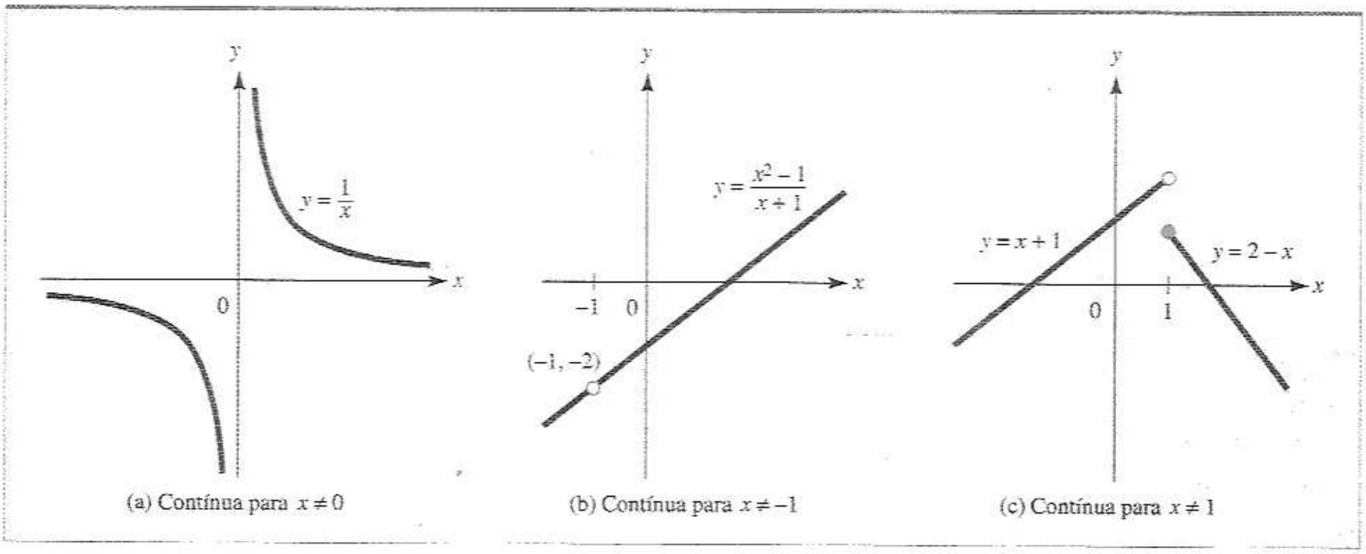


FIGURA 1.57 Funções do Exemplo 1.6.6.

EXEMPLO 1.6.7

Para que valor da constante A a função a seguir é contínua para qualquer valor real de x?

$$f(x) = \begin{cases} Ax + 5 & \text{para } x < 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$$

Solução

Como $Ax + 5$ e $x^2 - 3x + 4$ são polinômios, $f(x)$ é contínua para qualquer valor de x exceto, possivelmente, $x = 1$. Além disso, $f(x)$ tende a $A + 5$ quando x tende a 1 pela esquerda e tende a 2 quando x tende a 1 pela direita. Para que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ exista, devemos ter $A + 5 = 2$, ou seja, $A = -3$, caso em que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$$

Assim, f é contínua para qualquer valor de x se $A = -3$.

Continuidade em um Intervalo

Em muitas aplicações práticas do cálculo, é interessante usar uma definição de continuidade que se aplique a intervalos abertos e fechados.

Continuidade em um Intervalo ■ Uma função $f(x)$ é dita contínua em um intervalo aberto $a < x < b$ se for contínua para todos os valores de x contidos no intervalo.

Uma função $f(x)$ é dita contínua em um intervalo fechado $a \leq x \leq b$ se for contínua no intervalo aberto $a < x < b$ e se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Em outras palavras, a continuidade em um intervalo significa que o gráfico de f não apresenta saltos no intervalo.

EXEMPLO 1.6.8

Discuta a continuidade da função

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

no intervalo aberto $-2 < x < 3$ e no intervalo fechado $-2 \leq x \leq 3$.

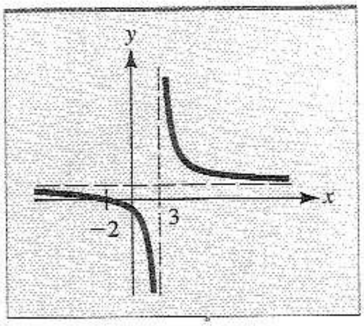


FIGURA 1.58 Gráfico de $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.

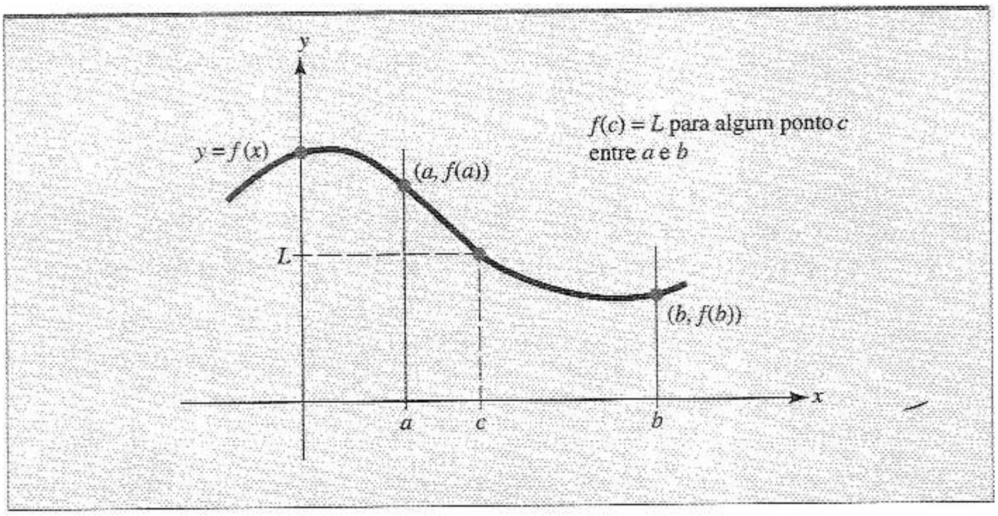
Solução

A função racional $f(x)$ é contínua para todos os valores de x exceto $x = 3$. Assim, a função é contínua no intervalo aberto $-2 < x < 3$, mas não no intervalo fechado $-2 \le x \le 3$, já que é descontínua no ponto $x = 3$ (no qual o denominador se anula). O gráfico de f aparece na Figura 1.58.

A Propriedade do Valor Intermediário

Uma propriedade importante das funções contínuas é a **propriedade do valor intermediário**, segundo a qual se $f(x)$ é contínua no intervalo $a \le x \le b$ e L é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, existe algum número c entre a e b para o qual $f(c) = L$ (veja Figura 1.59). Em outras palavras, *uma função contínua assume todos os valores possíveis entre dois quaisquer dos seus valores*. Assim, por exemplo, uma menina que pesa 3 kg ao nascer e 40 kg ao fazer 15 anos deve ter pesado exatamente 30 kg em algum instante da vida, já que o peso é uma função contínua do tempo.

FIGURA 1.59 Propriedade do valor intermediário.



A propriedade do valor intermediário tem muitas aplicações. No Exemplo 1.6.9, apresentado a seguir, mostramos que pode ser usada para estimar a solução de uma equação.

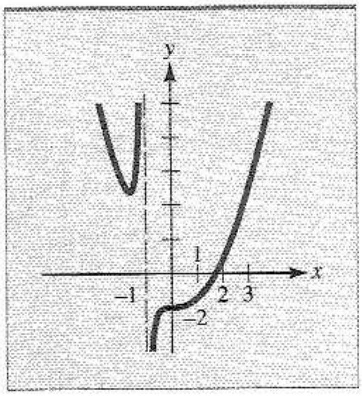


FIGURA 1.60 Gráfico de $y = x^2 - x - 1 - \frac{1}{x+1}$.

EXEMPLO 1.6.9

Mostre que a equação $x^2 - x - 1 = \frac{1}{x+1}$ tem uma solução para $1 < x < 2$.

Solução

Seja $f(x) = x^2 - x - 1 - \frac{1}{x+1}$. Nesse caso, $f(1) = -\frac{3}{2}$ e $f(2) = \frac{2}{3}$. Como $f(x)$ é contínua para $1 \le x \le 2$ e o gráfico de f está abaixo do eixo x no ponto $x = 1$ e acima do eixo x no ponto $x = 2$, segue-se que, de acordo com a propriedade do valor intermediário, o gráfico deve cruzar o eixo x em um ponto entre $x = 1$ e $x = 2$ (veja Figura 1.60). Em outras palavras, existe um número c tal que $1 < c < 2$ e $f(c) = 0$, ou seja, tal que

$$c^2 - c - 1 = \frac{1}{c+1}$$

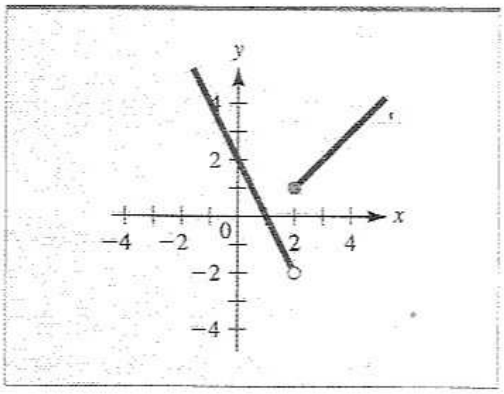
NOTA O método para localizar raízes apresentado no Exemplo 1.6.9 pode ser usado para estimar a raiz c com um grau arbitrário de precisão. Assim, por exemplo, como o ponto central do intervalo $1 \le x \le 2$ é $d = 1{,}5$ e $f(1{,}5) = -0{,}65$, a raiz c deve estar no intervalo $1{,}5 < x < 2$ (já que $f(2) > 0$) e assim por diante.

"Tudo bem" — deve estar pensando o leitor —, "mas minha calculadora é capaz de determinar o valor de c com uma precisão muito maior, com um simples apertar de botões". O leitor está certo, é claro, mas como acha que a calculadora determina o valor de c? Talvez não utilize exatamente o método que acabamos de descrever, mas certamente foi programada para executar uma rotina de aproximações sucessivas. Não é melhor saber o que uma calculadora está fazendo do que se limitar a apertar botões e esperar que os resultados apareçam como que por um passe de mágica? ■

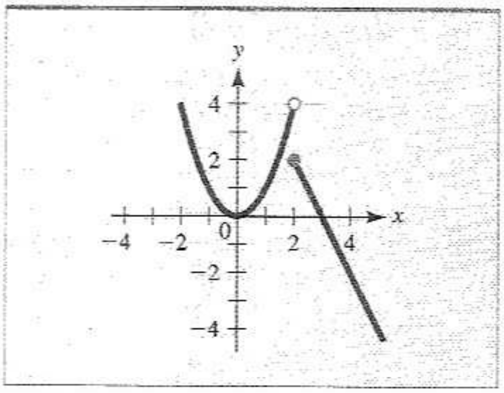
PROBLEMAS 1.6

Nos Problemas 1 a 4, determine os limites unilaterais $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ *da função dada e verifique se* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *existe.*

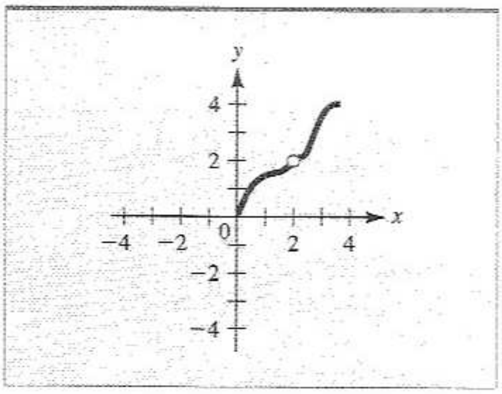
1.



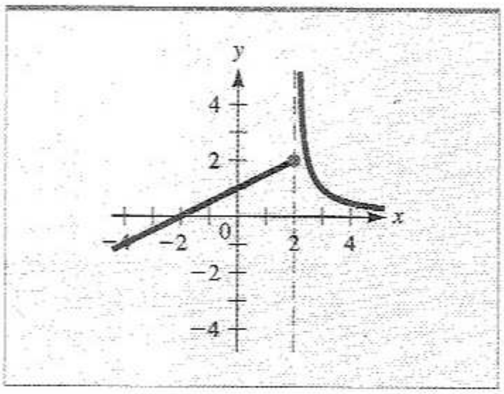
2.



3.



4.



Nos Problemas 5 a 14, determine o limite unilateral indicado. Se o valor limite for infinito, indique se é $+\infty$ *ou* $-\infty$.

5. $\lim_{x\to 4^+} (3x^2 - 9)$

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+2}$

7. $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{3x-9}$

8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x-2}$

9. $\lim_{x\to 0^+} (x - \sqrt{x})$

10. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$

11. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

12. $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

13. $\lim_{x\to 3} f(x)$ e $\lim_{x\to 3} f(x)$,

onde $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{para } x < 3 \\ 3 - x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$

14. $\lim_{x\to -1} f(x)$ e $\lim_{x\to -1^+} f(x)$,

onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{para } x < -1 \\ x^2 + 2x & \text{para } x \geq -1 \end{cases}$

Nos Problemas 15 a 26, verifique se a função dada é contínua para o valor especificado de x.

15. $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$ em $x = 2$

16. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ em $x = 0$

17. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ em $x = 1$

18. $f(x) = \dfrac{2x-4}{3x-2}$ em $x = 2$

19. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ em $x = 1$

20. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-6}$ em $x = 2$

21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ em $x = 4$

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ em $x = 2$

23. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x \leq 2 \\ 2 & \text{para } x > 2 \end{cases}$ em $x = 2$

24. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x < 0 \\ x - 1 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$ em $x = 0$

25. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{para } x \leq 3 \\ 2x + 4 & \text{para } x > 3 \end{cases}$ em $x = 3$

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{para } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{para } x \geq -1 \end{cases}$ em $x = -1$

Nos Problemas 27 a 40, determine todos os valores de x para os quais a função dada não é contínua.

27. $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

28. $f(x) = x^5 - x^3$

29. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

30. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2x - 6}$

31. $f(x) = \dfrac{3x + 3}{x + 1}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

33. $f(x) = \dfrac{3x - 2}{(x + 3)(x - 6)}$

34. $f(x) = \dfrac{x}{(x + 5)(x - 1)}$

35. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x - 2}$

37. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{para } x \leq 1 \\ 6x - 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x \leq 2 \\ 9 & \text{para } x > 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{para } x < 0 \\ x^2 + x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & \text{para } x \leq -1 \\ x^2 - x + 3 & \text{para } x > -1 \end{cases}$

41. METEOROLOGIA Suponha que a temperatura do ar seja 30°F. Nesse caso, a sensação térmica (em °F) para uma velocidade do vento v (em milhas por hora) é dada por*

$$W(v) = \begin{cases} 30 & \text{para } 0 \leq v \leq 4 \\ 1{,}25v - 18{,}67\sqrt{v} + 62{,}3 & \text{para } 4 < v < 45 \\ -7 & \text{para } v \geq 45 \end{cases}$$

a. Qual é a sensação térmica para $v = 20$ milhas por hora? E para $v = 50$ milhas por hora?

b. Que velocidade do vento produz uma sensação térmica de 0°F?

c. A função de sensação térmica $W(v)$ é contínua em $v = 4$? E em $v = 45$?

42. INTENSIDADE DO CAMPO ELÉTRICO Se uma esfera oca de raio R é carregada com uma unidade de eletricidade estática, a intensidade do campo elétrico $E(x)$ em um ponto P situado a uma distância de x unidades do centro da esfera é dada por

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < R \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{para } x = R \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{para } x > R \end{cases}$$

Faça um gráfico de $E(x)$. A função $E(x)$ é contínua para $x > 0$?

*Adaptado de William Bosch and L. G. Cobb, *UMAP Module No. 658*, "Windchill", 1984, pp. 244-247.

43. TARIFAS POSTAIS No correio dos Estados Unidos, a "função de porte" $p(x)$ pode ser descrita da seguinte forma:

$$p(x) = \begin{cases} 37 & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ 60 & \text{para } 1 < x \leq 2 \\ 83 & \text{para } 2 < x \leq 3 \\ \vdots & \\ 290 & \text{para } 11 < x \leq 12 \end{cases}$$

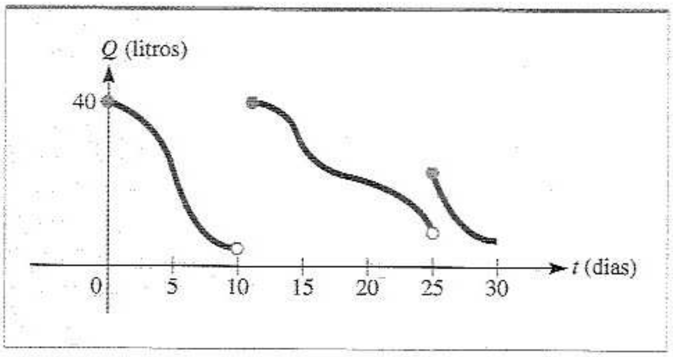
onde x é o peso de uma carta em onças e $p(x)$ é o preço correspondente do porte, em cents. Faça o gráfico de $p(x)$ para $0 < x \leq 6$. Para que valores de x a função $p(x)$ é descontínua no intervalo $0 < x \leq 6$?

44. POLUIÇÃO DO MAR Um cano rompido em uma plataforma petrolífera do Mar do Norte produz uma mancha de óleo circular que tem y metros de espessura a uma distância de x metros do local do vazamento. A turbulência torna difícil medir diretamente a espessura da mancha no local do vazamento ($x = 0$), mas para $x > 0$ observa-se que

$$y = \frac{0{,}5(x^2 + 3x)}{x^3 + x^2 + 4x}$$

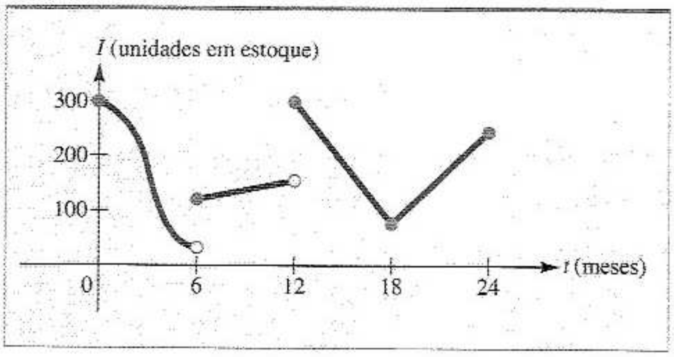
Supondo que a distribuição de óleo no mar seja contínua, qual é a espessura estimada no local do vazamento?

45. CONSUMO DE COMBUSTÍVEL O gráfico a seguir mostra o volume de gasolina no tanque do carro de Susana durante um período de 30 dias. Em que pontos o gráfico é descontínuo? O que acontece nessas ocasiões?



PROBLEMA 45

46. CONTROLE DE ESTOQUE O gráfico a seguir mostra o número de unidades em estoque de um certo produto durante um período de 2 anos. Em que pontos o gráfico é descontínuo? O que acontece nessas ocasiões?



PROBLEMA 46

47. ANÁLISE CUSTO-BENEFÍCIO Em certas situações, é necessário comparar os benefícios de uma certa medida com o custo necessário para executá-la. Suponha, por exemplo, que para remover $x\%$ da poluição causada por um derramamento de petróleo seja preciso gastar C milhares de reais, onde

$$C(x) = \frac{12x}{100 - x}$$

a. Quanto custa remover 25% da poluição? E 50%?
b. Plote a função de custo.
c. O que acontece quando $x \to 100^-$? É possível remover toda a poluição?

48. SALÁRIOS Em 1º de janeiro de 2005, Jorge começou a trabalhar para uma empresa com um salário mensal de R$ 4.000,00, pago no último dia do mês. Em 1º de julho, recebeu uma comissão de R$ 2.000,00; em 1º de setembro, seu salário-base foi aumentado para R$ 4.500,00. Finalmente, em 21 de dezembro, recebeu uma bonificação de Natal igual a 1% do salário-base.
a. Faça um gráfico dos pagamentos recebidos por Jorge, P, em função do tempo t (em dias) durante o ano de 2005.
b. Para que valores de t o gráfico de $P(t)$ é descontínuo?

49. GERENCIAMENTO DE CUSTOS O gerente de uma empresa determina que, quando $x\%$ da capacidade das fábricas está sendo usada, o custo total de operação é C centenas de milhares de reais, onde

$$C(x) = \frac{8x^2 - 636x - 320}{x^2 - 68x - 960}$$

a. Calcule $C(0)$ e $C(100)$.
b. Explique por que o resultado do item (a) não pode ser usado, juntamente com a propriedade do valor intermediário, para mostrar que o custo de operação é exatamente R$ 700.000,00 quando uma certa porcentagem da capacidade das fábricas está sendo usada.

50. POLUIÇÃO DO AR Estima-se que daqui a t anos a população de um certo bairro será p mil habitantes, onde

$$p(t) = 20 - \frac{7}{t + 2}$$

Um estudo ambiental mostra que a concentração média de monóxido de carbono no ar será c partes por milhão quando a população for p mil habitantes, onde

$$c(p) = 0{,}4\sqrt{p^2 + p + 21}$$

Qual será o nível de poluição c a longo prazo (para $t \to \infty$)?

Nos Problemas 51 e 52, determine os valores da constante A para que a função f(x) seja contínua para qualquer valor de x.

51. $f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{para } x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{para } x < 4 \\ Ax^2 + 2x - 3 & \text{para } x \geq 4 \end{cases}$

53. Discuta a continuidade da função $f(x) = x(1 + 1/x)$ no intervalo aberto $0 < x < 1$ e no intervalo fechado $0 \leq x \leq 1$.

54. Discuta a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{para } x < 2 \\ 4 + 2x & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$$

no intervalo aberto $0 < x < 2$ e no intervalo fechado $0 \leq x \leq 2$.

55. Mostre que a equação $\sqrt[3]{x - 8} + 9x^{2/3} = 29$ tem pelo menos uma solução no intervalo $0 \leq x \leq 8$.

56. Mostre que a equação $\sqrt[3]{x} = x^2 + 2x - 1$ tem pelo menos uma solução no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

57. Investigue o comportamento de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$ quando x está próximo (a) de 2 e (b) de -2. Existe o limite para estes valores de x? A função é contínua para estes valores de x?

58. Explique por que houve certamente um momento na vida do leitor em que sua altura em centímetros foi igual à sua idade em dias.

59. Explique por que existe um momento em cada hora no qual o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos estão alinhados.

60. Aos 15 anos, Maria tinha o dobro da altura do irmão João, de 5 anos, mas quando João faz 21 anos, está 15 centímetros mais alto que a irmã. Explique por que certamente existiu um momento em que os dois irmãos tinham exatamente a mesma altura.

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

Função
Notação funcional: $f(x)$
Domínio e contradomínio de uma função
Determinação do domínio
Variável dependente e independente
Funções usadas em economia:
- Demanda
- Oferta
- Custo
- Receita
- Lucro

Composição de funções: $g(h(x))$
Gráfico de uma função: os pontos $(x, f(x))$
Interseção com o eixo x e com o eixo y
Funções definidas por partes
Função potência
Polinômio
Função racional
Teste da reta vertical
Função linear; taxa de variação constante
Inclinação: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Forma inclinação-interseção: $y = mx + b$
Forma ponto-inclinação: $y - y_0 = m(x - x_0)$
Critérios para que duas retas sejam paralelas ou perpendiculares
Modelagem matemática
Proporcionalidade direta: $Q = kx$
Proporcionalidade inversa: $Q = \dfrac{k}{x}$
Proporcionalidade ao produto xy : $Q = kxy$
Equilíbrio do mercado; lei da oferta e da demanda
Escassez e excesso
Análise de equilíbrio
Limite de uma função: $\lim\limits_{x\to c} f(x)$
Limites no infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Regras das potências inversas:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \quad k > 0$$

Limites no infinito de uma função racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$:
Divida todos os termos de $f(x)$ pela maior potência de x do denominador $q(x)$ e use as regras das potências inversas.
Assíntota horizontal
Limite infinito: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$
Limites unilaterais:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Existência de um limite: $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe se e apenas se $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ existem e são iguais.
Continuidade de $f(x)$ em $x = c$:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Continuidade em um intervalo
Descontinuidade
Continuidade de polinômios e funções racionais
Propriedade do valor intermediário

Verificação do Capítulo 1

1. Especifique o domínio da função

$$f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

2. Determine a função composta $g(h(x))$, onde

$$g(u) = \frac{1}{2u + 1} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{x + 2}{2x + 1}$$

3. Escreva a equação das seguintes retas:

a. Passando pelo ponto $(-1, 2)$ com inclinação $-\dfrac{1}{2}$

b. Com inclinação 2 e interceptando o eixo y no ponto -3

4. Plote as funções dadas, indicando os pontos de interseção com os eixos e os máximo e mínimos, se existirem.

a. $f(x) = 3x - 5$

b. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

5. Determine os limites indicados. Se o limite for infinito, indique se é $+\infty$ ou $-\infty$.

a. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

b. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 + 3x - 5}{-x^2 + 2x + 7}$

6. Determine se a função $f(x)$ é contínua no ponto $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{para } x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

7. PREÇO DA GASOLINA Desde o início do ano, o preço da gasolina comum vem aumentando a uma taxa constante de 2 centavos por litro por mês. Em 1º de junho, o preço chegou a R$ 1,80 o litro.

a. Expresse o preço da gasolina comum em função do tempo e plote o gráfico associado.
b. Qual era o preço no início do ano?
c. Qual será o preço no dia 1º de outubro?

8. OFERTA E DEMANDA Sabe-se que os produtores fornecerão ao mercado x unidades de um certo produto se o preço unitário for $p = S(x)$ e que o mesmo número de unidades será demandado (comprado) pelos consumidores quando o preço unitário for $p = D(x)$ reais, onde

$$S(x) = x^2 + A \quad \text{e} \quad D(x) = Bx + 59$$

em que A e B são constantes. Também se sabe que não será oferecida nenhuma unidade até que o preço unitário seja pelo menos R$ 3,00 e que o equilíbrio do mercado é atingido para $x = 7$ unidades.
a. Use estas informações para determinar os valores de A e B e do preço de equilíbrio.
b. Plote no mesmo gráfico as curvas de oferta e demanda.
c. Qual é a diferença entre o preço de oferta e o preço de demanda quando são produzidas 5 unidades? Qual é a diferença quando são produzidas 10 unidades?

9. COLÔNIA DE BACTÉRIAS A população (em milhares) de uma colônia de bactérias t minutos após a introdução de uma toxina é dada pela função

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & \text{para } 0 \le t < 5 \\ -8t + 72 & \text{para } t \ge 5 \end{cases}$$

a. Em que instante a colônia deixa de existir?
b. Explique por que a população deve ser 10.000 em algum instante no intervalo $1 < t < 7$.

10. MUTAÇÕES Em um estudo de mutações em drosófilas, pesquisadores irradiam as moscas com raios X e observam que a porcentagem M de mutações aumenta linearmente com a dose D de raios X, medida em quilorroentgens (kR). Quando uma dose $D = 3$ kR é usada, a porcentagem de mutações é 7,7%, enquanto uma dose de 5 kR resulta em uma porcentagem de mutações de 12,7%. Expresse M em função de D. Qual é a porcentagem de mutações quando as moscas não são submetidas a raios X?

Problemas de Revisão

1. Especifique os domínios das seguintes funções:
a. $f(x) = x^2 - 2x + 6$
b. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + x - 2}$
c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

2. O valor de mercado de qualquer modelo de calculadora tende a diminuir com o tempo por causa do lançamento de modelos mais modernos. Suponha que daqui a x meses o preço de um certo modelo seja dado por $P(x) = 40 + 30/(x + 1)$ reais.
a. Qual será o preço daqui a 5 meses?
b. Qual será a queda no preço durante o quinto mês?
c. Daqui a quanto tempo a calculadora custará R$ 43,00?
d. O que acontece com o preço "a longo prazo" (ou seja, para grandes valores de x)?

3. Determine a função composta $g(h(x))$.
a. $g(u) = u^2 + 2u + 1,\ h(x) = 1 - x$
b. $g(u) = \dfrac{1}{2u + 1},\ h(x) = x + 2$
c. $g(u) = \sqrt{1 - u},\ h(x) = 2x + 4$

4. a. Determine $f(x - 2)$ se $f(x) = x^2 - x + 4$.
b. Determine $f(x^2 + 1)$ se $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{x - 1}$.
c. Determine $f(x + 1) - f(x)$ se $f(x) = x^2$.

5. Determine funções $h(x)$ e $g(u)$ tais que $f(x) = g(h(x))$.
a. $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^5$
b. $f(x) = (3x + 1)^2 + \dfrac{5}{2(3x + 2)^3}$

6. ANÁLISE AMBIENTAL Um estudo ambiental realizado em um certo município revela que a concentração média de poluentes no ar será $Q(p) = \sqrt{0{,}5p + 19{,}4}$ unidades quando o município tiver p mil habitantes. Calcula-se que daqui a t anos a população será $p(t) = 8 + 0{,}2t^2$ mil habitantes.
a. Expresse a concentração de poluentes no ar em função do tempo.
b. Qual será a concentração de poluentes daqui a 3 anos?
c. Daqui a quanto tempo a concentração de poluentes atingirá o valor de 5 unidades?

7. Determine o valor de c para o qual a curva $y = 3x^2 - 2x + c$ passa pelo ponto $(2, 4)$.

8. Plote as seguintes funções:
a. $f(x) = x^2 + 2x - 8$
b. $f(x) = 3 + 4x - 2x^2$

9. Determine a inclinação e o ponto de interseção com o eixo y da reta data e plote o gráfico.
a. $y = 3x + 2$
b. $5x - 4y = 20$
c. $2y + 3x = 0$
d. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 4$

10. Escreva equações para as seguintes linhas retas:
a. A inclinação é 5 e intercepta o eixo y no ponto $(0, -4)$
b. A inclinação é -2 e passa pelo ponto $(1, 3)$
c. Intercepta o eixo x no ponto $(3, 0)$ e o eixo y no ponto $\left(0, -\dfrac{2}{3}\right)$
d. Passa pelo ponto $(5, 4)$ e é paralela à reta $2x + y = 3$
e. Passa pelo ponto $(-1, 3)$ e é perpendicular à reta $5x - 3y = 7$

11. FINANCIAMENTO DE UM ORFANATO Um orfanato lançou uma campanha para levantar fundos. Os orga-

RESUMO DO CAPÍTULO

nizadores calculam que serão necessárias $f(x) = \dfrac{10x}{150 - x}$ semanas para atingir $x\%$ da meta da campanha.

a. Plote a parte relevante do gráfico desta função.

b. Quanto tempo será necessário para atingir 50% da meta da campanha?

c. Quanto tempo será necessário para atingir 100% da meta?

12. **DESPESA DO CONSUMIDOR** A demanda de um certo produto é dada por $D(p) = -50p + 800$ unidades por mês quando o preço é de p reais por unidade. A despesa do consumidor $E(x)$ é a quantia que os consumidores pagam para comprar x unidades do produto.

a. Expresse a despesa do consumidor em função de x e faça o gráfico de $E(x)$.

b. Use o gráfico do item (a) para determinar o nível de produção x para o qual a despesa do consumidor é máxima. Que preço p corresponde à despesa máxima do consumidor?

13. **MICROBIOLOGIA** Uma célula esférica de raio r tem um volume $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ e uma superfície $S = 4\pi r^2$. Expresse V em função de S. Se S é multiplicada por dois, o que acontece com V?

14. **CIRCULAÇÃO DE UM JORNAL** A circulação de um jornal está aumentando com uma taxa constante. Há três meses, a circulação era de 3.200 exemplares; atualmente, é de 4.400.

a. Expresse a circulação em função do tempo e desenhe o gráfico.

b. Qual será a circulação daqui a 2 meses?

15. Determine os pontos de interseção (se existirem) entre os pares de curvas a seguir e desenhe os gráficos associados.

a. $y = -3x + 5$ e $y = 2x - 10$

b. $y = x + 7$ e $y = -2 + x$

c. $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$

d. $y = x^2$ e $y = 15 - 2x$

16. **PREÇO ÓTIMO DE VENDA** Uma fábrica pode produzir estantes a um custo de R\$ 80,00 a unidade. Os analistas da empresa estimam que se as estantes forem vendidas por x reais a unidade, aproximadamente $150 - x$ unidades serão vendidas por mês. Expresse o lucro mensal do fabricante em função do preço de venda, x, desenhe o gráfico associado e estime o preço ótimo de venda.

17. **PREÇO ÓTIMO DE VENDA** Um revendedor compra um certo modelo de câmara na fábrica a R\$ 150,00 a unidade. As câmaras vêm sendo vendidas a R\$ 340,00; por este preço, são vendidas em média 40 câmaras por mês. O revendedor pretende reduzir o preço para aumentar as vendas e calcula que, para cada R\$ 5,00 de redução no preço, 10 câmaras a mais serão vendidas por mês. Expresse o lucro mensal do revendedor em função do preço de venda das câmaras. Desenhe o gráfico associado e estime o preço ótimo de venda.

18. **PROJETO DE EMBALAGENS** Uma lata cilíndrica, sem tampa, é construída por 80 centavos. O custo do material usado para fazer o fundo é 3 centavos por centímetro quadrado e o custo do material para fazer o lado é 2 centavos por centímetro quadrado. Expresse o volume da lata em função do raio.

19. **EFICIÊNCIA DE PRODUÇÃO** Uma empresa recebeu uma encomenda para fabricar 400.000 medalhas comemorativas do 35º aniversário do pouso da Apolo 11 na Lua. A firma possui várias máquinas, cada uma das quais é capaz de produzir 200 medalhas por hora. O custo de programar as máquinas para cunhar as medalhas é R\$ 80,00 por máquina e o custo total de operação é R\$ 5,76 por hora. Expresse o custo para produzir as 400.000 medalhas em função do número de máquinas utilizadas. Desenhe o gráfico associado e estime o número de máquinas que a empresa deve usar para minimizar o custo.

20. **ANÁLISE DE ESTOQUE** Um empresário manteve um estoque durante um período de 30 dias da seguinte forma:

do 1º ao 9º dia:	30 unidades
do 10º ao 15º dia:	17 unidades
do 16º ao 23º dia:	12 unidades
do 24º ao 30º dia:	redução de 12 unidades a 0 unidades a uma taxa constante

Faça um gráfico da função $E(t)$ que representa o estoque E em função do tempo t (em dias). Para que valores de t a função $E(t)$ é descontínua?

21. **ANÁLISE DE EQUILÍBRIO** Um fabricante pode vender um certo produto por R\$ 80,00 a unidade. O custo total é composto por um custo fixo de R\$ 4.500,00 e um custo de produção de R\$ 50,00 a unidade.

a. Quantas unidades o fabricante precisa vender para não ter prejuízo?

b. Qual é o lucro ou prejuízo do fabricante se vender 200 unidades?

c. Quantas unidades o fabricante precisa vender para ter um lucro de R\$ 900,00?

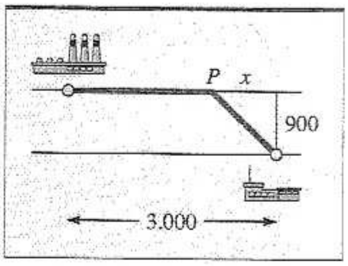
22. **GERENCIAMENTO DA PRODUÇÃO** No verão, um grupo de estudantes fabrica caiaques em uma garagem adaptada. O aluguel da garagem é R\$ 1.500,00 para todo o verão e os materiais necessários para construir um caiaque custam R\$ 125,00. Os caiaques podem ser vendidos por R\$ 275,00 cada um.

a. Quantos caiaques os estudantes precisam vender para não ter prejuízo?

b. Quantos caiaques os estudantes precisam vender para ter um lucro de R\$ 1.000,00?

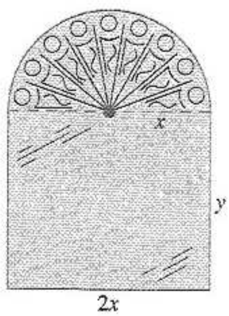
23. **APRENDIZADO** Alguns psicólogos acreditam que, quando se pede a uma pessoa para se lembrar de uma série de fatos, o número de fatos lembrados por unidade de tempo é proporcional ao número de fatos relevantes na memória do paciente que ainda não foram lembrados. Expresse o número de fatos lembrados por unidade de tempo em função do número de fatos que já foram lembrados.

24. **CÁLCULO DE CUSTOS** Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio com 900 metros de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000 metros rio abaixo. O cabo deve ir em linha reta da usina até um ponto P na margem oposta do rio e, em seguida, acompanhar a margem do rio até a fábrica. O custo de estender um cabo no rio é R\$ 5,00 o metro e o custo de estender um cabo em terra é R\$ 4,00 o metro. Seja x a distância entre o ponto P e um ponto localizado em frente à usina de força, na margem oposta do rio. Expresse o custo de instalação do cabo em função de x.



PROBLEMA 24

25. CUSTO DE CONSTRUÇÃO Uma janela com um perímetro (moldura) de 6 m é formada por um semicírculo de vidro colorido acima de um retângulo de vidro claro, como mostra a figura. O vidro claro custa R$ 16,00 o metro quadrado e o vidro colorido custa R$ 48,00 o metro quadrado. Expresse o custo da janela em função do raio do painel de vidro colorido.



PROBLEMA 25

26. CUSTO FIXO DE FABRICAÇÃO Um fabricante de móveis pode vender mesas de canto por R$ 70,00 cada uma. O custo de fabricação de uma mesa é R$ 30,00 e o fabricante estima que a receita será igual ao custo se 200 mesas forem vendidas. Qual é o custo fixo associado à fabricação das mesas? [*Nota:* Custo fixo é o custo quando 0 unidades são fabricadas.]

27. CUSTO DE FABRICAÇÃO Um fabricante é capaz de produzir no máximo 5.000 unidades por dia, por um custo fixo de R$ 1.500,00 por dia e um custo variável de R$ 2,00 por unidade produzida. Expresse o custo diário C em função do número de unidades produzidas e faça o gráfico de $C(x)$. A função $C(x)$ é contínua? Se a resposta for negativa, quais são os pontos de descontinuidade?

28. Em que instante, entre as 15 e as 16 horas, o ponteiro dos minutos coincide com o ponteiro das horas? [*Sugestão:* A velocidade do ponteiro dos minutos é 12 vezes maior que a do ponteiro das horas.]

29. PAGAMENTO DE IMPOSTOS O proprietário de uma casa pode pagar o imposto predial de duas formas. No Plano A, pagará R$ 100,00 mais 8% do valor do imóvel; no Plano B, terá que pagar R$ 1.900,00 mais 2% do valor do imóvel. Supondo que o único objetivo do proprietário seja pagar o mínimo possível de imposto, estabeleça um critério, baseado no valor V do imóvel, para escolher o plano de pagamento.

Nos Problemas 30 a 43, determine o limite pedido ou informe que o limite não existe. Se o limite for infinito, indique se é $+\infty$ ou $-\infty$.

30. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$

31. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

32. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$

33. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{2 - x}$

34. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2 - \dfrac{1}{x^3}\right)$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

37. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 5}$

38. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 5}{2x + 3}$

39. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x + 7}{x^3 + x + 1}$ $= -\infty$

40. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x(x - 3)}{7 - x^2}$

41. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{x^2 + 3x - 1}$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}$

43. $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$

Nos Problemas 44 a 47, determine todos os valores de x para os quais a função dada não *é contínua.*

44. $f(x) = 5x^3 - 3x + \sqrt{x}$

45. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$

46. $g(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{(x - 2)(2x + 3)}$

47. $h(x) = \begin{cases} x^3 + 2x - 33 & \text{para } x \le 3 \\ \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} & \text{para } x > 3 \end{cases}$

48. Determine o valor da constante A que torna a função dada $f(x)$ contínua para qualquer valor de x.

a. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{para } x < 1 \\ Ax - 1 & \text{para } x \geq 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{para } x < -1 \\ Ax^2 + x - 3 & \text{para } x \geq -1 \end{cases}$

49. O raio da Terra é aproximadamente 6.400 quilômetros; um corpo situado a x quilômetros do centro da Terra pesa $w(x)$ kg, onde

$$w(x) = \begin{cases} Ax & \text{para } x \leq 4.000 \\ \dfrac{B}{x^2} & \text{para } x > 4.000 \end{cases}$$

e A e B são constantes positivas. Qual deve ser a relação entre A e B para que $w(x)$ seja contínua para qualquer valor de x? Faça um esboço do gráfico de $w(x)$.

50. Plote $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2}$. Determine os valores de x para os quais a função não é definida.

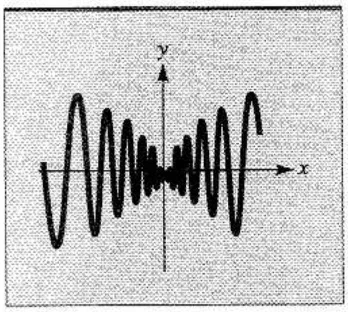
51. Plote $y = \dfrac{21}{9}x - \dfrac{84}{35}$ e $y = \dfrac{654}{279}x - \dfrac{54}{10}$ no mesmo gráfico, usando uma janela $[-10, 10]1$ por $[-10, 10]1$. As duas retas são paralelas?

52. Para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ e $g(x) = 5x^2 + 4$, determine (a) $f(g(-1{,}28))$ e (b) $g(f(\sqrt{2}))$. Calcule o resultado com três casas decimais.

53. Plote $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{para } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$. Determine os pontos de descontinuidade.

54. Plote a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{1 - x} - 2$. Determine as interseções com o eixo x e com o eixo y. Para que valores de x esta função é definida?

55. O gráfico a seguir mostra uma função $g(x)$ que oscila com freqüência cada vez maior à medida que x se aproxima de 0, tanto do lado esquerdo como do lado direito, mas com amplitude cada vez menor. Existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$? Se existir, quanto vale? [*Nota:* A função $g(x) = |x| \operatorname{sen}(1/x)$ se comporta desta forma.]



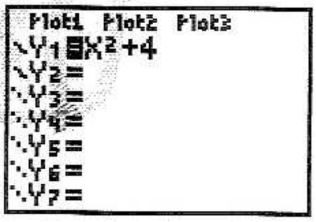
PROBLEMA 55

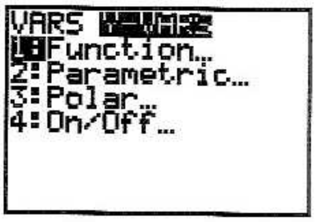
ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

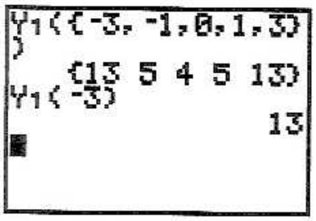
Atualizações do Explore! aparecem no final de cada capítulo deste livro. Estas Atualizações oferecem instruções e exercícios adicionais envolvendo o uso de calculadoras gráficas ou soluções de alguns problemas do Explore! apresentados no capítulo. Procuramos usar teclas de função que estão disponíveis na maioria das calculadoras gráficas de bolso. O nome exato da tecla pode variar de acordo com a marca da calculadora; em caso de dúvida, consulte o manual do fabricante.

Solução do Exercício
EXPLORE! 1

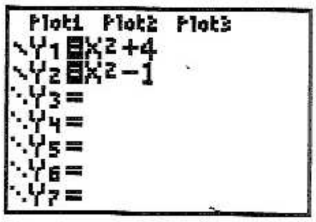
Entre com $f(x) = x^2 + 4$ no editor de funções (tecla **Y=**). Em uma tela limpa (**2nd MODE CLEAR**), localize o símbolo Y1 através da tecla **VARS**, movendo o cursor para a direita até **Y-VARS** e selecionando **1:Function** e **1:Y1**. (Veja também Introdução às Calculadoras, no início do livro.) Y1({−3, −1, 0, 1, 3}) fornece os valores desejados da função, todos de uma vez. Também é possível entrar com os valores um de cada vez, como Y1(−3).

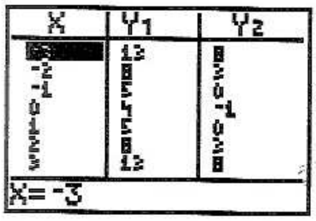






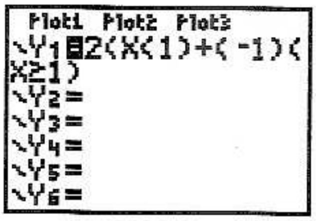
NOTA Uma dica do Explore! é que é mais fácil visualizar uma tabela de valores, especialmente no caso de várias funções. Neste caso, é necessário primeiro definir os parâmetros da tabela através do menu **TBLSET (2nd WINDOW)**. Em seguida, entre com $g(x) = x^2 - 1$ em **Y2** do editor de equações (**Y=**). Observando os valores de Y1 e Y2, notamos que diferem de um valor constante, −5, já que as duas funções são simplesmente translações verticais de $f(x) = x^2$.

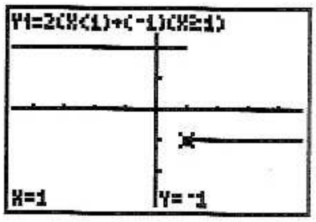


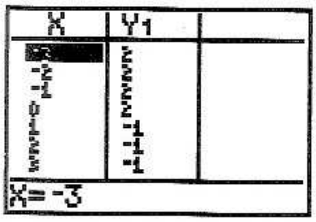


Solução do Exercício
EXPLORE! 3

O gráfico da função definida por partes Y1 = 2(X < 1) + (−1)(X ≥ 1) aparece na figura a seguir; a tabela à direita mostra os valores da função para −3, −2, −1, 0, 1, 2 e 3. Lembre-se de que para entrar com os símbolos de desigualdade é preciso usar a tecla **TEST (2nd MATH)**.

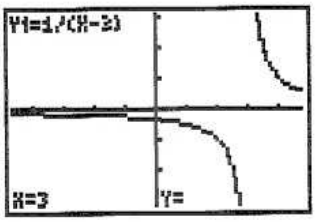


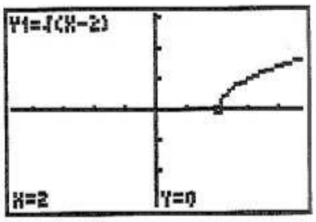


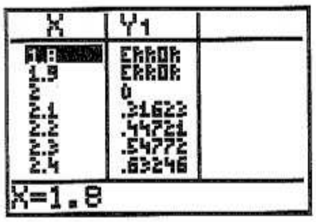


Solução do Exercício
EXPLORE! 4

A função $f(x) = 1/(x - 3)$ não é definida no ponto $x = 3$. O domínio é o conjunto de números reais diferentes de 3. A função $g(x) = \sqrt{(x - 2)}$ não é definida para $x < 2$, como se pode ver no gráfico a seguir (figura do centro) e na tabela da direita.

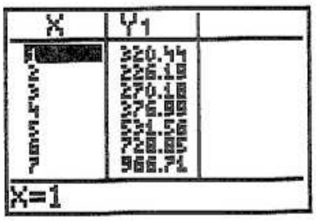


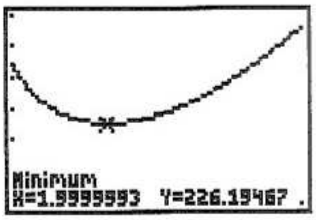


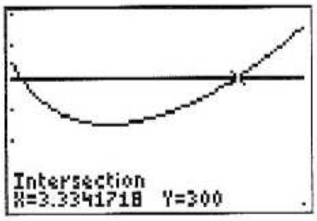


Solução do Exercício EXPLORE! 20

Use **TBLSET** com **TblStart = 1** e **ΔTbl = 1** para obter a tabela a seguir (figura da esquerda), que indica um custo mínimo de algumas centenas de centavos, que ocorre no intervalo [1, 4]. Em seguida, plote o gráfico usando uma **JANELA** com dimensões de [1, 4]1 por [100, 400]50 para obter a figura do centro, onde usamos a opção para localizar mínimos em **CALC** (veja Introdução às Calculadoras, no início do livro) para localizar um mínimo aparente de cerca de 226 centavos para um raio de 2 centímetros. Assim, nenhum raio pode resultar em um custo de R$ 2,00, que é menor que o custo mínimo. Plotando Y2 = 300 e usando o comando para determinar interseções, constatamos que o custo é R$ 3,00 quando o raio é 1,09 cm ou 3,33 cm.

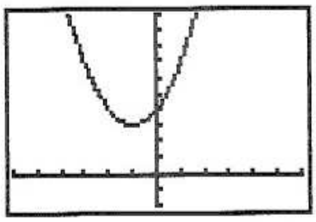


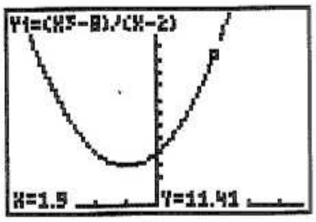


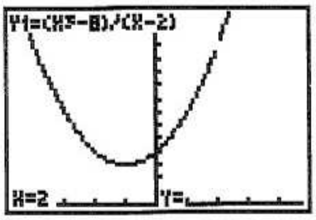


Solução do Exercício EXPLORE! 35

O gráfico de $f(x) = (x^3 - 8)/(x - 2)$ parece contínuo em uma janela $[-6, 6]1$ por $[-2, 10]1$ (figura da direita). Entretanto, examinando o gráfico em uma janela decimal modificada, $[-4{,}7; 4{,}7]1$ por $[0; 14{,}4]1$ (figura do centro), vemos que existe um buraco em $x = 2$.







A função $f(x)$ não é contínua, pois não é definida no ponto $x = 2$. A situação é semelhante à da Figura 1.57(b). Que valor de y eliminaria o buraco do gráfico? Resposta: $\lim_{x \to 2} f(x) = 12$.

PARA PENSAR

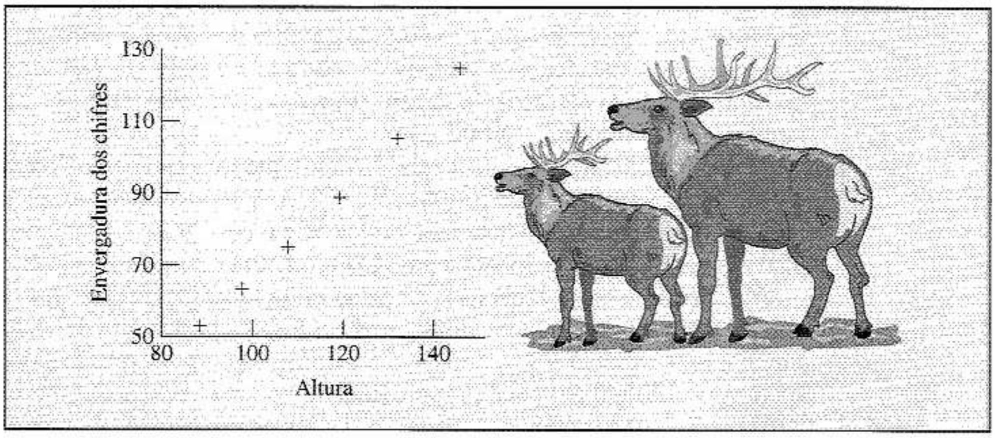
MODELOS ALOMÉTRICOS

Quando criamos um modelo matemático, o primeiro passo é identificar as grandezas de interesse; o segundo é encontrar equações que expressem relações entre estas grandezas. Estas equações podem ser complexas, mas existem muitas relações importantes que podem ser expressas na forma relativamente simples $y = Cx^k$, em que uma grandeza y é expressa como um múltiplo de uma potência de uma outra grandeza x.

Na biologia, o estudo das taxas de crescimento relativas de diferentes partes de um organismo é chamada de ***alometria***, nome que vem das palavras gregas *alo* (outro ou diferente) e *metria* (medida). Nos modelos alométricos, equações da forma $y = Cx^k$ são freqüentemente usadas para descrever a relação entre duas medidas biológicas. Assim, por exemplo, a envergadura a dos chifres de um alce está relacionada a h, a altura do alce, através da equação alométrica

$$a = 0{,}026h^{1,7}$$

onde a e h estão em centímetros (cm).* Esta relação é mostrada ma figura a seguir.



Sempre que possível, os modelos alométricos são formulados usando hipóteses básicas de princípios biológicos (ou de outro campo). Assim, por exemplo, é razoável supor que o volume corporal e, portanto, o peso da maioria dos animais é proporcional ao cubo da dimensão linear do corpo, como a altura ou comprimento dos animais. Assim, é razoável esperar que o peso da uma cobra seja proporcional ao cubo do comprimento e, na verdade, observações de uma cobra do Kansas indicam que o peso w (em gramas) e o comprimento L (em metros) desta espécie de cobra estão relacionados pela equação**

$$w = 440L^3$$

Às vezes, os dados observados podem ser muito diferentes dos resultados previstos por um modelo. Nesse caso, procuramos um modelo melhor. No caso da cobra do Kansas, as equações $w = 446L^{2,99}$ e $w = 429L^{2,90}$ constituem aproximações melhores para os machos e as fêmeas, respectivamente. Entretanto, não existe uma razão biológica para usarmos um expoente diferente de 3.

O *metabolismo basal M* de um animal é a taxa de produção de calor por parte do animal quando está em repouso e em jejum. O metabolismo basal vem sendo estudado desde a década de 1830. Equações alométricas da forma $M = cw^r$, onde c e r são constantes, são usadas para formular modelos que relacionam o metabolismo basal ao peso corporal w de um animal. A formulação destes modelos se baseia na hipótese de que o metabolismo basal M é proporcional a S, a área da superfície do corpo, de modo que $M = aS$, onde a é uma constante. Para escrever uma equação que relacione M e w, precisamos rela-

*Frederick R. Adler, *Modeling the Dynamics of Life*, Pacific Grove, CA: Brooks-Cole Publishing, 1998, p. 61.

**Edward Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, p. 178.

cionar o peso w de um animal à área superficial S. Supondo que o animal tenha a forma aproximada de uma esfera ou de um cubo e que o peso de um animal é proporcional ao volume, é possível mostrar (veja os Exercícios 5 e 6) que a área superficial é proporcional a $w^{2/3}$ e, portanto, $S = bw^{2/3}$, onde b é uma constante. Combinando as equações $M = aS$ e $S = bw^{2/3}$, obtemos a equação alométrica

$$M = abw^{2/3} = kw^{2/3}$$

onde $k = ab$.

Entretanto, este não é o final da história. Adotando hipóteses mais realistas, chega-se à conclusão de que o expoente da equação alométrica deve ser 3/4 e não 2/3. As observações sugerem também que a constante da equação deve ser igual a 70 (veja M. Kleiber, *The Fire of Life, An Introduction to Animal Energetics*, Wiley, 1961). Isto nos dá a equação

$$M = 70w^{3/4}$$

onde M está em quilocalorias por dia e w em quilogramas.

Exercícios

1. Qual é o peso previsto pela equação alométrica $w = 440L^3$ para uma cobra com 0,7 metro de comprimento? No caso de um macho, qual é o peso previsto pela equação $w = 446L^{2,99}$? No caso de uma fêmea, qual é o peso previsto pela equação $w = 429L^{2,90}$?
2. Qual é o metabolismo basal previsto pela equação $M = 70w^{3/4}$ para animais com pesos de 50 kg, 100 kg e 350 kg?
3. As observações mostram que o peso b do cérebro das fêmeas primatas adultas, em gramas, é dado pela equação alométrica $b = 0,064w^{0,822}$, onde w é o peso em gramas (g) do animal. Quais são os pesos previstos dos cérebros de fêmeas primatas com pesos de 5 kg, 10 kg, 25 kg, 50 kg e 100 kg? (Lembre-se de que 1 kg = 1.000 g.)
4. Se $y = Cx^k$, onde C e k são constantes, dizemos que y e x estão relacionados por uma alometria direta se $k > 0$ e por uma alometria inversa se $k < 0$. A *taxa metabólica específica* de um animal é definida como a razão M/w entre a taxa metabólica M e o peso w do animal. Mostre que, se o metabolismo basal e o peso estão relacionados por uma alometria direta da forma $M = Cw^{3/4}$, como no Exercício 2, o metabolismo basal específico e o peso estão relacionados por uma alometria inversa.
5. Mostre que, supondo que um animal tenha a forma aproximada de um cubo, a área superficial S do animal é proporcional a $V^{2/3}$, onde V é o volume do corpo. Combinando este fato com a hipótese de que o peso w de um animal é proporcional ao volume, mostre que S é proporcional a $w^{2/3}$.
6. Mostre que, supondo que um animal tenha a forma aproximada de uma esfera, a área superficial S do animal é proporcional a $V^{2/3}$, onde V é o volume do corpo. Combinando este fato com a hipótese de que o peso w de um animal é proporcional ao volume, mostre que S é proporcional a $w^{2/3}$. (*Sugestão:* Lembre-se de que uma esfera de raio r tem uma área superficial $4\pi r^2$ e um volume $\frac{4}{3}\pi r^3$.)

CAPÍTULO | 2

DERIVAÇÃO: CONCEITOS BÁSICOS

SEÇÃO 2.1 | A Derivada

O cálculo é a matemática das variações e o instrumento principal para estudar as taxas de variação é um método conhecido como **derivação**. Nesta seção, vamos descrever este método e mostrar algumas de suas aplicações, especialmente no cálculo das taxas de variação. Nesta seção, e em outras seções deste capítulo, vamos falar de taxas de variação como velocidade, aceleração, produtividade da mão-de-obra e do capital, taxa de crescimento de uma população, taxa de infecção de uma população suscetível durante uma epidemia e muitas outras.

O cálculo foi inventado no século XVII por Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e outros como parte de uma tentativa de lidar com dois problemas geométricos:

Problema da tangente: determinar a reta tangente em um certo ponto a uma curva dada.

Problema da área: determinar a área da região sob uma curva dada.

O problema da área envolve um método chamado de **integração**, no qual grandezas como área, valor médio, valor atual de um fluxo de receita e fluxo sangüíneo são calculados com um tipo especial de limite de uma soma. Vamos estudar este método nos Capítulos 5 e 6. O problema da tangente está relacionado de perto ao estudo das taxas de variação; vamos começar nosso estudo do cálculo discutindo esta relação.

Taxa de Variação e Inclinação

Como vimos na Seção 1.3, uma função linear $L(x) = mx + b$ varia a uma taxa constante m com a variável independente x. Em outras palavras, a taxa de variação de $L(x)$ é dada pela inclinação do gráfico da função, a linha reta $y = mx + b$ (Figura 2.1a). No caso de uma função $f(x)$ que não é linear, a taxa de variação não é constante, mas depende do valor de x. Em particular, para $x = c$, a taxa é dada pela inclinação da curva de $f(x)$ no ponto $P(c, f(c))$, que pode ser medida pela inclinação da reta tangente à curva no ponto P (Figura 2.1b). A relação entre taxa de variação e inclinação é ilustrada no Exemplo 2.1.1.

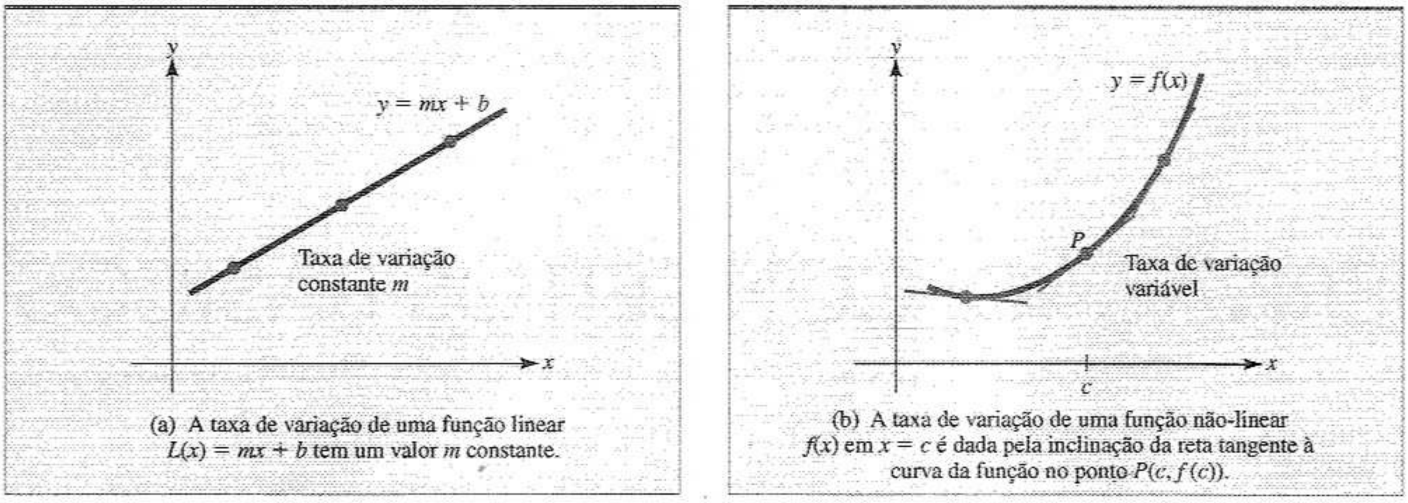


FIGURA 2.1 A taxa de variação pode ser medida pela inclinação de uma reta.

EXEMPLO 2.1.1

O gráfico da Figura 2.2 expressa a relação entre a porcentagem de desempregados U e a taxa de inflação I. Use o gráfico para estimar a taxa de variação de I em relação a U quando o índice de desemprego é 3% e quando o nível de desemprego é 10%.

Solução

A partir da figura, estimamos que a inclinação da reta tangente no ponto (3, 14), que corresponde a $U = 3$, é aproximadamente -14. Assim, quando o índice de desemprego é 3%, a taxa de inflação I *diminui* de 14 pontos percentuais para cada ponto percentual de aumento do índice de desemprego U.

No ponto $(10, -5)$, a inclinação da reta tangente é aproximadamente $-0{,}4$, o que significa que, quando o índice de desemprego é 10%, a taxa de inflação diminui de apenas 0,4 ponto percentual para cada ponto percentual de aumento do índice de desemprego.

No Exemplo 2.1.2 mostramos como é possível calcular analiticamente a inclinação e a taxa de variação usando um limite.

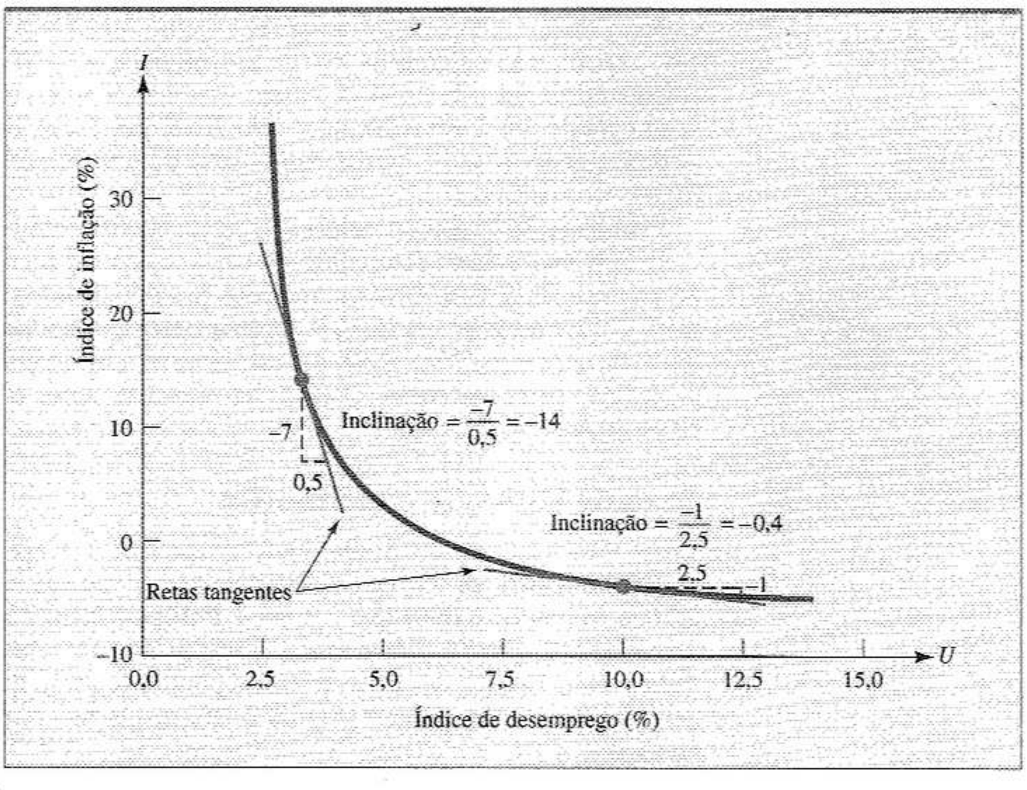
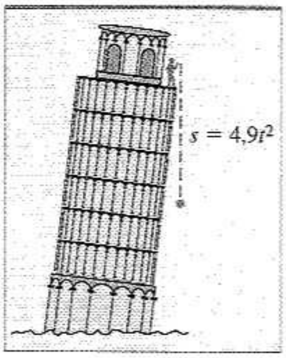


FIGURA 2.2 Inflação em função do índice de desemprego.

Fonte: Adaptado de Robert Eisner, *The Misunderstood Economy: What Counts and How to Count It*, Boston, MA: Harvard Business School Press, 1994, p. 173.



EXEMPLO 2.1.2

Desprezando a resistência do ar, um corpo em queda livre nas proximidades da superfície da Terra percorre uma distância $s(t) = 4{,}9t^2$ metros em t segundos.

a. Qual é a velocidade do corpo no instante $t = 2$ segundos?

b. Qual é a relação entre a velocidade do corpo calculada no item (a) e a curva de $s(t)$?

Solução

a. A velocidade após 2 segundos é a taxa *instantânea* de variação de $s(t)$ no instante $t = 2$. A menos que o corpo esteja equipado com um velocímetro, é difícil medir diretamente esta velocidade. Entretanto, podemos medir a distância percorrida pelo corpo enquanto t sofre uma pequena variação h de $t = 2$ para $t = 2 + h$ e, em seguida, determinar a taxa *média* de variação de $s(t)$ no intervalo $[2,2 + h]$ calculando a razão

$$\begin{aligned} v_{\text{méd}} &= \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{s(2+h) - s(2)}{(2+h) - 2} \\ &= \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9(2)^2}{h} = \frac{4{,}9(4 + 4h + h^2) - 4{,}9(4)}{h} \\ &= \frac{19{,}6h + 4{,}9h^2}{h} = 19{,}6 + 4{,}9h \end{aligned}$$

Como o acréscimo de tempo h é pequeno, esperamos que a diferença entre a velocidade média $v_{\text{méd}}$ e a velocidade instantânea v_{ins} em $t = 2$ seja muito pequena. Assim, é razoável definir a velocidade instantânea como o limite

$$v_{\text{ins}} = \lim_{h \to 0} v_{\text{méd}} = \lim_{h \to 0} (19{,}6 + 4{,}9h) = 19{,}6$$

Isto significa que após 2 segundos o corpo está se movendo com uma velocidade de 19,6 metros por segundo.

b. O método descrito no item (a) está representado geometricamente na Figura 2.3. A Figura 2.3a mostra a curva da função $s(t) = 4{,}9t^2$, juntamente com os pontos $P(2; 19{,}6)$ e $Q(2 + h; 4{,}9(2 + h)^2)$. A reta que liga os pontos P e Q é chamada de *reta secante* da curva de $s(t)$ e tem uma inclinação

$$m_{\text{sec}} = \frac{4{,}9(2+h)^2 - 19{,}6}{(2+h) - 2} = 19{,}6 + 4{,}9h$$

Como mostra a Figura 2.3b, quando tomamos valores cada vez menores de h, as retas secantes PQ correspondentes tendem para a posição da reta que consideramos intuitivamente como a tangente à curva de $s(t)$ no ponto P. Isto sugere que podemos determinar a inclinação $m_{\tan}$ da reta tangente calculando o valor limite de m_{sec} quando h tende a 0, ou seja,

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} (19{,}6 + 4{,}9h) = 19{,}6$$

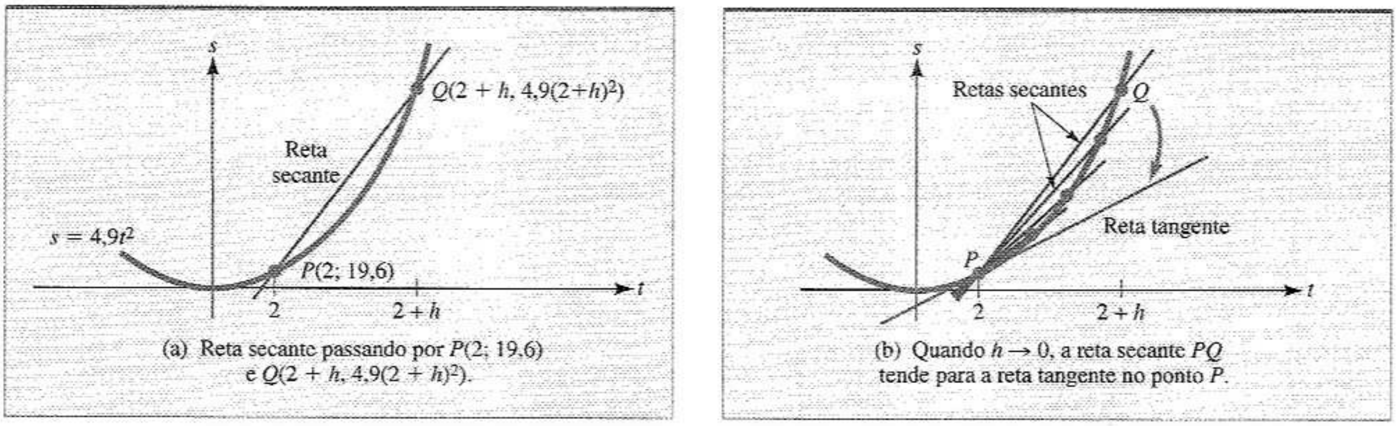
Assim, a inclinação da reta tangente à curva de $s(t) = 4{,}9t^2$ no ponto $t = 2$ é igual à taxa instantânea de variação de $s(t)$ em relação a t no ponto $t = 2$.

1 EXPLORE!

Entre com $f(x) = 1/x$ em Y1 no editor de equações. Plote Y1 usando uma janela decimal modificada [0, 4.7]1 por [0, 3.1]1. Se esta curva for substituída por uma seqüência poligonal de segmentos de reta, como se comportarão as inclinações destes segmentos de reta? Para observar estes valores, entre com

Y2 = (Y1(X + H) − Y1(X))/H

no editor de equações, e entre com 0,5 em H (ou seja, digite 0,5 → H). Ajuste **TBLSET** com TblStart = 1 e ΔTbl = 0,5. Observe a tabela de valores; o que representam os valores de Y2? Que acontece quando mudamos H e ΔTbl para 0,1?



(a) Reta secante passando por $P(2; 19{,}6)$ e $Q(2 + h, 4{,}9(2 + h)^2)$.

(b) Quando $h \to 0$, a reta secante PQ tende para a reta tangente no ponto P.

FIGURA 2.3 Cálculo da inclinação da reta tangente à curva $s = 4{,}9t^2$ no ponto $P(2; 19{,}6)$.

O método usado no Exemplo 2.1.2 para determinar a velocidade de um corpo em queda livre pode ser usado para calcular outras taxas de variação. Suponha que estejamos interessados em determinar a taxa com a qual a função $f(x)$ está variando em relação a x no ponto $x = c$. Começamos por calcular a **taxa média de variação** de $f(x)$ quando x varia de $x = c$ até $x = c + h$, que é dada pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}\text{Taxa}_{\text{méd}} &= \frac{\text{variação de } f(x)}{\text{variação de } x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{(c+h) - c} \\ &= \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\end{aligned}$$

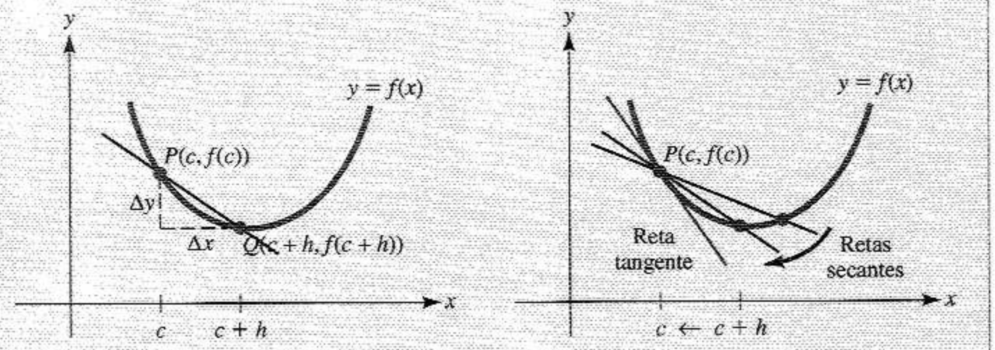
Esta última razão pode ser interpretada geometricamente como a inclinação da reta secante que liga o ponto $P(c, f(c))$ ao ponto $Q(c + h, f(c + h))$, como mostra a Figura 2.4a.

2 EXPLORE!

Uma calculadora gráfica pode ser usada para plotar várias retas secantes com aproximações cada vez melhores de uma reta tangente. Entre com $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ como Y1 no editor de equações, escolhendo o estilo **BOLD** para plotar o gráfico. Entre com os valores (−2,0; −1,6; −1,1; −0,6; −0,2) em **L1** (lista 1) usando o menu **STAT**. Entre com

L1 * (x − 2) + 1

como Y2 no editor de equações. Plote a função usando uma janela decimal modificada [0, 4.7]1 por [0, 3.1]1 e descreva o que observa. Qual é a equação da reta tangente limite?



(a) Reta secante passando por $P(c, f(c))$ e $Q(c + h, f(c + h))$.

(b) Quando h tende a 0, a reta secante tende para a reta tangente no ponto P.

FIGURA 2.4 Reta tangente aproximada por retas secantes.

Em seguida, determinamos a taxa instantânea de variação $f(x)$ no ponto $x = c$ calculando o valor limite da taxa média quando h tende a 0:

$$\text{Taxa}_{\text{ins}} = \lim_{h\to 0} \text{taxa}_{\text{méd}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Este limite também corresponde à inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(c, f(c))$, como mostra a Figura 2.4b.

A Derivada

A expressão

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é chamada de **quociente diferença** da função $f(x)$. Como vimos, a taxa de variação e a inclinação podem ser determinadas calculando o limite quando h tende a 0 de um quociente diferença apropriado. Para unificar o estudo destas e outras aplicações que envolvem o limite de um quociente diferença, introduzimos a terminologia e notação apresentadas a seguir.

Derivada de uma Função ■ A **derivada** da função $f(x)$ em relação a x é a função $f'(x)$ (que se lê como "f linha de x") dada por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e o processo de calcular a derivada é chamado de **derivação**. Dizemos que uma função $f(x)$ é **derivável** no ponto c se $f'(c)$ existe, ou seja, se o limite do quociente diferença que define $f'(x)$ existe no ponto $x = c$.

NOTA A letra "h" foi usada como incremento da variável independente no quociente diferença para simplificar as manipulações algébricas. Entretanto, nos casos em que é importante chamar atenção, por exemplo, para o fato de que a variável x está sendo incrementada, chamamos o incremento de Δx (que se pronuncia "delta x"). Da mesma forma, Δt e Δs representam pequenas mudanças (incrementos) das variáveis t e s, respectivamente. Esta notação é usada repetidas vezes na Seção 2.5. ■

EXEMPLO 2.1.3

Determine a derivada da função $f(x) = 4{,}9x^2$.

Solução

O quociente diferença de $f(x)$ é

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{4{,}9(x+h)^2 - 4{,}9x^2}{h}\\ &= \frac{4{,}9(x^2+2hx+h^2) - 4{,}9x^2}{h}\\ &= \frac{9{,}8hx + 4{,}9h^2}{h} && \textit{combinando termos}\\ &= 9{,}8x + 4{,}9h && \textit{dividindo por } h\end{aligned}$$

Assim, a derivada de $f(x) = 4{,}9x^2$ é a função

$$\begin{aligned}f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{x\to 0}(9{,}8x + 4{,}9h)\\ &= 9{,}8x\end{aligned}$$

Depois que determinamos a derivada de uma função $f(x)$, ela pode ser usada em todos os cálculos que envolvem o limite do quociente diferença de $f(x)$ quando h tende a 0. Assim, por exemplo, a função do Exemplo 2.1.3 tem a mesma forma que a função distância $s = 4{,}9t^2$ do problema do corpo em queda livre (Exemplo 2.1.1). Usando o resultado do Exemplo 2.1.3, podemos calcular a velocidade do corpo no instante $t = 2$ simplesmente fazendo $t = 2$ na expressão da derivada $s'(t)$:

$$\text{Velocidade} = s'(2) = 9{,}8(2) = 19{,}6$$

Da mesma forma, a inclinação da reta tangente à curva de $s(t)$ no ponto P(2;19,6) é dada por

$$\text{Inclinação} = s'(2) = 19{,}6$$

Para futura referência, nossas observações em relação à taxa de variação e à inclinação podem ser resumidas da seguinte forma, em termos da notação de derivada:

Inclinação como uma Derivada ■ A inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é dada por $m_{\tan} = f'(c)$.

Taxa de Variação Instantânea como uma Derivada ■ A taxa de variação de $f(x)$ em relação a x no ponto $x = c$ é dada por $f'(c)$.

No Exemplo 2.1.4, calculamos a equação de uma reta tangente. No Exemplo 2.1.5, determinamos uma taxa de variação em um problema da área financeira.

Lembrete

Lembre-se de que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Este é um caso especial do teorema binomial em que o expoente é 3 e é usado para expandir o numerador do quociente diferença do Exemplo 2.1.4.

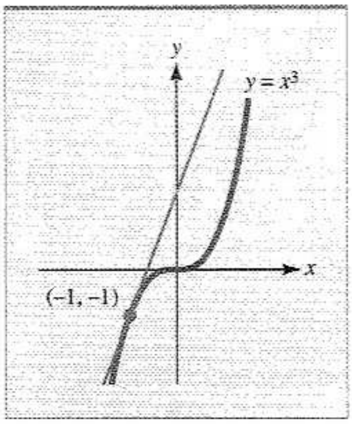


FIGURA 2.5 Gráfico de $y = x^3$.

EXEMPLO 2.1.4

Calcule a derivada de $f(x) = x^3$ e use-a para determinar a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto $x = -1$. Qual é a equação da reta tangente neste ponto?

Solução

De acordo com a definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Assim, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto $x = -1$ é $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$ (Figura 2.5). Para determinar a equação da reta tangente, precisamos também da coordenada y do ponto de tangência, $y = (-1)^3 = -1$. Assim, a reta tangente passa pelo ponto $(-1, -1)$ com inclinação 3. Usando a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, temos:

$$y - (-1) = 3[x - (-1)]$$

ou

$$y = 3x + 2$$

3 EXPLORE!

Entre com $f(x) = x^3$ como Y1 no editor de equações e plote a função usando uma janela decimal. Escolha opção reta tangente da tecla **DRAW** **(2nd PRGM)** e use a seta da esquerda para levar o cursor até o ponto (−1, 1) da curva. Aperte **ENTER** e observe o que acontece. Esta equação é exatamente igual à obtida no Exemplo 2.1.4? Explique por quê.

EXEMPLO 2.1.5

Um empresário calcula que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o lucro é dado por

$$P(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$$

reais. Qual é a taxa de variação do lucro em relação ao nível de produção x quando estão sendo produzidas 9.000 unidades?

Solução

Temos:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[-400(x+h)^2 + 6.800(x+h) - 12.000] - (-400x^2 + 6.800x - 12.000)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-400h^2 - 800hx + 6.800h}{h} && \textit{expandindo } (x+h)^2 \textit{ e combinando termos} \\ &= \lim_{h\to 0} (-400h - 800x + 6.800) && \textit{dividindo por } h \\ &= -800x + 6.800 \end{aligned}$$

Assim, quando o nível de produção é $x = 9$ (9.000 unidades), o lucro está variando a uma taxa de

$$P'(9) = -800(9) + 6.800 = -400$$

reais por mil unidades.

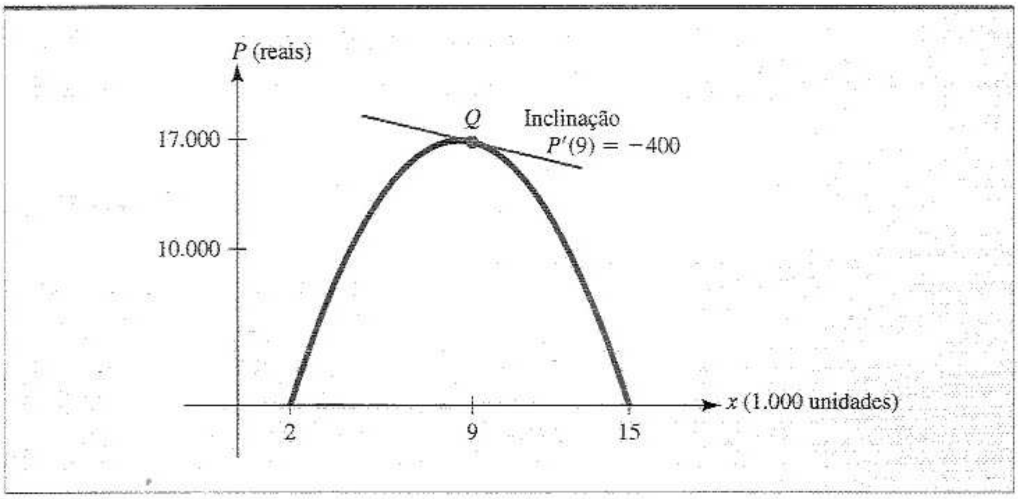


FIGURA 2.6 Gráfico da função lucro $P(x) = -400x^2 + 6.800x - 12.000$.

No Exemplo 2.1.5, vimos que $P'(9) = -400$, o que significa que a inclinação da reta tangente à curva de lucro $y = P(x)$ é *para baixo* no ponto Q, onde $x = 9$ (Figura 2.6). Isto significa que para um nível de produção de 9.000 unidades o lucro *diminui* quando a produção aumenta.

O significado do sinal da derivada está indicado no quadro a seguir e na Figura 2.7. Teremos muito mais a dizer a respeito da relação entre a forma de uma curva e o sinal das derivadas no Capítulo 3, no qual será apresentado um método geral para traçar curvas.

Significado do Sinal da Derivada $f'(x)$ ■ Se a função f é derivável em $x = c$,

f é **crescente** em $x = c$ se $f'(c) > 0$

e f é **decrescente** em $x = c$ se $f'(c) < 0$

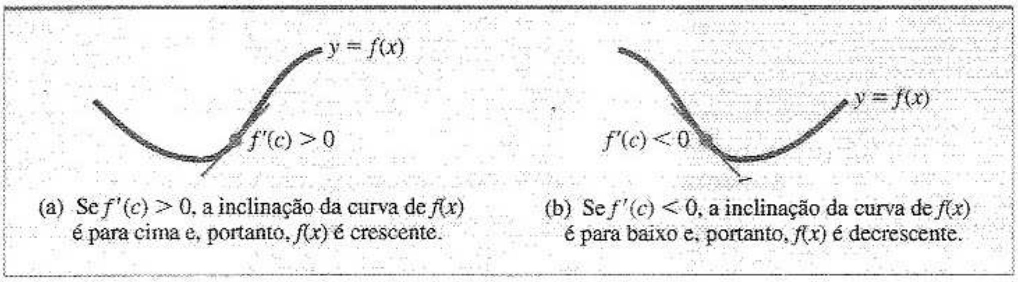


FIGURA 2.7 Significado do sinal da derivada $f'(c)$.

4 EXPLORE!

Muitas calculadoras gráficas dispõem de uma rotina especial para calcular derivadas numericamente, conhecida como *derivada numérica* (nDeriv), que pode ser ativada através da tecla **MATH**. A derivada também pode ser calculada através da tecla **CALC** (**2nd TRACE**), especialmente quando se deseja uma apresentação gráfica. Para praticar, entre com $f(x) = \sqrt{x}$ como Y1 no editor de equações e plote o gráfico usando uma janela decimal. Use a opção $\frac{dy}{dx}$ da tecla **CALC** e observe o valor da derivada numérica no ponto $x = 1$.

Notação de Derivada

A derivada $f'(x)$ da função $y = f(x)$ muitas vezes é escrita na forma dy/dx (que se lê como "dê y sobre dê x") ou df/dx (que se lê como "dê f sobre dê x"). Nesta notação, o valor da derivada no ponto $x = c$ [ou seja, $f'(c)$] é escrito na forma

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}$$

Assim, por exemplo, se $y = x^2$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

e o valor da derivada no ponto $x = -3$ é dado por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-3} = 2x\Big|_{x=-3} = 2(-3) = -6$$

A notação $\frac{dy}{dx}$ para derivada lembra a expressão da inclinação, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, e pode ser também interpretada como a "taxa de variação de y em relação a x". Às vezes, é conveniente simplificar uma expressão como

$$\text{"se } y = x^2\text{, então } \frac{dy}{dx} = 2x\text{"}$$

escrevendo simplesmente

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

que é lida como "a derivada de x^2 em relação a x é $2x$".

O Exemplo 2.1.6 ilustra o uso das diferentes notações para indicar a derivada.

EXEMPLO 2.1.6

Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ e use o resultado para:

a. Determinar a equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x}$ no ponto $x = 4$.
b. Determinar a taxa de variação de $y = \sqrt{x}$ em relação a x no ponto $x = 1$.

Solução

A derivada de $y = \sqrt{x}$ em relação a x é dada por

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{para } x > 0\end{aligned}$$

a. Para $x = 4$, a coordenada correspondente y no gráfico de $y = \sqrt{x}$ é $y = \sqrt{4} = 2$; assim, o ponto de tangência é $P(4, 2)$. Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a inclinação da reta tangente à curva de $f(x)$ no ponto $P(4, 2)$ é dada por

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

usando a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, descobrimos que a equação da reta tangente no ponto P é

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

ou

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

b. A taxa de variação de $y = \sqrt{x}$ para $x = 1$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

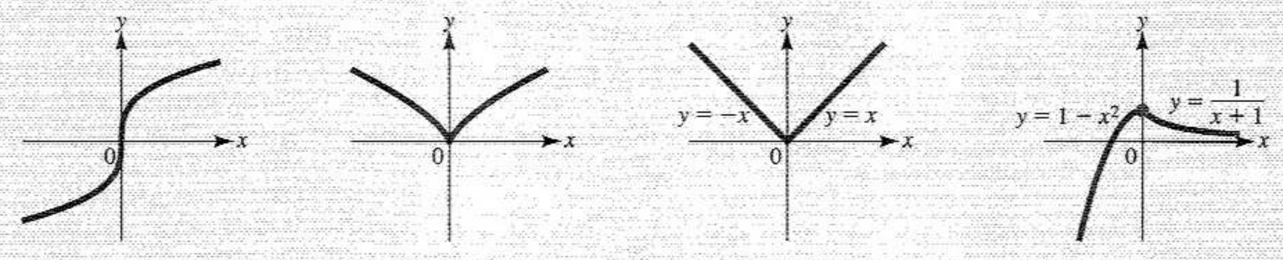
NOTA Observe que a função $f(x) = \sqrt{x}$ do Exemplo 2.1.6 é definida no ponto $x = 0$, mas o mesmo não acontece com a derivada $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Este exemplo mostra que uma função e sua derivada nem sempre têm o mesmo domínio. ■

Derivabilidade e Continuidade

Se uma função $f(x)$ é derivável em $x = c$, a curva de $y = f(x)$ possui uma tangente não-vertical no ponto $P(c, f(c))$ e em todos os pontos "próximos" de P. Isto sugere que a função é contínua em $x = c$, já que uma curva com uma reta tangente no ponto P não pode ter nenhum "buraco" ou "lacuna" em P. Para resumir:

Continuidade de uma Função Derivável ■ Se a função $f(x)$ é derivável em $x = c$, é contínua em $x = c$.

Esta observação é demonstrada no Problema 52. Observe que a recíproca não é verdadeira, ou seja, uma função contínua não é necessariamente derivável em todos os pontos. Uma função contínua $f(x)$ não é derivável em $x = c$ se $f'(x)$ é infinita em $x = c$ ou se a curva de $f(x)$ possui um "ponto de quebra" em $x = c$, isto é, um ponto em que a curva muda bruscamente de direção. Se $f(x)$ é contínua em $x = c$ mas $f'(c)$ é infinita, a curva de f pode ter uma "tangente vertical" (Figura 2.8a) ou uma "cúspide" (Figura 2.8b) em $x = c$. A função valor absoluto $f(x) = |x|$ é contínua para qualquer valor de x, mas possui um "ponto de quebra" na origem (veja Figura 2.8c e o Problema 51). A Figura 2.8d mostra outra curva com um ponto de quebra.



(a) Tangente vertical no gráfico de $f(x) = x^{1/3}$.

(b) Cúspide no gráfico de $f(x) = x^{2/3}$.

(c) "Ponto de quebra" no gráfico de $f(x) = |x|$.

(d) Outro gráfico com um "ponto de quebra".

FIGURA 2.8 Gráficos de quatro funções contínuas que não são deriváveis em $x = 0$.

5 EXPLORE!

Entre com $f(x)$ = abs(X) como Y1 no editor de equações. As funções valor absoluto podem ser obtidas através da tecla **MATH** e do menu **NUM**. Use uma janela decimal e calcule a derivada numérica $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $x = 0$. O que você observa e como esta resposta se compara com a Figura 2.8c? Na verdade, a mudança de inclinação da curva no ponto (0, 0) é tão abrupta que não existe uma reta tangente neste ponto; assim, a derivada de $f(x)$ = abs(x) não existe no ponto $x = 0$. Isto mostra que a derivada numérica deve ser usada com cautela em vértices, cúspides e outros pontos especiais. Experimente calcular a derivada numérica de $y = \dfrac{1}{x}$ no ponto $x = 0$ e explique o resultado obtido.

Quase todas as funções apresentadas neste livro são deriváveis em quase todos os pontos. Em particular, os polinômios são deriváveis para qualquer valor da variável independente e as funções racionais são deriváveis em todos os pontos em que são definidas.

Um exemplo de situação prática envolvendo uma função contínua não-derivável em todos os pontos é a circulação sangüínea no corpo humano.* É natural imaginar que o sangue circula suavemente nas veias e artérias, mas, na verdade, o sangue é ejetado pelo coração nas artérias em "pacotes" discretos. O resultado é o *pulso arterial*, que pode ser usado para medir a freqüência dos batimentos cardíacos aplicando pressão a uma artéria acessível, como a do pulso. A Figura 2.9 mostra a variação com o tempo da pressão arterial. Observe que a curva muda bruscamente de inclinação no ponto de pressão mínima (*diástole*) em que um novo "pacote" de sangue é ejetado pelo coração às artérias, fazendo com que a pressão arterial aumente rapidamente até o ponto de pressão máxima (*sístole*), a partir do qual a pressão diminui gradualmente enquanto o sangue é distribuído para os tecidos pelas artérias. A função pressão arterial é contínua, mas não é derivável no instante $t = 0{,}75$ s em que ocorre a ejeção do sangue.

*Este exemplo foi adaptado de F.C. Hoppensteadt and C.S. Peskin, *Mathematics in Medicine and the Life Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1992, p. 131.

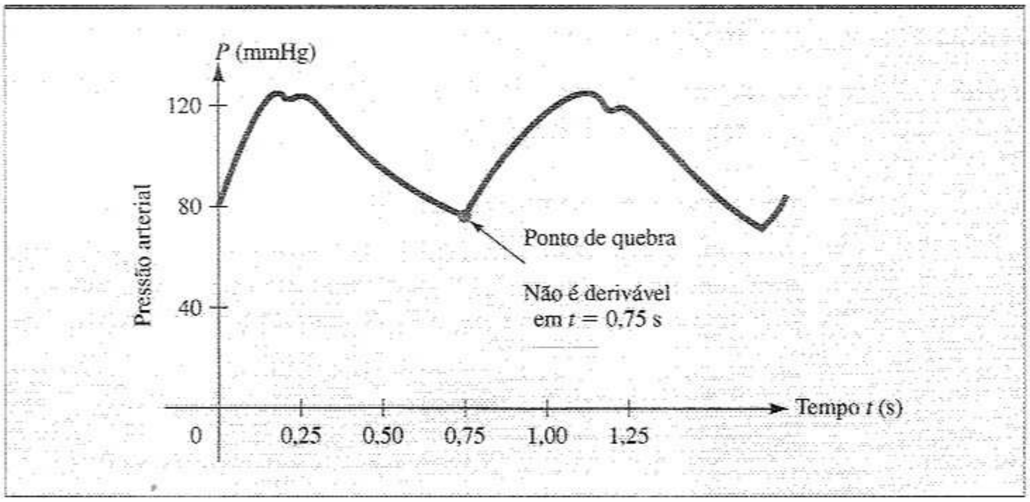


FIGURA 2.9 Gráfico da pressão arterial em função do tempo.

PROBLEMAS | 2.1

Nos Problemas 1 a 8, calcule a derivada da função dada e determine a inclinação da reta tangente à curva da função no ponto dado.

1. $f(x) = 5x - 3; x = 2$

2. $f(x) = x^2 - 1; x = -1$

3. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$

4. $f(x) = x^3 - 1; x = 2$

5. $g(t) = \frac{2}{t}; t = \frac{1}{2}$

6. $f(x) = \frac{1}{x^2}; x = 2$

7. $f(x) = \sqrt{x}; x = 9$

8. $h(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}; u = 4$

Nos Problemas 9 a 16, calcule a derivada da função dada e determine a inclinação da reta tangente à curva da função no ponto c dado.

9. $f(x) = x^2; c = 1$

10. $f(x) = 3; c = -4$

11. $f(x) = 7 - 2x; c = 5$

12. $f(x) = 2 - 3x^2; c = 1$

13. $f(x) = \frac{-2}{x}; c = -1$

14. $f(x) = x^3 - 1; c = 1$

15. $f(x) = 2\sqrt{x}; c = 4$

16. $f(x) = \frac{3}{x^2}; c = \frac{1}{2}$

Nos Problemas 17 a 22, determine a taxa de variação dy/dx no ponto x_0 dado.

17. $y = 3; x_0 = 2$

18. $y = 6 - 2x; x_0 = 3$

19. $y = x(1 - x); x_0 = -1$

20. $y = \frac{1}{2 - x}; x_0 = -3$

21. $y = x^2 - 2x; x_0 = 1$

22. $y = x - \frac{1}{x}; x_0 = 1$

23. Suponha que $f(x) = x^3$.
   a. Calcule a inclinação da reta secante que liga os pontos da curva de f cujas coordenadas x são $x = 1$ e $x = 1{,}1$.
   b. Use os métodos do cálculo para determinar a inclinação da reta tangente à curva de f no ponto $x = 1$ e compare o resultado com o do item (a).

24. Suponha que $f(x) = x^2$.
   a. Calcule a inclinação da reta secante que liga os pontos da curva de f cujas coordenadas x são $x = -2$ e $x = -1{,}9$.
   b. Use os métodos do cálculo para determinar a inclinação da reta tangente à curva de f no ponto $x = -2$ e compare o resultado com o do item (a).

25. Suponha que $f(x) = 2x - x^2$.
   a. Calcule a inclinação da reta secante que liga os pontos da curva de f cujas coordenadas x são $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.
   b. Use os métodos do cálculo para determinar a inclinação da reta tangente à curva de f no ponto $x = 0$ e compare o resultado com o do item (a).

26. Suponha que $f(x) = x/(x-1)$.

a. Calcule a inclinação da reta secante que liga os pontos da curva de f cujas coordenadas x são $x = -1$ e $x = -\frac{1}{2}$.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a inclinação da reta tangente à curva de f no ponto $x = -1$ e compare o resultado com o do item (a).

27. Suponha que $f(x) = 3x^2 - x$.

a. Calcule a taxa média de variação de $f(x)$ com x quando x varia de $x = 0$ até $x = \frac{1}{16}$.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação de $f(x)$ no ponto $x = 0$ e compare o resultado com o do item (a).

28. Suponha que $s(t) = \sqrt{t}$.

a. Calcule a taxa média de variação de $s(t)$ com t quando t varia de $t = 0$ até $t = \frac{1}{4}$.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação de $s(t)$ no ponto $t = 0$ e compare o resultado com o do item (a).

29. Suponha que $s(t) = \dfrac{t-1}{t+1}$.

a. Calcule a taxa média de variação de $s(t)$ com t quando t varia de $t = -\frac{1}{2}$ até $t = 0$.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação de $s(t)$ no ponto $t = -\frac{1}{2}$ e compare o resultado com o do item (a).

30. Suponha que $f(x) = x(1 - 2x)$.

a. Calcule a taxa média de variação de $f(x)$ com x quando x varia de $x = 0$ até $x = -\frac{1}{2}$.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação de $f(x)$ no ponto $x = 0$ e compare o resultado com o do item (a).

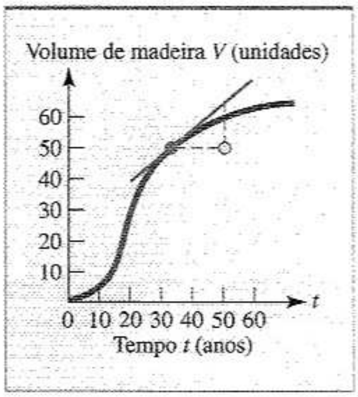
31. Complete a tabela, usando o exemplo como modelo.

	Se $f(t)$ representa...	**então, $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ representa... e**	**$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ representa...**
Exemplo	O número de bactérias em uma colônia no instante t	A taxa média de variação do número de bactérias durante o intervalo de tempo $[t_0, t_0+h]$	A taxa instantânea de variação do número de bactérias no instante $t = t_0$.
	a. A temperatura em San Francisco t horas após a meia-noite de um certo dia		
	b. A concentração de álcool no sangue t horas depois que uma pessoa bebe uma lata de cerveja		
	c. Taxa de juros de um financiamento em 30 anos, t anos após o ano 2000		

32. Complete a tabela, usando o exemplo como modelo.

	Se $f(x)$ representa...	**então, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ representa... e**	**$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ representa...**
Exemplo	O custo para produzir x unidades de uma certa mercadoria	A taxa média de variação do custo quando a produção varia de x_0 para $x_0 + h$ unidades	A taxa instantânea de variação do custo com o nível de produção quando x_0 unidades são produzidas
	a. A receita obtida quando x unidades de uma certa mercadoria são produzidas		
	b. A quantidade de combustível (em kg) que resta em um foguete quando está a x metros do solo		
	c. O volume (em cm^3) de um câncer 6 meses depois que x mg de um medicamento experimental são injetados em um paciente		

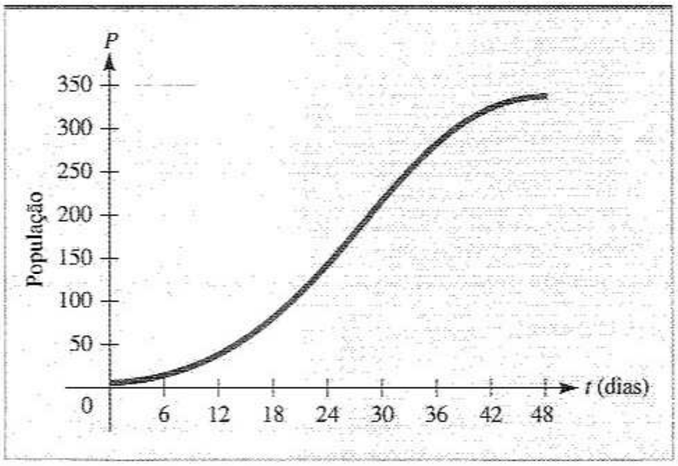
33. RECURSOS RENOVÁVEIS O gráfico a seguir mostra a variação do volume de madeira, V, de uma árvore com o tempo t (a idade da árvore). Use o gráfico para estimar a taxa de variação de V com o tempo para $t = 30$ anos. O que parece acontecer com a taxa de variação de V para grandes valores de t (ou seja, "a longo prazo")?



PROBLEMA 33 Gráfico mostrando a variação com o tempo do volume de madeira V de uma árvore.

Fonte: Adaptado de Robert H. Frank, *Microeconomics and Behavior*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1994, p. 623.

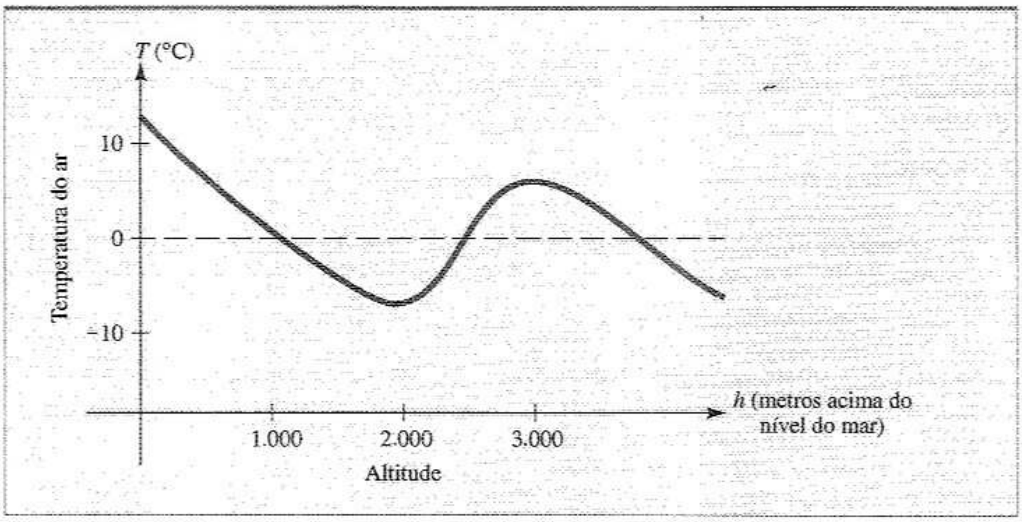
34. CRESCIMENTO DE UMA POPULAÇÃO O gráfico a seguir mostra a variação de uma população P de moscas de frutas (*Drosophila*) com o tempo t durante um experimento. Use o gráfico para estimar a taxa com a qual a população está aumentando após 20 dias e também após 36 dias. Em qual das duas ocasiões a população está aumentando mais depressa?



PROBLEMA 34 Curva de crescimento de uma população de moscas de frutas.

Fonte: Adaptado de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, p. 355.

35. INVERSÃO TÉRMICA A temperatura do ar, em geral, diminui com a altitude. No inverno, porém, devido a um fenômeno conhecido como *inversão térmica*, a temperatura do ar aquecido pelo Sol nas montanhas pode passar do ponto de congelamento da água, enquanto a temperatura em altitudes menores permanece abaixo de 0°C. Use o gráfico a seguir para estimar a taxa com a qual a temperatura T está variando com a altitude h a 1.000 metros de altitude e também a 2.000 metros.



PROBLEMA 35

Fonte: E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, p. 150.

36. VELOCIDADE Um foguete de brinquedo sobe verticalmente de tal forma que t segundos após a decolagem está $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$ metros acima do solo.

a. A que altura está o foguete após 40 segundos?

b. Qual é a velocidade média do foguete durante os primeiros 40 segundos de vôo (entre $t = 0$ e $t = 40$)?

c. Qual é a velocidade instantânea do foguete no momento da decolagem ($t = 0$)? Qual é a velocidade após 40 segundos?

37. LUCRO Um empresário pode produzir gravadores de fita por R$ 20,00 a unidade. Estima-se que, se os gravadores forem vendidos por p reais a unidade, os consumidores comprarão $q = 120 - p$ gravadores por mês.

a. Expresse o lucro P do empresário em função de q.

b. Qual é a taxa média de aumento do lucro quando o nível de produção passa de $q = 0$ para $q = 20$?

c. Com que taxa o lucro está variando quando a produção é de 20 gravadores por mês? Neste nível de produção, o lucro está aumentando ou diminuindo?

38. ETOLOGIA Os experimentos mostram que, quando uma pulga dá um pulo, a altura atingida pelo animal (em metros) após t segundos é dada pela função

$$H(t) = 4{,}4t - 4{,}9t^2$$

a. Calcule $H'(t)$. Qual é a taxa de variação de $H(t)$ após 1 segundo? Está aumentando ou diminuindo?

b. Em que instante $H'(t) = 0$? Qual é o significado físico deste instante?

c. Em que instante a pulga "aterrissa" (volta à altura inicial)? Com que taxa $H(t)$ está variando neste instante? Está aumentando ou diminuindo?

39. LUCRO Um fabricante de DVD determina que, quando x centenas de unidades são produzidas, o lucro é $P(x) = 4.000(15 - x)(x - 2)$ reais.

a. Calcule $P'(x)$.

b. Determine o valor de x para o qual $P'(x) = 0$. Qual é o significado do nível de produção x_m para o qual isto acontece?

40. PRODUÇÃO DE UMA FÁBRICA Em uma certa fábrica, determina-se que Q unidades são produzidas quando L homens-horas são usados na produção, onde

$$Q(L) = 3.100\sqrt{L}$$

a. Determine a taxa média de variação da produção quando a mão-de-obra varia de $L = 3.025$ homens-horas para 3.100 homens-horas.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação da produção com a mão-de-obra para $L = 3.025$.

41. CUSTO DE PRODUÇÃO Um gerente determina que o custo para produzir x unidades de um certo produto é C milhares de reais, onde

$$C(x) = 0{,}04x^2 + 5{,}1x + 40$$

a. Determine o custo médio quando o nível de produção varia de $x = 10$ para $x = 11$ unidades.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação do custo com o nível de produção para $x = 10$ e compare o resultado com o do item (a). O custo está aumentando ou diminuindo quando a produção é de 10 unidades?

42. DESPESA DO CONSUMIDOR A demanda de um certo produto é dada por $D(x) = -35x + 200$, ou seja, x unidades são demandadas (vendidas) quando o preço unitário é $p = D(x)$ reais.

a. A despesa do consumidor $E(x)$ é a quantia total paga pelos consumidores para comprar x unidades. Expresse a despesa do consumidor E em função de x.

b. Determine a variação média da despesa do consumidor quando x varia de $x = 4$ para $x = 5$.

c. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação da despesa do consumidor com o número de unidades compradas para $x = 4$. A despesa está aumentando ou diminuindo para $x = 4$?

43. DESEMPREGO Em economia, um gráfico como o da Figura 2.2 é conhecido como **curva de Phillips** em homenagem a A. W. Phillips, um economista neozelandês ligado à Escola de Londres. Até Phillips divulgar suas idéias, na década de 1950, muitos economistas acreditavam que houvesse uma relação linear entre desemprego e inflação. Leia a respeito da curva de Phillips (a referência citada na Figura 2.2 é um bom começo) e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre a natureza do desemprego na economia brasileira.

44. PRESSÃO ARTERIAL Consulte o gráfico da pressão arterial em função do tempo da Figura 2.9.

a. Estime a variação média da pressão arterial nos períodos de tempo [0,70; 0,75] e [0,75; 0,80]. Discuta os resultados.

b. Leia a respeito da dinâmica do pulso arterial e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre o assunto. As páginas 131 a 136 da referência citada na Figura 2.9 são um bom começo e existe uma lista excelente de referências nas páginas 137 e 138.

45. CARDIOLOGIA Um estudo realizado em um paciente submetido a um cateterismo revelou que o diâmetro da aorta era aproximadamente D milímetros (mm) quando a pressão aórtica era p (mm de mercúrio), onde

$$D(p) = -0{,}0009p^2 + 0{,}13p + 17{,}81$$

para $50 \le p \le 120$.

a. Determine a taxa média de variação do diâmetro D da aorta quando p varia de $p = 60$ para $p = 61$.

b. Use os métodos do cálculo para determinar a taxa instantânea de variação do diâmetro D com a pressão aórtica p para $p = 60$. O diâmetro está aumentando ou diminuindo quando $p = 60$?

c. Para que valor de p a taxa instantânea de variação de D com p é igual a 0? Qual é o significado físico deste valor da pressão?

46. a. Determine a derivada da função linear $f(x) = 3x - 2$.

b. Determine a equação da reta tangente ao gráfico desta função no ponto $x = -1$.

c. Explique de que forma as respostas aos itens (a) e (b) poderiam ter sido obtidas exclusivamente a partir de considerações geométricas, ou seja, sem realizar nenhum cálculo.

47. a. Determine as derivadas das funções $y = x^2$ e $y = x^2 - 3$ e use um argumento geométrico para explicar o fato de que as derivadas são iguais.

b. Sem realizar mais nenhum cálculo, determine a derivada da função $y = x^2 + 5$.

48. a. Determine a derivada da função $y = x^2 + 3x$.

b. Determine as derivadas das funções $y = x^2$ e $y = 3x$ separadamente.

c. Qual a relação entre a derivada obtida no item (a) e as derivadas obtidas no item (b)?

d. No caso geral, se $f(x) = g(x) + h(x)$, qual a relação entre a derivada de f e as derivadas de g e h?

49. a. Calcule as derivadas das funções $y = x^2$ e $y = x^3$.

b. Examine as respostas do item (a). É possível observar um padrão? Qual é a derivada de $y = x^4$? E a derivada de $y = x^{27}$?

50. Use os métodos do cálculo para mostrar que se $y = mx + b$, a taxa de variação de y com x é constante.

51. Seja f a função valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

e explique por que f não é função derivável no ponto $x = 0$.

52. Seja f uma função derivável no ponto $x = c$.

a. Explique por que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

b. Use o resultado do item (a) e o fato de que

$$f(x) - f(c) = \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right](x - c)$$

para mostrar que

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = 0$$

c. Explique por que o resultado do item (b) mostra que f é contínua no ponto $x = c$.

53. Mostre que $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ não é derivável no ponto $x = 1$.

54. Determine os valores de x para os quais a função $y = 2x^3 - 0{,}8x^2 + 4$ passa por máximos ou mínimos. Use quatro casas decimais.

55. Determine a inclinação da reta tangente à curva da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - \sqrt{3x}}$ no ponto $x = 3{,}85$ completando a tabela a seguir. Expresse todos os números com cinco casas decimais.

h	−0,02	−0,01	−0,001	—0—	0,001	0,01	0,02
$x + h$							
$f(x)$							
$f(x + h)$							
$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$							

SEÇÃO 2.2 Técnicas de Derivação

Se tivéssemos que usar a definição de limite toda vez que quiséssemos calcular uma derivada, o cálculo seria uma disciplina extremamente difícil e tediosa. Felizmente, isto não é necessário; nesta seção e na seguinte, apresentamos algumas regras que facilitam grandemente o processo de derivação. Vamos começar com a regra para obter a derivada de uma constante.

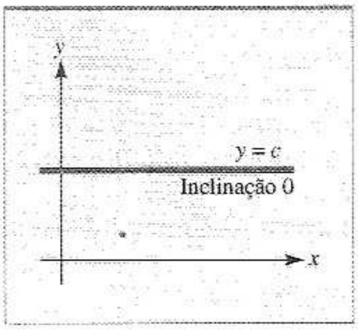


FIGURA 2.10 Gráfico de $f(x) = c$.

Regra da Constante ■ Para qualquer constante c,

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Em outras palavras, a derivada de qualquer constante é nula.

Podemos ver que isto é verdade considerando o gráfico de uma função constante $f(x) = c$, que é uma reta horizontal (Figura 2.10). Como a inclinação de uma reta horizontal é 0 em todos os pontos, $f'(x) = 0$. Podemos chegar à mesma conclusão usando a definição de limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \qquad \textit{já que } f(c + h) = c \textit{ para qualquer valor de } x$$

6 EXPLORE!

É possível plotar simultaneamente uma função e sua derivada em uma calculadora gráfica. Para praticar, entre com $x^2 + 2x$ em Y1, usando o estilo **BOLD**. Entre com nDeriv(Y1, X, X) em Y2, onde nDeriv é uma opção do menu da tecla **MATH**. Plote Y1 e Y2 usando a janela decimal expandida [−4.7, 4,7]1 por [−3.1, 9,1]1. Em seguida, use a função *dy/dx* da tecla **CALC(2nd TRACE)** para obter a inclinação de Y1 para X = −2, −1, 0, 1 e 2. Como estes valores de $\frac{dy}{dx}$ se comparam com os valores de Y2 para os mesmos valores de X? Qual é a sua conclusão? Para terminar, determine analiticamente a derivada $\frac{dy}{dx}$.

EXEMPLO 2.2.1

$$\frac{d}{dx}[-15] = 0$$

A regra seguinte é uma das mais úteis, já que ensina como calcular a derivada de qualquer função potência $f(x) = x^n$. Observe que a regra se aplica não só a funções como $f(x) = x^5$, mas também a funções como $g(x) = \sqrt[5]{x^4} = x^{4/5}$ e $h(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Funções como $x^{\sqrt{2}}$ também podem ser derivadas usando a regra da potência, mas este tipo de função só será discutido no Capítulo 4.

Regra da Potência ■ Para qualquer número real n,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Em palavras, para calcular a derivada de x^n, reduzimos de 1 o valor do expoente e multiplicamos o resultado pelo valor original do expoente.

De acordo com a regra da potência, a derivada de $y = x^3$ é $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, o que está de acordo com o resultado obtido diretamente no Exemplo 2.1.4 da Seção 2.1. Podemos usar a regra da potência para derivar radicais e recíprocos convertendo-os, respectivamente, em potências fracionárias e negativas. (Uma revisão da notação exponencial aparece no Apêndice A1, no final do livro.) Assim, por exemplo, como $\sqrt{x} = x^{1/2}$, a derivada de $y = \sqrt{x}$ é

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

o que está de acordo com o resultado no Exemplo 2.1.6 da Seção 2.1. No Exemplo 2.2.2, aplicamos a regra da potência a uma função recíproca.

Lembrete

Aqui está a regra para simplificar uma fração complexa:

$$\frac{A/B}{C/D} = \frac{AD}{BC}$$

EXEMPLO 2.2.2

Confirme que a regra da potência é válida para a função $F(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ mostrando que a derivada da função é $F'(x) = -2x^{-3}$.

Solução

A derivada de $F(x)$ é dada por

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} \qquad \textit{reduzindo o numerador a um denominador comum}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[x^2 - (x^2 + 2hx + h^2)]}{x^2h(x+h)^2} \qquad \textit{simplificando a fração}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh - h^2}{x^2h(x+h)^2} \qquad \textit{combinando os termos do numerador}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2x - h}{x^2(x+h)^2} \qquad \textit{dividindo por } h$$

$$= \frac{-2x}{x^2(x^2)}$$

$$= \frac{-2}{x^3} = -2x^{-3}$$

como indica a regra de potência.

Lembrete

Lembre-se de que $x^{-n} = 1/x^n$ para n inteiro e que $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$ para a e b inteiros e positivos.

Aqui estão mais alguns exemplos de aplicação da regra da potência:

$$\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2}) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-5}) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$$

$$\frac{d}{dx}(x^{1,3}) = 1{,}3x^{1,3-1} = 1{,}3x^{0,3}$$

Uma demonstração geral da regra da potência no caso em que n é um número inteiro positivo fica a cargo do leitor (Problema 74). O caso em que n é um número inteiro negativo e o caso em que n é um número racional ($n = r/s$, onde r e s são números inteiros, com $s \neq 0$) serão discutidos nas Seções 2.3 e 2.6, respectivamente.

A regra da constante e a regra da potência fornecem expressões simples para calcular as derivadas de funções importantes; para derivar funções mais complicadas, porém, precisamos saber como manipular algebricamente as derivadas. De acordo com as duas regras a seguir, as derivadas de múltiplos e somas de funções são os múltiplos e as somas das derivadas correspondentes.

Regra da Multiplicação por uma Constante ■ Se c é uma constante e $f(x)$ é uma função derivável, $cf(x)$ também é uma função derivável e

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Em palavras, a derivada de um múltiplo é o múltiplo da derivada.

EXEMPLO 2.2.3

$$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-7}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(-7x^{-1/2}) = -7\left(\frac{-1}{2}x^{-3/2}\right) = \frac{7}{2}x^{-3/2}$$

Regra da Soma ■ Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções deriváveis, a soma $S(x) = f(x) + g(x)$ também é uma função derivável e $S'(x) = f'(x) + g'(x)$, ou seja,

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Em palavras, a derivada de uma soma é a soma das derivadas das parcelas.

EXEMPLO 2.2.4

$$\frac{d}{dx}[x^{-2} + 7] = \frac{d}{dx}[x^{-2}] + \frac{d}{dx}[7] = -2x^{-3} + 0 = -2x^{-3}$$

$$\frac{d}{dx}[2x^5 - 3x^{-7}] = 2\frac{d}{dx}[x^5] - 3\frac{d}{dx}[x^{-7}] = 2(5x^4) - 3(-7x^{-8})$$
$$= 10x^4 + 21x^{-8}$$

Combinando a regra da soma com a regra da multiplicação por uma constante, podemos derivar um polinômio. Segue um exemplo.

EXEMPLO 2.2.5

Calcule a derivada do polinômio $y = 5x^3 - 4x^2 + 12x - 8$.

7 EXPLORE!

Entre com $f(x) = x^3 - 3x + 1$ como Y1 em sua calculadora gráfica, usando o estilo **BOLD**. Siga o mesmo procedimento que no exercício Explore! 6 para entrar com nDeriv(Y1, X, X) em Y2 e plotar as duas funções, usando uma janela decimal modificada [-4.7, 4.7]1 por [−5, 5]1. Use o modo **TRACE** para determinar os valores de x para os quais $f'(x) = 0$. O que você observa com relação ao gráfico de $f(x)$ nestes pontos? Qual é a equação de $f'(x)$?

Solução

Derivando esta soma termo a termo, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[5x^3] + \frac{d}{dx}[-4x^2] + \frac{d}{dx}[12x] + \frac{d}{dx}[-8] \\ &= 15x^2 - 8x^1 + 12x^0 + 0 \qquad \textit{pois } x^0 = 1 \\ &= 15x^2 - 8x + 12\end{aligned}$$

EXEMPLO 2.2.6

Estima-se que daqui a x meses a população de um certo município será $P(x) = x^2 + 20x + 8.000$.

a. Qual será a taxa de variação da população com o tempo após 15 meses?
b. Qual será a variação da população durante o 16º mês?

Solução

$-7x^{-\frac{1}{2}}$

a. A taxa de variação da população com o tempo é a derivada à função população:

$$\text{Taxa de variação} = P'(x) = 2x + 20$$

A taxa de variação da população daqui a 15 meses será, portanto,

$$P'(15) = 2(15) + 20 = 50 \text{ moradores por mês}$$

b. A variação da população durante o 16º mês é igual à diferença entre a população após 16 meses e a população após 15 meses:

$$\begin{aligned}\text{Variação da população} &= P(16) - P(15) = 8.576 - 8.525 \\ &= 51 \text{ moradores}\end{aligned}$$

NOTA No Exemplo 2.6, a variação da população durante o 16º mês, calculada no item (b), é diferente da taxa de variação no início do 16º mês, calculada no item (a), porque a taxa de variação muda durante o mês. A taxa instantânea, como a calculada no item (a), pode ser vista como a variação de população que ocorreria durante o 16º mês se a taxa da variação da população permanecesse constante durante todo o mês. ■

Taxas de Variação Relativa e Percentual

Em muitas aplicações práticas, a taxa de variação instantânea de uma grandeza Q não é tão importante quanto a taxa de variação *relativa*, definida através da expressão

$$\text{Variação relativa} = \frac{\text{variação de } Q}{\text{valor de } Q}$$

Assim, por exemplo, uma taxa de variação anual de 500 indivíduos em uma cidade cuja população é 5 milhões de habitantes corresponde uma taxa de variação relativa (ou taxa de variação *per capita*) insignificante, dada por

$$\frac{500}{5.000.000} = 0{,}0001$$

ou 0,01%, enquanto a mesma taxa de variação em uma cidade de 2.000 habitantes corresponde a uma taxa de variação relativa de

$$\frac{500}{2.000} = 0{,}25$$

ou 25%, o que pode significar muito para a cidade.

Como a taxa de variação de uma grandeza $Q(x)$ é medida pela derivada $Q'(x)$, podemos expressar da seguinte forma a taxa de variação relativa e a taxa de variação percentual associada:

Taxas de Variação Relativa e Percentual ■ A **taxa de variação relativa** de uma grandeza $Q(x)$ em relação a x é dada pela razão

$$\begin{bmatrix}\text{Taxa de variação}\\ \text{relativa de } Q(x)\end{bmatrix} = \frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{dQ/dx}{Q}$$

A **taxa de variação percentual** de uma grandeza $Q(x)$ em relação a x é dada por

$$\begin{bmatrix}\text{Taxa de variação}\\ \text{percentual de } Q(x)\end{bmatrix} = \frac{100\,Q'(x)}{Q(x)}$$

8 EXPLORE!

Leia o Exemplo 2.2.7. Compare a taxa de variação do PDB para $N(t)$ no instante $t = 10$ com a taxa de variação de um novo PDB dado por $N_1(t) = 2t^2 + 2t + 100$. Plote as duas funções usando x como variável independente e uma janela [3, 12.4]1 por [90, 350]0, onde uma escala de zero significa a ausência de marcas no eixo y. Como se comparam as duas taxas de variação do PDB no ano de 2005?

EXEMPLO 2.2.7

O produto interno bruto (PIB) de um certo país é dado por $N(t) = t^2 + 5t + 106$ bilhões de dólares, onde t é o número de anos após 1995.

a. Qual foi a taxa de variação do PIB em 2005?
b. Qual foi a taxa de variação percentual do PIB em 2005?

Solução

a. A taxa de variação do PIB é a derivada $N'(t) = 2t + 5$. A taxa de variação em 2005 foi $N'(10) = 2(10) + 5 = 25$ bilhões de dólares por ano.
b. A taxa de variação percentual do PIB foi

$$100\frac{N'(10)}{N(10)} = 100\frac{25}{256} \approx 9{,}77\% \text{ ao ano}$$

EXEMPLO 2.2.8

Os experimentos mostram que a biomassa $Q(t)$ de uma espécie de peixe em uma certa região do oceano varia de acordo com a equação

$$\frac{dQ}{dt} = rQ\left(1 - \frac{Q}{a}\right)$$

onde r é a taxa natural de expansão da espécie e a é uma constante.* Determine a taxa de expansão percentual da espécie. O que acontece quando $Q(t) > a$?

Solução

A taxa de variação percentual de $Q(t)$ é

$$\frac{100\,Q'(t)}{Q(t)} = \frac{100\,rQ\left(1 - \frac{Q}{a}\right)}{Q} = 100r\left(1 - \frac{Q}{a}\right)$$

Observe que a taxa de variação percentual diminui quando Q aumenta e se torna nula para $Q = a$. Para $Q > a$, a taxa se torna negativa, o que significa que a biomassa começa a diminuir.

*Adaptado de W. R. Derrick and S. I. Grossman, *Introduction to Differential Equations*, 3rd ed., St. Paul, MN: West Publishing, 1987, página 52, problema 20. Os autores esclarecem que se trata apenas de um dos muitos modelos discutidos em C. W. Clark, *Mathematical Bioeconomics*, Wiley-Interscience, 1976.

Movimento Retilíneo

O movimento de um corpo em linha reta é chamado de *movimento retilíneo*. O movimento de um foguete logo após o lançamento, por exemplo, pode ser considerado retilíneo. Quando estudamos o movimento retilíneo, podemos supor que o corpo está se movendo ao longo de um dos eixos de um sistema de coordenadas. Se a função $s(t)$ representa a *posição* do corpo no instante t, a taxa de $s(t)$ com t é a *velocidade* $v(t)$; a taxa de variação de $v(t)$ com t é a *aceleração* $a(t)$. Em outras palavras, $v(t) = s'(t)$ e $a(t) = v'(t)$.

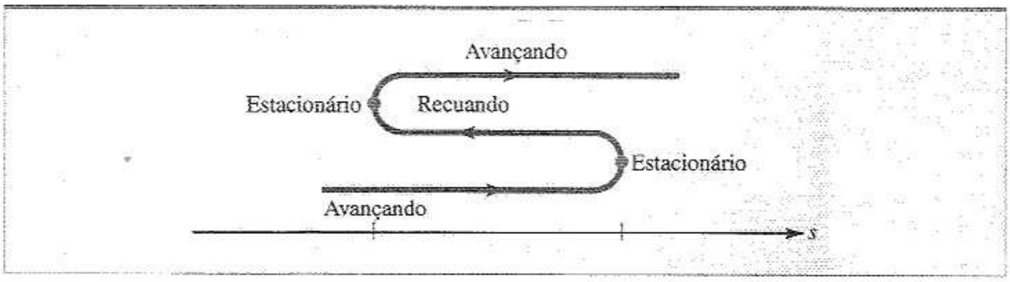


FIGURA 2.11 Diagrama do movimento retilíneo.

Dizemos que um corpo está *avançando* (movendo-se para a frente) quando $v(t) > 0$ e *recuando* (movendo-se para trás) quando $v(t) < 0$. Quando $v(t) = 0$, o corpo não está avançando nem recuando e dizemos que está *estacionário* (veja Figura 2.11). Finalmente, um corpo está *acelerando* quando $a(t) > 0$ e *desacelerando* quando $a(t) < 0$. Resumindo:

Movimento Retilíneo ■ Se a **posição** no instante t de um corpo que se move em linha reta é dada por $s(t)$, o corpo tem uma

$$\textbf{velocidade} \quad v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

e uma

$$\textbf{aceleração} \quad a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

O corpo está **avançando** se $v(t) > 0$, **recuando** se $v(t) < 0$ e **estacionário** se $v(t) = 0$. Está **acelerando** se $a(t) > 0$ e **desacelerando** se $a(t) < 0$.

Se a posição é medida em metros e o tempo em segundos, a velocidade é medida em metros por segundo (m/s) e a aceleração em metros por segundo ao quadrado (m/s²).

9 EXPLORE!

Faça a seguinte experiência: coloque a calculadora gráfica nos modos paramétrico, pontilhado e simultâneo. Entre com X1T = T, Y1T = 0,5, X2T = T e Y2T = T^3 − 6T^2 + 9T + 5. Plote usando uma janela de [0, 5]1 por [0, 10]1 e $0 \leq t \leq 4$ com um incremento de 0,2. Descreva suas observações. O que representa o eixo vertical? O que significa a linha pontilhada horizontal?

EXEMPLO 2.2.9

Um corpo se move em linha reta de tal forma que sua posição no instante t é dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$.

a. Determine a velocidade do corpo e discuta seu movimento entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.
b. Determine a distância percorrida pelo corpo entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.
c. Determine a aceleração do corpo e os intervalos de tempo nos quais está acelerando e desacelerando entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

Solução

a. A velocidade é dada por $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$. O corpo está estacionário quando

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

isto é, nos instantes $t = 1$ e $t = 3$. Em todos os outros instantes, o corpo está avançando ou recuando, como mostra a tabela a seguir.

Intervalo	Sinal de $v(t)$	Descrição do Movimento
$0 < t < 1$	+	Avança de $s(0) = 5$ para $s(1) = 9$
$1 < t < 3$	−	Recua de $s(1) = 9$ para $s(3) = 5$
$3 < t < 4$	+	Avança de $s(3) = 5$ para $s(4) = 9$

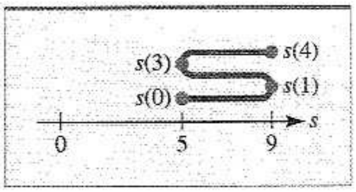


FIGURA 2.12 Movimento de um corpo: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$.

O diagrama da Figura 2.12 mostra o movimento do corpo.

b. O corpo se desloca para a frente de $s(0) = 5$ até $s(1) = 9$, volta para $s(3) = 5$ e, finalmente, se desloca para a frente até $s(4) = 9$. Assim, a distância total percorrida é

$$D = \underbrace{|9 - 5|}_{0<t<1} + \underbrace{|5 - 9|}_{1<t<3} + \underbrace{|9 - 5|}_{3<t<4} = 12$$

c. A aceleração do corpo é dada por

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 = 6(t - 2)$$

O corpo está acelerando $[a(t) > 0]$ no intervalo $2 < t < 4$ e desacelerando $[a(t) < 0]$ no intervalo $0 < t < 2$.

Movimento de um Projétil

Um exemplo importante de movimento retilíneo é o movimento de um projétil. Suponha que um corpo seja lançado (isto é, arremessado, disparado ou largado) verticalmente de tal forma que a única aceleração que age sobre o corpo seja a aceleração da gravidade g. Perto do nível do mar, g é aproximadamente 9,8 m/s^2. É possível demonstrar que, no instante t, a altitude do corpo é dada pela equação

$$H(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + V_0t + H_0$$

onde H_0 e V_0 são, respectivamente, a altitude inicial e a velocidade inicial do corpo. Apresentamos a seguir um exemplo do uso desta equação.

EXEMPLO 2.2.10

Uma pessoa que está no alto de um edifício de 34 metros de altura lança uma bola verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 29 m/s (Figura 2.13).

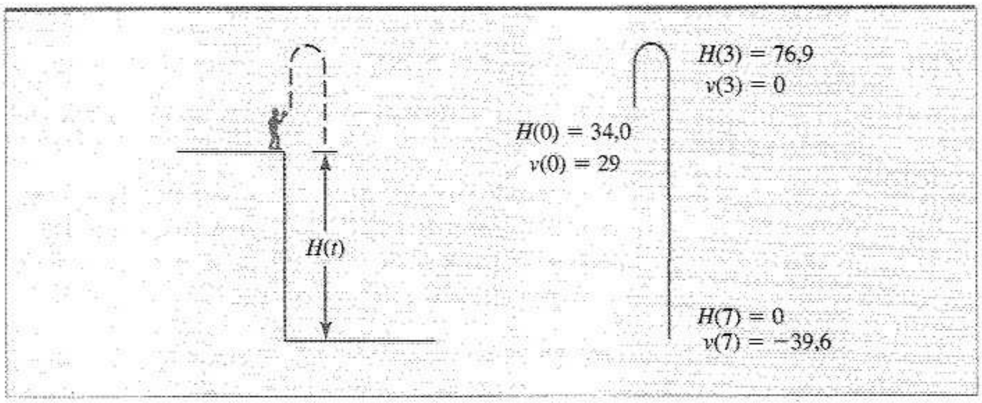


FIGURA 2.13 Movimento de uma pedra arremessada para cima do alto de um edifício.

a. Determine a altura e velocidade da bola no instante t.
b. Em que instante a bola chega ao chão e qual a velocidade no momento do impacto?
c. Em que momento a velocidade é nula? O que acontece neste momento?
d. Qual é a distância total percorrida pela bola?

Solução

a. Como $g = 9{,}8$, $V_0 = 29$ e $H_0 = 34$, a altura da bola em relação ao solo no instante t é dada por

$$H(t) = -4{,}9t^2 + 29t + 34 \text{ metros}$$

A velocidade no instante t é

$$v(t) = \frac{dH}{dt} = -9{,}8t + 29 \text{ m/s}$$

b. No instante em que a bola chega ao chão, $H = 0$. Resolvendo a equação $-4{,}9t^2 + 29t + 34 = 0$, verificamos que isto ocorre para $t = 7$ e para $t = -1$ (verifique). Desprezando o tempo negativo $t = -1$, que não faz sentido neste contexto, chegamos à conclusão de que o impacto ocorre no instante $t = 7$ s e que a velocidade no momento do impacto é

$$v(7) = -9{,}8(7) + 29 = -39{,}6$$

(O sinal negativo significa que a bola está descendo no momento do impacto.)

c. A velocidade é nula quando $v(t) = -9{,}8t + 29 = 0$, o que acontece no instante $t = 3$ s. Para $t < 3$, a velocidade é positiva e a bola está subindo; para $t > 3$, a velocidade é negativa e a bola está descendo (Figura 2.13). Assim, a bola atinge o ponto mais alto da trajetória no instante $t = 3$ s.

d. A bola é lançada de uma altura $H(0) = 34$ metros e atinge uma altura máxima $H(3) = 76{,}9$ metros antes de cair. Assim,

$$\text{Distância total} = \underbrace{(76{,}9 - 34{,}0)}_{\textit{subindo}} + \underbrace{76{,}9}_{\textit{descendo}} = 119{,}8 \text{ metros}$$

PROBLEMAS | 2.2

Nos Problemas 1 a 25, calcule a derivada da função dada. Simplifique as respostas.

1. $y = x^{-4}$ $= -4x^{-3}$

2. $y = x^{7/3}$

3. $y = -2$ $= 0$

4. $y = x^{3,7}$

5. $y = \pi r^2$ $= 2\pi r$

6. $y = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

7. $y = \sqrt{2x}$ $= 2x^{\frac{1}{2}}$

8. $y = 2\sqrt[4]{x^3}$

9. $y = \dfrac{9}{\sqrt{t}}$ $9t^{-\frac{1}{2}} = \frac{9}{2\sqrt{t}}$

10. $y = \dfrac{3}{2t^2}$

11. $y = x^2 + 2x + 3$ $2x + 2$

12. $y = 3x^5 - 4x^3 + 9x - 6$

13. $f(x) = x^9 - 5x^8 + x + 12$ $9x^8 - 40x^7 + 1$

14. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^8 - \dfrac{1}{2}x^6 - x + 2$

15. $f(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}3x$

16. $f(u) = 0{,}07u^4 - 1{,}21u^3 + 3u - 5{,}2$

17. $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

18. $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{3x^3}$

19. $f(x) = \sqrt{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

20. $f(t) = 2\sqrt{t^3} + \dfrac{4}{\sqrt{t}} - \sqrt{2}$

21. $y = -\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{2}{x} - x^{3/2} + \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{x}{3}$

22. $y = \dfrac{-7}{x^{1,2}} + \dfrac{5}{x^{-2,1}}$

23. $y = -\dfrac{2}{x^2} + x^{2/3} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x^2}{4} + \sqrt{5} + \dfrac{x+2}{3}$

24. $y = x^2(x^3 - 6x + 7)$ [*Sugestão:* Primeiramente multiplique.]

25. $y = \dfrac{x^5 - 4x^2}{x^3}$ [*Sugestão:* Primeiramente divida.]

$\frac{x^2 - 4x}{x}$

Nos Problemas 26 a 31, determine a equação de uma reta que seja tangente à curva da função dada no ponto especificado.

26. $y = x^5 - 3x^3 - 5x + 2$; $(1, -5)$

27. $y = -x^3 - 5x^2 + 3x - 1$; $(-1, -8)$

28. $y = \sqrt{x^3} - x^2 + \dfrac{16}{x^2}$; $(4, -7)$

29. $y = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; $\left(4, \dfrac{7}{4}\right)$

30. $y = 2x^4 - \sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$; $(1, 4)$

31. $y = (x^2 - x)(3 + 2x)$; $(-1, 2)$

Nos Problemas 32 a 37, determine a equação de uma reta que seja tangente à curva da função dada no ponto $(c, f(c))$ correspondente ao valor de c especificado.

32. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$; $x = 2$

33. $f(x) = -2x^3 + \dfrac{1}{x^2}$; $x = -1$

34. $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$; $x = 4$

35. $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$; $x = 1$

36. $f(x) = x(\sqrt{x} - 1)$; $x = 4$

37. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + \sqrt{8x}$; $x = 2$

Nos Problemas 38 a 43, determine a taxa de variação com x da função f(x) dada no ponto x especificado.

38. $f(x) = x^3 - 3x + 5$; $x = 2$

39. $f(x) = 2x^4 + 3x + 1$; $x = -1$

40. $f(x) = \sqrt{x} + 5x$; $x = 4$

41. $f(x) = x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$; $x = 1$

42. $f(x) = \dfrac{2}{x} - x\sqrt{x}$; $x = 1$

43. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $x = 1$

44. CIRCULAÇÃO DE UM JORNAL Estima-se que daqui a t anos a circulação de um jornal será $C(t) = 100t^2 + 400t + 5.000$.

a. Encontre uma expressão para a taxa de variação da circulação com o tempo daqui a t anos.

b. Qual será a taxa de variação da circulação com o tempo daqui a 5 anos? A circulação estará aumentando ou diminuindo nesta ocasião?

c. Qual será a variação da circulação durante o sexto ano?

45. POLUIÇÃO DO AR Um estudo ambiental realizado em um certo bairro revela que daqui a t anos a concentração de monóxido de carbono no ar será $Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4$ partes por milhão.

a. Qual será a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono com o tempo daqui a 1 ano?

b. Qual será a variação da concentração de monóxido de carbono durante o primeiro ano?

c. Qual será a variação da concentração de monóxido de carbono durante os 2 anos seguintes?

46. EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA Um estudo realizado em uma certa fábrica mostra que os operários do turno da manhã, que chegam para trabalhar às 8 h, terão montado, em média, $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ receptores de rádio x horas mais tarde.

a. Escreva uma expressão para a o número de receptores por hora que os operários estarão montando x horas depois de começarem a trabalhar.

b. Quantos receptores por hora os operários estarão montando às 9 h?

c. Quantos receptores os operários montam entre 9 h e 10 h?

47. TESTES ESCOLARES Estima-se que daqui a x anos a nota média de matemática no vestibular de uma certa universidade será $f(x) = -6x + 582$.

a. Encontre uma expressão para a taxa com a qual a nota média de matemática estará variando com o tempo daqui a x anos.

b. O que significaria o fato de a expressão do item (a) ser uma constante? O que significa o fato de que a constante do item (a) é negativa?

48. TRANSPORTE COLETIVO Após x semanas, o número de pessoas que usavam uma nova linha de ônibus era aproximadamente $N(x) = 6x^3 + 500x + 8.000$.

a. Com que taxa o número de usuários da linha estava variando com o tempo após 8 semanas?

b. Qual foi a variação do número de usuários da linha durante a oitava semana?

49. IMPOSTO PREDIAL Os registros mostram que x anos depois de 2000, o imposto predial médio que incidia sobre um apartamento de três quartos em um certo município era $T(x) = 20x^2 + 40x + 600$ reais.

a. Qual era a taxa de aumento do imposto predial com o tempo no início do ano 2000?

b. Qual foi a variação do imposto predial entre os anos 2000 e 2004?

50. CRESCIMENTO DE UM TUMOR Um tumor canceroso é modelado por uma esfera com R cm de raio. Qual é a taxa de variação do volume $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ do tumor com o raio R para $R = 0{,}75$ cm?

51. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA Uma pesquisa mostra que t dias após uma epidemia começar, $N(t) = 10t^3 + 5t + \sqrt{t}$ pessoas estão infectadas, para $0 \le t \le 20$. Com que taxa o número de pessoas infectadas está aumentando no nono dia?

52. PUBLICIDADE Um fabricante de motocicletas estima que se gastar x milhares de reais por ano em publicidade conseguirá vender

$$M(x) = 2.300 + \frac{125}{x} - \frac{517}{x^2} \qquad 3 \le x \le 18$$

motocicletas. Qual será a taxa de variação das vendas com a quantia gasta se o fabricante investir R$ 9.000,00 em publicidade? Para este nível de publicidade as vendas aumentam ou diminuem com o aumento da quantia investida?

53. **GERENCIAMENTO DE CUSTOS** Uma empresa usa um caminhão para entregar seus produtos. Para estimar os custos, o gerente modela o consumo de combustível do caminhão usando a função

$$G(x) = \frac{1}{250}\left(\frac{1.200}{x} + x\right)$$

litros/quilômetro, supondo que o caminhão trafega a uma velocidade constante de x quilômetros por hora, para $x \geq 5$. O motorista recebe R$ 20,00 por hora para dirigir o caminhão por 250 quilômetros e o preço do litro de combustível é R$ 1,90.
   a. Escreva uma expressão para o custo total $C(x)$ de uma viagem de 250 quilômetros.
   b. Qual é a taxa com a qual o custo $C(x)$ varia em relação a x quando o caminhão está a 40 quilômetros por hora? A esta velocidade o custo aumenta ou diminui quando a velocidade aumenta?

54. **FÍSICO-QUÍMICA** De acordo com a fórmula de Debye da físico-química, a polarização orientacional P de um gás é dada pela equação

$$P = \frac{4}{3}\pi N\left(\frac{\mu^2}{3kT}\right)$$

onde μ, k e N são constantes positivas e T é a temperatura do gás. Determine a taxa de variação de P com T.

Nos Problemas 55 e 56, determine a taxa de variação relativa de $f(x)$ com x para $x = 1$.

55. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$

56. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

57. **RECEITA ANUAL** A receita anual bruta de uma certa empresa foi $A(t) = 0{,}1t^2 + 10t + 20$ milhares de reais t anos após a empresa ter sido fundada no ano 2000.
   a. A que taxa a receita anual bruta da empresa estava aumentando com o tempo em 2004?
   b. A que taxa percentual a receita anual bruta da empresa estava aumentando com o tempo em 2004?

58. **CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO** Estima-se que a população de uma certa cidade será $P(t) = t^2 + 200t + 10.000$ daqui a t anos.
   a. Expresse a taxa de variação percentual da população em função de t, simplifique algebricamente esta função e plote o gráfico associado.
   b. O que acontece com a taxa de variação percentual da população a longo prazo (ou seja, para valores muito grandes de t)?

59. **AUMENTO SALARIAL** O salário inicial de um certo empregado é R$ 45.000,00 por ano e todo ano ele recebe um aumento de R$ 2.000,00.
   a. Expresse a taxa de variação percentual do salário do empregado em função do tempo e plote o gráfico associado.
   b. Qual é a taxa de variação do salário com o tempo após 1 ano?
   c. O que acontece com a taxa de variação percentual do salário a longo prazo?

60. **PRODUTO INTERNO BRUTO** O produto interno bruto de um certo país está crescendo a uma taxa constante. Em 1995, o PIB foi 125 bilhões de dólares; em 2003, foi 155 bilhões de dólares. Se a tendência continuar, qual será a taxa de crescimento do PIB em 2010?

61. **CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO** Segundo as projeções, a população de uma certa cidade daqui a x meses será $P(x) = 2x + 4x^{3/2} + 5.000$.
   a. A que taxa a população estará variando com o tempo daqui a 9 meses?
   b. A que taxa percentual a população estará variando com o tempo daqui a 9 meses?

62. **DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA** Uma doença está se disseminando de tal forma que após t semanas o número de pessoas infectadas é

$$N(t) = 5.175 - t^3(t - 8) \qquad 0 \leq t \leq 8$$

   a. A que taxa a doença está se disseminando após 3 semanas?
   b. Suponha que as autoridades considerem que uma doença atingiu proporções epidêmicas quando a taxa de variação percentual do número de casos ultrapassa 25%. Qual é o período de tempo no qual esta condição é satisfeita?
   c. Leia um artigo sobre epidemiologia e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito da relação entre a política de saúde pública e a disseminação das doenças.

63. **ORNITOLOGIA** Um ornitólogo determina que a temperatura corporal de uma certa espécie de ave varia durante um período aproximado de 17 horas de acordo com a expressão

$$T(t) = -68{,}07t^3 + 30{,}98t^2 + 12{,}52t + 37{,}1$$

para $0 \leq t \leq 0{,}713$, onde T é a temperatura em graus Celsius t dias após o início de um período.
   a. Calcule e interprete a derivada $T'(t)$.
   b. A que taxas a temperatura está variando no início do período ($t = 0$) e no final do período ($t = 0{,}713$)? A temperatura está aumentando ou diminuindo nesses instantes?
   c. Em que instante a temperatura não está aumentando nem diminuindo? Qual é a temperatura da ave nessa ocasião? Interprete o resultado.

MOVIMENTO RETILÍNEO *Nos Problemas 64 a 67, $s(t)$ é a posição no instante t de uma partícula que está se movendo em linha reta.*
   (a) Determine a velocidade e a aceleração da partícula.
   (b) Determine todos os instantes no intervalo dado em que a partícula está estacionária.

64. $s(t) = t^2 - 2t + 6$ para $0 \leq t \leq 2$

65. $s(t) = 3t^2 + 2t - 5$ para $0 \leq t \leq 1$

66. $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 25$ para $0 \leq t \leq 6$

67. $s(t) = t^4 - 4t^3 + 8t$ para $0 \leq t \leq 4$

68. **MOVIMENTO DE UM CORPO** Deixa-se cair uma pedra de uma altura de 43 metros.
   a. Quanto tempo a pedra leva para atingir o solo?
   b. Qual é a velocidade no momento do impacto?

69. MOVIMENTO DE UM CORPO Um homem está no alto de um edifício e joga uma bola verticalmente para cima. Depois de 2 segundos, a bola passa novamente pelo homem e 2 segundos mais tarde se choca com o solo.

a. Qual é a velocidade inicial da bola?
b. Qual é a altura do edifício?
c. Qual é a velocidade da bola ao passar pelo homem?
d. Qual é a velocidade da bola ao chegar ao solo?

70. ESPIONAGEM Nosso amigo, o espião que escapou dos contrabandistas de diamantes no Capítulo 1 (Problema 46 da Seção 1.4) está em uma missão secreta no espaço. Uma luta com um agente inimigo o deixa com uma leve concussão e uma amnésia temporária. Felizmente, ele dispõe de um livro que contém a fórmula do movimento de um projétil e os valores de g em vários corpos celestes (9,8 m/s^2 na Terra, 1,7 m/s^2 na Lua, 3,7 m/s^2 em Marte e 8,5 m/s^2 em Vênus). Para descobrir onde se encontra, joga uma pedra verticalmente para cima (a partir do solo) e observa que ela atinge uma altura máxima de 11,4 m e atinge o solo 5 s após deixar sua mão. Onde está o espião?

71. Determine três números, a, b e c, tais que a curva da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepte o eixo x nos pontos (0, 0) e (5, 0) e possua uma tangente de inclinação 1 em $x = 2$.

72. Determine as equações de todas as tangentes à curva da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 25$$

que passam pela origem (0, 0).

73. Demonstre a regra da soma para derivadas. *Sugestão:* Observe que o quociente diferença de $f + g$ pode ser escrito na forma

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

74. a. Se $f(x) = x^4$, mostre que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$

b. Se $f(x) = x^n$, onde n é um número inteiro positivo, mostre que

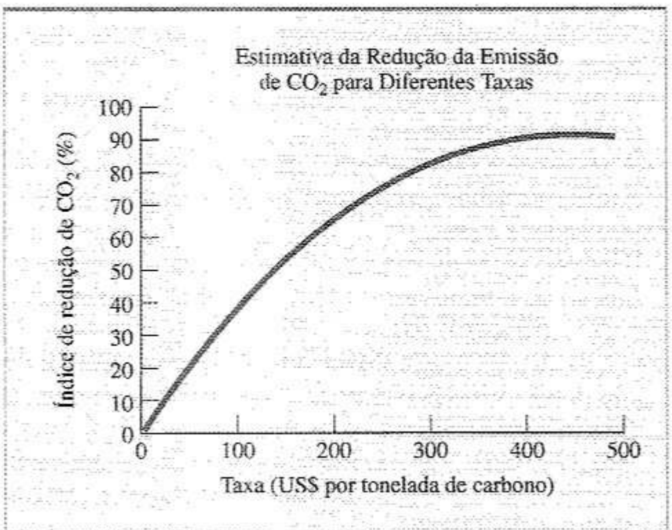
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

c. Use o resultado do item (b) e a definição de derivada para demonstrar a regra da potência:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

75. CONTROLE DA POLUIÇÃO Uma forma de reduzir as emissões de dióxido de carbono (CO_2) seria criar uma taxa que se aplicasse a todas as nações. O gráfico mostra a relação entre diferentes valores da taxa sobre o carbono e a redução percentual das emissões de CO_2.

a. Qual deve ser a taxa para que haja uma redução de 50% nas emissões de CO_2?
b. Use o gráfico para estimar a taxa de variação da redução percentual das emissões de CO_2 quando a taxa é de 200 dólares por tonelada.
c. Leia a respeito das emissões de CO_2 e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do uso de políticas governamentais para controlar a poluição do ar.*



PROBLEMA 75 *Fonte:* Barry C. Field, *Environmental Economics: An Introduction*. New York: McGraw-Hill, 1994, p. 441.

*O leitor pode começar a pesquisa consultando o Capítulo 12, "Incentive-Based Strategies: Emission Taxes and Subsidies" e o Capítulo 15, "Federal Air Pollution-Control Policy", de Barry C. Field, *Environmental Economics: An Introduction*, New York: McGraw-Hill, 1994.

SEÇÃO 2.3 Regras do Produto e do Quociente; Derivadas de Ordem Superior

Depois de conhecer as regras da soma e da multiplicação por uma constante, discutidas na Seção 2.2, o leitor talvez tenha chegado à conclusão de que a derivada do produto de duas funções é o produto das derivadas das funções, mas é fácil mostrar que esta conjectura não pode ser verdadeira. Por exemplo: se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 3x^2$; logo,

$$f'(x)g'(x) = (2x)(3x^2) = 6x^3$$

enquanto $f(x)g(x) = x^2x^3 = x^5$ e, portanto,

$$[f(x)g(x)]' = (x^5)' = 5x^4$$

A regra correta para derivar um produto é a seguinte:

Regra do Produto ■ Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis no ponto x, o produto $P(x) = f(x)g(x)$ também é derivável e

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

o que também pode ser escrito como

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Em palavras, a derivada do produto fg é igual f vezes a derivada de g mais g vezes a derivada de f.

Aplicando a regra do produto ao nosso exemplo introdutório, temos:

$$(x^2 \cdot x^3) =$$

$$\begin{aligned}(x^2x^3)' &= x^2(x^3)' + (x^3)(x^2)' \\ &= (x^2)(3x^2) + (x^3)(2x) = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4\end{aligned}$$

$$x^2 \cdot x^{3'} + x^3 \cdot x^{2'}$$

que é igual ao resultado obtido diretamente:

$$(x^2) \cdot 3x^2 + (x^3) \cdot 2x$$

$$(x^2x^3)' = (x^5)' = 5x^4$$

$$3x^4 + 2x^4 = 5x^4$$

Dois exemplos adicionais são apresentados a seguir.

10 EXPLORE!

Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x) = (x - 1)(3x - 2)$ usando uma janela [0, 2]0,1 por [−1, 1]0,1. Determine $f'(x)$ e plote a função no mesmo gráfico que $f(x)$. Explique por que o gráfico de $f'(x)$ é uma linha reta. Explique o que acontece de especial com a função $f(x)$ no ponto em que $f'(x) = 0$.

EXEMPLO 2.3.1

Calcule a derivada da função $P(x) = (x - 1)(3x - 2)$ = $(x-1)\cdot(3x-2)' + (3x-2)\cdot(x$

$x - 1(3) + (3x-2) =$

a. Expandindo $P(x)$ e usando a regra do polinômio.
b. Usando a regra do produto.

Solução

a. Como $P(x) = (x - 1)(3x - 2) = 3x^2 - 5x + 2$, $P'(x) = 6x - 5$.
b. De acordo com a regra do produto, temos:

$$\begin{aligned}P'(x) &= (x - 1)\frac{d}{dx}[3x - 2] + (3x - 2)\frac{d}{dx}[x - 1] \\ &= (x - 1)(3) + (3x - 2)(1) = 6x - 5\end{aligned}$$

11 EXPLORE!

Entre com a função do Exemplo 2.3.2, $y = (2x + 1)(2x^2 - x - 1)$ no editor de equações como Y1. Plote usando a janela decimal modificada [2.35, 2,35]1 por [−3.1, 3.1]1 e use **TRACE** para colocar o cursor em X = 1. Construa a reta tangente à curva neste ponto usando a opção Tangent de **DRAW (2nd PRGM)**. A equação da tangente é igual à obtida no exemplo?

EXEMPLO 2.3.2

Para a curva $y = (2x + 1)(2x^2 - x - 1)$:

a. Determine y'.
b. Determine a equação da reta tangente à curva no ponto em que $x = 1$.
c. Determine todos os pontos da curva nos quais a tangente é horizontal.

Solução

a. De acordo com a regra do produto, temos:

$$\begin{aligned} y' &= (2x + 1)\,[2x^2 - x - 1]' + [2x + 1]'\,(2x^2 - x - 1) \\ &= (2x + 1)(4x - 1) + (2)(2x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

b. Se $x = 1$, o valor correspondente de y é

$$y(1) = [2(1) + 1][2(1)^2 - 1 - 1] = 0$$

e, portanto, o ponto de tangência é $(1, 0)$. A inclinação em $x = 1$ é

$$y'(1) = [2(1) + 1][4(1) - 1] + 2[2(1)^2 - 1 - 1] = 9$$

Substituindo na fórmula ponto-inclinação, descobrimos que a equação da reta tangente no ponto (1, 0) é

$$y - 0 = 9(x - 1)$$

ou

$$y = 9x - 9$$

c. Para que uma tangente seja horizontal, é preciso que a inclinação seja zero, ou seja, devemos ter $y' = 0$. Expandindo a expressão da derivada e combinando termos, obtemos

$$y' = (2x + 1)(4x - 1) + (2)(2x^2 - x - 1) = 12x^2 - 3$$

Resolvendo a equação $y' = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} y' &= 12x^2 - 3 = 0 \\ x^2 &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} && \textit{somando 3 a ambos os membros e dividindo por 12} \\ x &= \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Fazendo $x = \frac{1}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$ na expressão de y, obtemos $y\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ e $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$; assim, as tangentes horizontais ocorrem nos pontos $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ da curva.

EXEMPLO 2.3.3

Um fabricante determina que t meses após o lançamento de um novo produto no mercado, $x(t) = t^2 + 3t$ centenas de unidades podem ser produzidas e vendidas por um preço unitário $p(t) = 2t^{3/2} + 30$ reais.

a. Expresse a receita $R(t)$ com a venda do produto em função do tempo.
b. Com que taxa a receita está variando em relação ao tempo 4 meses após o lançamento do produto? A receita está aumentando ou diminuindo nesta ocasião?

Solução

a. A receita é dada por

$$R(t) = x(t)p(t) = (t^2 + 3t)(-2t^{3/2} + 30)$$

centenas de reais.

b. A taxa de variação da receita $R(t)$ em relação ao tempo é dada pela derivada $R'(t)$, que podemos calcular usando a regra do produto:

$$
\begin{aligned}
R'(t) &= (t^2 + 3t)\frac{d}{dt}[-2t^{3/2} + 30] + (-2t^{3/2} + 30)\frac{d}{dt}[t^2 + 3t] \\
&= (t^2 + 3t)\left[-2\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)\right] + (-2t^{3/2} + 30)[2t + 3]
\end{aligned}
$$

No instante $t = 4$, a taxa de variação da receita é

$$
\begin{aligned}
R'(4) &= [(4)^2 + 3(4)][-3(4)^{1/2}] + [-2(4)^{3/2} + 30][2(4) + 3] \\
&= -14
\end{aligned}
$$

Assim, após 4 meses, a receita está variando à taxa de 14 centenas de reais (R$ 1.400,00) por mês. Nesta ocasião, a receita está *diminuindo*, já que $R'(4)$ é negativa.

Uma demonstração da regra do produto aparece no final desta seção. Também é importante saber derivar quocientes de funções; para este fim, dispomos da regra a seguir, cuja demonstração fica a cargo do leitor (Problema 71).

ATENÇÃO: Um erro comum é supor que $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$.

Regra do Quociente ■ Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis, o quociente $Q(x) = f(x)/g(x)$ também é diferenciável e

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{g^2(x)} \quad \text{para } g(x) \neq 0
$$

o que também pode ser escrito como

$$
\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}
$$

NOTA A regra do quociente é provavelmente a regra mais complicada que apresentamos até o momento neste livro. Talvez seja interessante observar que o numerador do resultado se parece com a regra do produto, a não ser pelo fato de que possui um sinal negativo, o que torna a ordem dos termos muito importante. Comece por elevar o denominador g ao quadrado para obter o denominador; em seguida, ainda pensando em g, comece a montar o numerador. Isto o ajudará a colocar os termos do numerador na ordem correta; para escrever o resto, basta recordar a regra do produto. Não se esqueça de colocar o sinal negativo entre o primeiro e o segundo termos do numerador!

EXEMPLO 2.3.4

Calcule a derivada do quociente $Q(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{2x}$

a. Efetuando a divisão.

b. Usando a regra do quociente.

Lembrete

Lembre-se de que

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

mas que

$$\frac{A}{B+C} \neq \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Solução

a. Dividindo o numerador por $2x$, temos:

$$Q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}x^{-1}$$

e, portanto,

$$Q'(x) = \frac{1}{2} - 0 + \frac{7}{2}(-x^{-2}) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2}$$

b. Aplicando a regra do quociente,

$$Q'(x) = \frac{(2x)\dfrac{d}{dx}[x^2 - 5x + 7] - (x^2 - 5x + 7)\dfrac{d}{dx}[2x]}{(2x)^2}$$
$$= \frac{(2x)(2x - 5) - (x^2 - 5x + 7)(2)}{4x^2} = \frac{2x^2 - 14}{4x^2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2}$$

EXEMPLO 2.3.5

Um biólogo modela o efeito da introdução de uma toxina em uma colônia de bactérias através da função

$$P(t) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 4}$$

onde P é a população da colônia (em milhões) t horas após a toxina ser introduzida.

a. Com que taxa a população está variando no momento em que a toxina é introduzida? A população está aumentando ou diminuindo nesta ocasião?

b. Em que instante a população começa a diminuir? De quanto a população aumenta antes de começar a diminuir?

Solução

a. A taxa de variação da população com o tempo é dada pela derivada $P'(t)$, que podemos calcular usando a regra do quociente:

$$P'(t) = \frac{(t^2 + t + 4)\dfrac{d}{dt}[t + 1] - (t + 1)\dfrac{d}{dt}[t^2 + t + 4]}{(t^2 + t + 4)^2}$$
$$= \frac{(t^2 + t + 4)(1) - (t + 1)(2t + 1)}{(t^2 + t + 4)^2}$$
$$= \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2 + t + 4)^2}$$

A toxina é introduzida em $t = 0$; neste instante, a taxa de variação da população é

$$P'(0) = \frac{(0 + 0 + 3)}{(0 + 0 + 4)^2} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

Isto significa que a população inicialmente está variando a uma taxa de 0,1875 milhões de bactérias (187.500) por hora e está aumentando, já que $P'(0) > 0$.

b. Para que a população diminua, é preciso que $P'(t) < 0$. Como o numerador de $P'(t)$ pode ser fatorado como

$$-t^2 - 2t + 3 = -(t^2 + 2t - 3) = -(t - 1)(t + 3)$$

podemos escrever

$$P'(t) = \frac{-(t - 1)(t + 3)}{(t^2 + t + 4)^2}$$

Como o denominador $(t^2 + t + 4)^2$ e o fator $t + 3$ são positivos para qualquer valor de $t \geq 0$, podemos escrever:

para $0 \leq t < 1$ $P'(t) > 0$ e $P(t)$ está aumentando
para $t \geq 1$ $P'(t) < 0$ e $P(t)$ está diminuindo

Assim, a população começa a diminuir após 1 hora.

A população inicial da colônia é

$$P(0) = \frac{0+1}{0+0+4} = \frac{1}{4}$$

milhões; após 1 hora, passa a ser

$$P(1) = \frac{1+1}{1+1+4} = \frac{1}{3}$$

milhões. Assim, antes de começar a diminuir, a população aumenta de

$$P(1) - P(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

milhões, o que corresponde a 83.333 bactérias.

Uma Palavra de Alerta

A regra do quociente é trabalhosa e não deve ser usada desnecessariamente. Considere o Exemplo 2.3.6.

EXEMPLO 2.3.6

Calcule a derivada da função $y = \frac{2}{3x^2} - \frac{x}{3} + \frac{4}{5} + \frac{x+1}{x}$.

Solução

Não use a regra do quociente! Em vez disso, escreva a função na forma

$$y = \frac{2}{3}x^{-2} - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5} + 1 + x^{-1}$$

e use a regra da potência termo a termo para obter

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(-2x^{-3}) - \frac{1}{3} + 0 + 0 + (-1)x^{-2}\\ &= -\frac{4}{3}x^{-3} - \frac{1}{3} - x^{-2}\\ &= -\frac{4}{3x^3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

A Derivada Segunda

Em muitos problemas práticos é necessário calcular a taxa de variação de uma grandeza que já é a taxa de variação de outra grandeza. Assim, por exemplo, a aceleração de um automóvel é taxa de variação da velocidade com o tempo, mas a velocidade é a taxa de variação da distância com o tempo. Se a distância é medida em quilômetros e o tempo em horas, a velocidade (ou taxa de variação da distância) é medida em quilômetros por hora e a aceleração (ou taxa de variação da velocidade) é medida em quilômetro por hora ao quadrado.

Problemas que envolvem a taxa de variação de uma taxa de variação são freqüentes na economia. Em períodos de inflação, por exemplo, um economista do governo pode assegurar à nação que, embora a inflação esteja aumentando, a taxa de aumento da inflação está diminuindo. Em outras palavras, embora os preços continuem subindo, estão subindo mais devagar que no passado.

A taxa de variação da função $f(x)$ em relação a x é a derivada $f'(x)$; da mesma forma, a taxa de variação da função $f'(x)$ em relação a x é a derivada de f', $(f'(x))'$. Para simplificar a notação, escrevemos a derivada da derivada de $f(x)$ como $f''(x)$ e a chamamos de *derivada segunda* de $f(x)$ (o símbolo $f''(x)$ é lido como "f duas linhas de x"). Se $y = f(x)$, a derivada segunda de y em relação a x é escrita como y'' ou como $\frac{d^2y}{dx^2}$. Apresentamos a seguir um resumo da notação usada para representar derivadas segundas.

Derivada Segunda ■ A derivada segunda de uma função é a derivada da derivada da função. Se $y = f(x)$, a derivada segunda é representada como

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f''(x)$$

A derivada segunda corresponde à taxa de variação da taxa de variação da função original.

NOTA A derivada comum, $f'(x)$, é chamada de **derivada primeira** quando há necessidade de distingui-la da **derivada segunda**, $f''(x)$.

Não há necessidade de novas regras para obter a derivada segunda de uma função; basta calcular a derivada da função e derivá-la mais uma vez usando as regras já conhecidas.

12 EXPLORE!

Uma calculadora gráfica pode ser usada para plotar a curva de uma derivada de ordem superior. Entre como Y1 a função

$f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 7$

e faça

Y2 = nDeriv(Y1, X, X)

e

Y3 = nDeriv(Y2, X, X)

mudando o estilo de Y3 para **BOLD**. Plote as três funções usando uma janela [−1, 1]1 por [−10, 10]1.

EXEMPLO 2.3.7

Calcule a derivada segunda da função $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 7$.

Solução

Calcule a derivada primeira

$$f'(x) = 20x^3 - 6x - 3$$

e derive novamente para obter

$$f''(x) = 60x^2 - 6$$

EXEMPLO 2.3.8

Calcule a derivada segunda da função $y = x^2(3x + 1)$

Solução

De acordo com a regra do produto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2(3x+1)] &= x^2\frac{d}{dx}[3x+1] + (3x+1)\frac{d}{dx}[x^2] \\ &= x^2(3) + (3x+1)(2x) \\ &= 9x^2 + 2x\end{aligned}$$

Assim, a derivada segunda é

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}[9x^2 + 2x] \\ &= 18x + 2\end{aligned}$$

NOTA Antes de calcular a derivada segunda, não deixe de simplificar a derivada primeira tanto quanto possível. Quanto mais complicada for a derivada primeira, mais trabalhoso será o cálculo da derivada segunda.

A derivada segunda será usada na Seção 3.2 para obter informações a respeito da forma das curvas e nas Seções 3.4 e 3.5 em problemas de otimização. O exemplo a seguir mostra uma aplicação mais elementar, na qual a derivada segunda é interpretada como a taxa de variação de uma taxa de variação.

EXEMPLO 2.3.9

Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã de uma certa fábrica revela que um operário que chega ao trabalho às 8 h terá produzido

$$Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$$

unidades t horas mais tarde.

a. Calcule a taxa de produção dos operários às 11 h.
b. Qual é a taxa de variação da taxa de produção dos operários às 11 h?

Solução

a. A taxa de produção dos operários é a derivada primeira

$$R(t) = Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$$

da função de produção $Q(t)$. Às 11 h, $t = 3$ e a taxa de produção é

$$\begin{aligned} R(3) = Q'(3) &= -3(3)^2 + 12(3) + 24 = 33 \\ &= 33 \text{ unidades por hora} \end{aligned}$$

b. A taxa de variação da taxa de produção é a derivada segunda

$$R'(t) = Q''(t) = -6t + 12$$

da função de produção. Às 11 h, esta taxa é

$$\begin{aligned} R'(3) = Q''(3) &= -6(3) + 12 \\ &= -6 \text{ unidades por hora ao quadrado} \end{aligned}$$

O sinal negativo indica que a taxa de produção dos operários está diminuindo; em outras palavras, os operários estão trabalhando mais devagar. A taxa deste decréscimo de eficiência às 11 h é 6 unidades por hora ao quadrado.

Como vimos na Seção 2.2, a **aceleração** $a(t)$ de um corpo que está se movendo em linha reta é a derivada da velocidade $v(t)$, que, por sua vez, é a derivada da função posição $s(t)$. Assim, a aceleração é também a derivada segunda da posição:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Esta notação é usada no Exemplo 2.3.10.

13 EXPLORE!

Mude t para x em $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ no Exemplo 2.3.10. Use uma calculadora gráfica para plotar $v(x)$ e $a(x)$ no mesmo gráfico usando uma janela [0, 2]0,1 por [−5, 5]0,5. Explique o que acontece com $v(x)$ quando $a(x)$ é zero. Verifique o que acontece com as curvas de $v(t)$ e $a(t)$ quando $s(t)$ é substituída por $s_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$.

EXEMPLO 2.3.10

Se a posição de um corpo que está se movendo em linha reta é dada por $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$ no instante t, calcule a velocidade e a aceleração do corpo.

Solução

A velocidade do corpo é

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 4$$

e a aceleração é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$$

Derivadas de Ordem Superior

Derivando mais uma vez a derivada segunda $f''(x)$ de uma função $f(x)$, obtemos a derivada terceira $f'''(x)$. Derivando mais uma vez, obtemos a derivada quarta, que é representada como $f^{(4)}(x)$, já que a notação das plicas $f''''(x)$ começa a se tornar pouco prática. No caso geral, a derivada obtida a partir de $f(x)$ através de n derivações sucessivas é chamada de **derivada enésima** ou **derivada de ordem n** e representada pelo símbolo $f^{(n)}(x)$.

Derivada de Ordem n ■ Para qualquer número inteiro positivo n, a derivada de ordem n de uma função é obtida derivando a função n vezes sucessivas. Se a função original é $y = f(x)$, a derivada de ordem n é representada como

$$\frac{d^n y}{dx^n} \qquad \text{ou} \qquad f^{(n)}(x)$$

EXEMPLO 2.3.11

Calcule a derivada quinta das funções indicadas.

a. $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$

b. $y = \dfrac{1}{x}$

Solução

a.
$$f'(x) = 12x^2 + 10x + 6$$
$$f''(x) = 24x + 10$$
$$f'''(x) = 24$$
$$f^{(4)}(x) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$

b.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-x^{-2}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(2x^{-3}) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(-6x^{-4}) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}(24x^{-5}) = -120x^{-6} = -\frac{120}{x^6}$$

Demonstração da Regra do Produto

As regras do produto e do quociente não são fáceis de demonstrar. Nos dois casos, é preciso expressar o quociente diferença da expressão dada (o produto fg ou o quociente f/g) em termos dos quocientes diferença de f e g. Segue uma demonstração da regra do produto. A demonstração da regra do quociente fica a cargo do leitor (Problema 71).

Para mostrar que $\dfrac{d}{dx}(fg) = f\dfrac{dg}{dx} + g\dfrac{df}{dx}$, começamos com o quociente diferença global e usamos o artifício de subtrair e somar ao numerador o termo $f(x + h)g(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(fg) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]\right)
\end{aligned}$$

Agora vamos fazer h tender a zero. Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{df}{dx}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{dg}{dx}$$

e

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x) \qquad \textit{continuidade de } f(x)$$

temos

$$\frac{d}{dx}(fg)=f\frac{dg}{dx}+g\frac{df}{dx}$$

PROBLEMAS | 2.3

Nos Problemas 1 a 20, calcule a derivada da função dada.

1. $f(x)=(2x+1)(3x-2)$

2. $f(x)=(x-5)(1-2x)$

3. $y=10(3u+1)(1-5u)$

4. $y=400(15-x^2)(3x-2)$

5. $f(x)=\frac{1}{3}(x^5-2x^3+1)\left(x-\frac{1}{x}\right)$

6. $f(x)=-3(5x^3-2x+5)(\sqrt{x}+2x)$

7. $y=\frac{x+1}{x-2}$

8. $y=\frac{2x-3}{5x+4}$

9. $f(t)=\frac{t}{t^2-2}$

10. $f(x)=\frac{1}{x-2}$

11. $y=\frac{3}{x+5}$

12. $y=\frac{t^2+1}{1-t^2}$

13. $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{2x^2+5x-1}$

14. $f(t)=\frac{t^2+2t+1}{t^2+3t-1}$

15. $f(x)=\frac{(2x-1)(x+3)}{x+1}$

16. $g(x)=\frac{(x^2+x+1)(4-x)}{2x-1}$

17. $f(x)=(2+5x)^2$

18. $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

19. $g(t)=\frac{t^2+\sqrt{t}}{2t+5}$

20. $h(x)=\frac{x}{x^2-1}+\frac{4-x}{x^2+1}$

Nos Problemas 21 a 25, determine a equação da reta tangente à curva dada para o valor especificado de x_0.

21. $y=(5x-1)(4+3x)$; $x_0=0$

22. $y=(x^2+3x-1)(2-x)$; $x_0=1$

23. $y=\frac{x}{2x+3}$; $x_0=-1$

24. $y=\frac{x+7}{5-2x}$; $x_0=0$

25. $y=(3\sqrt{x}+x)(2-x^2)$; $x_0=1$

26. $y=\frac{2x-1}{1-x^3}$; $x_0=0$

Nos Problemas 27 a 31, determine todos os pontos da curva da função dada nos quais a tangente é horizontal.

27. $f(x)=(x+1)(x^2-x-2)$

28. $f(x)=(x-1)(x^2-8x+7)$

29. $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$

30. $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

31. $f(x)=x^3(x-5)^2$

Nos Problemas 32 a 35, determine a taxa de variação $\frac{dy}{dx}$ para o valor especificado de x_0.

32. $y=(x^2+2)(x+\sqrt{x})$; $x_0=4$

33. $y=(x^2+3)(5-2x^3)$; $x_0=1$

34. $y=\frac{2x-1}{3x+5}$; $x_0=1$

35. $y=x+\frac{3}{2-4x}$; $x_0=0$

A reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta perpendicular à tangente no ponto P. Nos Problemas 36 a 39, escreva a equação da reta normal à curva dada no ponto especificado.

36. $y = x^2 + 3x - 5$; $(0, -5)$

37. $y = \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}$; $(1, 1)$

38. $y = (x + 3)(1 - \sqrt{x})$; $(1, 0)$

39. $y = \dfrac{5x + 7}{2 - 3x}$; $(1, -12)$

40. **a.** Calcule a derivada da função $y = 2x^2 - 5x - 3$.
b. Escreva a função do item (a) na forma fatorada $y = (2x + 1)(x - 3)$ e calcule a derivada usando a regra do produto. Verifique que as duas respostas são iguais.

41. **a.** Use a regra do quociente para calcular a derivada da função $y = \dfrac{2x - 3}{x^3}$.
b. Escreva a função na forma $y = x^{-3}(2x - 3)$ e calcule a derivada usando a regra do produto.
c. Escreva a função na forma $y = 2x^{-2} - 3x^{-3}$ e calcule a derivada.
d. Verifique que as respostas dos itens (a), (b) e (c) são iguais.

Nos Problemas 42 a 47, determine a derivada segunda da função dada. Em todos os casos, use a notação apropriada para a derivada segunda e simplifique a resposta. (Não se esqueça de simplificar ao máximo a derivada primeira antes de calcular a derivada segunda.)

42. $f(x) = 5x^{10} - 6x^5 - 27x + 4$

43. $f(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 6x - 2$

44. $y = 5\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2}$

45. $y = \dfrac{2}{3x} - \sqrt{2x} + \sqrt{2}x - \dfrac{1}{6\sqrt{x}}$

46. $y = (x^2 - x)\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)$

47. $y = (x^3 + 2x - 1)(3x + 5)$

48. **DEMANDA E RECEITA** O gerente de uma empresa que fabrica calculadoras científicas determina que, quando x mil calculadoras são produzidas, são todas vendidas quando o preço unitário é

$$p(x) = \frac{1.000}{0{,}3x^2 + 8}$$

reais.
a. Com que taxa a demanda $p(x)$ está variando em relação ao nível de produção x quando 3.000 calculadoras ($x = 3$) são fabricadas?
b. A receita obtida com a venda de x mil calculadoras é $R(x) = xp(x)$ mil reais. Com que taxa a receita está variando quando são produzidas 3.000 calculadoras? Para este nível de produção, a receita está aumentando ou diminuindo?

49. **VENDAS** O gerente da joalheria Ouro Fino modela o total de vendas usando a função

$$S(t) = \frac{2.000t}{4 + 0{,}3t}$$

onde t é o tempo (em anos) após o ano 2000 e S está expresso em milhares de reais.
a. Com que taxa as vendas estão variando em 2002?
b. O que acontece com as vendas "a longo prazo" (ou seja, quando $t \to \infty$)?

50. **LUCRO** Vera Lúcia, a dona da perfumaria Aroma, estima que, se o preço unitário de um certo perfume for fixado em p reais, conseguirá vender

$$B(p) = \frac{500}{p + 3} \qquad p \geq 5$$

frascos de perfume por mês, a um custo de

$$C(p) = 0{,}2p^2 + 3p + 200 \qquad \text{reais}$$

a. Expresse o lucro de Vera Lúcia, $P(p)$, em função do preço p.
b. Com que taxa o lucro está variando em relação a p quando o preço do frasco é R\$ 12,00? Para este preço, o lucro está aumentando ou diminuindo?

51. **PUBLICIDADE** Uma empresa fabrica um drive de DVD para computadores pessoais. O gerente de vendas verifica que, t semanas após o início de uma campanha publicitária, $P(t)$ por cento do mercado em potencial já conhecem o produto, onde

$$P(t) = 100\left[\frac{t^2 + 5t + 5}{t^2 + 10t + 30}\right]$$

a. A que taxa a porcentagem do mercado $P(t)$ está variando com o tempo após 5 semanas? A porcentagem está aumentando ou diminuindo?
b. O que acontece com a porcentagem $P(t)$ a "longo prazo", isto é, quando $t \to +\infty$? O que acontece com a taxa de variação de $P(t)$ quando $t \to +\infty$?

52. **COLÔNIA DE BACTÉRIAS** A população de uma colônia de bactérias é dada por

$$P(t) = \frac{24t + 10}{t^2 + 1}$$

milhões t horas após a introdução de uma toxina.

a. Com que taxa a população está variando 1 hora após a toxina ser introduzida ($t = 1$)? A população está aumentando ou diminuindo nesta ocasião?
b. Em que instante a população começa a diminuir?

53. **CONTROLE DA POLUIÇÃO** Um estudo encomendado por uma grande cidade revela que os investimentos em controle da poluição são eficazes apenas até um certo ponto. Suponha que se saiba que quando o gasto é de x milhões de reais, a porcentagem de decréscimo da poluição é dada por

$$P(x) = \frac{100\sqrt{x}}{0{,}03x^2 + 9}$$

a. A que taxa a porcentagem de decréscimo da poluição $P(x)$ está variando quando 16 milhões de reais são investidos? A porcentagem está aumentando ou diminuindo para este nível de gastos?
b. Para que valores de x a porcentagem $P(x)$ está aumentando? Para que valores está diminuindo?

54. **FARMACOLOGIA** Um analgésico oral é administrado a um paciente; t horas depois, a concentração do medicamento no sangue do paciente é dada por

$$C(t) = \frac{2t}{3t^2 + 16}$$

a. Qual a taxa $R(t)$ com a qual a concentração do medicamento no sangue do paciente está variando t horas depois que é administrado? Qual é a taxa com a qual $R(t)$ está variando?
b. Qual é a taxa de variação da concentração do medicamento 1 hora depois que é administrado? A concentração está aumentando ou diminuindo neste instante?
c. Em que instante a concentração do medicamento começa a diminuir?
d. Durante que período de tempo a taxa de variação da concentração diminui?

55. **EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA** Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã de uma certa fábrica revela que os operários que chegam ao trabalho às 8 h produziram, em média, $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ unidades t horas mais tarde.
a. Calcule a taxa de produção dos operários $R(t) = Q'(t)$.
b. Com que taxa a taxa de produção dos operários está variando com o tempo às 9 h?

56. **CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO** Calcula-se que daqui a t anos a população de um certo município será $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ mil pessoas.
a. Escreva uma expressão para a taxa com que a população estará variando daqui a t anos.
b. Qual será a taxa de aumento da população daqui a 1 ano?
c. Qual será o aumento da população durante o segundo ano?
d. Qual será a taxa de aumento da população daqui a 9 anos?
e. Que acontecerá com a taxa de aumento da população a longo prazo?

Nos Problemas 57 a 60, é dada a posição $s(t)$ de um corpo que se move em linha reta. Em cada caso:
(a) Determine a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ do corpo.
(b) Determine todos os instantes t em que a aceleração é 0.

57. $s(t) = 3t^5 - 5t^3 - 7$
58. $s(t) = 2t^4 - 5t^3 + t - 3$
59. $s(t) = -t^3 + 7t^2 + t + 2$
60. $s(t) = 4t^{5/2} - 15t^2 + t - 3$

61. **VELOCIDADE** Um corpo se move em linha reta de tal forma que após t minutos a distância percorrida é $D(t) = 10t + \dfrac{5}{t+1} - 5$ metros.
a. Qual a velocidade do corpo após 4 minutos?
b. Qual a distância percorrida pelo corpo durante o quinto minuto?

62. **ACELERAÇÃO** Após as primeiras t horas de uma viagem de 8 horas, um carro percorreu $D(t) = 64t + \dfrac{10}{3}t^2 - \dfrac{2}{9}t^3$ quilômetros.
a. Escreva uma expressão para a aceleração do carro em função do tempo.
b. A que taxa a velocidade do carro está variando em relação ao tempo após 6 horas de viagem? A velocidade está aumentando ou diminuindo neste instante?
c. Qual é a variação de velocidade do carro durante a sétima hora?

63. **DOSAGEM DE UM MEDICAMENTO** Um modelo biológico* sugere que a reação do organismo humano a uma dose de um medicamento pode ser modelada por uma função da forma

$$F = \frac{1}{3}(KM^2 - M^3)$$

onde K é uma constante positiva e M é a quantidade de medicamento presente no sangue. A derivada $S = \dfrac{dF}{dM}$ pode ser considerada uma medida da sensibilidade do organismo ao medicamento.
a. Determine a sensibilidade S.
b. Calcule $\dfrac{dS}{dM} = \dfrac{d^2F}{dM^2}$ e interprete fisicamente esta derivada segunda.

64. **PRODUÇÃO DAS CÉLULAS DO SANGUE** De acordo com um certo modelo biológico,** a produção de um tipo de glóbulos brancos (*granulócitos*) pode ser descrita por uma função da forma

$$p(x) = \frac{Ax}{B + x^m}$$

onde A e B são constantes positivas, o expoente m é positivo e x é o número de células presentes.
a. Calcule a taxa de produção de granulócitos, $p'(x)$.

*Thrall et al., *Some Mathematical Models in Biology*, U.S. Dept. of Commerce, 1967.
**M. C. Mackey and L. Glass, "Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems", *Science*, Vol. 197, pp. 287-289.

b. Calcule $p''(x)$ e determine todos os valores de x para os quais $p''(x) = 0$ (a resposta deve ser dada em função de m).

c. Leia a respeito da produção de células do sangue e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre o uso de métodos matemáticos para modelar a produção deste tipo de célula. O leitor pode começar a pesquisa consultando o artigo "Blood Cell Population Model, Dynamical Diseases, and Chaos", de W. B. Gearhart e M. Martelli, UMAP Module 1990, Arlington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1991.

65. **ACELERAÇÃO** Se um corpo é deixado cair ou lançado verticalmente, a altura (em metros) do corpo após t segundos é dada por $H(t) = -4{,}9t^2 + S_0t + H_0$, onde S_0 é a velocidade inicial do corpo e H_0 é a altura inicial.

a. Escreva uma expressão para a aceleração do corpo.
b. Como varia a aceleração com o tempo?
c. O que significa o fato de que a resposta do item (a) é um número negativo?

66. Calcule $f^{(4)}(x)$ para $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 6$.

67. Calcule $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ para $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

68. **a.** Mostre que

$$\frac{d}{dx}[fgh] = fg\frac{dh}{dx} + fh\frac{dg}{dx} + gh\frac{df}{dx}$$

[*Sugestão:* aplique duas vezes a regra do produto.]

b. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = (2x + 1)(x - 3)(1 - 4x)$.

69. **a.** Combinando a regra do produto com a regra do quociente, escreva uma expressão para $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{fg}{h}\right]$.

b. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ para $y = \dfrac{(2x + 7)(x^2 + 3)}{3x + 5}$.

70. A regra do produto ensina como derivar o produto de duas funções, enquanto a regra da multiplicação por uma constante ensina como derivar produtos nos quais um dos fatores é constante. Mostre que a regra da multiplicação por uma constante é um caso especial da regra do produto, ou seja, que a aplicação da regra do produto ao produto cf leva à relação $\dfrac{d}{dx}(cf) = c\dfrac{df}{dx}$ se c for constante.

71. Demonstre a regra do quociente. [*Sugestão:* mostre que o quociente diferença para f/g é

$$\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

Antes de fazer h tender a zero, escreva o quociente usando o artifício de subtrair e somar $g(x)f(x)$ ao numerador.]

72. Demonstre a regra da potência $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para o caso em que $n = -p$ é um número inteiro negativo. [Sugestão: Aplique a regra do quociente à função $y = x^{-p} = \dfrac{1}{x^p}$.]

73. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva $f(x) = x^2(x - 1)$ e trace no mesmo gráfico a reta tangente à curva de $f(x)$ no ponto $x = 1$. Use **TRACE** e **ZOOM** para localizar os pontos em que $f'(x) = 0$.

74. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)/(x + 1)$ e trace no mesmo gráfico as retas tangentes à curva de $f(x)$ nos pontos $x = -2$ e $x = 0$. Use **TRACE** e **ZOOM** para localizar os pontos em que $f'(x) = 0$.

75. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva $f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$ usando uma janela de $[-5, 5]1$ por $[0, 2]0{,}5$. Use **TRACE** e **ZOOM** para encontrar os máximos e mínimos da curva. Calcule algebricamente a derivada $f'(x)$ e plote $f(x)$ e $f'(x)$ no mesmo gráfico, usando uma janela de $[-5, 5]1$ por $[-2, 2]0{,}5$. Use **TRACE** e **ZOOM** para determinar os pontos em que $f'(x)$ intercepta o eixo x. Explique por que os máximos e mínimos de $f(x)$ ocorrem nos pontos em que $f'(x)$ intercepta o eixo x.

76. Repita o Problema 75 para a função produto $f(x) = x^3(x - 3)^2$.

SEÇÃO 2.4 Regra da Cadeia

Em muitas situações da vida real, a taxa de variação de uma grandeza pode ser expressa em termos do produto de outras taxas de variação. Suponha, por exemplo, que um automóvel esteja viajando a 80 km/h e o consumo de gasolina a esta velocidade seja de 0,1 L/km. Para calcular o consumo de gasolina em litros por hora, basta multiplicar as duas taxas:

$$(0{,}1\ \text{L/km})(80\ \text{km/h}) = 8\ \text{L/h}$$

Para dar outro exemplo, suponha que o custo total de fabricação de um certo produto seja função do número de unidades produzidas, que, por sua vez, é função do número de horas de funcionamento da fábrica. Se C, q e t representam, respectivamente, o custo, o número de unidades produzidas e o tempo de funcionamento da fábrica, temos:

$$\frac{dC}{dq} = \begin{bmatrix}\text{taxa de variação do custo} \\ \text{com o nível de produção}\end{bmatrix} \quad \text{(reais por unidade)}$$

e

$$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix}\text{taxa de variação do nível} \\ \text{de produção com o tempo}\end{bmatrix} \quad \text{(unidades por hora)}$$

O produto destas duas taxas é a taxa de variação do custo com o tempo, ou seja:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt} \quad \text{(reais por hora)}$$

Esta expressão é um caso particular de uma regra importante do cálculo, conhecida como **regra da cadeia**.

Regra da Cadeia ■ Se y é uma função derivável de u e $u = g(x)$ é uma função derivável de x, a função composta $y = f(g(x))$ é uma função derivável de x cuja derivada é dada pelo produto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

que também pode ser escrito na forma

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

NOTA Uma forma de memorizar a regra da cadeia é fazer de conta que as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ são frações e "cancelar" du:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}}\frac{\cancel{du}}{dx} \quad ■$$

Para ilustrar o uso da regra da cadeia, suponha que você esteja interessado em derivar a função $y = (3x + 1)^2$. Seu primeiro impulso pode ser imaginar que a derivada é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(3x + 1)^2] = 2(3x + 1) \qquad (3x+1)^2$$
$$= 6x + 2 \qquad 2(3x+1) \cdot 3 = 6x$$

Entretanto, este palpite não pode estar correto, já que expandindo $(3x + 1)^2$ e derivando termo a termo obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(3x + 1)^2] = \frac{d}{dx}[9x^2 + 6x + 1] = 18x + 6$$

que é 3 vezes mais que o palpite de $6x + 2$. Entretanto, escrevendo $y = (3x + 1)^2$ como $y = u^2$ onde $u = 3x + 1$, temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}[u^2] = 2u \qquad \text{e} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}[3x + 1] = 3$$

e, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (2u)(3)$$
$$= 6(3x + 1) = 18x + 6$$

que coincide com a resposta encontrada expandindo $(3x + 1)^2$. Os Exemplos 2.4.1 e 2.4.2 ilustram duas formas de usar a regra da cadeia.

EXEMPLO 2.4.1

Determine dy/dx para $y = (x^2 + 2)^3 - 3(x^2 + 2)^2 + 1$.

Solução

Observe que $y = u^3 - 3u^2 + 1$, onde $u = x^2 + 2$. Assim,

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 6u \qquad \text{e} \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

e, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (3u^2 - 6u)(2x)$$

Nas Seções 2.1, 2.2 e 2.3, vimos que existem vários problemas práticos, como o cálculo da inclinação de uma reta e a determinação da taxa de variação de uma função, que exigem o cálculo da derivada para um certo valor da variável independente. Existem duas formas de fazer isso quando a derivada é obtida com o auxílio da regra da cadeia.

Suponha, por exemplo, que no Exemplo 2.4.1 estamos interessados em calcular $\frac{dy}{dx}$ para $x = -1$. Uma forma de obter o valor desejado é expressar primeiro a derivada em termos apenas de x, substituindo u por $x^2 + 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 6u)(2x) &= [3(x^2+2)^2 - 6(x^2+2)](2x) && \textit{substituindo } u \textit{ por } x^2+2\\
&= 6x(x^2+2)[(x^2+2) - 2] && \textit{colocando } 6x(x^2+2) \textit{ em evidência}\\
&= 6x(x^2+2)(x^2) && \textit{combinando termos}\\
&= 6x^3(x^2+2)
\end{aligned}$$

Fazendo $x = -1$ nesta expressão, temos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 6(-1)^3[(-1)^2 + 2] = -18$$

Outra forma de resolver o problema é calcular $u(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ e substituir o resultado diretamente na expressão $\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 6u)(2x)$ para obter

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} &= \left.(3u^2 - 6u)(2x)\right|_{\substack{x=-1\\u=3}}\\
&= [3(3)^2 - 6(3)][2(-1)] = (9)(-2) = -18
\end{aligned}$$

Os dois métodos fornecem o resultado correto, mas como é mais fácil substituir números do que substituir expressões algébricas, o segundo método, conhecido como método numérico, é mais recomendável, a menos que, por alguma razão, seja necessário expressar a derivada $\frac{dy}{dx}$ em função apenas de x. No Exemplo 2.4.2, o método numérico para calcular o valor de uma derivada obtida usando a regra da cadeia é usado para determinar a inclinação de uma reta tangente.

EXEMPLO 2.4.2

Considere a função $y = \frac{u}{u+1}$, onde $u = 3x^2 - 1$.

a. Use a regra da cadeia para calcular $\frac{dy}{dx}$.

b. Determine a inclinação da reta tangente à curva de $y(x)$ no ponto em que $x = 1$.

Solução

a. Temos:

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1)(1) - u(1)}{(u+1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2} \qquad \textit{regra do quociente}$$

e

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

De acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \left[\frac{1}{(u+1)^2}\right](6x) = \frac{6x}{(u+1)^2}$$

b. Para obter uma equação para a reta tangente à curva de $y(x)$ em $x = 1$, precisamos conhecer o valor de y e a inclinação no ponto de tangência. Como

$$u(1) = 3(1)^2 - 1 = 2$$

o valor de y para $x = 1$ é

$$y(1) = \frac{(2)}{(2)+1} = \frac{2}{3} \qquad \textit{fazendo } u(1) = 2$$

e a inclinação é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\u=2}} = \frac{6(1)}{(2+1)^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \begin{array}{l}\textit{fazendo } x = 1\\ \textit{e } u(1) = 2\end{array}$$

Assim, aplicando a forma ponto-inclinação da equação de uma reta, descobrimos que a reta tangente à curva de $y(x)$ no ponto em que $x = 1$ satisfaz a equação

$$\frac{y - 2/3}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

que pode ser escrita na forma $y = \dfrac{2}{3}x$.

Em muitos problemas práticos, uma grandeza é dada em função de uma variável que, por sua vez, é função de uma segunda variável, e o objetivo é determinar a taxa de variação da grandeza original com a segunda variável. Problemas deste tipo podem ser resolvidos com o auxílio da regra da cadeia, como ilustra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 2.4.3

O custo para produzir x unidades de um certo produto é $C(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + 4x + 53$ reais e o número de unidades produzidas em t horas de trabalho é $x(t) = 0{,}2t^2 + 0{,}03t$ unidades. Qual é a taxa de variação do custo com o tempo após 4 horas de trabalho?

Solução

Sabemos que

$$\frac{dC}{dx} = \frac{2}{3}x + 4 \qquad \text{e} \qquad \frac{dx}{dt} = 0{,}4t + 0{,}03$$

e, portanto, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2}{3}x + 4\right)(0{,}4t + 0{,}03)$$

Para $t = 4$, o número de unidades produzidas é

$$x(4) = 0{,}2(4)^2 + 0{,}03(4) = 3{,}32 \text{ unidades}$$

e fazendo $t = 4$ e $x = 3{,}32$ na expressão de $\dfrac{dC}{dt}$, obtemos

$$\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=4} = \left[\frac{2}{3}(3{,}32) + 4\right][0{,}4(4) + 0{,}03] = 10{,}1277$$

Assim, após 4 horas, o custo está aumentando à taxa de R\$ 10,13 por hora.

Às vezes, quando estamos trabalhando com uma função composta do tipo $y = f(g(x))$, pode ser interessante pensar em f como a função "externa" e em g como a função "interna":

$$y = \overset{\text{função "externa"}}{f}\underset{\text{função "interna"}}{(g(x))}$$

Nesse caso, de acordo com a regra da cadeia, temos

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

ou seja, *a derivada de $y = f(g(x))$ em relação a x é dada pela derivada da função externa calculada para a função interna vezes a derivada da função interna*. No Exemplo 2.4.4, chamamos atenção para esta interpretação usando um quadrado ($\square$) para indicar a localização e o papel da função interna no cálculo de uma derivada usando a regra da cadeia.

EXEMPLO 2.4.4

Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Solução

A forma da função é

$$f(x) = (\square)^{1/2}$$

onde o quadrado simboliza a expressão $x^2 + 3x + 2$. Assim,

$$(\square)' = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$$

e, de acordo com a regra da cadeia, a derivada da função composta $f(x)$ é

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(\square)^{-1/2}(\square)' \\ &= \frac{1}{2}(\square)^{-1/2}(2x + 3) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-1/2}(2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \end{aligned}$$

Regra da Potência Generalizada

Na Seção 2.2, apresentamos a regra

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

para derivar funções potência. Combinando esta regra com a regra da cadeia, obtemos a seguinte regra para derivar funções da forma $[h(x)]^n$:

Regra da Potência Generalizada ■ Para qualquer número real n e qualquer função derivável h,

$$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = n[h(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}[h(x)]$$

Para demonstrar a regra da potência generalizada, basta considerar $[h(x)]^n$ como a função composta

$$[h(x)]^n = g[h(x)] \quad \text{onde } g(u) = u^n$$

Então $\qquad g'(u) = nu^{n-1} \qquad \text{e} \qquad h'(x) = \frac{d}{dx}[h(x)]$

e, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = \frac{d}{dx}g[h(x)] = g'[h(x)]h'(x) = n[h(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}[h(x)]$$

O uso da regra da potência é ilustrado nos Exemplos 2.4.5 a 2.4.7.

EXEMPLO 2.4.5

Calcule a derivada da função $f(x) = (2x^4 - x)^3$.

Solução

Uma forma de resolver este problema é expandir a função, escrevendo-a na forma

$$f(x) = 8x^{12} - 12x^9 + 6x^6 - x^3$$

e calcular a derivada do polinômio termo a termo, obtendo

$$f'(x) = 96x^{11} - 108x^8 + 36x^5 - 3x^2$$

Muito mais fácil, porém, é usar a regra da potência generalizada. De acordo com esta regra,

$$f'(x) = \left[3(2x^4 - x)^2\right]\frac{d}{dx}[2x^4 - x] = 3(2x^4 - x)^2(8x^3 - 1)$$

Não só este método é mais rápido, mas a resposta é obtida na forma fatorada!

No Exemplo 2.4.6, a resposta do Exemplo 2.4.4 é obtida mais rapidamente usando a regra da potência generalizada.

EXEMPLO 2.4.6

Determine a derivada da função $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

Solução

Escrevendo a função na forma $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{1/2}$ e usando a regra da potência generalizada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-1/2}\right]\frac{d}{dx}[x^2 + 3x + 2] \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-1/2}(2x + 3) \\ &= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.4.7

Calcule a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{(2x + 3)^5}$.

Solução

Embora o problema possa ser resolvido usando a regra do quociente, é mais fácil escrever a função na forma

$$f(x) = (2x + 3)^{-5}$$

e usar a regra da potência generalizada para obter

$$f'(x) = \left[-5(2x + 3)^{-6}\right]\frac{d}{dx}[2x + 3] = -5(2x + 3)^{-6}(2) = -\frac{10}{(2x + 3)^6}$$

A regra da potência generalizada é usada muitas vezes em combinação com outras regras que foram apresentadas nas Seções 2.2 e 2.3. O Exemplo 2.4.8 envolve a regra do produto.

EXEMPLO 2.4.8

Calcule a derivada da função $f(x) = (3x + 1)^4(2x - 1)^5$ e simplifique o resultado. Em seguida, determine todos os valores de $x = c$ para os quais a reta tangente à curva de $f(x)$ em $(c, f(c))$ é horizontal.

Lembrete

Se $m > n$ e $q > p$, então

$$rA^mB^p + sA^nB^q = A^nB^p(rA^{m-n} = sB^{q-p})$$

para r e s constantes.

Solução

De acordo com a regra do produto, temos:

$$f'(x) = (3x + 1)^4 \frac{d}{dx}[(2x - 1)^5] + (2x - 1)^5 \frac{d}{dx}[(3x + 1)^4]$$

Usando a regra da potência generalizada para calcular as duas derivadas, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x + 1)^4[5(2x - 1)^4(2)] + (2x - 1)^5[4(3x + 1)^3(3)] \\ &= 10(3x + 1)^4(2x - 1)^4 + 12(2x - 1)^5(3x + 1)^3 \end{aligned}$$

Finalmente, podemos simplificar o resultado por fatoração:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(3x + 1)^3(2x - 1)^4[5(3x + 1) + 6(2x - 1)] \\ &= 2(3x + 1)^3(2x - 1)^4[15x + 5 + 12x - 6] \\ &= 2(3x + 1)^3(2x - 1)^4(27x - 1) \end{aligned}$$

A reta tangente à curva de $f(x)$ é horizontal nos pontos $(c, f(c))$ nos quais $f'(c) = 0$. Resolvendo a equação

$$f'(x) = 2(3x + 1)^3 (2x - 1)^4(27x - 1) = 0$$

vemos que $f'(c) = 0$ para

$$3c + 1 = 0 \quad \text{e} \quad 2c - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 27c - 1 = 0$$

ou seja, para $c = -\frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{2}$ e $c = \frac{1}{27}$.

EXEMPLO 2.4.9

Calcule a derivada segunda da função $f(x) = \dfrac{3x - 2}{(x - 1)^2}$.

Solução

De acordo com a regra do quociente, juntamente com a regra da potência generalizada [aplicada a $(x - 1)^2$], temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x - 1)^2(3) - (3x - 2)[2(x - 1)(1)]}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{(x - 1)[3(x - 1) - 2(3x - 2)]}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{3x - 3 - 6x + 4}{(x - 1)^3} \\ &= \frac{1 - 3x}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra do quociente, desta vez aplicando a regra da potência generalizada a $(x-1)^3$, obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-1)^3(-3)-(1-3x)[3(x-1)^2(1)]}{(x-1)^6} \\ &= \frac{-3(x-1)^2[(x-1)+(1-3x)]}{(x-1)^6} \\ &= \frac{-3(-2x)}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

---

14 EXPLORE!

A maioria das calculadoras gráficas é capaz de calcular o valor de uma derivada em um ponto. Para praticar, entre com a função

$$C(x) = \sqrt{[0,5(3,1+0,1x^2)^2+17]}$$

como **Y1** e plote usando a janela padrão (**ZOOM 6**). Chegue ao comando $\frac{dy}{dx}$ apertando a tecla **CALC** (**2nd TRACE**). Aperte 3 e **ENTER** para obter o valor da derivada no ponto X = 3. Para traçar a reta tangente à curva em X = 3, aperte a tecla **DRAW** (**2nd PRGM**), digite 3 e aperte **ENTER** para obter a equação da reta tangente com a inclinação correta.

EXEMPLO 2.4.10

Um estudo ambiental realizado em um certo bairro sugere que a concentração média diária de monóxido de carbono no ar é $c(p) = \sqrt{0,5p^2+17}$ partes por milhão quando a população é p milhares de residentes. Estima-se que daqui a t anos a população do bairro será $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$ mil pessoas. Qual será a taxa de variação com o tempo da concentração de monóxido de carbono daqui a 3 anos?

Solução

O objetivo é determinar $\frac{dc}{dt}$ para $t = 3$. Como

$$\frac{dc}{dp} = \frac{1}{2}(0,5p^2+17)^{-1/2}[0,5(2p)] = \frac{1}{2}p(0,5p^2+17)^{-1/2}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = 0,2t$$

temos, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dp}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}p(0,5p^2+17)^{-1/2}(0,2t) = \frac{0,1pt}{\sqrt{0,5p^2+17}}$$

Para $t = 3$,

$$p(3) = 3,1 + 0,1(3)^2 = 4$$

e fazendo $t = 3$ e $p = 4$ na expressão de $\frac{dc}{dt}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \frac{0,1(4)(3)}{\sqrt{0,5(4)^2+17}} \\ &= \frac{1,2}{\sqrt{25}} = \frac{1,2}{5} = 0,24 \text{ partes por milhão por ano} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.4.11

O gerente de uma fábrica de eletrodomésticos observa que o número de batedeiras vendidas por mês pode ser modelado pela função

$$D(p) = \frac{8.000}{p}$$

onde p é o preço de uma batedeira. O gerente estima que daqui a t meses o preço de uma batedeira será $p(t) = 0,06t^{3/2} + 22,5$ reais. Com que taxa a demanda mensal de batedeiras $D(p)$ estará variando daqui a 25 meses? A taxa estará aumentando ou diminuindo?

Solução

Estamos interessados em determinar $\frac{dD}{dt}$ para $t = 25$. Temos:

$$\frac{dD}{dp} = \frac{d}{dp}\left[\frac{8.000}{p}\right] = \frac{-8.000}{p^2}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}[0{,}06t^{3/2} + 22{,}5] = 0{,}06\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right) = 0{,}09t^{1/2}$$

e, portanto, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dp}\frac{dp}{dt} = \left[\frac{-8.000}{p^2}\right](0{,}09t^{1/2})$$

Para $t = 25$, o preço é

$$p(25) = 0{,}06(25)^{3/2} + 22{,}5 = 30 \text{ reais}$$

e, portanto,

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{\substack{t=25\\p=30}} = \left[\frac{-8.000}{30^2}\right][0{,}09(25)^{1/2}] = -4$$

Assim, daqui a 25 meses, a demanda de batedeiras estará variando à taxa de 4 unidades por mês e estará diminuindo, já que $\frac{dD}{dt}$ é negativa.

PROBLEMAS | 2.4

Nos Problemas 1 a 10, use a regra da cadeia para calcular a derivada dy/dx da função dada e simplifique a resposta.

1. $y = u^2 + 1;\ u = 3x - 2$

2. $y = 2u^2 - u + 5;\ u = 1 - x^2$

3. $y = \sqrt{u};\ u = x^2 + 2x - 3$

4. $y = u^2 + 2u - 3;\ u = \sqrt{x}$

5. $y = \frac{1}{u^2};\ u = x^2 + 1$

6. $y = \frac{1}{u};\ u = 3x^2 + 5$

7. $y = \frac{1}{\sqrt{u}};\ u = x^2 - 9$

8. $y = u^2 + u - 2;\ u = \frac{1}{x}$

9. $y = \frac{1}{u-1};\ u = x^2$

10. $y = u^2;\ u = \frac{1}{x-1}$

Nos Problemas 11 a 16, use a regra da cadeia para calcular a derivada dy/dx para a função dada e o valor especificado de x.

11. $y = 3u^4 - 4u + 5;\ u = x^3 - 2x - 5$ para $x = 2$

12. $y = u^5 - 3u^2 + 6u - 5;\ u = x^2 - 1$ para $x = 1$

13. $y = \sqrt{u};\ u = x^2 - 2x + 6$ para $x = 3$

14. $y = 3u^2 - 6u + 2;\ u = \frac{1}{x^2}$ para $x = \frac{1}{3}$

15. $y = \frac{1}{u};\ u = 3 - \frac{1}{x^2}$ para $x = \frac{1}{2}$

16. $y = \frac{1}{u+1};\ u = x^3 - 2x + 5$ para $x = 0$

Nos Problemas 17 a 36, calcule a derivada da função dada e simplifique a resposta.

17. $f(x) = (2x + 1)^4$

18. $f(x) = \sqrt{5x^6 - 12}$

19. $f(x) = (x^5 - 4x^3 - 7)^8$

20. $f(t) = (3t^4 - 7t^2 + 9)^5$

21. $f(t) = \frac{1}{5t^2 - 6t + 2}$

22. $f(x) = \frac{2}{(6x^2 + 5x + 1)^2}$

23. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

24. $f(s) = \dfrac{1}{\sqrt{5s^3 + 2}}$

25. $f(x) = \dfrac{3}{(1 - x^2)^4}$

26. $f(x) = \dfrac{2}{3(5x^4 + 1)^2}$

27. $h(s) = (1 + \sqrt{3s})^5$

28. $g(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{3x}}$

29. $f(x) = (x + 2)^3(2x - 1)^5$

30. $f(x) = 2(3x + 1)^4(5x - 3)^2$

31. $G(x) = \sqrt{\dfrac{3x + 1}{2x - 1}}$

32. $f(y) = \left(\dfrac{y + 2}{2 - y}\right)^3$

33. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^5}{(1 - x)^4}$

34. $F(x) = \dfrac{(1 - 2x)^2}{(3x + 1)^3}$

35. $f(y) = \dfrac{3y + 1}{\sqrt{1 - 4y}}$

36. $f(x) = \dfrac{1 - 5x^2}{\sqrt[3]{3 + 2x}}$

Nos Problemas 37 a 42, determine a equação de uma reta que seja tangente à curva da função dada no ponto especificado pelo valor de x.

37. $f(x) = (3x^2 + 1)^2;\ x = -1$

38. $f(x) = (x^2 - 3)^5(2x - 1)^3;\ x = 2$

39. $f(x) = \dfrac{1}{(2x - 1)^6};\ x = 1$

40. $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^3;\ x = 3$

41. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x + 2}};\ x = -1$

42. $f(x) = x^2\sqrt{2x + 3};\ x = -1$

Nos Problemas 43 a 48, determine todos os valores de $x = c$ para os quais a reta tangente à curva de $f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é horizontal.

43. $f(x) = (x^2 + x)^2$

44. $f(x) = x^3(2x^2 + x - 3)^2$

45. $f(x) = \dfrac{x}{(3x - 2)^2}$

46. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{(1 - 2x)^3}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

48. $f(x) = (x - 1)^2(2x + 3)^3$

Nos Problemas 49 e 50, calcule a derivada da função $f(x)$ usando dois métodos diferentes, um baseado na regra da potência generalizada e outro na regra do produto. Mostre que as duas respostas são iguais.

49. $f(x) = (3x + 5)^2$

50. $f(x) = (7 - 4x)^2$

Nos Problemas 51 a 56, determine a derivada segunda da função dada.

51. $f(x) = (3x + 1)^5$

52. $f(t) = \dfrac{2}{5t + 1}$

53. $h(t) = (t^2 + 5)^8$

54. $y = (1 - 2x^3)^4$

55. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

56. $f(u) = \dfrac{1}{(3u^2 - 1)^2}$

57. **RECEITA ANUAL** A receita anual bruta de uma certa empresa é $f(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$ milhares de reais t anos após a fundação da empresa, em janeiro de 2005.
   a. Qual será a taxa de aumento da receita anual bruta da empresa em janeiro de 2010?
   b. Qual será a taxa de aumento percentual da receita anual bruta da empresa em janeiro de 2010?

58. **CUSTO DE FABRICAÇÃO** Em uma certa fábrica, o custo total para fabricar q unidades de um produto é $C(q) = 0{,}2q^2 + q + 900$ reais. Foi determinado que aproximadamente $q(t) = t^2 + 100t$ unidades são fabricadas durante as primeiras t horas de uma jornada de trabalho. Calcule a taxa de variação do custo total de fabricação com o tempo 1 hora após o início de uma jornada de trabalho.

59. **DEMANDA DO CONSUMIDOR** Um importador de café do Brasil estima que os consumidores locais comprarão $D(p) = \dfrac{4.374}{p^2}$ libras de café por semana quando o preço for p dólares por libra. Calcula-se também que daqui a t semanas, o preço do café brasileiro será $p(t) = 0{,}02t^2 + 0{,}1t + 6$ dólares por libra.
   a. Qual será a taxa de variação da demanda de café com o preço quando o preço for 9 dólares?
   b. Qual será a taxa de variação da demanda de café com o tempo daqui a 10 semanas? A demanda estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

60. **POLUIÇÃO DO AR** Estima-se que daqui a t anos a população de um certo município será $p(t) = 20 - \dfrac{6}{t + 1}$ habi-

tantes. Um estudo ambiental revela que a concentração média de monóxido de carbono no ar é dada por $c(p) = 0{,}5\sqrt{p^2 + p + 58}$ partes por milhão, onde p é a população em milhares de habitantes.

a. Qual será a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono com o tamanho da população quando o município tiver 18.000 habitantes?

b. Qual será a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono com o tempo daqui a 2 anos? A concentração estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

61. DEMANDA DO CONSUMIDOR Quando um certo produto é vendido por p reais a unidade, os consumidores compram $D(p) = \dfrac{40.000}{p}$ unidades do produto por mês. Calcula-se que daqui a t meses, o preço do produto será $p(t) = 0{,}4t^{3/2} + 6{,}8$ reais por unidade. Qual será a taxa de variação percentual da demanda mensal do produto com o tempo daqui a 4 meses?

62. ETOLOGIA Em um artigo científico,* V. A. Tucker e K. Schmidt-Koenig mostraram que o consumo de energia de uma espécie de periquito australiano (o Budgerigar) é dado pela expressão

$$E = \frac{1}{v}[0{,}074(v - 35)^2 + 22]$$

onde v é a velocidade do pássaro em km/h. Escreva uma expressão para a taxa de variação da energia com a velocidade do periquito.

63. CRESCIMENTO DE UM MAMÍFERO As observações mostram que o comprimento L em milímetros (mm), do focinho à ponta da cauda, de um tigre siberiano pode ser estimado usando a função $L = 0{,}25w^{2,6}$, onde w é o peso do tigre em quilogramas (kg). Além disso, quando o tigre tem menos de 6 meses de idade, seu peso (em kg) pode ser estimado em termos de sua idade A em dias pela função $w = 3 + 0{,}21A$.

a. Qual é a taxa de variação do comprimento de um tigre siberiano em relação ao peso quando está pesando 60 kg?

b. Qual é o comprimento de um tigre siberiano quando tem 100 dias de idade? Qual é a taxa de variação do comprimento com o tempo nesta idade?

64. PRODUÇÃO O número de unidades Q de um certo produto que serão fabricadas quando L homens-horas de trabalho forem empregados é modelado pela função

$$Q(L) = 300L^{1/3}$$

Suponha que a quantidade de mão-de-obra varie com o tempo de tal forma que daqui a t meses $L(t)$ homens-horas serão empregados, onde

$$L(t) = \sqrt{739 + 3t - t^2}$$

para $0 \le t \le 12$.

a. Quantos homens-horas serão empregados para fabricar o produto daqui a 5 meses? Quantas unidades serão produzidas nessa ocasião?

b. A que taxa a produção estará variando com o tempo daqui a 5 meses? A produção estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

65. PRODUÇÃO O número de unidades Q de um certo produto que serão fabricadas com um capital de K milhares de reais é modelado pela função

$$Q(K) = 500K^{2/3}$$

Suponha que o investimento de capital varie de tal forma que daqui a t meses haja um investimento de $K(t)$ milhares de reais, onde

$$K(t) = \frac{2t^4 + 3t + 149}{t + 2}$$

a. Qual será o investimento de capital daqui a 3 meses? Quantas unidades serão produzidas nessa ocasião?

b. Qual será a taxa de variação de produção com o tempo daqui a 5 meses? A produção estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

66. QUALIDADE DE VIDA Um estudo demográfico modela a população p de uma comunidade (em milhares de habitantes) pela função

$$p(Q) = 3Q^2 + 4Q + 200$$

onde Q é um índice de qualidade de vida que varia de $Q = 0$ (qualidade extremamente baixa) a $Q = 10$ (qualidade excelente). Suponha que o índice varia com o tempo de tal forma que daqui a t anos,

$$Q(t) = \frac{t^2 + 2t + 3}{2t + 1}$$

para $0 \le t \le 10$.

a. Qual será o valor do índice de qualidade de vida daqui a 4 anos? Qual será a população nessa ocasião?

b. Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 4 anos? A população estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

67. DEPRECIAÇÃO O valor V (em milhares de reais) de uma máquina industrial é modelado pela função

$$V(N) = \left(\frac{3N + 430}{N + 1}\right)^{2/3}$$

onde N é o número de horas diárias de uso da máquina. Suponha que o uso varia com o tempo de tal forma que

$$N(t) = \sqrt{t^2 - 10t + 45}$$

onde t é o número de meses de operação da máquina.

a. Quantas horas por dia a máquina estará sendo usada daqui a 9 meses? Qual será o valor da máquina nessa ocasião?

b. A que taxa o valor da máquina estará variando com o tempo daqui a nove meses? O valor estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

68. POLUIÇÃO DA ÁGUA Quando substâncias orgânicas são lançadas em um rio ou lago, a concentração de oxigênio na água diminui temporariamente por causa da oxidação. Suponha que t dias depois que dejetos sem tratamento são lançados em um

*V. A. Tucker and K. Schmidt-Koenig, "Flight Speeds of Birds in Relation to Energetics and Wind Directions", *The Auk*, Vol. 88, 1971, pp. 97-107.

certo lago, a fração da concentração normal de oxigênio que permanece na água do lago é dada pela função

$$P(t) = 1 - \frac{12}{t + 12} + \frac{144}{(t + 12)^2}$$

a. Com que taxa a fração de oxigênio $P(t)$ está variando após 10 dias? A fração está aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

b. A fração de oxigênio está aumentando ou diminuindo após 15 dias?

c. Se não são lançados novos dejetos, o que acontece a longo prazo com a concentração de oxigênio? Use um limite para confirmar o seu palpite.

69. CRESCIMENTO DE INSETOS O crescimento de certos insetos varia com a temperatura. Suponha que uma certa espécie de inseto cresce de tal forma que o volume de um espécime pode ser modelado pela função

$$V(T) = 0{,}41(-0{,}01T^2 + 0{,}4T + 3{,}52) \quad \text{cm}^3$$

onde a temperatura está em °C e a massa em gramas pode ser modelada pela função

$$m(V) = \frac{0{,}39V}{1 + 0{,}09V}$$

a. Determine a taxa de variação do volume do inseto com a temperatura.

b. Determine a taxa de variação da massa do inseto com o volume.

c. Se $T = 10°\text{C}$, qual é o volume do inseto? A que taxa a massa do inseto está variando com a temperatura se $T = 10°\text{C}$?

70. JUROS COMPOSTOS Se R$ 10.000,00 são investidos a uma taxa anual r (expressa como um número decimal) e capitalizados semanalmente, o montante (capital mais juros) acumulado após 10 anos é dado pela expressão

$$A = 10.000\left(1 + \frac{r}{52}\right)^{520}$$

a. Determine a taxa de variação de A com r.

b. Determine a taxa de variação percentual de A com r para $r = 0{,}05$ (ou seja, juros de 5%).

71. APRENDIZADO Quando uma pessoa começa a estudar um assunto ou a praticar um esporte, pode não obter bons resultados; com a prática, porém, tende a melhorar. Um modelo para descrever o processo de aprendizado utiliza a equação

$$T = aL\sqrt{L - b}$$

onde T é o tempo necessário para uma pessoa aprender os elementos de uma lista de L elementos e a e b são constantes positivas.

a. Calcule a derivada $\dfrac{dT}{dL}$ e interprete-a à luz do modelo de aprendizado.

b. Leia a respeito do uso de curvas de aprendizado para estudar a produtividade no trabalho* e escreva um ensaio sobre o assunto de pelo menos dez linhas.

*O leitor pode começar a pesquisa consultando Philip E. Hicks, *Industrial Engineering and Management: A New Perspective*, 2nd ed., Capítulo 6, New York: McGraw-Hill, 1994, pp. 267-293.

72. Um corpo está se movendo em linha reta com uma velocidade

$$v(t) = (2t + 9)^2(8 - t)^3 \quad \text{para } 0 \leq t \leq 5$$

a. Determine a aceleração $a(t)$ do corpo no instante t.

b. Em que instante(s) o corpo está estacionário para $0 \leq t \leq 5$? Determine a aceleração nesse(s) instante(s).

c. Em que instante(s) a aceleração é zero para $0 \leq t \leq 5$? Determine a velocidade nesse(s) instante(s).

d. Use sua calculadora gráfica para plotar no mesmo gráfico as curvas da velocidade $v(t)$ e da aceleração $a(t)$ do corpo.

e. Dizemos que um corpo está *acelerando* quando $v(t)$ e $a(t)$ têm o mesmo sinal (positivo ou negativo). Use sua calculadora para determinar em que intervalo(s) isto acontece para $0 \leq t \leq 5$.

73. Um corpo está se movendo em linha reta de tal forma que sua posição no instante t é dada por

$$s(t) = (3 + t - t^2)^{3/2} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2$$

a. Determine a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ do corpo no instante t.

b. Em que instante(s) o corpo está estacionário para $0 \leq t \leq 2$? Determine a posição e a aceleração nesse(s) instante(s).

c. Em que instante(s) a aceleração é zero para $0 \leq t \leq 2$? Determine a posição e velocidade nesse(s) instante(s).

d. Use sua calculadora gráfica para plotar no mesmo gráfico as curvas da posição $s(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$ do corpo no intervalo $0 \leq t \leq 2$.

e. Dizemos que um corpo está *freando* quando $v(t)$ e $a(t)$ têm sinais opostos (um é positivo e o outro negativo). Use sua calculadora para determinar em que intervalo(s) isto acontece para $0 \leq t \leq 2$.

74. Suponha que $L(x)$ seja uma função com a propriedade de que $L'(x) = \dfrac{1}{x}$. Use a regra da cadeia para calcular as derivadas das funções a seguir e simplifique as respostas.

a. $f(x) = L(x^2)$

b. $f(x) = L\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c. $f(x) = L\left(\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right)$

d. $f(x) = L\left(\dfrac{2x + 1}{1 - x}\right)$

75. Demonstre a regra da potência generalizada para $n = 2$ usando a regra do produto para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ com $y = [h(x)]^2$.

76. Demonstre a regra da potência generalizada para $n = 3$ usando a regra do produto e o resultado do Problema 75 para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ com $y = [h(x)]^3$. {*Sugestão:* Comece por escrever y na forma $h(x)[h(x)]^2$.}

77. Entre com a função $f(x) = \sqrt[3]{3{,}1x^2 + 19{,}4}$ em uma calculadora gráfica. Use a função de derivação numérica da calculadora para calcular $f'(1)$ e $f'(-3)$. Observe o gráfico de $f(x)$. Quantas tangentes horizontais possui a curva?

78. Entre com a função $f(x) = (2{,}7x^3 - 3\sqrt{x} + 5)^{2/3}$ em uma calculadora gráfica. Use a função de derivação numérica da calculadora para calcular $f'(0)$ e $f'(4{,}3)$. Observe o gráfico de $f(x)$. Quantas tangentes horizontais possui a curva?

SEÇÃO 2.5 Análise Marginal e Aproximação por Incrementos

O cálculo é uma ferramenta importante da economia. Discutimos rapidamente as vendas e a produção no Capítulo 1, onde definimos grandezas econômicas como custo, receita, lucro, oferta, demanda e equilíbrio do mercado. Nesta seção, vamos usar a derivada para estudar taxas de variação que envolvem grandezas econômicas.

Análise Marginal

Na economia,* o uso da derivada para obter o valor aproximado da variação de uma grandeza que resulta de um aumento unitário da produção é conhecido como **análise marginal**. Suponha, por exemplo, que $C(x)$ é o custo total para produzir x unidades de uma certa mercadoria. Se x_0 unidades estão sendo produzidas atualmente, a derivada

$$C'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x_0 + h) - C(x_0)}{h}$$

é chamada de **custo marginal** para produzir x_0 unidades. O valor limite que define a derivada é aproximadamente igual ao quociente diferença de $C(x)$ para $h = 1$, ou seja,

$$C'(x_0) \approx \frac{C(x_0 + 1) - C(x_0)}{1} = C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

onde o símbolo $\approx$ é usado para indicar que se trata de uma aproximação e não uma igualdade. Acontece que $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ é o custo para aumentar de uma unidade o nível de produção, de x_0 para $x_0 + 1$. Assim, podemos usar a seguinte definição:

Custo Marginal ■ Se $C(x)$ é o custo total para produzir x unidades de uma mercadoria, o **custo marginal** para produzir x_0 unidades é a derivada $C'(x_0)$, que é, por sua vez, aproximadamente igual ao custo adicional $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ associado ao aumento de uma unidade do nível de produção, de x_0 para $x_0 + 1$.

A relação geométrica entre o custo marginal $C'(x_0)$ e o custo adicional $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ está ilustrada na Figura 2.14.

A discussão precedente se aplica não só ao custo, como também a outras grandezas usadas na economia, como a receita marginal e o lucro marginal, cujas definições são apresentadas a seguir.

Receita Marginal e Lucro Marginal ■ Suponha que $R(x)$ seja a receita gerada pela produção de x unidades de uma certa mercadoria e $P(x)$ é o lucro correspondente. Quando $x = x_0$ unidades são produzidas, temos:

A **receita marginal** é $R'(x_0)$ e constitui uma aproximação para $R(x_0 + 1) - R(x_0)$, a receita adicional gerada pela produção de uma unidade a mais.

O **lucro marginal** é $P'(x_0)$ e constitui uma aproximação para $P(x_0 + 1) - P(x_0)$, a receita adicional gerada pela produção de uma unidade a mais.

*Os economistas e homens de negócios encaram os tópicos que vamos discutir de um ponto de vista um pouco diferente. Uma boa amostra do ponto de vista dos economistas é o livro de J. M. Henderson and R. E. Quandt, *Microeconomic Theory*, New York: McGraw-Hill, 1986. O ponto de vista dos homens de negócios está em D. Salvatore, *Management Economics*, New York: McGraw-Hill, 1989, que é uma excelente fonte de exemplos práticos e estudos de caso.

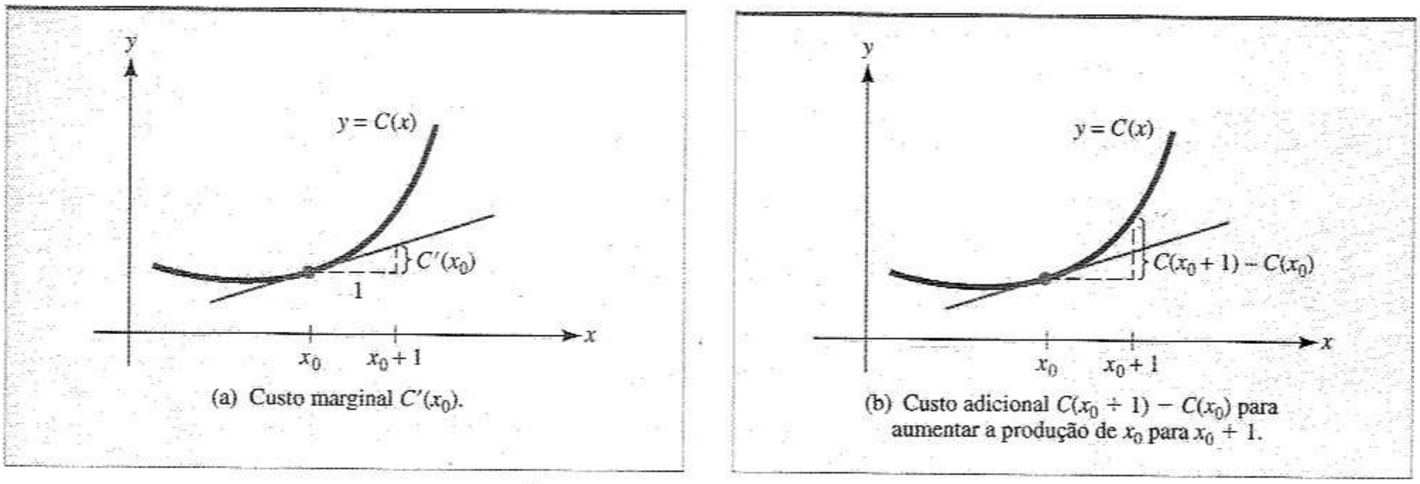


FIGURA 2.14 O custo marginal $C'(x_0)$ é uma aproximação de $C(x_0 + 1) - C(x_0)$.

A análise marginal é ilustrada no Exemplo 2.5.1.

15 EXPLORE!

Leia o Exemplo 2.5.1. Plote a função custo $C(x)$ e a função receita $R(x)$ no mesmo gráfico, usando uma janela [0, 20]10 por [0, 400]50. Determine a reta tangente a $C(x)$ no ponto X = 8. Observe que o custo marginal, representado pela reta tangente, é uma boa aproximação para $C(x)$ em X = 8. Plote a reta tangente a $R(x)$ em X = 8 para demonstrar que a receita marginal também é uma boa aproximação para $R(x)$ nas vizinhanças de X = 8.

EXEMPLO 2.5.1

Um fabricante estima que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o custo total é $C(x) = x^2/8 + 3x + 98$ reais e que todas as x unidades são vendidas quando o preço é $p(x) = (75 - x)/3$ reais por unidade.

a. Determine o custo marginal e a receita marginal.
b. Use o custo marginal para estimar o custo para produzir a nona unidade.
c. Qual é o custo real para produzir a nona unidade?
d. Use a receita marginal para estimar a receita obtida com a venda da nona unidade.
e. Qual é a receita real obtida com a venda da nona unidade?

Solução

a. O custo marginal é $C'(x) = x/4 + 3$. Como x unidades do produto são vendidas quando o preço é $p(x) = (75 - x)/3$ reais, a receita total é

$$R(x) = (\text{número de unidades vendidas})(\text{preço unitário})$$
$$= xp(x) = x\left[\frac{1}{3}(75 - x)\right] = 25x - \frac{1}{3}x^2$$

A receita marginal é

$$R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$$

b. O custo para produzir a nona unidade é igual à variação do custo quando x aumenta de 8 para 9 e pode ser estimado pelo custo marginal

$$C'(8) = \frac{1}{4}(8) + 3 = \text{R\$ } 5{,}00$$

c. O custo real para produzir a nona unidade é

$$C(9) - C(8) = \text{R\$ } 5{,}13$$

que não é muito diferente do custo marginal $C'(8) = \text{R\$ } 5{,}00$.

d. A receita obtida com a venda da nona unidade pode ser estimada pela receita marginal

$$R'(8) = 25 - \frac{2}{3}(8) = \text{R\$ } 19{,}67$$

e. A receita real obtida com a venda da nona unidade é

$$R(9) - R(8) = \text{R\$ } 19{,}33$$

No Exemplo 2.5.2, uma grandeza econômica marginal é usada para analisar um processo de produção.

EXEMPLO 2.5.2

Um fabricante de câmeras digitais estima que, quando x centenas de câmeras são produzidas, o lucro total é

$$P(x) = -0{,}0035x^3 + 0{,}07x^2 + 25x - 200$$

milhares de reais.

a. Determine a função lucro marginal.
b. Determine o lucro marginal para um nível de produção $x = 10$, $x = 50$ e $x = 80$.
c. Interprete estes resultados.

Solução

a. O lucro marginal é dado pela derivada

$$\begin{aligned} P'(x) &= -0{,}0035(3x^2) + 0{,}07(2x) + 25 \\ &= -0{,}0105x^2 + 0{,}14x + 25 \end{aligned}$$

b. O lucro marginal para $x = 10$, 50 e 80 é

$$\begin{aligned} P'(10) &= -0{,}0105(10)^2 + 0{,}14(10) + 25 = 25{,}35 \\ P'(50) &= -0{,}0105(50)^2 + 0{,}14(50) + 25 = 5{,}75 \\ P'(80) &= -0{,}0105(80)^2 + 0{,}14(80) + 25 = -31 \end{aligned}$$

c. O fato de que $P'(10) = 25{,}35$ significa que um aumento de 1 unidade na produção de 10 para 11 centenas de câmeras aumenta o lucro de aproximadamente 25,35 milhares de reais (R$ 25.350,00), o que justifica um esforço do fabricante para aumentar a produção. Por outro lado, como $P'(50) = 5{,}75$, o aumento do nível de produção de 50 para 51 unidades aumenta o lucro em apenas R$ 5.750,00, o que talvez não seja um incentivo suficiente para aumentar a produção. Finalmente, como $P'(80) = -31$, um número negativo, aumentar a produção de 80 para 81 unidades resultaria em uma *redução* de R$ 31.000,00 no lucro da empresa. Neste caso, o fabricante deveria considerar seriamente a possibilidade de reduzir a produção.

Aproximação por Incrementos

A análise marginal é um importante exemplo de um método geral de aproximação baseado no fato de que como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

para pequenos valores de h, a derivada $f'(x)$ é aproximadamente igual ao quociente diferença

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Indicamos esta aproximação escrevendo

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ou, analogamente,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h$$

Para chamar atenção para o fato de que a mudança incremental ocorre na variável x, fazemos $h = \Delta x$ e resumimos do seguinte modo a aproximação incremental:

Aproximação por Incrementos ■ Se a função $f(x)$ é derivável no ponto $x = x_0$ e Δx é uma pequena variação de x,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

ou, definindo $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

O Exemplo 2.5.3 ilustra o uso desta expressão aproximada na economia.

EXEMPLO 2.5.3

O custo total em reais para fabricar q unidades de um certo produto é $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$. Se o nível atual de produção é 40 unidades, estime a variação do custo total se 40,5 unidades forem produzidas.

Solução

Neste problema, a produção atual é $q = 40$ e a variação da produção é $\Delta q = 0{,}5$. De acordo com a aproximação por incrementos, a variação correspondente do custo é

$$\Delta C = C(40{,}5) - C(40) \approx C'(40)\Delta q = C'(40)(0{,}5)$$

Como

$$C'(q) = 6q + 5 \qquad \text{e} \qquad C'(40) = 6(40) + 5 = 245$$

temos:

$$\Delta C \approx [C'(40)](0{,}5) = 245(0{,}5) = \text{R\$ } 122{,}50$$

Para praticar, calcule a variação exata de custo causada por um aumento na produção de 40 para 40,5 e compare o valor obtido com o resultado aproximado do Exemplo 2.5.3. A aproximação pode ser considerada razoável?

Suponha que você esteja interessado em calcular o valor de uma grandeza Q usando uma expressão $Q(x)$. Se o valor de x usado no cálculo não for preciso, esta imprecisão passará ou se *propagará* para o valor calculado de Q. O Exemplo 2.5.4 mostra como é possível estimar esta **propagação do erro**.

16 EXPLORE!

Leia o Exemplo 2.5.4. Entre com o volume $V = \frac{1}{6}\pi x^3$ em Y1, onde x é o diâmetro do tumor esférico. Entre com

Y2 = Y1(X + 0.05) − Y1(X)

para calcular a variação incremental do volume e com

Y3 = nDeriv(Y1, X, X)*(0,05)

para calcular a variação diferencial do volume. Faça **TblStart** = 2,4 e ΔTbl = 0,05 em **TBLSET** (**2nd WINDOW**). Examine a tabela de valores, com atenção especial para Y2 e Y3. Observe os resultados para X = 2,5. Execute cálculos semelhantes para obter a precisão do volume V se o diâmetro x for medido com uma precisão de 1%.

EXEMPLO 2.5.4

Em um exame médico, o tamanho de um tumor aproximadamente esférico é estimado medindo-se o diâmetro do tumor e usando a expressão $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ para calcular o volume. Se o diâmetro medido é 2,5 cm com um erro máximo de 2%, qual é a precisão do volume medido?

Solução

O volume de uma esfera de raio R e diâmetro $x = 2R$ é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3$$

Assim, o volume calculado usando o diâmetro estimado, $x = 2{,}5$ cm, é

$$V = \frac{1}{6}\pi(2{,}5)^3 \approx 8{,}181 \text{ cm}^3$$

O erro cometido ao calcular o volume usando um diâmetro de 2,5 cm quando o diâmetro real é $2{,}5 + \Delta x$ é

$$V = V(2{,}5 + \Delta x) - V(2{,}5) \approx V'(2{,}5)\Delta x$$

O erro máximo da medida do diâmetro é 2%, o que significa que o erro pode ser, no máximo, de $0{,}02(2{,}5) = 0{,}05$ para mais ou para menos. Assim, o erro máximo na medida do diâmetro é $\Delta x = \pm 0{,}05$ e o erro máximo correspondente no cálculo do volume é

$$\text{Erro máximo do volume} = \Delta V \approx [V'(2{,}5)](\pm 0{,}05)$$

Como

$$V'(x) = \frac{1}{6}\pi(3x^2) = \frac{1}{2}\pi x^2 \qquad \text{e} \qquad V'(2{,}5) = \frac{1}{2}\pi(2{,}5)^2 \approx 9{,}817$$

temos:

$$\text{Erro máximo do volume} = (9{,}817)(\pm 0{,}05) \approx \pm 0{,}491$$

Assim, na pior das hipóteses, o erro ao calcular que o volume corresponde a 8,181 cm³ é 0,491 cm³, o que significa que o volume real V está no intervalo

$$7{,}690 \leq V \leq 8{,}672$$

No Exemplo 2.5.5, a variação desejada da função é conhecida e o objetivo é estimar a variação necessária da variável independente.

EXEMPLO 2.5.5

A produção diária de uma certa fábrica é $Q(L) = 900L^{1/3}$ unidades, onde L é a mão-de-obra utilizada, medida em homens-horas. No momento, a fábrica utiliza 1.000 homens-horas. Use os métodos do cálculo para estimar o número de homens-horas adicionais necessários para aumentar de 15 unidades a produção diária.

Solução

Calcule o valor de ΔL usando a aproximação por incrementos

$$\Delta Q \approx Q'(L)\Delta L$$

com $\quad \Delta Q = 15 \qquad L = 1.000 \qquad \text{e} \qquad Q'(L) = 300L^{-2/3}$

para obter

$$15 \approx 300(1.000)^{-2/3}\,\Delta L$$

ou

$$\Delta L \approx \frac{15}{300}(1.000)^{2/3} = \frac{15}{300}(10)^2 = 5 \text{ homens-horas}$$

Aproximação da Variação Percentual

Na Seção 2.2, definimos a **taxa de variação percentual** de uma grandeza como a variação da grandeza como porcentagem do seu valor antes da variação, ou seja,

$$\text{Variação percentual} = 100\,\frac{\text{variação da grandeza}}{\text{valor da grandeza}}$$

Esta expressão pode ser combinada com a da aproximação por incrementos e escrita em notação funcional da forma que se segue.

Aproximação por Incrementos para a Variação Percentual ■ Se Δx é uma (pequena) variação de x, a variação percentual correspondente da função $f(x)$ é dada por

$$\text{Variação percentual de } f = 100\frac{\Delta f}{f(x)} \approx 100\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}$$

EXEMPLO 2.5.6

O PDB de um certo país foi $N(t) = t^2 + 5t + 200$ bilhões de dólares t anos após 1997. Use os métodos do cálculo para estimar a variação percentual do PDB durante o primeiro trimestre de 2005.

Solução

Use a expressão

$$\text{Variação percentual de } N \approx 100\frac{N'(t)\Delta t}{N(t)}$$

com $\quad t = 8 \quad \Delta t = 0{,}25 \quad$ e $\quad N'(t) = 2t + 5$

para obter

$$\begin{aligned}\text{Variação percentual de } N &\approx 100\frac{N'(8)0{,}25}{N(8)}\\ &= 100\frac{[2(8) + 5](0{,}25)}{(8)^2 + 5(8) + 200}\\ &\approx 1{,}73\%\end{aligned}$$

Diferencial

O incremento Δx às vezes é chamado de *diferencial de x* e representado pelo símbolo dx. Nesse caso, a aproximação por incrementos pode ser escrita na forma $df \approx f'(x)dx$. Se $y = f(x)$, a *diferencial de y* é definida como $dy = f'(x)dx$. Estes conceitos podem ser resumidos da seguinte forma:

Diferencial ■ **A diferencial de x** é $dx = \Delta x$ e, se $y = f(x)$ é uma função derivável de x, $dy = f'(x)dx$ é a **diferencial de y**.

EXEMPLO 2.5.7

Determine a diferencial de $y = f(x)$ para as funções dadas.

a. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2$

b. $f(x) = (x^2 + 5)(3 - x - 2x^2)$

Solução

a. $dy = f'(x)\,dx = [3x^2 - 7(2x)]\;dx = (3x^2 - 14x)\,dx$

b. De acordo com a regra do produto,

$$dy = f'(x)\,dx = [(x^2 + 5)(-1 - 4x) + (2x)(3 - x - 2x^2)]\,dx$$

A Figura 2.15 mostra uma interpretação geométrica da aproximação de Δy pela diferencial dy. Observe que, como a inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(x, f(x))$ é $f'(x)$, a diferencial $dy = f'(x)dx$ é a variação da altura da reta tangente que corresponde a uma variação de x para $x + \Delta x$. Por outro lado, Δy é a variação da altura da curva que corresponde à mesma variação de x. Assim, aproximar Δy pela diferencial dy é o mesmo que aproximar a variação de altura de uma curva pela variação de altura da reta tangente. Se Δx é pequeno, é razoável esperar que esta seja uma boa aproximação.

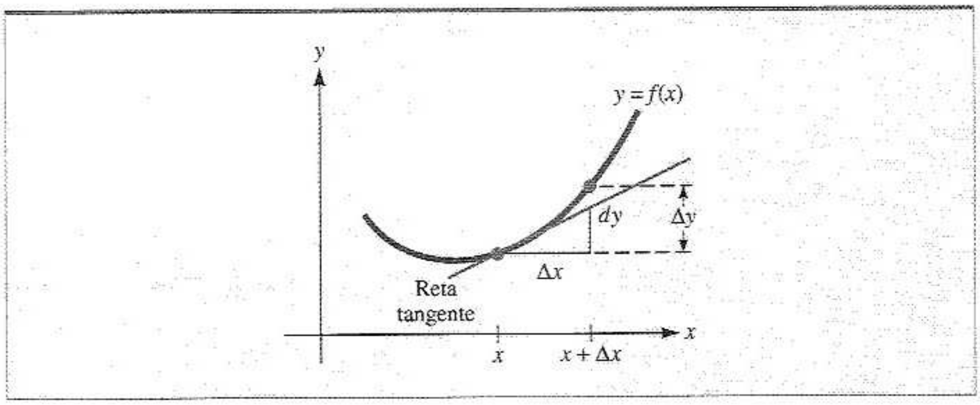


FIGURA 2.15 Aproximação de Δy pela diferencial dy.

PROBLEMAS | 2.5

ANÁLISE MARGINAL *Nos Problemas 1 a 6, C(x) é o custo total para produzir x unidades de uma certa mercadoria e p(x) é o preço pelo qual as x unidades serão vendidas. Admita C(x) e p(x) em reais.*

(a) Determine o custo marginal e a receita marginal.
(b) Use o custo marginal para estimar o custo para produzir uma quarta unidade.
(c) Determine o custo real para produzir uma quarta unidade.
(d) Use a receita marginal para estimar a receita obtida com a venda da quarta unidade.
(e) Determine a receita real obtida com a venda da quarta unidade.

1. $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 57; p(x) = \frac{1}{4}(36 - x)$

2. $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 67; p(x) = \frac{1}{5}(45 - x)$

3. $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 39; p(x) = -x^2 - 4x + 80$

4. $C(x) = \frac{5}{9}x^2 + 5x + 73; p(x) = -x^2 - 2x + 33$

5. $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 43; p(x) = \frac{3 + 2x}{1 + x}$

6. $C(x) = \frac{2}{7}x^2 + 65; p(x) = \frac{12 + 2x}{3 + x}$

Nos Problemas 7 a 32, use incrementos para fazer a estimativa pedida.

7. Estime a variação da função $f(x) = x^2 - 3x + 5$ quando x varia de 5 para 5,3.

8. Estime a variação da função $f(x) = \dfrac{x}{x + 1} - 3$ quando x diminui de 4 para 3,8.

9. Estime a variação percentual da função $f(x) = x^2 + 2x - 9$ quando x aumenta de 4 para 4,3.

10. Estime a variação percentual da função $f(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$ quando x diminui de 5 para 4,6.

11. ANÁLISE MARGINAL O custo total de um fabricante é $C(q) = 0{,}1q^3 - 0{,}5q^2 + 500q + 200$ reais, onde q é o número de unidades produzidas.
a. Use os métodos de análise marginal para estimar o custo de fabricação da quarta unidade.
b. Calcule o custo real de fabricação da quarta unidade.

12. ANÁLISE MARGINAL A receita total de um fabricante é $R(q) = 240q + 0{,}05q^2$ reais quando q unidades são fabricadas e vendidas durante o mês. No momento, o fabricante está produzindo 80 unidades por mês e pretende aumentar a produção mensal de 1 unidade.
a. Use os métodos de análise marginal para estimar a receita adicional que o fabricante terá com a produção e venda da 81ª unidade.
b. Use a função de renda para calcular a receita adicional real que o fabricante terá com a produção e venda da 81ª unidade.

13. ANÁLISE MARGINAL O custo total em reais para fabricar q unidades de um certo produto é $C(q) = 3q^2 + q + 500$.
a. Use os métodos de análise marginal para estimar o custo de fabricação da 41ª unidade.
b. Calcule o custo real de fabricação da 41ª unidade.

14. POLUIÇÃO DO AR Um estudo ambiental realizado em um certo município revela que daqui a t anos a concentração de monóxido de carbono no ar será $Q(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}1t + 3{,}4$ partes por milhão. Qual será a variação da concentração de monóxido de carbono nos próximos 6 meses?

15. CIRCULAÇÃO DE UM JORNAL Calcula-se que daqui a t anos a circulação de um jornal será $C(t) = 100t^2 + 400t + 5.000$. Estime qual será o aumento da circulação nos próximos 6 meses. [*Sugestão:* o valor atual da variável é $t = 0$.]

16. FABRICAÇÃO O custo total de um fabricante é $C(q) = 0{,}1q^3 - 0{,}5q^2 + 500q + 200$ reais quando o nível de produção é q unidades. O nível atual de produção é 4 unidades, mas o fabricante pretende aumentá-la para 4,1 unidades. Estime a variação do custo total em conseqüência deste aumento de produção.

17. FABRICAÇÃO A receita mensal de um fabricante é $R(q) = 240q + 0{,}05q^2$ reais quando q unidades são produzidas durante um mês. No momento, o fabricante está produzindo 80 unidades por mês, mas pretende reduzir a produção mensal de 0,65 unidade. Estime a variação resultante da receita mensal.

18. **EFICIÊNCIA** Um estudo realizado no turno da manhã de uma certa fábrica revela que um operário que chegou ao trabalho às 8 h montou, em média, $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ aparelhos de rádio x horas mais tarde. Quantos rádios são montados, em média, por um operário entre 9 h e 9 h 15 min?

19. **PRODUÇÃO** Em uma certa fábrica, a produção diária é $Q(K) = 600K^{1/2}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais. No momento, o capital imobilizado é R$ 900.000,00. Estime o efeito sobre a produção diária de um aumento de R$ 800,00 no capital imobilizado.

20. **PRODUÇÃO** Em uma certa fábrica, a produção diária é $Q(L) = 60.000L^{1/3}$ unidades, onde L é a mão-de-obra em homens-horas por dia. No momento, a mão-de-obra é de 1.000 homens-horas por dia. Estime o efeito sobre a produção de uma redução da mão-de-obra para 940 homens-horas por dia.

21. **IMPOSTO PREDIAL** Uma projeção realizada em janeiro de 2000 indicou que x anos mais tarde o imposto predial para um apartamento de três quartos em uma certa cidade seria $T(x) = 60x^{3/2} + 40x + 1.200$ reais. Estime o aumento percentual do imposto predial durante o primeiro semestre de 2008.

22. **CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO** Uma projeção do aumento da população indica que daqui a t anos a população de uma certa cidade será $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200$ mil habitantes.
    a. Determine a taxa de variação da população com o tempo, $R(t) = P'(t)$.
    b. Qual será a taxa de variação com o tempo da taxa de aumento da população $R(t)$?
    c. Use o método dos incrementos para estimar a variação de $R(t)$ durante o primeiro mês do quarto ano. Qual é a variação real de $R(t)$ neste período?

23. **PRODUÇÃO** Em uma certa fábrica, a produção diária é $Q = 3.000K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, onde K é o capital imobilizado da empresa em milhares de reais e L é a mão-de-obra em homens-horas por dia. No momento, o capital imobilizado é R$ 400.000,00 e a mão-de-obra é de 1.331 homens-horas por dia. Use os métodos de análise marginal para estimar o efeito sobre a produção diária de um aumento de R$ 1.000,00 no capital imobilizado, mantendo constante a mão-de-obra.

24. **PRODUÇÃO** A produção diária de uma certa fábrica é $Q(L) = 300L^{2/3}$ unidades, onde L é a mão-de-obra utilizada, medida em homens-horas. No momento, a fábrica utiliza 512 homens-horas. Estime o número de homens-horas adicionais que seriam necessários para aumentar de 12,5 unidades a produção diária.

25. **FABRICAÇÃO** O custo total de um fabricante é $C(q) = \frac{1}{6}q^3 + 642q + 400$ reais quando são produzidas q unidades. Estime qual deve ser a redução da produção para que o custo total seja reduzido de R$ 130,00.

26. **CRESCIMENTO DE UMA CÉLULA** Uma certa célula tem forma esférica. Se as expressões $S = 4\pi r^2$ e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ são usadas para calcular a superfície e o volume da célula, respectivamente, estime os efeitos sobre S e V de um aumento de 1% no raio r da célula.

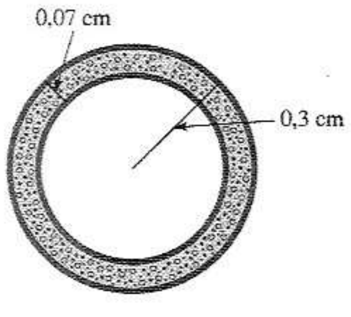
27. **DÉBITO CARDÍACO** *Débito cardíaco* é o volume de sangue bombeado por minuto pelo coração. Uma forma de medir o débito cardíaco é usar a fórmula de Fick

$$C = \frac{a}{x - b}$$

onde x é a concentração de dióxido de carbono no sangue que entra nos pulmões e a e b são constantes positivas. Se a medição de x revela que $x = c$ com um erro máximo de 3% para mais ou para menos, qual é o erro máximo percentual cometido ao calcular o débito cardíaco usando a fórmula de Fick? (A resposta deve ser dada em termos de a, b e c.)

28. **MEDICINA** Um pequeno balão esférico é introduzido em uma artéria obstruída. Se o balão tem um diâmetro interno de 0,01 milímetro (mm) e é feito de um material com 0,0005 mm de espessura, qual é a quantidade de material introduzida na artéria? [*Sugestão:* considere a quantidade de material como uma variação de volume ΔV, onde $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.]

29. **ARTERIOSCLEROSE** Na *arteriosclerose*, depósitos gordurosos chamados de placas se acumulam gradualmente nas paredes das artérias, limitando o fluxo sangüíneo, o que, por sua vez, pode levar a um acidente vascular cerebral ou a um infarto cardíaco. Considere um modelo no qual a artéria carótida é representada como um cilindro circular de raio $R = 0,3$ cm e comprimento L. Suponha que tenha sido descoberto que uma placa com 0,07 cm de espessura está distribuída uniformemente na parede interna da carótida de um certo paciente. Use o método dos incrementos para estimar a porcentagem do volume total da artéria que está bloqueada pela placa. [*Sugestão:* o volume de um cilindro de raio R e comprimento L é $V = \pi R^2 L$. O resultado depende do comprimento L da artéria?]



PROBLEMA 29

30. **CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA** No Problema 57 da Seção 1.1, apresentamos uma importante lei atribuída ao médico francês Jean Poiseuille. De acordo com outra lei descoberta por Poiseuille, o volume do fluido que passa por pequeno tubo por unidade de tempo sob pressão constante é dado pela expressão $V = kR^4$, onde k é uma constante positiva e R o raio do tubo. Esta expressão é usada na medicina para determinar de quanto uma artéria obstruída deve ser dilatada para que a circulação volte ao normal.
    a. Suponha que o raio de uma certa artéria seja aumentado em 5%. Qual o efeito deste aumento sobre o volume de sangue que passa pela artéria?

b. Leia a respeito do sistema cardiovascular e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre a circulação sangüínea.*

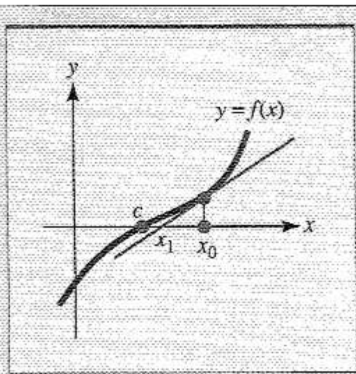
31. DILATAÇÃO TÉRMICA **Coeficiente de dilatação térmica** (linear) de um corpo é definido como

$$\sigma = \frac{L'(T)}{L(T)}$$

onde $L(T)$ é o comprimento do corpo quando a temperatura é T. Suponha que uma ponte de 50 m de comprimento seja feita de aço, cujo coeficiente de dilatação térmica é $\sigma = 1{,}4 \times 10^{-5}$ °C. Qual é a variação de comprimento da ponte em um ano no qual a temperatura variou de -20°C no inverno até 35°C no verão?

32. RADIAÇÃO De acordo com a lei de Stefan, a energia da radiação emitida por um corpo é dada pela expressão $R(T) = kT^4$, onde R é a quantidade de energia emitida pela superfície, T é a temperatura absoluta da superfície do corpo em kelvins e k é uma constante positiva. Estime a variação percentual de R quando T aumenta 2%.

Método de Newton ■ A aproximação de uma função por uma reta tangente pode ser utilizada de várias formas. O *método de Newton* para determinar as raízes de uma equação da forma $f(x) = 0$ se baseia na idéia de que, se começamos com uma estimativa x_0 que está próxima do valor correto c da raiz, podemos obter um valor melhor determinando a interseção x_1 com o eixo x da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$ (veja a figura). O processo pode ser repetido várias vezes até que a raiz seja determinada com o grau de precisão desejado. Hoje em dia, é mais fácil usar as funções **ZOOM** e **TRACE** de uma calculadora gráfica para localizar as raízes, mas as idéias em que se baseia o método de Newton ainda são importantes. Os Problemas 33 a 37 ilustram o uso do método de Newton.



33. Mostre que, quando o método de Newton é usado várias vezes, a enésima aproximação pode ser obtida a partir da aproximação anterior através da expressão

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[*Sugestão:* Determine o valor de x_1, a interseção com o eixo x da reta tangente à função $y = f(x)$ no ponto $x = x_0$. Em seguida, use x_1 para determinar x_2 da mesma forma.]

34. Seja $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

a. Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x)$. Observe que existe apenas uma raiz entre 1 e 2. Determine a raiz com o auxílio de **TRACE** e **ZOOM**.

b. A partir da estimativa $x_0 = 1$, determine o valor da raiz usando o método de Newton até que os valores de duas estimativas sucessivas sejam iguais até a quarta casa decimal.

c. Substitua os valores encontrados os itens (a) e (b) na equação $f(x) = 0$. Qual dos dois está mais próximo do valor correto da raiz?

35. Seja $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x)$. Observe que a equação $f(x) = 0$ possui duas raízes. Estime os valores destas raízes usando o método de Newton e verifique se o resultado está correto usando as funções **TRACE** e **ZOOM** da calculadora.

36. Os antigos babilônios, que viveram por volta de 1700 a.C., calculavam os valores de $\sqrt{N}$ usando a expressão

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

a. Mostre que esta expressão pode ser obtida a partir da fórmula do método de Newton (Problema 33) e use-a para calcular $\sqrt{1.265}$. Repita os cálculos até que os valores de duas estimativas sucessivas sejam iguais até a quarta casa decimal. Use uma calculadora para verificar se o resultado está correto.

17 EXPLORE!

Entre com $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ em Y1 e plote a função usando uma janela decimal para observar que existe uma raiz entre X = 1 e X = 2. Entre com Y2 = nDeriv(Y1, X, X). Em uma tela limpa, coloque em X o valor inicial 1, digitando 1 → X, e entre com X − Y1(X)/Y2(X) → X. Aperte **ENTER** várias vezes e observe a seqüência de valores resultantes. Verifique quantas iterações são necessárias para que as quatro primeiras casas decimais sejam iguais em duas aproximações sucessivas. Repita o processo usando X = −2 como valor inicial. Verifique se é obtido um resultado estável e, caso a resposta seja afirmativa, quantas iterações são necessárias para que isso aconteça.

*O leitor pode começar a pesquisa consultando livros como Elaine N. Marieb, *Human Anatomy and Physiology*, 2nd ed., Redwood City, CA: The Benjamin/Cummings Publishing Co., 1992, e Kent M. Van De Graaf and Stuart Ira Fox, *Concepts of Human Anatomy and Physiology*, 3rd ed., Dubuque, IA: Wm. C. Brown Publishers, 1992.

b. Alguém roubou a calculadora do nosso amigo espião (Problema 70, Seção 2.2). Escreva uma história de espionagem baseada no uso da fórmula dos antigos babilônios para calcular uma raiz quadrada.

37. Às vezes, o método de Newton não funciona, qualquer que seja o valor da estimativa inicial x_0 (a menos, é claro, que o valor inicial seja a própria raiz). Suponha que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e escolha x_0 arbitrariamente ($x_0 \neq 0$).

a. Mostre que $x_{n-1} = -2x_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e, portanto, que as "aproximações" sucessivas geradas pelo método de Newton são $x_0, -2x_0, -4x_0, \ldots$

b. Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x)$ e as retas tangentes à curva $y = f(x)$ nos pontos x_0, $-2x_0$, $-4x_0, \ldots$ Por que estes pontos não convergem para uma raiz de $f(x) = 0$?

SEÇÃO 2.6 Derivação Implícita e Taxas Relacionadas

As funções com as quais trabalhamos até o momento são todas dadas por equações da forma $y = f(x)$, nas quais a variável dependente y do lado esquerdo é definida explicitamente por uma expressão do lado direito que envolve a variável x. Quando uma função é especificada desta forma, dizemos que se encontra na **forma explícita**. Assim, por exemplo, as funções

$$y = x^2 + 3x + 1 \qquad y = \frac{x^3 + 1}{2x - 3} \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{1 - x^2}$$

estão todas na forma explícita.

Às vezes, a solução de problemas da vida real leva a equações nas quais a variável y não é definida explicitamente em termos da variável independente x; é o caso, por exemplo, de equações como

$$x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x \qquad \text{e} \qquad x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$$

Como a variável y não aparece sozinha em um dos membros da equação, dizemos que uma equação deste tipo **define** y *implicitamente como função de* $\mathbf{x}$ e que a função y se encontra na **forma implícita**.

Derivação de Funções na Forma Implícita

Suponha que seja conhecida uma equação que define y implicitamente em função de x e haja necessidade de calcular a derivada $\dfrac{dy}{dx}$. Podemos estar interessados, por exemplo, em calcular a inclinação da reta tangente à curva de uma função em um certo ponto. Uma abordagem seria obter uma equação explícita para y e aplicar as regras de derivação já conhecidas. Acontece que nem sempre é possível definir y explicitamente. Por exemplo: não existe uma forma óbvia de obter o valor de y na equação $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$. Além disso, mesmo quando é possível obter uma equação explícita para y, a expressão resultante pode ser complexa e difícil de derivar. Assim, por exemplo, explicitando y na equação $x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2y^3 - 5y^3 &= x + 6 \\ y^3(x^2 - 5) &= x + 6 \\ y &= \left(\frac{x + 6}{x^2 - 5}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

O cálculo de $\dfrac{dy}{dx}$ a partir desta expressão seria trabalhoso, pois envolveria tanto a regra da potência, como a regra do quociente. Entretanto, existe uma técnica simples, baseada na regra da cadeia, que permite calcular $\dfrac{dy}{dx}$ mesmo sem dispor de uma expressão explícita para y. Esta técnica, conhecida como **derivação implícita**, consiste em derivar ambos os membros de uma equação (de definição de y) em relação a x e explicitar $\dfrac{dy}{dx}$. O Exemplo 2.6.1 ilustra esta técnica.

18 EXPLORE!

Entre com a função $\frac{dy}{dx}$ do Exemplo 2.6.1 em sua calculadora gráfica. Faça $x = 2$ na expressão da função implícita dada e calcule o valor de y. Entre com este valor como Y e 2 como X. Determine a inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ calculando $\frac{dy}{dx}$ para estes valores de x e y. Finalmente, escreva uma equação para a reta tangente à função do Exemplo 2.6.1 no ponto $x = 2$.

EXEMPLO 2.6.1

Calcule $\frac{dy}{dx}$ para a função $x^2y + y^2 = x^3$.

Solução

Temos que derivar os dois membros da equação em relação a x. Para não esquecer que y é função de x, substituímos y temporariamente pelo símbolo $f(x)$, deixando a equação na forma

$$x^2f(x) + (f(x))^2 = x^3$$

Vamos agora derivar termo a termo ambos os membros da equação em relação a x:

$$\frac{d}{dx}[x^2f(x) + (f(x))^2] = \frac{d}{dx}[x^3]$$

$$\underbrace{\left[x^2\frac{df}{dx} + f(x)\frac{d}{dx}(x^2)\right]}_{\frac{d}{dx}[x^2f(x)]} + \underbrace{2f(x)\frac{df}{dx}}_{\frac{d}{dx}[(f(x))^2]} = \underbrace{3x^2}_{\frac{d}{dx}(x^3)}$$

Assim, temos:

$$x^2\frac{df}{dx} + f(x)(2x) + 2f(x)\frac{df}{dx} = 3x^2 \qquad \textit{reunindo todos os termos em } \frac{df}{dx}$$

$$x^2\frac{df}{dx} + 2f(x)\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2xf(x) \qquad \textit{de um lado da equação}$$

$$[x^2 + 2f(x)]\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2xf(x) \qquad \textit{combinando termos}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3x^2 - 2xf(x)}{x^2 + 2f(x)} \qquad \textit{explicitando } \frac{df}{dx}$$

Finalmente, substituindo $f(x)$ por y, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y}$$

NOTA Substituir temporariamente y por $f(x)$, como no Exemplo 2.6.1, serve para demonstrar o processo de derivação implícita, mas, depois que o leitor estiver familiarizado com a técnica, pode deixar de lado este passo desnecessário e derivar diretamente a equação dada. Basta ter em mente que y é uma função de x e se lembrar de usar de usar a regra da cadeia sempre que for necessário. ■

O processo pode ser resumido da seguinte forma:

Derivação Implícita ■ Suponha que uma equação defina y implicitamente como uma função derivável de x. Para calcular $\frac{dy}{dx}$,

1. Derive ambos os membros da equação em relação a x. Não se esqueça de que y é uma função de x e use a regra da cadeia ao derivar os termos que contêm y.
2. Explicite $\frac{dy}{dx}$ na equação resultante.

Cálculo da Inclinação de uma Reta Tangente por Derivação Implícita

Nos Exemplos 2.6.2 e 2.6.3, a derivação implícita é usada para calcular a inclinação de uma reta tangente.

EXEMPLO 2.6.2

Calcule a inclinação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, 4). Qual é a inclinação no ponto (3, −4)?

Solução

Derivando ambos os membros da equação $x^2 + y^2 = 25$ em relação a x, obtemos:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

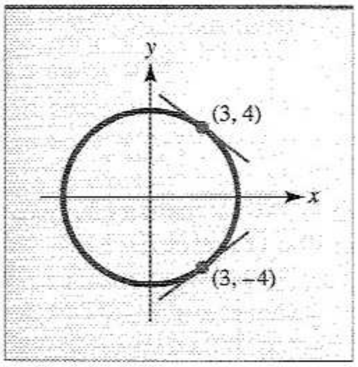


FIGURA 2.16 Gráfico da circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

A inclinação no ponto (3, 4) é o valor da derivada para $x = 3$ e $y = 4$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,\,4)} = \left.\frac{-x}{y}\right|_{\substack{x=3\\y=4}} = \frac{-3}{4}$$

Da mesma forma, a inclinação no ponto (3, −4) é o valor de $\frac{dy}{dx}$ para $x = 3$ e $y = -4$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,\,-4)} = \left.\frac{-x}{y}\right|_{\substack{x=3\\y=-4}} = \frac{-3}{(-4)} = \frac{3}{4}$$

A Figura 2.16 mostra o gráfico da circunferência, juntamente com as tangentes cujas inclinações foram pedidas.

EXEMPLO 2.6.3

Determine todos os pontos da curva $x^2 - y^2 = 2x + 4y$ nos quais a reta tangente à curva é horizontal. Existe algum ponto da curva para o qual a tangente é vertical?

Solução

Derivando ambos os membros da equação dada em relação a x, obtemos:

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 2 + 4\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2}{4 + 2y}$$

Os pontos nos quais a reta tangente à curva é horizontal são aqueles para os quais a inclinação é nula, ou seja, aqueles em que o *numerador* $2x - 2$ de $\frac{dy}{dx}$ é zero:

$$2x - 2 = 0$$
$$x = 1$$

Para calcular o valor correspondente de y, basta fazer $x = 1$ na equação dada e resolver a equação do segundo grau resultante, usando a fórmula de Báskara ou uma calculadora:

$$1 - y^2 = 2(1) + 4y$$
$$y^2 + 4y + 1 = 0$$
$$y = -0{,}27,\ -3{,}73$$

Assim, os pontos nos quais a reta tangente é horizontal são os pontos (1; −0,27) e (1; −3,73).

Como a inclinação de uma reta vertical não é definida, os pontos nos quais a reta tangente à curva é vertical são aqueles para os quais o *denominador* $4 + 2y$ de $\frac{dy}{dx}$ é zero:

$$4 + 2y = 0$$
$$y = -2$$

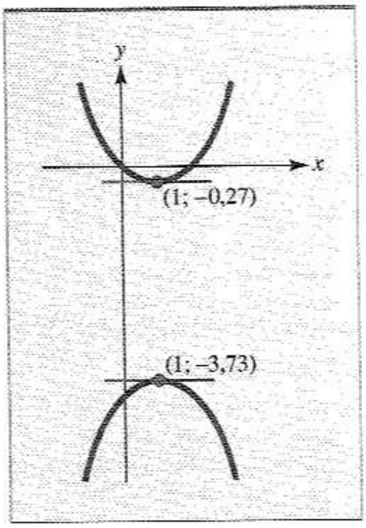


FIGURA 2.17 Gráfico da equação $x^2 + y^2 = 2x + 4y$.

Para calcular o valor correspondente de x, é preciso fazer $y = -2$ na equação dada e resolver a equação do segundo grau resultante:

$$x^2 - (-2)^2 = 2x + 4(-2)$$
$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

Acontece que esta equação do segundo grau não tem raízes reais, o que significa que a curva dada não possui retas tangentes verticais. A curva aparece na Figura 2.17.

Aplicação à Economia

A derivação implícita é muito usada na economia. Na Seção 4.3, será empregada para demonstrar algumas relações teóricas. Uma aplicação mais direta da derivação implícita é ilustrada no Exemplo 2.6.4, que pode ser considerado como uma introdução à discussão das curvas de nível de uma função de duas variáveis, apresentada na Seção 7.1.

EXEMPLO 2.6.4

A produção de uma certa fábrica é $Q = 2x^3 + x^2y + y^3$ unidades, onde x é o número de homens-horas de trabalho especializado e y o número de homens-horas de trabalho não-especializado. No momento, a mão-de-obra disponível é constituída por 30 homens-horas de trabalho especializado e 20 homens-horas de trabalho não-especializado. Use os métodos do cálculo para estimar a variação de mão-de-obra não-especializada y necessária para compensar um aumento de 1 homem-hora da mão-de-obra especializada x, de modo que a produção não seja alterada.

Solução

A produção atual é o valor de Q para $x = 30$ e $y = 20$. Assim,

$$Q = 2(30)^3 + (30)^2(20) + (20)^3 = 80.000 \text{ unidades}$$

Para que a produção não seja alterada, a relação entre a mão-de-obra especializada x e a mão-de-obra não-especializada y deve respeitar a equação

$$80.000 = 2x^3 + x^2y + y^3$$

que define y implicitamente em função de x.

O objetivo é estimar a variação de y que corresponde a um aumento de 1 unidade no valor de x quando x e y estão relacionados da forma indicada. Como vimos na Seção 2.5, a variação de y causada por um aumento de 1 unidade em x é dada aproximadamente pela derivada $\dfrac{dy}{dx}$. Para calcular esta derivada, podemos usar a derivação implícita. (Lembre-se de que a derivada da constante 80.000 do lado esquerdo da equação é zero.)

$$0 = 6x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^2) + 3y^2\frac{dy}{dx}$$
$$0 = 6x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy + 3y^2\frac{dy}{dx}$$
$$-(x^2 + 3y^2)\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2xy$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 + 2xy}{x^2 + 3y^2}$$

Calculando o valor desta derivada para $x = 30$ e $y = 20$, obtemos:

$$\text{Variação de } y \approx \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=30\\y=20}} = -\frac{6(30)^2 + 2(30)(20)}{(30)^2 + 3(20)^2} \approx -3{,}14 \text{ horas}$$

Assim, para que a produção não seja alterada, devemos diminuir de 3,14 homens-horas a mão-de-obra não-especializada.

NOTA O leitor notou que a solução do Exemplo 2.6.4 contém um passo desnecessário? O cálculo da produção atual (80.000 unidades) poderia ser omitido e a equação que relaciona x e y escrita na forma

$$C = 2x^3 + x^2y + y^3$$

onde C é uma constante (não especificada) que representa a produção atual. Como a derivada de qualquer constante é nula, a solução seria exatamente a mesma. ■

Taxas Relacionadas

Em alguns problemas práticos, as variáveis x e y estão relacionadas por uma equação e podem ser consideradas funções de uma terceira variável, t, que quase sempre representa o tempo. Neste caso, a derivação implícita pode ser usada para relacionar $\frac{dx}{dt}$ a $\frac{dy}{dt}$. As derivadas $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são chamadas de **taxas relacionadas**. Apresentamos a seguir um método geral para analisar problemas de taxas relacionadas.

Método para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

1. Faça um gráfico (se possível) e defina as variáveis.
2. Escreva uma expressão que envolva as variáveis.
3. Use a derivação implícita para determinar a relação entre as taxas.
4. Substitua os resultados literais encontrados no item 3 por valores numéricos para obter a resposta desejada.

Os quatro exemplos a seguir envolvem taxas relacionadas.

EXEMPLO 2.6.5

O gerente de uma empresa determina que, quando q centenas de unidades de uma certa mercadoria são produzidas, o custo total de produção é C centenas de reais, onde $C^2 - 3q^3 = 4.275$. Quando 1.500 unidades estão sendo produzidas, o nível de produção está aumentando a uma taxa de 20 unidades por semana. Qual é o custo total nesta ocasião? Qual é a taxa de variação do custo?

Solução

Estamos interessados em calcular $\frac{dC}{dt}$ para $q = 15$ (1.500 unidades) e $\frac{dq}{dt} = 0{,}2$ (20 unidades por semana, com q medido em centenas de unidades). Derivando a equação $C^2 - 3q^3 = 4.275$ implicitamente em relação ao tempo, obtemos

$$2C\frac{dC}{dt} - 3\left[3q^2\frac{dq}{dt}\right] = 0$$

e, portanto,

$$2C\frac{dC}{dt} = 9q^2\frac{dq}{dt}$$

e

$$\frac{dC}{dt} = \frac{9q^2}{2C}\frac{dq}{dt}$$

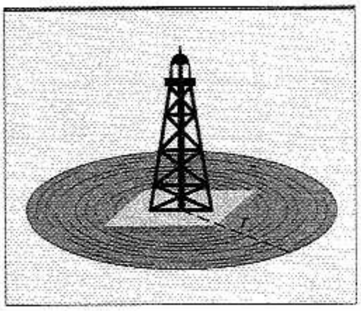
Para $q = 15$, o custo C satisfaz a equação

$$\begin{aligned} C^2 - 3(15)^3 &= 4.275 \\ C^2 &= 4.275 + 3(15)^3 = 14.400 \\ C &= 120 \end{aligned}$$

e fazendo $q = 15$, $C = 120$ e $\frac{dq}{dt} = 0{,}2$ na expressão de $\frac{dC}{dt}$ obtemos

$$\frac{dC}{dt} = \left[\frac{9(15)^2}{2(120)}\right](0{,}2) = 1{,}6875$$

milhares de reais (R$ 1.687,50) por semana. Resumindo, o custo para produzir 1.500 unidades é R$ 120.000 ($C = 120$) e para este nível de produção o custo total está aumentando à taxa de R$ 1.687,50 por semana.



EXEMPLO 2.6.6

Uma tempestade no mar danificou uma plataforma de petróleo, produzindo um vazamento de 60 m^3/min que resultou numa mancha de forma circular com 25 centímetros de espessura.

a. Qual é a taxa de aumento do raio da mancha quando o raio é 70 metros?

b. Suponha que o defeito seja consertado de tal forma que o vazamento pare instantaneamente. Se o raio da mancha estava aumentando à taxa de 0,2 m/min quando o vazamento parou, qual foi o volume de petróleo derramado?

Solução

Podemos pensar na mancha como um cilindro de petróleo de raio r e espessura $h = 0{,}25$ m. O volume deste cilindro é

$$V = \pi r^2 h = 0{,}25\pi r^2 \text{ m}^3$$

Derivando implicitamente esta equação em relação ao tempo t, obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}25\pi\left(2r\frac{dr}{dt}\right) = 0{,}5\pi r\frac{dr}{dt}$$

e como $\frac{dV}{dt} = 60$ para qualquer valor de t, obtemos a relação

$$60 = 0{,}5\pi r\frac{dr}{dt}$$

a. Estamos interessados em calcular $\frac{dr}{dt}$ para $r = 70$. Substituindo r por seu valor na equação anterior, temos:

$$60 = 0{,}5\pi(70)\frac{dr}{dt}$$

e, portanto,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{60}{(0{,}5)\pi(70)} \approx 0{,}55$$

Assim, quando o raio é 70 metros, está aumentando à taxa de 0,55 m/min.

b. Podemos calcular o volume de petróleo derramado se conhecermos o raio da mancha no instante em que o vazamento parou. Como nesse instante $\frac{dr}{dt} = 0{,}2$, sabemos que

$$60 = 0{,}5\pi r(0{,}2)$$

e, portanto, o raio é

$$r = \frac{60}{0{,}5\pi(0{,}2)} \approx 191 \text{ metros}$$

Assim, o volume de petróleo derramado é

$$V = 0{,}25\pi(191)^2 \approx 28.652 \text{ m}^3$$

EXEMPLO 2.6.7

Um lago é poluído pelos rejeitos de uma fábrica. Os ecologistas determinam que, quando a concentração de poluentes é x partes por milhão (ppm), existem F peixes de uma certa espécie no lago, onde

$$F = \frac{32.000}{3 + \sqrt{x}}$$

Quando existem 4.000 peixes no lago, a poluição está aumentando à taxa de 1,4 ppm/ano. Com que taxa a população de peixes está variando na mesma ocasião?

Solução

Estamos interessados em calcular $\frac{dF}{dt}$ para $F = 4.000$ e $\frac{dx}{dt} = 1{,}4$. Com 4.000 peixes no lago, o nível de poluição satisfaz a equação

$$\begin{aligned} 4.000 &= \frac{32.000}{3 + \sqrt{x}} \\ 4.000(3 + \sqrt{x}) &= 32.000 \\ 3 + \sqrt{x} &= 8 \\ \sqrt{x} &= 5 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{32.000(-1)}{(3 + \sqrt{x})^2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-16.000}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})^2}$$

e, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = \left[\frac{-16.000}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})^2}\right]\frac{dx}{dt}$$

Fazendo $F = 4.000$, $x = 25$ e $\frac{dx}{dt} = 1{,}4$, obtemos

$$\frac{dF}{dt} = \left[\frac{-16.000}{\sqrt{25}(3 + \sqrt{25})^2}\right](1{,}4) = -70$$

e, portanto, a população de peixes está diminuindo à taxa de 70 peixes por ano.

EXEMPLO 2.6.8

Quando o preço unitário de um certo produto é p reais, o fabricante tem interesse em produzir x mil unidades, onde

$$x^2 - 2x\sqrt{p} - p^2 = 31$$

Qual é a taxa de variação da oferta quando o preço unitário é R$ 9,00 e está aumentando à taxa de 20 centavos por semana?

Solução

Sabemos que para $p = 9$, $\frac{dp}{dt} = 0{,}20$. Queremos saber qual é o valor de $\frac{dx}{dt}$. Em primeiro lugar, observamos que para $p = 9$, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\sqrt{9} - 9^2 &= 31 \\ x^2 - 6x - 112 &= 0 \\ (x + 8)(x - 14) &= 0 \\ x &= 14 \quad (x = -8 \text{ não faz sentido}) \end{aligned}$$

Em seguida, derivamos ambos os membros da equação de oferta implicitamente em relação ao tempo para obter

$$2x\frac{dx}{dt} - 2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{p} + x\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\right)\right] - 2p\frac{dp}{dt} = 0$$

Finalmente, fazendo $x = 14$, $p = 9$ e $\frac{dp}{dt} = 0{,}20$ nesta equação e explicitando $\frac{dx}{dt}$ obtemos:

$$2(14)\frac{dx}{dt} - 2\left[\sqrt{9}\,\frac{dx}{dt} + 14\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9}}\right)(0{,}20)\right] - 2(9)(0{,}20) = 0$$

$$[28 - 2(3)]\frac{dx}{dt} = 2(14)\left(\frac{1}{2\sqrt{9}}\right)(0{,}20) + 2(9)(0{,}20)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{14\left(\frac{1}{3}\right)(0{,}20) + 18(0{,}20)}{22}$$

$$\approx 0{,}206$$

Como a oferta é dada em milhares de unidades, chegamos à conclusão de que a oferta está aumentando à razão de $0{,}206(1.000) = 206$ unidades por semana.

PROBLEMAS | 2.6

Nos Problemas 1 a 6, calcule $\frac{dy}{dx}$ de duas formas:

(a) por derivação implícita;

(b) derivando uma expressão explícita de y.

Em cada caso, mostre que as duas respostas são iguais.

1. $2x + 3y = 7$

2. $xy = 4$

3. $xy + 2y = 3$

4. $x^2 + y^3 = 12$

5. $xy + 2y = x^2$

6. $x + \frac{1}{y} = 5$

Nos Problemas 7 a 20, determine $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita.

7. $x^2 + y^2 = 25$

8. $x^2 + y = x^3 + y^2$

9. $x^3 + y^3 = xy$

10. $5x - x^2y^3 = 2y$

11. $y^2 + 2xy^2 - 3x + 1 = 0$

12. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

14. $\sqrt{2x} + y^2 = 4$

15. $xy - x = y + 2$

16. $y^2 + 3xy - 4x^2 = 9$

17. $(2x + y)^3 = x$

18. $(x - 2y)^2 = y$

19. $(x^2 + 3y^2)^5 = 2xy$

20. $(3xy^2 + 1)^4 = 2x - 3y$

Nos Problemas 21 a 26, determine a equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

21. $x^2 = y^3$; $(8, 4)$

22. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$; $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

23. $xy = 2$; $(2, 1)$

24. $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1$; $(0, -1)$

25. $(1 - x + y)^3 = x + 7$; $(1, 2)$

26. $(x^2 + 2y)^3 = 2xy^2 + 64$; $(0, 2)$

Nos Problemas 27 a 32, determine todos os pontos (forneça as duas coordenadas) sobre a curva dada para os quais a reta tangente é (a) horizontal e (b) vertical.

27. $x + y^2 = 9$

28. $xy = 16y^2$

29. $x^2 + xy + y = 3$

30. $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 5$

31. $x^2 + xy + y^2 = 3$

32. $x^2 - xy + y^2 = 3$

Nos Problemas 33 e 34, use derivação implícita para calcular a derivada segunda $\frac{d^2y}{dx^2}$.

33. $x^2 + 3y^2 = 5$

34. $xy + y^2 = 1$

35. FABRICAÇÃO A produção de uma certa fábrica é $Q = 0{,}08x^2 + 0{,}12xy + 0{,}03y^2$ unidades por dia, onde x é o número de homens-horas de mão-de-obra especializada e y o número de homens-horas de mão-de-obra não-especializada. No momento, são usados 80 homens-horas de mão-de-obra especializada e 200 homens-horas de mão-de-obra não-especializada. Use os métodos do cálculo para estimar a variação de mão-de-obra não-especializada necessária para compensar um aumento de 1 homem-hora da mão-de-obra especializada, de modo que a produção não seja alterada.

36. FABRICAÇÃO A produção de uma certa fábrica é $Q = 0{,}06x^2 + 0{,}14xy + 0{,}05y^2$ unidades por dia, onde x é o número de homens-horas de mão-de-obra especializada e y o número de homens-horas de mão-de-obra não-especializada. No momento, são usados 60 homens-horas de mão-de-obra especializada e 300 homens-horas de mão-de-obra não-especializada. Use os métodos do cálculo para estimar a variação de mão-de-obra não-especializada, necessária para compensar um aumento de 1 homem-hora da mão-de-obra especializada, de modo que a produção não seja alterada.

37. TAXA DE OFERTA Quando o preço unitário de um certo produto é p reais, o fabricante tem interesse em fabricar x unidades, onde

$$3p^2 - x^2 = 12$$

Qual é a taxa de variação da oferta se o preço unitário é R$ 4,00 e está aumentando à taxa de 87 centavos por mês?

38. TAXA DE DEMANDA Quando o preço unitário de um certo produto é p reais, a demanda é de x centenas de unidades, onde

$$x^2 + 3px + p^2 = 79$$

Qual é a taxa de variação da demanda com o tempo se o preço unitário é R$ 5,00 e está diminuindo à taxa de 30 centavos por mês?

39. CRESCIMENTO DE UM TUMOR Um tumor é modelado por uma esfera de raio R. Se o raio do tumor é atualmente $R = 0{,}54$ cm e está aumentando à taxa de 0,13 cm por mês, qual é a taxa correspondente de aumento do volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$?

40. REFRIGERAÇÃO Um bloco de gelo usado para refrigeração é modelado por um cubo de lado s. No momento, o bloco tem um volume de 125.000 cm³ e está derretendo à taxa de 1.000 cm³ por hora.

a. Qual é o comprimento s de um dos lados do cubo? Com que taxa este comprimento s está variando no momento em relação ao tempo t?

b. Qual é a atual taxa de variação da área S da superfície do bloco de gelo em relação ao tempo? [*Nota:* Um cubo de lado s tem um volume $V = s^3$ e a área da superfície é $S = 6s^2$.]

41. MEDICINA Um pequeno balão esférico é introduzido em uma artéria obstruída e inflado à razão de $0{,}002\pi$ mm³/min. Qual é a taxa de aumento do raio do balão quando o raio é $R = 0{,}005$ mm? [*Nota:* Uma esfera de raio R tem um volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.]

42. CONTROLE DA POLUIÇÃO Um estudo ambiental realizado em uma certa cidade revela que haverá $Q(p) = p^2 + 4p + 900$ unidades de um perigoso poluente no ar quando a população for de p mil habitantes. Se a população atualmente é de 50.000 habitantes e está aumentando à razão de 1.500 habitantes por ano, qual é a taxa de aumento da poluição causada pelo produto?

43. TAXA DE DEMANDA Quando o preço de um certo produto é p reais a unidade, a demanda é de x centenas de unidades, onde

$$75x^2 + 17p^2 = 5.300$$

Qual é a taxa de variação da demanda com o tempo quando o preço é R$ 7,00 e está diminuindo à razão de 75 centavos por mês (ou seja, $\frac{dp}{dt} = -0{,}75$)?

44. LEI DE BOYLE De acordo com a lei de Boyle, quando um gás é comprimido a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V do gás satisfazem à equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que, em um certo instante, o volume seja 0,1 m³, a pressão seja 10 atmosferas e o volume esteja aumentando à razão de 0,005 m³/s. Qual é a taxa de variação da pressão neste instante? A pressão está aumentando ou diminuindo?

45. METABOLISMO O *metabolismo basal* é o calor produzido por um animal em repouso por unidade de tempo. As observações indicam que o metabolismo basal de um animal de sangue quente com w quilogramas (kg) de massa é dado por

$$M = 70w^{3/4} \text{ quilocalorias por dia}$$

a. Determine a taxa de variação do metabolismo basal de uma onça de 80 kg que está ganhando massa à taxa de 0,8 kg por dia.

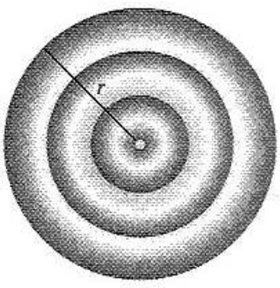
b. Determine a taxa de variação do metabolismo basal de um avestruz de 50 kg que está perdendo massa à taxa de 0,5 kg por dia.

46. VELOCIDADE DE UM LAGARTO Os herpetólogos propuseram o uso da equação $s = 1{,}1w^{0,2}$ para estimar a velocidade máxima s (em metros por segundo) de um lagarto de massa w (em gramas). A que taxa a velocidade máxima de um lagarto de 11 gramas está aumentando se o lagarto está crescendo à taxa de 0,02 grama por dia?

47. PRODUÇÃO Em uma certa fábrica, a produção é dada por $Q = 60K^{1/3}L^{2/3}$ unidades, onde K é o capital imobilizado (em milhares de reais) e L é a mão-de-obra utilizada em homens-horas. Se a produção se mantém constante, qual é a taxa de variação do capital imobilizado no instante em que $K = 8$, $L = 1.000$ e L está aumentando à razão de 25 homens-horas por semana?

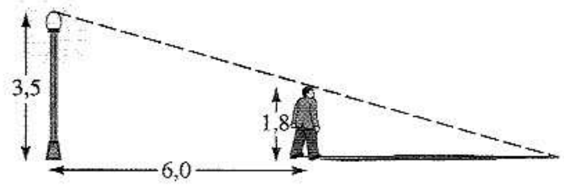
[*Nota:* funções de produção como a que aparece no Problema 47, da forma geral $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, onde A e α são constantes com $0 \leq \alpha \leq 1$, são conhecidas como **funções de produção de Cobb-Douglas**. Estas funções aparecem em vários exemplos e exercícios deste livro, especialmente no Capítulo 7.]

48. POLUIÇÃO DA ÁGUA Uma mancha de óleo de forma circular se espalha de tal forma que seu raio aumenta à razão de 6 m/h. Qual é a taxa de variação da área da mancha no momento em que o raio é 60 m?



PROBLEMA 48

49. Um homem de 1 m 80 cm de altura, caminhando com uma velocidade de 1 m/s, passa por uma luminária de rua com 3,5 m de altura. Qual é a taxa de variação da sombra do homem quando ele está a 6,0 m de distância do poste?



PROBLEMA 49

50. TERMODINÂMICA Nos processos *adiabáticos*, não existe troca de calor com o ambiente. Suponha que um balão de oxigênio seja submetido a um processo adiabático. Nesse caso, se a pressão do gás é P e o volume é V, pode-se demonstrar que $PV^{1,4} = C$, onde C é uma constante. Em um certo instante, $V = 5\ \text{m}^3$, $P = 0{,}6\ \text{kg/m}^2$ e P está aumentando à razão de $0{,}23\ \text{kg/m}^2\text{s}$. Qual é a taxa de variação do volume V neste instante? O volume está aumentando ou diminuindo?

51. FABRICAÇÃO Em uma certa fábrica, a produção Q está relacionada aos insumos x e y através da equação

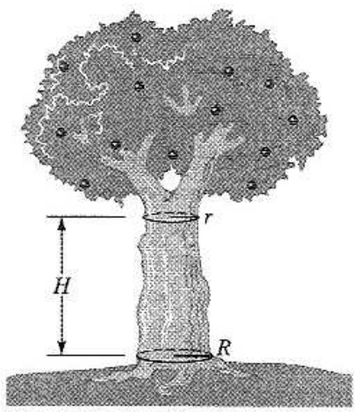
$$Q = 2x^3 + 3x^2y^2 + (1 + y)^3$$

Se os valores dos insumos são $x = 30$ e $y = 20$, use os métodos do cálculo para estimar qual deve ser a variação do insumo y para compensar uma diminuição de 0,8 no insumo x e manter a produção inalterada.

52. PRODUÇÃO DE MADEIRA Para estimar a quantidade de madeira que existe no tronco de uma árvore, é razoável supor que a árvore seja um cone truncado (veja a figura). Se o raio superior do tronco é r, o raio inferior é R e a altura é H, o volume de madeira é dado por

$$V = \frac{\pi}{3}H(R^2 + rR + r^2)$$

As taxas de aumento de r, R e H são respectivamente 10 cm/ano, 12,5 cm/ano e 22,5 cm/ano. Qual é a taxa de aumento de V no instante em que $r = 60$ cm, $R = 9$ cm e $H = 4{,}5$ m?

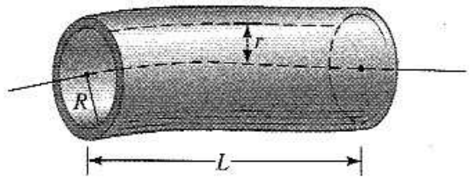


PROBLEMA 52

53. CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA De acordo com uma das leis de Poiseuille (veja Problema 57, Seção 1.1), a velocidade do sangue à pressão constante a r centímetros do eixo central de uma artéria é dada por

$$v = \frac{K}{L}(R^2 - r^2)$$

onde K é uma constante positiva, R é o raio da artéria e L é o comprimento da artéria.* Suponha que o raio R e o comprimento L variem com o tempo de tal forma que a velocidade do sangue no eixo central da artéria se mantém constante, ou seja, que v não varia com o tempo. Mostre que, neste caso, a taxa de variação relativa de L com o tempo é duas vezes maior que a taxa de variação relativa de R.



PROBLEMA 53

*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, pp. 102-103.

54. **FABRICAÇÃO** Em uma certa fábrica, a produção Q está relacionada aos insumos u e v através da equação

$$Q = 3u^2 + \frac{2u + 3v}{(u + v)^2}$$

Se os valores dos insumos são $u = 10$ e $v = 20$, use os métodos do cálculo para estimar qual deve ser a variação do insumo v para compensar uma diminuição de 0,7 no insumo u e manter a produção inalterada.

55. Mostre que a reta tangente à curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

56. Considere a equação $x^2 + y^2 = 6y - 10$.

a. Mostre que não existem pontos (x, y) que satisfaçam à equação $x^2 + y^2 = 6y - 10$. [*Sugestão:* Complete o quadrado.]

b. Mostre que, se aplicarmos cegamente a derivação implícita à equação $x^2 + y^2 = 6y - 10$, obteremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3 - y}$$

O objetivo deste problema é mostrar que é preciso ter cautela ao usar a derivação implícita. O fato de podermos calcular uma derivada por derivação implícita não quer dizer que esta derivada tenha um significado real.

57. Demonstre a regra do produto $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ para o caso em que $n = r/s$ é um número racional. [*Sugestão:* Observe que, se $y = x^{r/s}$, $y^s = x^r$; em seguida, use a derivação implícita.]

58. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 8$. Trace a reta tangente à curva no ponto (1, 1). Quantas retas tangentes horizontais a curva possui? Determine as equações destas retas.

59. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 21$. Trace a reta tangente à curva no ponto (−1, 1). Quantas retas tangentes horizontais a curva possui? Determine as equações destas retas.

60. Resolva as questões que se seguem a respeito da curva $x^3 + y^3 = 3xy$ (conhecida como **fólio de Descartes**).

a. Determine as equações de todas as retas horizontais tangentes à curva.

b. A curva intercepta a reta $y = x$ na origem e em mais um ponto. Qual é a equação da reta tangente neste segundo ponto?

c. Tente encontrar um método de plotar a curva usando uma calculadora gráfica (não é fácil).

61. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$. Determine as equações de todas as retas horizontais tangentes à curva. (Esta curva é conhecida como **cardióide**.)

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

RESUMO DO CAPÍTULO

Reta secante e reta tangente (Seção 2.1)

Taxas de variação média e instantânea (Seção 2.1)

Quociente diferença

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (101)$$

Derivada de $f(x)$: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ (Seção 2.1)

Derivação (Seção 2.1)

Função derivável (Seção 2.1)

A derivada de $f'(x_0)$ como a inclinação da reta tangente a $y = f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$ (Seção 2.1)

A derivada $f'(x_0)$ como a taxa de variação de $f(x)$ com x no ponto $x = x_0$ (Seção 2.1)

Notação da derivada de $f(x)$: $f'(x)$ e $\frac{df}{dx}$ (Seção 2.1)

Uma função derivável é contínua (Seção 2.1)

Regra da constante: $\frac{d}{dx}[c] = 0$ (Seção 2.2)

Regra da potência: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ (Seção 2.2)

Regra da multiplicação por uma constante: $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{df}{dx}$ (Seção 2.2)

Regra da soma: $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$ (Seção 2.2)

Taxa de variação relativa de $Q(x)$: $\frac{Q'(x)}{Q(x)}$ (Seção 2.2)

Taxa de variação percentual de $Q(x)$: $\frac{100Q'(x)}{Q(x)}$ (Seção 2.2)

Movimento retilíneo: posição $s(t)$
velocidade $v(t) = s'(t)$
aceleração $a(t) = v'(t)$ (Seção 2.2)

Movimento de um projétil:

altura $H(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t + H_0$ (Seção 2.2)

Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx} \quad \text{(Seção 2.3)}$$

Regra do quociente: para $g(x) \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{df}{dx} - f(x)\frac{dg}{dx}}{g^2(x)} \quad \text{(Seção 2.3)}$$

Derivada segunda de $f(x)$: $f''(x) = [f'(x)]'$ $\frac{d^2 f}{dx^2}$ é a taxa de variação de $f'(x)$ (Seção 2.3)

Notação para a derivada de ordem n de $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{(Seção 2.3)}$$

Regra da cadeia para $y = f(u(x))$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ ou $[f(u(x))]' = f'(u)u'(x)$ (Seção 2.4)
Regra da potência generalizada:
$\dfrac{d}{dx}[h(x)]^n = n[h(x)]^{n-1}\dfrac{dh}{dx}$ (Seção 2.4)
Custo marginal $C'(x_0)$: é uma estimativa de $C(x_0 + 1) - C(x_0)$, o custo adicional para produzir a unidade $x_0 + 1$ (Seção 2.5)
Receita marginal $R'(x_0)$: é uma estimativa de $R(x_0 + 1) - R(x_0)$, a receita adicional com a produção da unidade $x_0 + 1$ (Seção 2.5)
Lucro marginal $P'(x_0)$: é uma estimativa de $P(x_0 + 1) - P(x_0)$, o lucro adicional com a produção da unidade $x_0 + 1$ (Seção 2.5)
Aproximação por incrementos:
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ (Seção 2.5)
Propagação de erros (Seção 2.5)
A diferencial de $y = f(x)$ é $dy = f'(x)dx$ (Seção 2.5)
Derivação implícita (Seção 2.6)
Taxas relacionadas (Seção 2.6)

Verificação do Capítulo 2

1. Determine a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ da função dada.

a. $y = 3x^4 - 4\sqrt{x} + \dfrac{5}{x^2} - 7$

b. $y = (3x^3 - x + 1)(4 - x^2)$

c. $y = \dfrac{5x^2 - 3x + 2}{1 - 2x}$

d. $y = (3 - 4x + 3x^2)^{3/2}$

2. Determine a derivada segunda da função $f(t) = t(2t + 1)^2$.

3. Determine a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto em que $x = -1$.

4. Determine a taxa de variação com x da função $f(x) = \dfrac{x + 1}{1 - 5x}$ para $x = 1$.

5. IMPOSTO PREDIAL Os registros mostram que x anos após o ano 2000, o imposto predial pago pelo proprietário de um apartamento de quatro quartos em uma cidade americana de grande porte foi, em média, $T(x) = 3x^2 + 40x + 1.800$ dólares.

a. A que taxa o imposto predial estava variando com o tempo em 2003?

b. A que taxa percentual o imposto predial estava aumentando em 2003?

6. MOVIMENTO RETILÍNEO Um corpo se move em linha reta de tal forma que sua posição no instante t é dada por $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 2$ para $t \geq 0$.

a. Determine a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ do corpo.

b. Em que instantes de tempo o corpo está parado? Em que instantes está avançando? Em que instantes está recuando?

c. Qual é a distância percorrida pelo corpo no intervalo $0 \leq t \leq 2$?

7. CUSTO DE PRODUÇÃO O custo para produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 0{,}04x^2 + 5x + 73$ centenas de reais.

a. Use o custo marginal para estimar o custo para produzir a sexta unidade.

b. Qual é o custo exato para produzir a sexta unidade?

8. PRODUÇÃO INDUSTRIAL Em uma certa fábrica, a produção diária é $Q = 500L^{3/4}$ unidades, onde L é a mão-de-obra disponível em homens-horas. No momento, são usados diariamente 2.401 homens-horas. Use o método dos incrementos para estimar o efeito sobre a produção de um aumento de 200 homens-horas na mão-de-obra.

9. MEDICINA INFANTIL Os pediatras usam a equação $S = 0{,}2029w^{0{,}425}$ para estimar a área da superfície S (em m²) de uma criança de 1 metro de altura que pesa w kg. Uma certa criança pesa 30 kg e está ganhando peso à taxa de 0,13 kg por semana sem que sua altura aumente. Qual é a taxa de variação da área da superfície da criança?

10. CRESCIMENTO DE UM TUMOR Um tumor canceroso tem forma aproximadamente esférica. Estime o maior erro percentual que pode ser cometido na medida do raio r para que o erro no cálculo do volume do tumor usando a expressão $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ não exceda 8%.

Problemas de Revisão

Nos Problemas 1 e 2, use a definição de derivada para determinar $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

Nos Problemas 3 a 13, determine a derivada da função dada.

3. $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$

4. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{3x^5} + 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1 - 2x}{x^3}$

5. $y = \dfrac{2 - x^2}{3x^2 + 1}$

6. $y = (x^3 + 2x - 7)(3 + x - x^2)$

7. $f(x) = (5x^4 - 3x^2 + 2x + 1)^{10}$

8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

9. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{5}{\sqrt{3x}}$

10. $y = \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^2$

11. $f(x) = (3x + 1)\sqrt{6x + 5}$

12. $f(x) = \frac{(3x+1)^3}{(1-3x)^4}$

13. $y = \sqrt{\frac{1-2x}{3x+2}}$

Nos Problemas 14 a 17, determine a equação da reta tangente à curva da função dada no ponto especificado.

14. $f(x) = x^2 - 3x + 2; x = 1$

15. $f(x) = \frac{4}{x-3}; x = 1$

16. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}; x = 0$

17. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}; x = -2$

18. Em cada caso, determine a taxa de variação de $f(t)$ com t para o valor de t dado.

a. $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5t\sqrt{t} - 5$ em $t = 4$

b. $f(t) = \frac{2t^2 - 5}{1 - 3t}$ em $t = -1$

c. $f(t) = t^3(t^2 - 1)$ em $t = 0$

d. $f(t) = (t^2 - 3t + 6)^{1/2}$ em $t = 1$

19. Em cada caso, determine a taxa de variação percentual com t da função $f(t)$ para o valor de t dado.

a. $f(t) = t^2 - 3t + \sqrt{t}$ em $t = 4$

b. $f(t) = t^2(3 - 2t)^3$ em $t = 1$

c. $f(t) = \frac{1}{t+1}$ em $t = 0$

20. Use a regra da cadeia para determinar $\frac{dy}{dx}$.

a. $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$

b. $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$

21. Use a regra da cadeia para determinar $\frac{dy}{dx}$ para o valor dado de x.

a. $y = u^3 - 4u^2 + 5u + 2; u = x^2 + 1$; para $x = 1$

b. $y = \sqrt{u}, u = x^2 + 2x - 4$; para $x = 2$

c. $y = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{1/2}, u = \sqrt{x-1}$; para $x = \frac{34}{9}$

22. Determine a derivada segunda da função dada.

a. $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{1}{x}$

b. $z = \frac{2}{1 + x^2}$

c. $y = (3x^2 + 2)^4$

d. $f(x) = 2x(x + 4)^3$

e. $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

23. Determine $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita.

a. $5x + 3y = 12$

b. $x^2y = 1$

c. $(2x + 3y)^5 = x + 1$

d. $(1 - 2xy^3)^5 = x + 4y$

24. Use derivação implícita para determinar a inclinação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

a. $xy^3 = 8; (1, 2)$

b. $x^2y - 2xy^3 + 6 = 2x + 2y; (0, 3)$

c. $x^2 + 2y^3 = \frac{3}{xy}; (1, 1)$

d. $y = \frac{x+y}{x-y}; (6, 2)$

25. Use derivação implícita para determinar $\frac{d^2y}{dx^2}$ se $3x^2 - 2y^2 = 6$.

26. Um projétil é lançado verticalmente a partir do solo com uma velocidade inicial de 48 m/s.

a. Quanto tempo o projétil leva para se chocar com o solo?

b. Qual é a velocidade no momento do impacto?

c. Quanto tempo o projétil leva para atingir a altura máxima? Qual é esta altura?

27. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Uma projeção revela que daqui a t anos a população de uma certa cidade será P mil habitantes, onde

$$P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200.$$

a. A que taxa a população estará aumentando daqui a 3 anos?

b. A que taxa a taxa de aumento da população estará variando daqui a 3 anos?

Nos Problemas 28 e 29, s(t) representa a posição de um corpo que está se movendo em linha reta.

(a) Determine a velocidade e aceleração do corpo e descreva seu movimento no intervalo de tempo indicado.

(b) Determine a distância percorrida pelo corpo no intervalo de tempo indicado.

28. $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t - 25; 1 \le t \le 6$

29. $s(t) = \frac{2t+1}{t^2+12}; 0 \le t \le 4$

30. METRÔ Após x semanas, o número de usuários de uma nova linha de metrô é $N(x) = 6x^3 + 500x + 8.000$.

a. Qual era a taxa de variação do número de passageiros após 8 semanas?

b. Qual foi a variação do número de passageiros durante a oitava semana?

31. PRODUÇÃO Calcula-se que a produção semanal de uma certa fábrica seja $Q(x) = 50x^2 + 9.000x$ unidades, onde x é número de operários da fábrica. No momento, a fábrica tem 30 operários.

a. Use os métodos do cálculo para estimar qual será a variação da produção semanal se a fábrica contratar mais um operário.

b. Calcule qual será a variação exata da produção semanal se a fábrica contratar mais um operário.

32. POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t meses a população de uma certa cidade será $P(t) = 3t + 5t^{3/2} + 6.000$. A que taxa percentual a população estará variando com o tempo daqui a 4 meses?

33. PRODUÇÃO Em uma certa fábrica, a produção diária é $Q(L) = 20.000L^{1/2}$ unidades, onde L é a mão-de-obra em homens-horas. No momento, a fábrica está trabalhando com 900 homens-horas. Use os métodos do cálculo para estimar o efeito sobre a produção de uma redução da mão-de-obra para 885 homens-horas.

34. PRODUTO DOMÉSTICO BRUTO O produto doméstico bruto de um certo país foi $N(t) = t^2 + 6t + 300$ bilhões de dólares t anos após o ano 2000. Use os métodos do cálculo para estimar qual será a variação percentual do PDB no segundo trimestre de 2008.

35. POLUIÇÃO A poluição do ar em uma certa cidade é proporcional ao quadrado da população. Use os métodos do cálculo para estimar a porcentagem de aumento da poluição do ar se a população aumentar 5%.

36. EPIDEMIA DE AIDS Na fase inicial, mais especificamente no período de 1984 a 1990, a epidemia de AIDS podia ser modelada* pela função cúbica

$$C(t) = -170{,}36t^3 + 1.707{,}5t^2 + 1.998{,}4t + 4.404{,}8$$

para $0 \leq t \leq 6$, onde C é o número de casos registrados t anos após o ano-base de 1984.

a. Determine e interprete a derivada $C'(t)$.

b. Com que taxa a epidemia estava se disseminando no ano de 1984?

c. Com que taxa percentual a epidemia estava se disseminando em 1984? E em 1990?

37. DENSIDADE POPULACIONAL A expressão $D = 36\,m^{-1,14}$ é, às vezes, usada para determinar a densidade populacional ideal D (em espécimes por quilômetro quadrado) para um animal de grande porte de massa m (em quilogramas).

a. Qual é a densidade populacional ideal para os seres humanos, supondo que um ser humano típico pese 70 kg?

b. O Brasil tem uma área de aproximadamente 8,5 milhões de quilômetros quadrados. Qual teria que ser a população do Brasil para que a densidade populacional fosse a ideal?

c. Considere uma ilha com uma área de 3.000 km^2. Duzentos animais de massa $m = 30$ kg são introduzidos na ilha; t anos mais tarde, a população é dada por

$$P(t) = 0{,}43t^2 + 13{,}37t + 200$$

Quanto tempo é necessário para que a densidade populacional ideal seja atingida? Com que taxa a população está variando quando a densidade ideal é atingida?

*_Mortality and Morbidity Weekly Report_, U.S. Centers for Disease Control, Vol. 40, No. 53, October 2, 1992.

38. COLÔNIA DE BACTÉRIAS A população P de uma colônia de bactérias t dias após ser iniciado um experimento pode ser modelada pela função cúbica

$$P(t) = 1{,}035t^3 + 103{,}5t^2 + 6.900t + 230.000$$

a. Determine e interprete a derivada $P'(t)$.

b. Com que taxa a população está variando após 1 dia? E após 10 dias?

c. Qual é a população inicial da colônia? Quanto tempo a população leva para dobrar de tamanho? Com que taxa a população está variando no momento em que dobra de tamanho?

39. PRODUÇÃO A produção de uma certa fábrica é $Q(L) = 600L^{2/3}$ unidades, onde L é a mão-de-obra utilizada. O fabricante deseja aumentar a produção em 1%. Use os métodos do cálculo para estimar qual deve ser o aumento percentual da mão-de-obra para atingir esta meta.

40. PRODUÇÃO A produção Q de uma certa fábrica está relacionada aos insumos x e y através da equação

$$Q = x^3 + 2xy^2 + 2y^3$$

Se os valores atuais dos insumos são $x = 10$ e $y = 20$, use os métodos do cálculo para estimar qual deve ser a variação do insumo y para compensar um aumento de 0,5 no insumo x e manter a produção constante.

41. CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA Os fisiologistas observaram que o fluxo de sangue de uma artéria para um capilar é dada pela expressão

$$F = kD^2\sqrt{A - C} \quad (\text{cm}^3/\text{s})$$

onde D é o diâmetro do capilar, A é a pressão na artéria, C é a pressão no capilar e k é uma constante positiva.

a. Qual é a taxa de variação do fluxo de sangue F com a pressão C no capilar se A e D permanecem constantes? O fluxo aumenta ou diminui quando C aumenta?

b. Qual é a taxa de variação percentual com A do fluxo F se C e D permanecem constantes?

42. CONTROLE DA POLUIÇÃO Estima-se que daqui a t anos a população de um certo bairro será $p(t) = 10 - \dfrac{20}{(t+1)^2}$ mil habitantes. Um estudo ambiental revela que a concentração média diária de monóxido de carbono será $c(p) = 0{,}8\sqrt{p^2 + p + 139}$ unidades quando o bairro tiver uma população de p mil habitantes. Qual será a taxa de variação percentual da concentração de monóxido de carbono daqui a 1 ano?

43. Um aluno mede o raio de um círculo, obtém o valor de 12 centímetros e usa a expressão $A = \pi r^2$ para calcular a área. Se a precisão na medida do raio é 3%, qual é a precisão no cálculo da área?

44. Estime o que acontece com o volume de um cubo quando o comprimento da aresta é reduzido de 2%. Expresse a resposta em porcentagem.

45. PRODUÇÃO A produção de uma certa fábrica é $Q = 600K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, onde K é o capital imobilizado e L é a mão-de-obra. Estime o aumento percentual da produção resultante de um aumento de 2% da mão-de-obra se o capital imobilizado permanecer o mesmo.

46. CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA A velocidade do sangue no eixo central de uma certa artéria é $S(R) = 1{,}8 \times 10^5 R^2$ cm/s, onde R é o raio da artéria. Um estudante de medicina mede o raio da artéria e obtém o valor de $1{,}2 \times 10^{-2}$ cm, cometendo um erro de 5×10^{-4} cm. Estime a diferença entre o valor calculado da velocidade do sangue e o valor real.

47. TAMANHO DE UM TUMOR Um médico mede o raio de um tumor esférico, obtém o valor de 1,2 cm e usa a expressão $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ para calcular o volume do tumor. Se o raio foi medido com uma precisão de 3%, qual é a precisão do volume calculado?

48. SISTEMA CARDIOVASCULAR Um modelo do sistema cardiovascular relaciona $V(t)$, o volume de sangue na aorta, no instante t durante a sístole (fase de contração), à $P(t)$, a pressão na aorta durante a sístole, através da equação

$$V(t) = [C_1 + C_2P(t)]\left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right)$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas e T é a duração (constante) da sístole.* Encontre uma relação entre as taxas $\dfrac{dV}{dt}$ e $\dfrac{dP}{dt}$.

49. DEMANDA DO CONSUMIDOR Quando um certo modelo de torradeira elétrica é vendido por p reais, os consumidores compram $D(p) = \dfrac{32.670}{2p+1}$ unidades por mês. Estima-se que daqui a t meses o preço da torradeira será $p(t) = 0{,}04t^{3/2} + 44$ reais. Determine a taxa de variação com o tempo da demanda mensal de torradeiras daqui a 25 meses. A demanda estará aumentando ou diminuindo?

50. Ao meio-dia, um caminhão se encontra no cruzamento de duas estradas e está rumando para o norte a 70 km/h. Uma hora depois, um carro passa pelo mesmo cruzamento viajando para leste a 105 km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre o carro e o caminhão às 14 h?

51. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t anos a população de um certo bairro será $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ mil habitantes. Qual será o aumento da população durante o próximo trimestre?

52. EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã de uma certa fábrica revela que um operário que chega ao trabalho às 8 h produz, em média, $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades nas t horas seguintes.

a. Calcule a produtividade dos operários às 9 h, em unidades por hora.

b. Qual a taxa de variação da produtividade dos operários às 9 h?

c. Use os métodos do cálculo para estimar a variação da produtividade dos operários entre as 9 e 9 h 6 min.

d. Calcule a variação real da produtividade dos operários entre as 9 e 9 h 6 min.

53. SEGURANÇA DO TRÂNSITO Um carro está viajando a uma velocidade de 26 m/s quando o motorista pisa no freio para não atropelar uma criança. Após t segundos, o carro está $s = 26t - 2{,}4t^2$ metros do local onde o motorista pisou no freio. Quanto tempo o carro leva para parar e que distância percorre antes de parar?

54. MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO Areia está vazando de um saco de tal forma que, após t segundos, restam

$$S(t) = 50\left(1 - \frac{t^2}{15}\right)^3$$

quilos de areia no saco.

a. Quanta areia havia inicialmente no saco?

b. A que taxa a areia está vazando do saco após 1 segundo?

c. Quanto tempo o saco leva para esvaziar? A que taxa a areia está vazando do saco quando ele fica vazio?

55. INFLAÇÃO Estima-se que daqui a t meses o preço médio unitário em um certo setor da economia será P reais, onde

$$P(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t + 300.$$

a. A que taxa o preço unitário estará aumentando com o tempo daqui a 5 meses?

b. A que taxa a taxa de aumento do preço unitário estará variando com o tempo daqui a 5 meses?

c. Use os métodos do cálculo para estimar a variação da taxa de aumento do preço durante a primeira metade do sexto mês.

d. Calcule a variação exata da taxa de aumento do preço unitário durante a primeira metade do sexto mês.

56. CUSTO DE PRODUÇÃO Em uma certa fábrica, aproximadamente $q(t) = t^2 + 50t$ unidades são produzidas durante as primeiras t horas de uma jornada de trabalho e o custo total para produzir q unidades é $C(q) = 0{,}1q^2 + 10q + 400$ reais. Determine a taxa com que o custo de produção está aumentando duas horas após iniciada a jornada de trabalho.

57. CUSTO DE PRODUÇÃO Estima-se que o custo mensal para produzir x unidades de uma certa mercadoria seja $C(x) = 0{,}06x + 3x^{1/2} + 20$ centenas de reais. Suponha que a produção esteja diminuindo à taxa de 11 unidades por mês quando a produção mensal é 2.500 unidades. A que taxa o custo está variando neste nível de produção?

58. Estime o maior erro percentual que pode ser tolerado na medida do raio de uma esfera para que o erro cometido no cálculo da superfície da esfera, usando a expressão $S = 4\pi r^2$, não ultrapasse 8%.

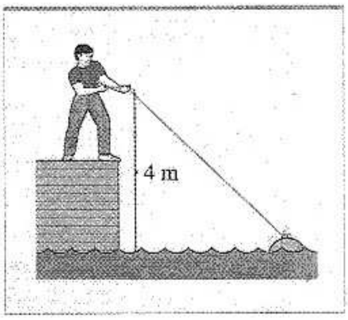
59. Uma bola de futebol, feita de couro com 3 mm de espessura, tem um diâmetro interno de 22 cm. Estime o volume do couro usado na bola. [*Sugestão:* Pense no volume do couro como uma certa variação ΔV do volume total da bola.]

60. Um carro viajando para o norte a 60 km/h e um caminhão viajando para leste a 45 km/h deixam um cruzamento ao mesmo tempo. Com que taxa a distância entre os dois veículos está variando 2 horas depois?

61. Uma criança está empinando um papagaio a uma altura de 24 metros. Se o papagaio se move horizontalmente com uma velocidade constante de 1,5 m/s, com que taxa a linha está sendo estendida quando o papagaio se encontra a 30 m de distância da criança?

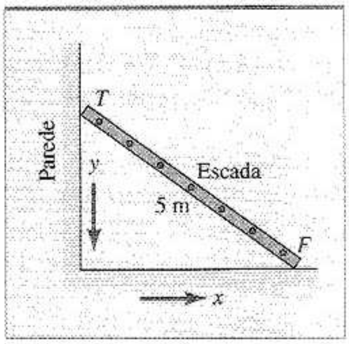
*J. G. Dafares, J. J. Osborn and H. H. Hura, *Acta Physiol. Pharm. Neerl.*, Vol. 12, 1963, pp. 189-265.

62. Uma pessoa está de pé na beira de um cais, 4 m acima da água, e puxa uma corda presa a uma bóia. Se a corda é puxada à taxa de 0,6 m/min, com que velocidade a bóia está se movendo quando se encontra a 3 m do cais?



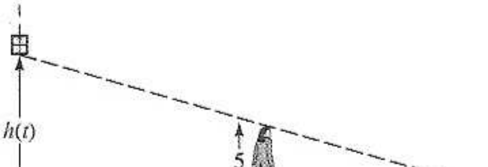
PROBLEMA 62

63. Uma escada de 5 m de comprimento está apoiada em uma parede. O alto da escada está escorregando para baixo ao longo da parede com uma velocidade de 3 m/s. Com que velocidade a base da escada está se afastando da parede quando o alto se encontra a 3 m do chão?



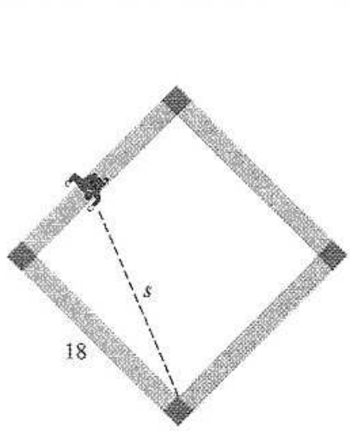
PROBLEMA 63

64. Uma lanterna cai do alto de um edifício de tal forma que após t segundos está $h(t) = 45 - 4{,}9t^2$ metros acima do chão. Uma mulher de 1 m 50 cm de altura, que estava verticalmente abaixo da lanterna, começa a afastar-se com uma velocidade constante de 1,5 m/s. Qual é a taxa de aumento da sombra da mulher quando a lanterna está a 3 m do solo?



PROBLEMA 64

65. Um campo de beisebol tem a forma de um quadrado com 18 metros de lado. Um jogador corre da segunda base para a terceira com uma velocidade de 6 m/min. Qual é a taxa de variação da distância entre o corredor e a quarta base quando ele se encontra a 4,5 metros de distância da terceira base?



PROBLEMA 65

66. CUSTO DE FABRICAÇÃO Suponha que o custo total de fabricação C em uma certa indústria seja função do número q de unidades produzidas, que, por sua vez, é função do número t de horas de funcionamento da fábrica.

a. Que grandeza é representada pela derivada $\dfrac{dC}{dq}$? Em que unidades esta grandeza é medida?

b. Que grandeza é representada pela derivada $\dfrac{dq}{dt}$? Em que unidades esta grandeza é medida?

c. Que grandeza é representada pelo produto $\dfrac{dC}{dq}\dfrac{dq}{dt}$? Em que unidades esta grandeza é medida?

67. Um objeto é arremessado de um ponto P e se move o tempo todo em linha reta. Sabe-se que a velocidade do objeto é diretamente proporcional ao produto do tempo durante o qual está se movendo pela distância a que se encontra de P. Sabe-se também que 5 segundos após o arremesso o objeto está a 6 metros de P e está se movendo com uma velocidade de 1,2 m/s. Determine a aceleração do objeto neste instante.

68. Determine todos os pontos (x, y) da curva da função $y = 4x^2$ com a propriedade de que a tangente à curva no ponto (x, y) passa pelo ponto $(2, 0)$.

69. Suponha que y é uma função linear de x, ou seja, que $y = mx + b$. O que acontece com a taxa de variação percentual de y com x quando x aumenta indefinidamente? Justifique sua resposta.

70. Determine a equação da reta tangente à curva

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

71. Seja $f(x) = (3x + 5)(2x^3 - 5x + 4)$. Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x)$ e $f'(x)$ no mesmo gráfico. Use **TRACE** e **ZOOM** para determinar os pontos em que $f'(x) = 0$.

72. Use uma calculadora gráfica para plotar as funções $f(x) = \dfrac{2x + 3}{1 - 3x}$ e $f'(x)$ no mesmo gráfico. Use **TRACE** e **ZOOM** para determinar os pontos em que $f'(x) = 0$.

73. A curva $y^2(2 - x) = x^2$ é chamada de **cissóide**.

a. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva.

b. Determine uma equação para a reta tangente à curva em todos os pontos nos quais $x = 1$.

c. Como se comporta a curva quando x tende a 2 para a esquerda?

d. A curva possui uma tangente na origem? Caso a resposta seja afirmativa, qual é a equação desta tangente?

74. Um corpo se move em linha reta de tal forma que sua posição no instante t é dada por

$$s(t) = t^{5/2}(0{,}73t^2 - 3{,}1t + 2{,}7) \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 2$$

a. Determine a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ e use uma calculadora gráfica para plotar $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ no mesmo gráfico para $0 \leq t \leq 2$.

b. Use a calculadora gráfica para determinar o instante em que $v(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 2$. Qual é a posição do corpo neste instante?

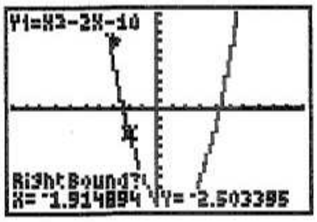
c. Em que instante o valor de $a(t)$ é mínimo? Em que posição se encontra o corpo nesta ocasião e com que velocidade?

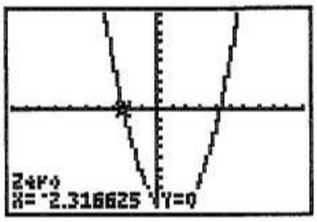
ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

Determinação de Raízes

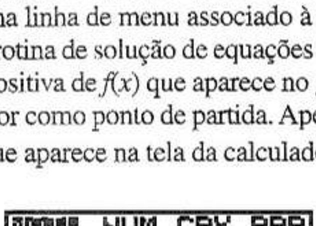
1. As interseções com o eixo x, também chamadas de **raízes**, são pontos importantes de uma função. Mais tarde veremos que tipo de informação é possível extrair das raízes da derivada de uma função. No momento, limitar-nos-emos a examinar o uso de uma calculadora gráfica para localizar raízes.

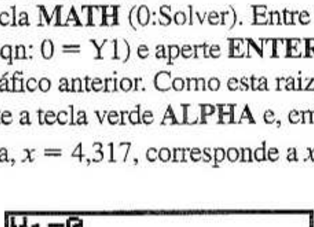
Certifique-se de que a calculadora está no modo função (Func) do menu **MODE**. Entre com $f(x) = x^2 - 2x - 10$ como Y1 no editor de equações (**Y=**). Plote a função usando uma janela padrão do **ZOOM**. Localize as interseções com o eixo x usando **TRACE** e **ZOOM** ou aperte a tecla **CALC** (**2nd TRACE**) e selecione 2:zero. No processo, é preciso especificar um limite à esquerda, um limite à direita e uma estimativa para a raiz. Verifique algebricamente que a raiz negativa desta função é $x = 1 - \sqrt{11}$.

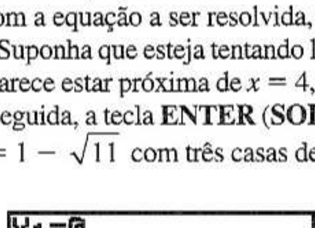




Outra forma de localizar as raízes é usar diretamente o modo de solução de equações da calculadora. Entre na última linha de menu associado à tecla **MATH** (0:Solver). Entre com a equação a ser resolvida, no caso Y1, na rotina de solução de equações (eqn: 0 = Y1) e aperte **ENTER**. Suponha que esteja tentando localizar a raiz positiva de $f(x)$ que aparece no gráfico anterior. Como esta raiz parece estar próxima de $x = 4$, escolha este valor como ponto de partida. Aperte a tecla verde **ALPHA** e, em seguida, a tecla **ENTER** (**SOLVE**). O valor que aparece na tela da calculadora, $x = 4{,}317$, corresponde a $x = 1 - \sqrt{11}$ com três casas decimais.

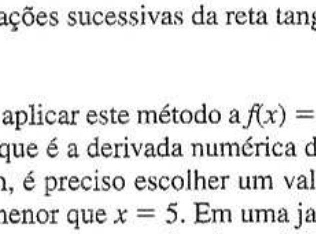


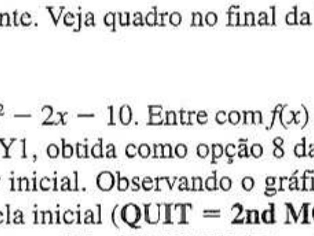


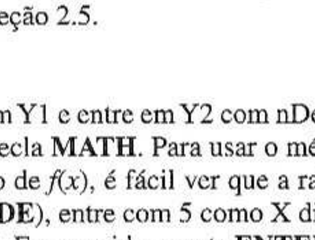


2. Outra forma de localizar uma raiz é usar o método de Newton, um algoritmo iterativo que usa aproximações sucessivas da reta tangente. Veja quadro no final da Seção 2.5.

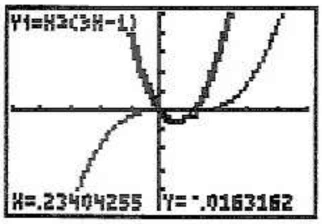
Vamos aplicar este método a $f(x) = x^2 - 2x - 10$. Entre com $f(x)$ em Y1 e entre em Y2 com nDeriv(Y1, X, X), que é a derivada numérica de Y1, obtida como opção 8 da tecla **MATH**. Para usar o método de Newton, é preciso escolher um valor inicial. Observando o gráfico de $f(x)$, é fácil ver que a raiz positiva é menor que $x = 5$. Em uma janela inicial (**QUIT = 2nd MODE**), entre com 5 como X digitando $5 \to$ X e entre com o algoritmo de Newton, X − Y1(X)/Y2(X) → X. Em seguida, aperte **ENTER** várias vezes e observe a seqüência de valores resultantes. Verifique quantas iterações são necessárias para que duas aproximações sucessivas forneçam o mesmo valor até a quarta casa decimal. Experimente usar $x = 4$ como valor inicial. Os valores convergem para a mesma raiz? E se o valor inicial for $x = -2$?



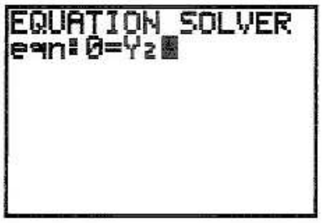


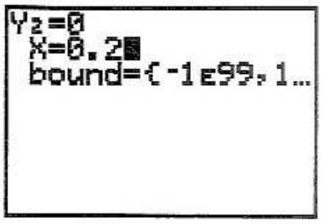


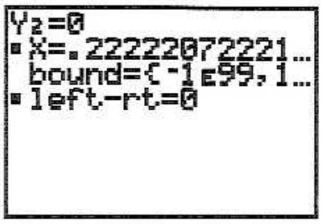
3. Podemos também usar a rotina de solução de equações para determinar as raízes da derivada de uma função. Como exemplo, entre com $f(x) = x^2(3x - 1)$ em Y1 do editor de equações e entre em Y2 com nDeriv(Y1, X, X). Use o estilo negrito para plotar Y2 em uma janela pequena, $[-1, 1]0{,}2$ por $[-1, 1]0{,}2$. Como se pode ver no gráfico a seguir, uma das raízes da derivada é $x = 0$. A outra raiz parece estar próxima de $x = 0{,}2$.



Para localizar esta segunda raiz, coloque Y2 na posição da rotina para resolver equações, eqn: 0= (use a seta para cima para voltar à tela da rotina e resolver equações). Entre com $x = 0{,}2$ como valor inicial e aperte **ALPHA ENTER** (**SOLVE**) para obter a segunda raiz da derivada. O que acontece se você escolhe $x = -0{,}2$ como valor inicial?







PARA PENSAR

PROBLEMA

O **bicho da maçã** é uma pequena mariposa que causa sérios prejuízos aos plantadores de maçã. Os insetos adultos saem dos casulos na primavera, se acasalam e a fêmea põe até 130 ovos em folhas de macieiras. Assim que a larva sai do ovo, começa a procurar uma maçã. O período entre o instante em que a larva sai do ovo e o instante em que encontra uma maçã é chamado de **período de busca**. Quando uma larva encontra uma maçã, penetra na fruta e começa a comê-la, torna-a imprópria para o consumo humano. Depois de aproximadamente 4 semanas, a larva sai da maçã e se instala sob a casca da árvore ou no solo para formar um casulo.

Observações do comportamento do bicho da maçã revelam que a duração do período de busca, $S(T)$, e a porcentagem de larvas que sobrevivem ao período de busca, $N(T)$, dependem da temperatura do ar T. Métodos de análise de dados (regressão polinomial) aplicados às observações mostram que, se a temperatura T é expressa em graus Celsius e $20 \leq T \leq 30$, $S(T)$ e $N(T)$ podem ser modelados* pelas funções

$$S(T) = (-0{,}03T^2 + 1{,}6T - 13{,}65)^{-1} \text{ dias}$$

e

$$N(T) = -0{,}85T^2 + 45{,}4T - 547$$

Use estas expressões para responder às perguntas que se seguem.

Exercícios

1. De acordo com as expressões de $S(T)$ e $N(T)$, quais são a duração do período de busca e a porcentagem de larvas que sobrevivem ao período de busca quando a temperatura do ar é 25 graus Celsius?
2. Plote $N(T)$ e determine a temperatura na qual a porcentagem de larvas que sobrevivem ao período de busca é máxima. Em seguida, determine a temperatura na qual a porcentagem de larvas que sobrevivem ao período de busca é mínima. (Não se esqueça de que $20 \leq T \leq 30$.)
3. Calcule $\frac{dS}{dT}$, a taxa de variação da duração do período de busca com a temperatura. Para que temperatura esta taxa é nula? O que acontece de especial nesta temperatura?
4. Use a regra da cadeia para calcular $\frac{dN}{dS}$, a taxa de variação da porcentagem de larvas que sobrevivem ao período de busca com a duração do período de busca,

$$\frac{dN}{dT} = \frac{dN}{dS}\frac{dS}{dT}$$

Que tipo de informação esta taxa fornece?

*P. L. Shaffer and H. J. Gold, "A Simulation Model of Population Dynamics of the Codling Moth *Cydia pomonella*", *Ecological Modeling*, Vol. 30, 1985, pp. 247-274.

CAPÍTULO | 3

APLICAÇÕES ADICIONAIS DA DERIVADA

SEÇÃO 3.1 | Funções Crescentes e Decrescentes; Extremos Relativos

Intuitivamente, sabemos que uma função $f(x)$ é *crescente* quando a curva de f se inclina para cima e *decrescente* quando a curva se inclina para baixo. Assim, por exemplo, a curva da Figura 3.1 mostra os gastos com armamentos dos países do antigo bloco soviético como porcentagem do PDB (Produto Doméstico Bruto) durante o período crucial de 1990 a 1995 que se seguiu à extinção da União Soviética. A forma da curva sugere que os gastos diminuíram consideravelmente entre 1990 e 1992, aumentaram ligeiramente entre 1992 e 1994 e voltaram a diminuir de 1994 em diante.

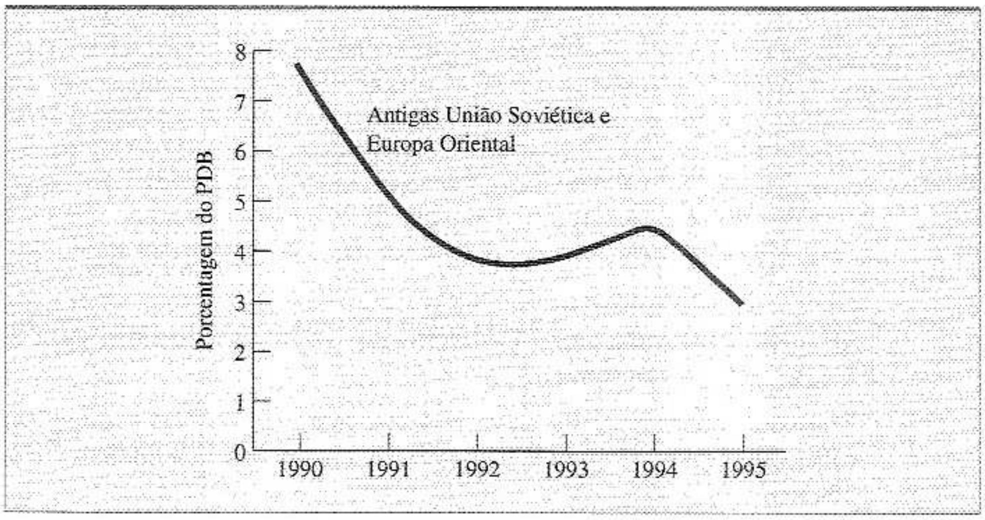


FIGURA 3.1 Gastos com armamentos dos países do antigo bloco soviético como porcentagem do PDB.

Segue uma definição mais formal das funções crescentes e decrescentes, que é ilustrada graficamente na Figura 3.2.

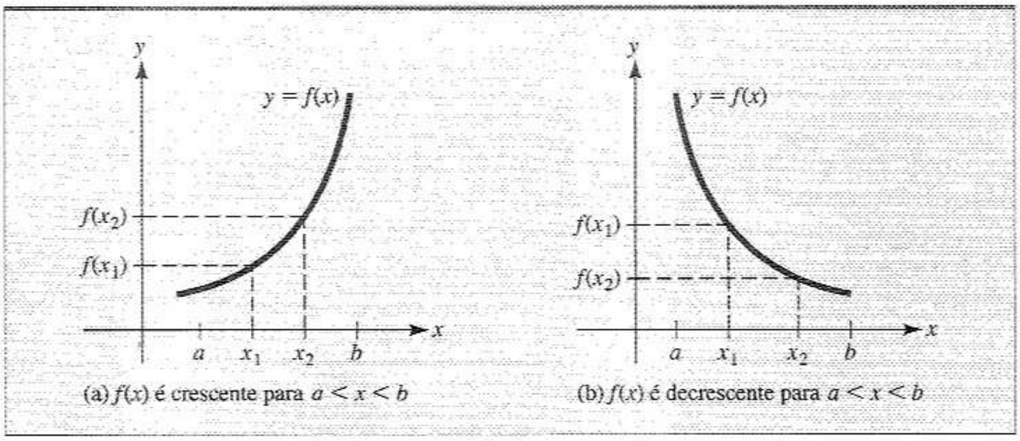


FIGURA 3.2 Função crescente e função decrescente.

Função Crescente e Função Decrescente ■ Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $a < x < b$ e sejam x_1 e x_2 dois números neste intervalo. Nesse caso,

$f(x)$ é **crescente** no intervalo se $f(x_2) > f(x_1)$ para qualquer $x_2 > x_1$.

$f(x)$ é **decrescente** no intervalo de $f(x_2) < f(x_1)$ para qualquer $x_2 > x_1$.

Como se pode ver na Figura 3.3a, se as inclinações das retas tangentes à curva de uma função $f(x)$ são todas positivas no intervalo $a < x < b$, a inclinação da curva é para cima e $f(x)$ é crescente no intervalo. Como a inclinação da reta tangente é dada pela derivada $f'(x)$, concluímos que $f(x)$ é crescente nos intervalos em que $f'(x) > 0$. Da mesma forma, $f(x)$ é decrescente nos intervalos em que $f'(x) < 0$ (Figura 3.3b).

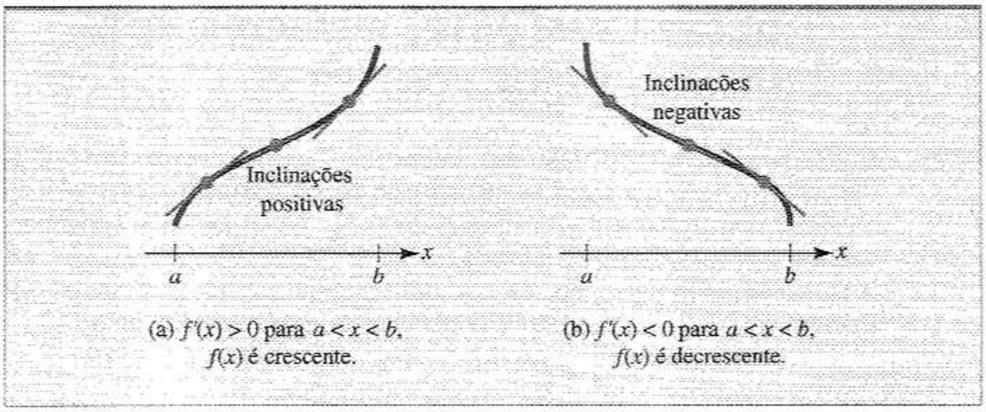


FIGURA 3.3 Critério da derivada para funções crescentes e decrescentes.

De acordo com a propriedade do valor intermediário (Seção 1.6), uma função contínua não pode mudar de sinal sem assumir o valor 0. Isto significa que, se assinalarmos em uma reta de números todos os números x para os quais $f'(x)$ é descontínua ou $f'(x) = 0$, a reta será dividida em intervalos nos quais $f'(x)$ não muda de sinal. Assim, se escolhemos um número de teste c pertencente a um dos intervalos e constatamos que $f'(c) > 0$, ficamos sabendo que $f'(x) > 0$ para todos os números x pertencentes a este intervalo e $f(x)$ é crescente em todo o intervalo. Se, por outro lado, $f'(c) < 0$, ficamos sabendo que $f(x)$ é decrescente em todo o intervalo. Estas observações podem ser resumidas da seguinte forma:

Uso da Derivada para Determinar os Intervalos em que a Função f É Crescente e Decrescente

1º passo: Determine todos os valores de x para os quais $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não é contínua e assinale estes valores em uma reta de números, dividindo, assim, a reta em um certo número de intervalos abertos.

(continua)

2º passo: Escolha um número de teste c para cada intervalo $a < x < b$ determinado no 1º passo e calcule $f'(c)$.

Se $f'(c) > 0$, a função $f(x)$ é crescente no intervalo $a < x < b$.

Se $f'(c) < 0$, a função $f(x)$ é decrescente no intervalo $a < x < b$.

Este método é ilustrado nos Exemplos 3.1.1 e 3.1.2.

1 EXPLORE!

Entre com a função $f(x)$ do Exemplo 3.1.1 como Y1 no estilo negrito e com a função $f'(x)$ como Y2, usando a opção de derivada numérica da calculadora gráfica. Plote as duas funções usando uma janela decimal expandida [−4,7; 4,7]1 por [−20, 20]2. Você é capaz de identificar os intervalos em que $f(x)$ é crescente e decrescente observando o comportamento de $f'(x)$?

EXEMPLO 3.1.1

Determine os intervalos em que a função

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7.$$

é crescente e decrescente.

Solução

A derivada de $f(x)$ é

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

que é contínua para todos os valores reais de x e se anula em $x = 1$ e $x = -2$. Os números -2 e 1 dividem o eixo x em três intervalos abertos: $x < -2$, $-2 < x < 1$ e $x > 1$. Em cada um destes intervalos, escolhemos um número de teste c. Por exemplo: $c = -3$ para $x < -2$, $c = 0$ para $-2 < x < 1$ e $c = 2$ para $x > 1$. Em seguida, calculamos o valor de $f'(c)$ para cada número de teste:

$$f'(-3) = 24 > 0 \qquad f'(0) = -12 < 0 \qquad f'(2) = 24 > 0$$

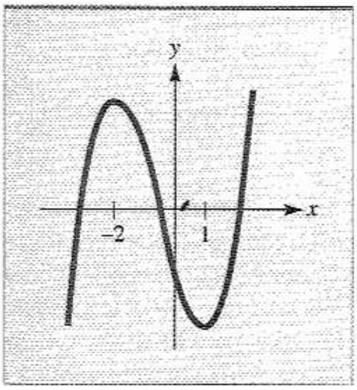


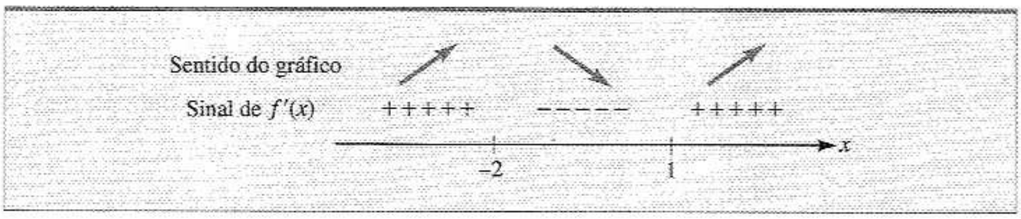
FIGURA 3.4 Gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

Concluímos que $f'(x) > 0$ para $x < -2$ e para $x > 1$, o que significa que $f(x)$ é crescente nesses intervalos. Por outro lado, $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$ e, portanto, $f(x)$ é decrescente nesses intervalos. Estes resultados aparecem na Tabela 3.1. A Figura 3.4 mostra o gráfico de $f(x)$.

TABELA 3.1 Intervalos de Subida e Descida de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

Intervalo	Número de Teste c	$f'(c)$	Conclusão	Sentido da Curva
$x < -2$	-3	$f'(-3) > 0$	f é crescente	Subindo
$-2 < x < 1$	0	$f'(0) < 0$	f é decrescente	Descendo
$x > 1$	2	$f'(2) > 0$	f é crescente	Subindo

NOTA Daqui em diante, vamos indicar um intervalo no qual $f(x)$ é crescente por uma "seta inclinada para cima" (↗) e um intervalo no qual $f(x)$ é decrescente por uma "seta inclinada para baixo" (↘). Assim, os resultados do Exemplo 3.1.1 podem ser representados pelo *diagrama de setas* mostrado na figura a seguir.



■

EXEMPLO 3.1.2

Determine os intervalos em que a função

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

é crescente e decrescente.

2 EXPLORE!

Plote a função $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)}$ em estilo comum e a função $g(x) = \dfrac{x^2}{(x-4)}$ em negrito, usando uma janela [−9,4; 9,4]1 por [−20, 30]5. Qual é o efeito da mudança da constante do denominador sobre os picos e vales do gráfico? Em que intervalo $g(x)$ é decrescente?

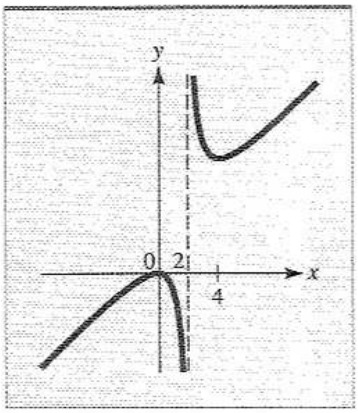


FIGURA 3.5 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Solução

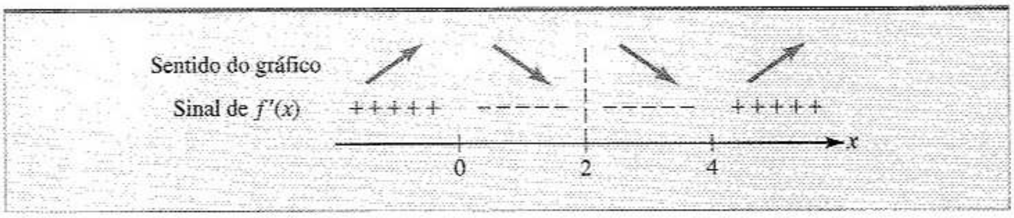
A função existe para todos os valores reais de x exceto $x = 2$ e sua derivada é

$$f'(x) = \frac{(x-2)(2x) - x^2(1)}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

que é uma função contínua em todos os pontos exceto $x = 2$ e se anula em $x = 0$ e $x = 4$. Assim, existem quatro intervalos nos quais o sinal de $f'(x)$ permanece constante: $x < 0$, $0 < x < 2$, $2 < x < 4$ e $x > 4$. Escolhendo números de teste nestes intervalos (−2, 1, 3 e 5, respectivamente), descobrimos que

$$f'(-2) = \frac{3}{4} > 0 \qquad f'(1) = -3 < 0 \qquad f'(3) = -3 < 0 \qquad f'(5) = \frac{5}{9} > 0$$

Concluímos que $f(x)$ é crescente para $x < 0$ e para $x > 4$ e que é decrescente para $0 < x < 2$ e para $2 < x < 4$. Estes resultados aparecem no diagrama de setas que se segue [a reta vertical tracejada indica que $f(x)$ não existe no ponto $x = 2$].



Intervalos em que $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ é crescente e decrescente.

A Figura 3.5 mostra a curva de $f(x)$. Observe que a curva tende para a reta vertical $x = 2$ quando x tende a 2. Este comportamento revela que $x = 2$ é uma *assíntota vertical* da curva de $f(x)$. As assíntotas serão discutidas na Seção 3.3.

Extremos Relativos

A simplicidade dos gráficos das Figuras 3.4 e 3.5 pode ser enganadora. A Figura 3.6 mostra um gráfico mais geral. Observe que existem "picos" em C e E e 'vales" em B, D e G, mas só é possível traçar tangentes horizontais em B, C, D e G; no ponto E, que é um "ponto de quebra", não existe tangente. Além disso, existe uma tangente horizontal no ponto F, que não é um pico nem um vale. Nesta seção e na seguinte, vamos ver de que forma os métodos do cálculo podem ser usados para localizar e identificar os "picos" e "vales" de uma função, o que, por sua vez, facilita o traçado da curva associada e ajuda a resolver problemas de otimização.

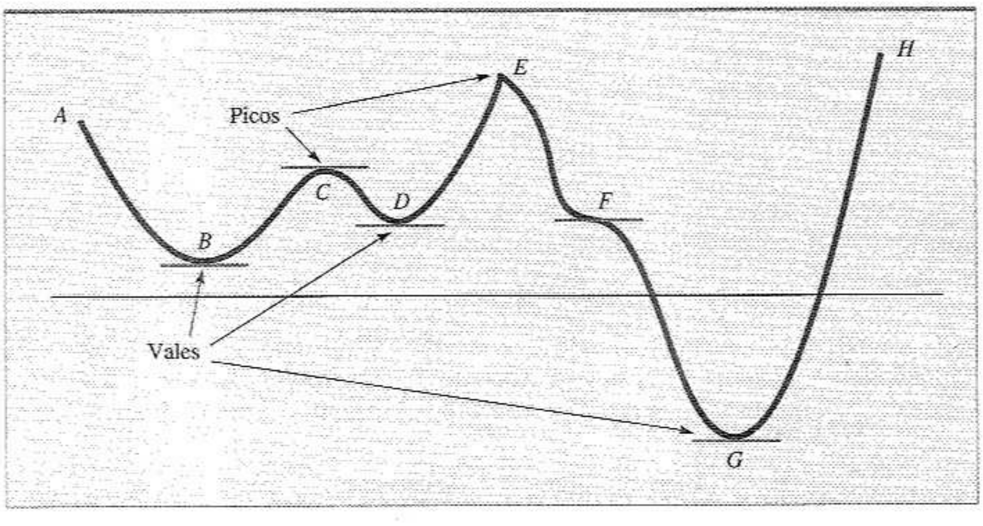


FIGURA 3.6 Gráfico com vários tipos de "picos" e "vales".

Mais formalmente, os "picos" de uma função f são chamados de **máximos relativos** de f e os "vales" são chamados de **mínimos relativos**. Assim, um máximo relativo é qualquer ponto no gráfico de f que seja pelo menos tão alto quanto os pontos vizinhos, enquanto um mínimo relativo é qualquer ponto que seja pelo menos tão baixo quanto os pontos vizinhos. Os máximos e mínimos relativos são conhecidos pelo nome global de **extremos relativos**. Na Figura 3.6, os máximos relativos são C e E e os mínimos relativos são B, D e G. Observe que um extremo relativo não precisa ser o ponto mais alto ou mais baixo de toda a curva. Assim, por exemplo, na Figura 3.6, o ponto mais baixo é o mínimo relativo G, mas o ponto mais alto é H, o último ponto à direita. Esta terminologia pode ser resumida da seguinte forma:

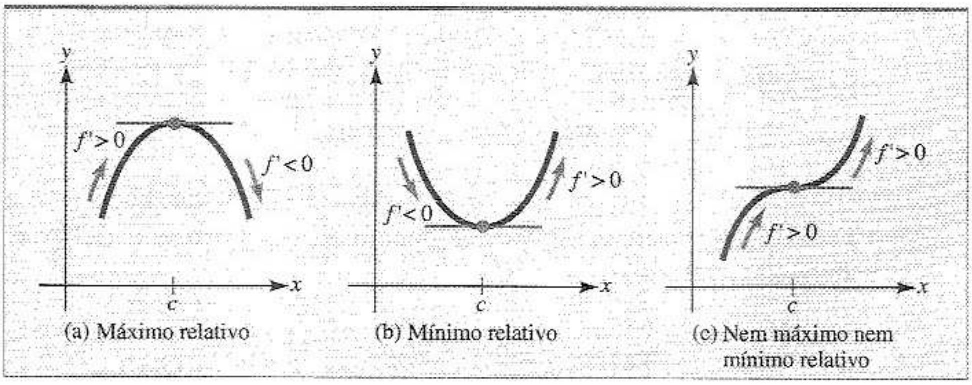
Extremos Relativos ■ Dizemos que uma função $f(x)$ possui um *máximo relativo* no ponto $x = c$ se $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x em um intervalo $a < x < b$ que contenha o ponto c. Uma função $f(x)$ possui um mínimo relativo no ponto $x = c$ se $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x em um intervalo $a < x < b$ que contenha o ponto c. Os máximos e mínimos relativos de f são conhecidos pelo nome global de *extremos relativos*.

Como uma função $f(x)$ é crescente quando $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$, os únicos pontos nos quais $f(x)$ pode possuir um extremo relativo são aqueles em que $f'(x)$ é nula ou não existe. Estes pontos são tão importantes que recebem um nome especial.

Números Críticos e Pontos Críticos ■ Um número c pertencente ao domínio de $f(x)$ é chamado de número crítico se $f'(c) = 0$ ou se $f'(c)$ não existe. O ponto correspondente $(c, f(c))$ no gráfico de $f(x)$ é chamado de ponto crítico de $f(x)$. *Os extremos relativos podem ocorrer apenas em pontos críticos.*

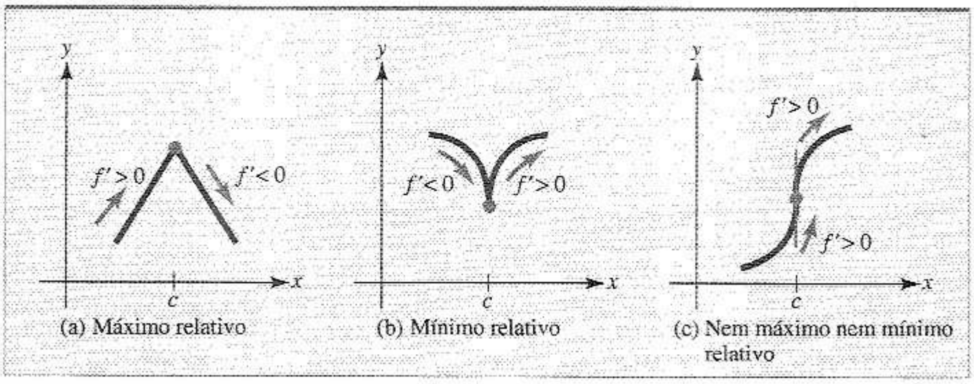
É importante notar que, embora todos os extremos relativos ocorram em pontos críticos, *nem todos os pontos críticos correspondem a extremos relativos*. Assim, por exemplo, a Figura 3.7 mostra três situações diferentes em que $f'(c) = 0$ e, portanto, existe uma tangente horizontal no ponto crítico $(c, f(c))$. O ponto crítico corresponde a um máximo relativo na Figura 3.7a e a um mínimo relativo na Figura 3.7b, mas não existe nenhum extremo relativo no ponto crítico da Figura 3.7c.

FIGURA 3.7 Três pontos críticos $(c, f(c))$ nos quais $f'(c) = 0$.



Três funções com pontos críticos nos quais a derivada não existe aparecem na Figura 3.8. Na Figura 3.8c, a reta tangente é vertical no ponto $(c, f(c))$ e, portanto, a derivada $f'(c)$ não existe. Nas Figuras 3.8a e 3.8b, não é possível traçar uma única reta tangente passando pelo "vértice" situado no ponto $(c, f(c))$.

FIGURA 3.8 Três pontos críticos $(c, f(c))$ nos quais $f'(c)$ não existe.



O Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos

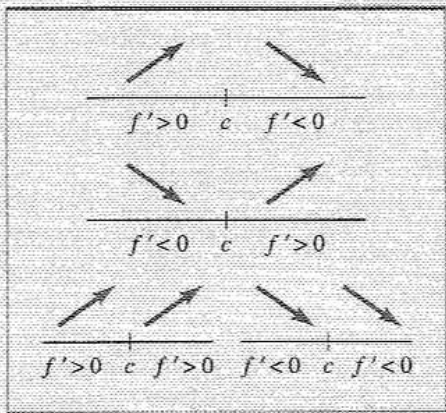
As Figuras 3.7 e 3.8 também sugerem um método para usar o sinal da derivada para classificar pontos críticos como máximos relativos, mínimos relativos ou nem uma coisa nem outra. Suponha que c seja um número crítico de f e que $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita. Geometricamente, isto significa que a curva de f está subindo antes de chegar ao ponto crítico $P(c, f(c))$ e começa a descer depois de passar pelo ponto, o que mostra que P é um máximo relativo. Da mesma forma, se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita, isto significa que a curva de f está descendo antes de chegar ao ponto crítico $P(c, f(c))$ e começa a subir depois de passar pelo ponto, o que mostra que P é um mínimo relativo. Caso, porém, a derivada tenha o mesmo sinal dos dois lados de c, a curva continuará subindo ou descendo depois de passar por P e, portanto, não haverá nenhum extremo relativo neste ponto. Estas observações podem ser resumidas da seguinte forma:

Teste da Primeira Derivada para Extremos Relativos ■ Seja c um número crítico de $f(x)$ (isto é, $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe). Neste caso, o ponto crítico $P(c, f(c))$ é

Um **máximo relativo** se $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita de c.

Um **mínimo relativo** se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita de c.

Um **ponto ordinário** se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ dos dois lados de c.



EXEMPLO 3.1.3

Determine todos os números críticos da função

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$$

e classifique os pontos críticos correspondentes como um máximo relativo, um mínimo relativo ou nem uma coisa nem outra.

Solução

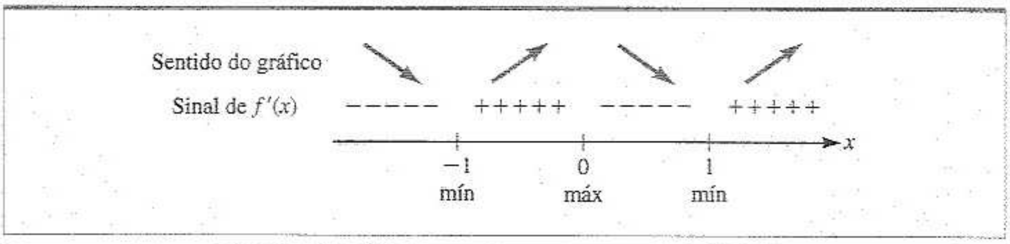
O polinômio $f(x)$ é definido para qualquer valor de x e sua derivada é

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 8x(x - 1)(x + 1)$$

Como a derivada existe para qualquer valor de x, os únicos números críticos são aqueles para os quais $f'(x) = 0$, que são $x = 0$ e $x = 1$ e $x = -1$. Estes números dividem o eixo x em quatro intervalos, nos quais o sinal da derivada permanece constante: $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ e $x > 1$. Escolha um número de teste c em cada um destes intervalos (como, por exemplo, -5, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e 2, respectivamente) e calcule o valor de $f'(c)$ em cada caso:

$$f'(-5) = -960 < 0 \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 > 0 \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{15}{8} < 0 \quad f'(2) = 48 > 0$$

Assim, a curva de $f(x)$ é decrescente para $x < -1$ e para $0 < x < 1$ e crescente para $-1 < x < 0$ e para $x > 1$, o que indica que existe um máximo relativo em $x = 0$ e mínimos relativos em $x = -1$ e $x = 1$, como mostra o diagrama de setas a seguir.



Aplicações

Depois de determinar os intervalos nos quais a função $f(x)$ é crescente e decrescente e localizar os extremos relativos, podemos esboçar a curva da função. Segue uma descrição passo a passo do método para esboçar o gráfico de uma função contínua $f(x)$ usando a derivada $f'(x)$. Na Seção 3.3, este método será estendido para cobrir a situação em que $f(x)$ é descontínua.

Método para Esboçar um Gráfico de uma Função Contínua $f(x)$ Usando a Derivada $f'(x)$

1º passo: Determine o domínio de $f(x)$. Construa uma reta de números restrita apenas aos números do domínio de $f(x)$.

2º passo: Determine $f'(x)$ e assinale os números críticos na reta de números obtida no 1º passo. Analise o sinal da derivada para determinar os intervalos da reta de números em que $f(x)$ é crescente e os intervalos em que é decrescente.

3º passo: Para cada número crítico c, calcule o valor de $f(c)$ e plote o ponto crítico $P(c, f(c))$ em um sistema de eixos coordenados, com uma "copa" em P se P for um máximo relativo ($\nearrow \searrow$) ou um "copo" se P for um mínimo relativo ($\searrow \nearrow$). Plote também os pontos correspondentes a interseções com os eixos x e y e outros pontos fáceis de determinar.

4º passo: Desenhe o gráfico de f como uma curva suave ligando os pontos críticos de tal forma que a curva suba nas regiões em que $f'(x) > 0$, desça das regiões em que $f'(x) < 0$ e tenha uma tangente horizontal nos pontos em que $f'(x) = 0$.

3 EXPLORE!

Plote a função $f(x)$ do Exemplo 3.1.4 em negrito, usando uma janela $[-4{,}7; 4{,}7]1$ por $[-15, 45]5$. No mesmo gráfico, plote também a função $g(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 2$, igual a $f(x)$ a não ser pelo termo constante, que é 2 em vez de -8. Que efeito tem esta mudança sobre os números críticos?

EXEMPLO 3.1.4

Trace a curva da função $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$.

Solução

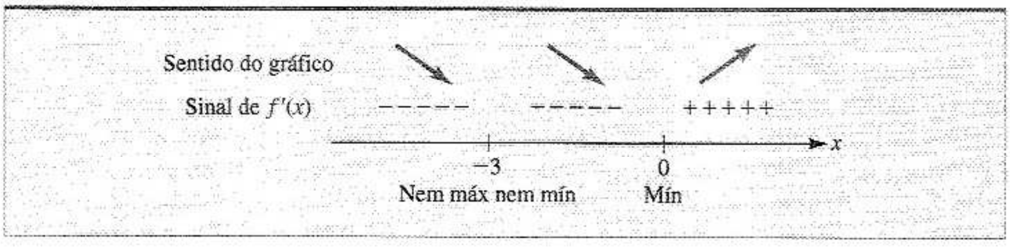
Como $f(x)$ é um polinômio, é definida para qualquer valor de x. A derivada é

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x = 4x(x^2 + 6x + 9) = 4x(x + 3)^2$$

Como a derivada existe para qualquer valor de x, os únicos números críticos são aqueles para os quais $f'(x) = 0$, ou seja, $x = 0$ e $x = -3$. Estes números dividem o eixo x em três intervalos nos quais o sinal da derivada $f'(x)$ permanece constante: $x < -3$, $-3 < x < 0$ e $x > 0$. Escolha um número de teste c em cada intervalo (como, por exemplo, -5, -1 e 1, respectivamente) e determine o sinal de $f'(c)$:

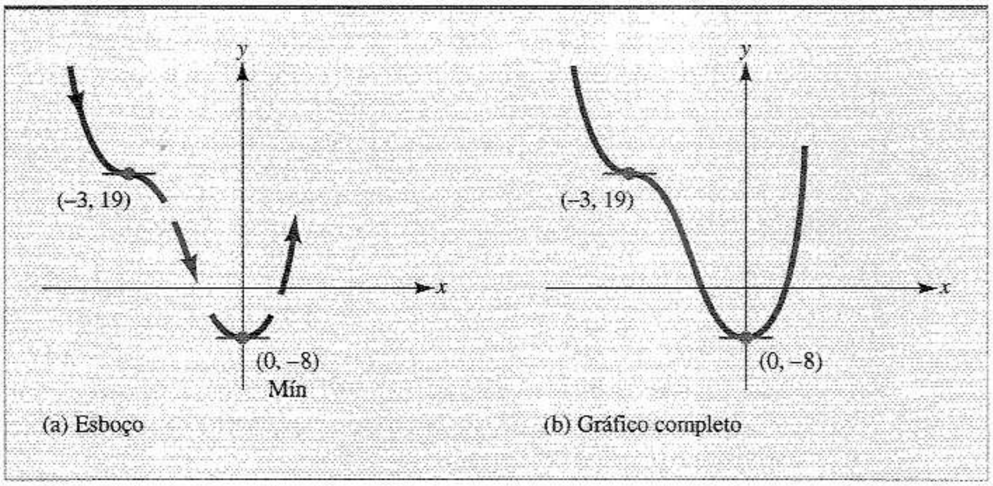
$$f'(-5) = -80 < 0 \qquad f'(-1) = -16 < 0 \qquad f'(1) = 64 > 0$$

Assim, a curva de f possui tangentes horizontais em $x = -3$ e $x = 0$, diminui (f é decrescente) para $x < -3$ e $-3 < x < 0$ e aumenta (f é crescente) para $x > 0$, como indica o diagrama de setas a seguir.



Interpretando o diagrama, vemos que a curva diminui até passar por uma tangente horizontal em $x = -3$, continua a diminuir até chegar ao mínimo relativo em $x = 0$ e aumenta indefinidamente a partir deste ponto. Sabemos ainda que $f(-3) = 19$ e $f(0) = -8$. Para começar o desenho, plote um “copo” ( ) no ponto crítico $(0, -8)$ para indicar que existe um mínimo relativo neste ponto (no caso de um máximo relativo seria uma “copa” ( ) e uma “cobra” ( ) em $(-3, 19)$ para indicar uma curva decrescente com uma tangente horizontal. Estes elementos aparecem no gráfico preliminar da Figura 3.9a. Finalmente, complete o desenho fazendo passar uma curva suave pelos pontos críticos no sentido indicado pelas setas; o resultado é a Figura 3.9b.

FIGURA 3.9 Gráfico de $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$.



EXEMPLO 3.1.5

Determine os intervalos de subida e descida e os extremos relativos da função $g(t) = \sqrt{3 - 2t - t^2}$. Desenhe a curva de $g(t)$.

Lembrete

O produto ab satisfaz a desigualdade $ab \geq 0$ *apenas* se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ ou se $a \leq 0$ e $b \leq 0$. Se a e b tiverem sinais opostos, $ab \leq 0$.

Solução

Como $\sqrt{u}$ é definida apenas para $u \geq 0$, o domínio de g é o conjunto de valores de t para os quais $3 - 2t - t^2 \geq 0$. Fatorando a expressão, obtemos:

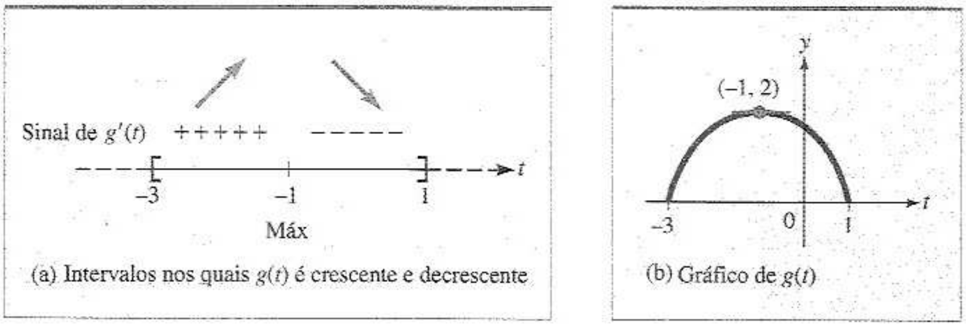
$$3 - 2t - t^2 = (3 + t)(1 - t)$$

Observe que $3 + t \geq 0$ para $t \geq -3$ e que $1 - t \geq 0$ para $t \leq 1$. Para que $(3 + t)(1 - t) \geq 0$, é preciso que *ambos* os termos sejam não-negativos, ou seja, que $t \geq -3$ *e* $t \leq 1$, o que equivale a dizer que $-3 \leq t \leq 1$. Também teríamos $(3 + t)(1 - t) \geq 0$ se $3 + t \leq 0$ e $1 - t \leq 0$, mas isto não é possível (por quê?). Assim, $g(t)$ só existe no intervalo $-3 \leq t \leq 1$.

Em seguida, usando a regra da cadeia, calculamos a derivada de $g(t)$:

$$g'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}(-2 - 2t)$$
$$= \frac{-1 - t}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$$

Observe que $g'(t)$ não existe nos pontos extremos $t = -3$ e $t = 1$ do domínio de $g(t)$ e que $g'(t) = 0$ apenas para $t = 1$. Assinale estes três números críticos sobre um segmento de reta limitado ao domínio de g (ou seja, $-3 \leq t \leq 1$) e determine o sinal da derivada $g'(t)$ nos subintervalos $-3 < t < -1$ e $-1 < t < 1$ para obter o diagrama de setas da Figura 3.10a. Finalmente, calcule $g(-3) = g(1) = 0$ e $g(-1) = 2$ e observe que, de acordo com o diagrama de setas, existe um máximo relativo no ponto $(-1, 2)$. A curva completa aparece na Figura 3.10b.



(a) Intervalos nos quais $g(t)$ é crescente e decrescente

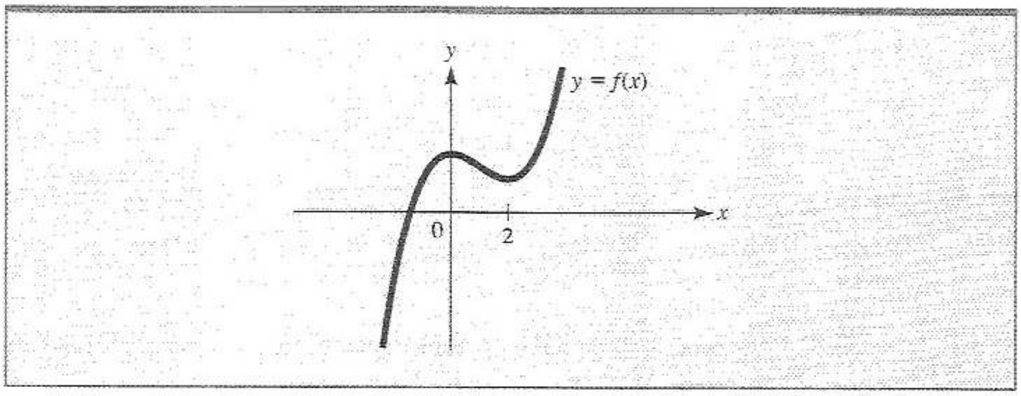
(b) Gráfico de $g(t)$

FIGURA 3.10 Gráfico de $g(f) = \sqrt{3 - 2t - t^2}$.

Às vezes, a curva de $f(x)$ é conhecida e a relação entre o sinal da derivada $f'(x)$ e os intervalos em que a função é crescente e decrescente pode ser usada para determinar a forma aproximada da curva de $f'(x)$. Este método é ilustrado no Exemplo 3.1.6.

EXEMPLO 3.1.6

A figura mostra o gráfico de uma função $f(x)$. Faça um esboço da derivada $f'(x)$.

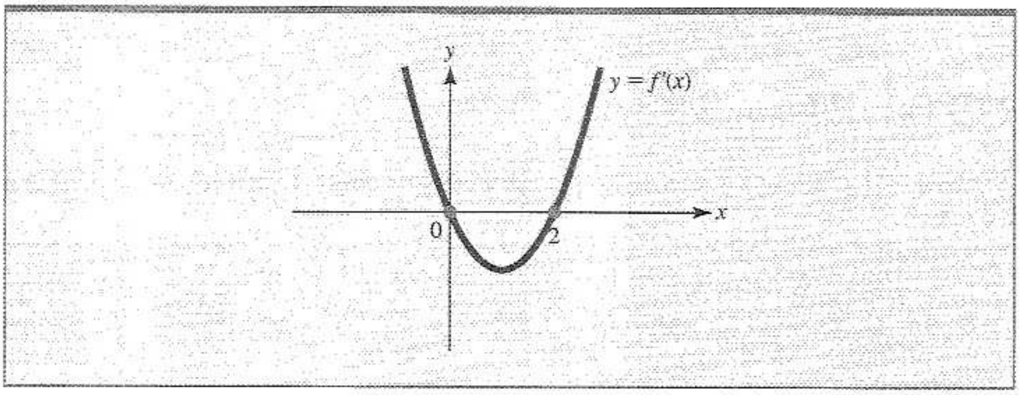


Solução

Como a curva de $f(x)$ é decrescente para $0 < x < 2$, temos $f'(x) < 0$ e a curva de $f'(x)$ está abaixo do eixo x neste intervalo. Da mesma forma, para $x < 0$ e $x > 2$, a curva de $f(x)$ é crescente e, portanto, $f'(x) > 0$ e a curva de $f'(x)$ está acima do eixo x nestes dois intervalos. A curva de $f(x)$ é "plana" (possui uma tangente horizontal) em $x = 0$ e $x = 2$ e, portanto, $f'(0) = f'(2) = 0$ e $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos de interseção da curva de $f'(x)$ com o eixo x. Segue um possível gráfico que satisfaz a todas estas condições.

4 EXPLORE!

Entre com a função $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ como Y1 e com a função $f'(x)$ como Y2, no estilo negrito, usando a opção de derivada numérica da calculadora gráfica. Use uma janela $[-4{,}7; 4{,}7]1$ por $[-10, 10]2$. Qual a relação entre os valores de $f'(x)$ e os extremos relativos de $f(x)$? Quais são o maior e o menor valor de $f(x)$ no intervalo $[-2, 1]$?



Na Seção 3.2, o traçado de curvas usando a derivada $f'(x)$ será complementado por informações obtidas a partir da derivada segunda $f''(x)$; um método geral para esboçar curvas, que envolve derivadas e limites, será apresentado da Seção 3.3. O mesmo raciocínio usado para analisar gráficos pode ser utilizado para determinar valores ótimos, como o custo mínimo de um processo de fabricação e a produção máxima sustentável da pesca do salmão. A otimização é ilustrada no Exemplo 3.1.7 e discutida com mais detalhes nas Seções 3.4 e 3.5.

EXEMPLO 3.1.7

A receita obtida com a venda de um novo tipo de *skate* motorizado t semanas após o lançamento do produto é dada por

$$R(t) = \frac{63t - t^2}{t^2 + 63} \qquad 0 \le t \le 63$$

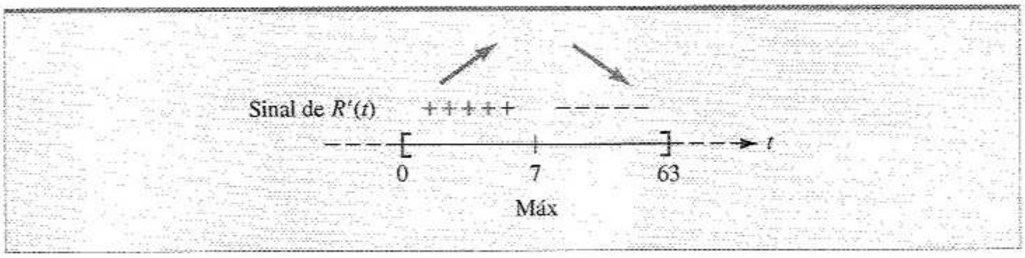
milhões de reais. Em que instante a receita é máxima? Qual é esta receita?

Solução

Usando a regra do quociente para derivar $R(t)$, obtemos

$$R'(t) = \frac{(t^2 + 63)(63 - 2t) - (63t - t^2)(2t)}{(t^2 + 63)^2} = \frac{-63(t - 7)(t + 9)}{(t^2 + 63)^2}$$

Igualando a zero o numerador de $R'(t)$, verificamos que $t = 7$ é única solução de $R'(t) = 0$ no intervalo $0 \le t \le 63$ e, portanto, é o único número crítico de $R(t)$ no domínio da função. O número crítico divide o domínio $0 \le t \le 63$ em dois intervalos, $0 \le t < 7$ e $7 < t \le 63$. Calculando o valor de $R'(t)$ para valores de teste nos dois intervalos, como, por exemplo, $t = 1$ e $t = 9$, obtemos o diagrama de setas que aparece a seguir.



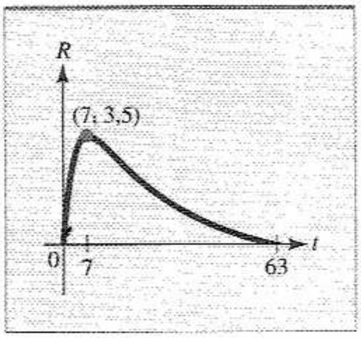


FIGURA 3.11 Gráfico de $R(x) = \dfrac{63t - t^2}{t^2 + 63}$ para $0 \le x \le 63$.

As setas mostram que a receita aumenta até atingir um valor máximo em $t = 7$ e depois começa a diminuir. Para $t = 7$, a receita é

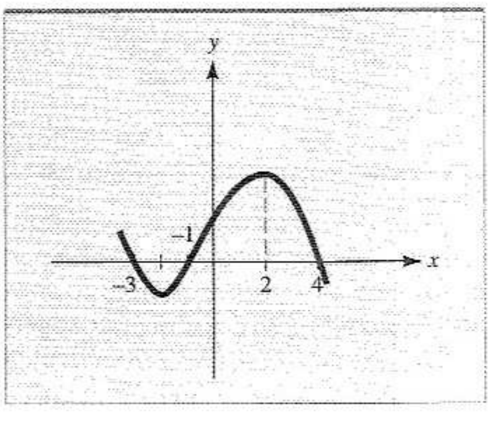
$$R(7) = \frac{63(7) - (7)^2}{(7)^2 + 63} = 3{,}5 \text{ milhões de reais}$$

O gráfico da função receita $R(t)$ aparece na Figura 3.11. De acordo com o gráfico, imediatamente após o lançamento o *skate* motorizado é um produto muito procurado, produzindo uma receita máxima de 3,5 milhões de reais após apenas 7 semanas. Em seguida, a procura começa a diminuir. Após 63 semanas, a receita se anula quando, presumivelmente, os *skates* são tirados das prateleiras e substituídos por outro produto. Um produto que exibe este tipo de comportamento, caracterizado por um aumento rápido seguido por um lento declínio, é chamado por alguns de "produto da moda".

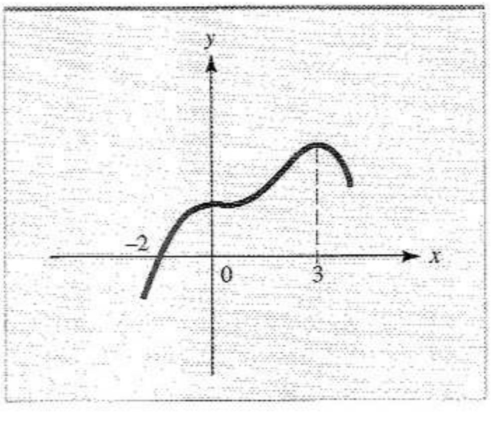
PROBLEMAS | 3.1

Nos Problemas 1 a 4, especifique tanto os intervalos nos quais a derivada da função dada é positiva quanto os intervalos nos quais é negativa.

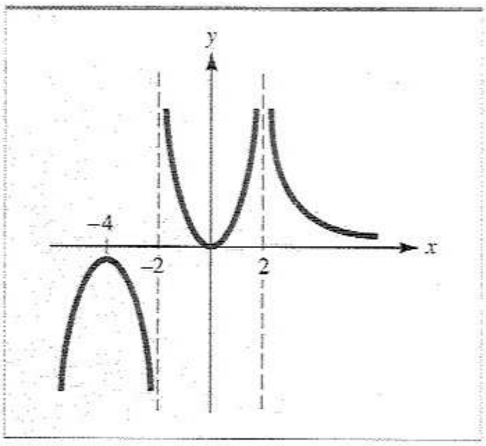
1.



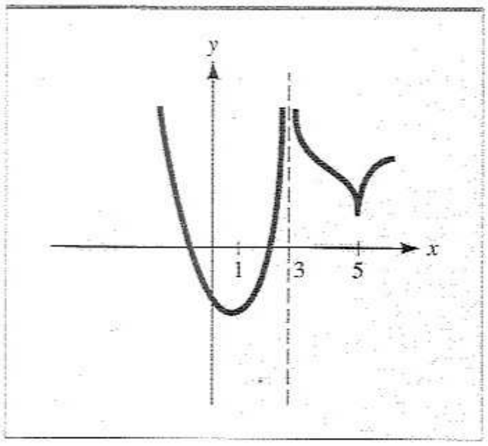
2.



3.

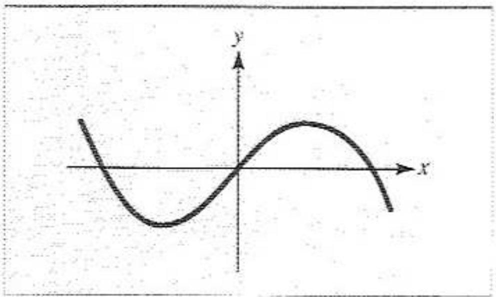


4.

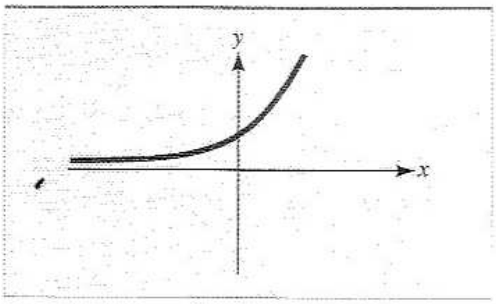


As curvas A, B, C e D dos gráficos da esquerda são as derivadas das funções dos Problemas 5 a 8. Estabeleça a correspondência correta entre cada função e sua derivada.

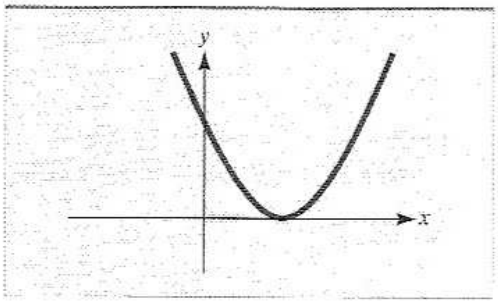
5.



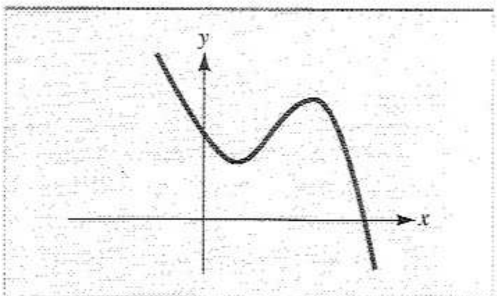
6.

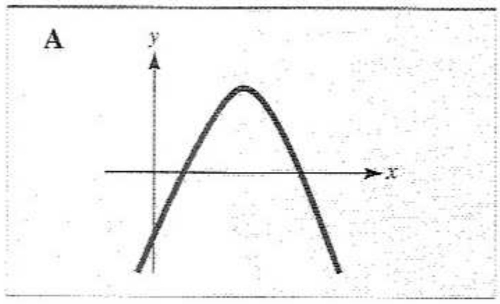


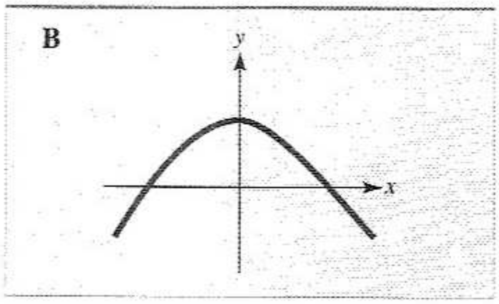
7.

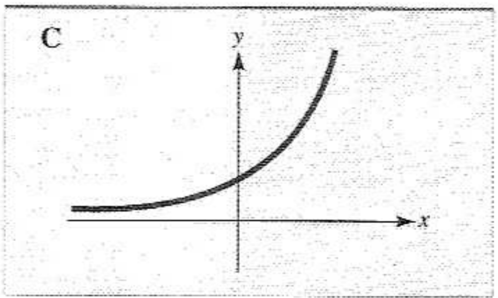


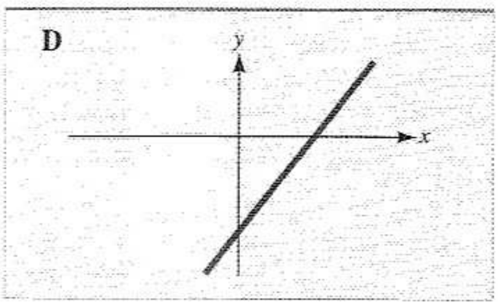
8.











Nos Problemas 9 a 22, determine os intervalos em que a função dada está aumentando e diminuindo.

9. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

10. $f(t) = t^3 + 3t^2 + 1$

11. $f(x) = x^3 - 3x - 4$

12. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$

13. $g(t) = t^5 - 5t^4 + 100$

14. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

15. $f(t) = \dfrac{1}{4 - t^2}$

16. $g(t) = \dfrac{1}{t^2 + 1} - \dfrac{1}{(t^2 + 1)^2}$

17. $h(u) = \sqrt{9 - u^2}$

18. $f(x) = \sqrt{6 - x - x^2}$

19. $F(x) = x + \dfrac{9}{x}$

20 $f(t) = \dfrac{t}{(t + 3)^2}$

21. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

22. $G(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

Nos Problemas 23 a 34, determine os pontos críticos da função dada e classifique cada ponto crítico como máximo relativo, mínimo relativo ou ponto ordinário.

23. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

24. $f(x) = 324x - 72x^2 + 4x^3$

25. $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 5$

26. $f(t) = 10t^6 + 24t^5 + 15t^4 + 3$

27. $g(x) = (x - 1)^5$

28. $F(x) = 3 - (x + 1)^3$

29. $f(t) = \dfrac{t}{t^2 + 3}$

30. $f(t) = t\sqrt{9 - t}$

31. $h(t) = \dfrac{t^2}{t^2 + t - 2}$

32. $g(x) = 4 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}$

33. $S(t) = (t^2 - 1)^4$

34. $F(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

Nos Problemas 35 a 44, use os métodos do cálculo para traçar o gráfico da função dada.

35. $f(x) = x^3 - 3x^2$

36. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

37. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

38. $g(x) = 3 - (x + 1)^3$

39. $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 5$

40. $f(x) = x^3(x + 5)^2$

41. $g(t) = \dfrac{t}{t^2 + 3}$

42. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

43. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 4$

44. $H(x) = \frac{1}{50}(3x^4 - 8x^3 - 90x^2 + 70)$

Nos Problemas 45 a 48, a derivada de uma função f(x) é dada. Em cada caso, determine os números críticos de f(x) e classifique cada ponto crítico como máximo relativo, mínimo relativo ou ponto ordinário.

45. $f'(x) = x^2(4 - x^2)$

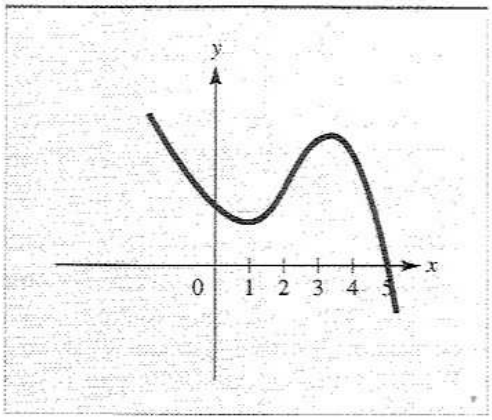
46. $f'(x) = \dfrac{x(2 - x)}{x^2 + x + 1}$

47. $f'(x) = \dfrac{(x + 1)^2(4 - 3x)^3}{(x^2 + 1)^2}$

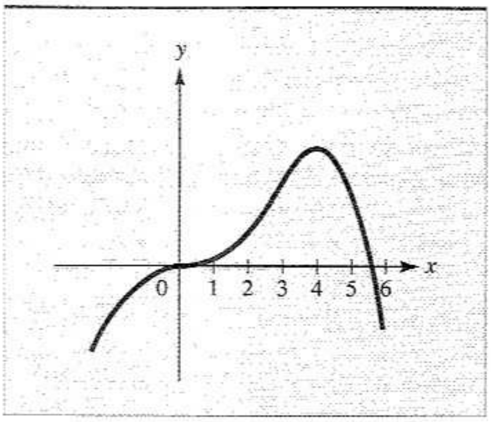
48. $f'(x) = x^3(2x - 7)^2(x + 5)$

Nos Problemas 49 a 52, é dado o gráfico de uma função f. Em cada caso, desenhe um gráfico possível de f'.

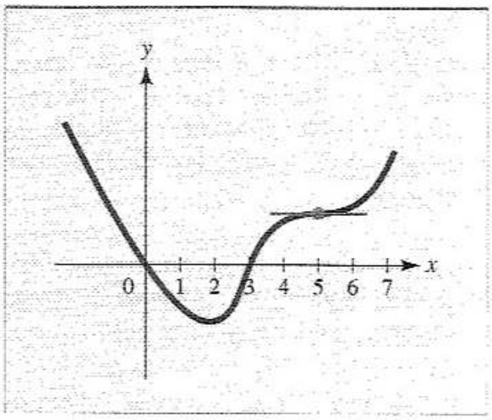
49.



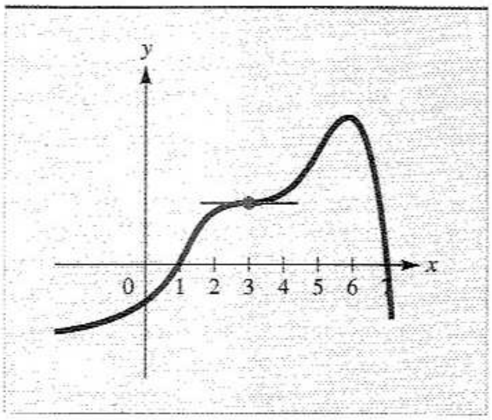
50.



51.



52.



53. CUSTO MÉDIO O custo para produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x)$ milhares de reais, onde

$$C(x) = x^3 - 20x^2 + 179x + 242$$

a. Determine $A'(x)$, onde $A(x) = C(x)/x$ é a função custo médio.
b. Para que valores de x a função $A(x)$ é crescente? Para que valores é decrescente?
c. Para que nível de produção x o custo médio é mínimo? Qual é este custo mínimo?

54. ANÁLISE MARGINAL O custo total C para produzir x unidades de uma certa mercadoria é dado por $C(x) = \sqrt{5x+2} + 3$. Plote a curva de custo e determine o custo marginal. O custo marginal aumenta ou diminui com o aumento da produção?

55. ANÁLISE MARGINAL Seja $p = (10 - 3x)^2$ para $0 \le x \le 3$ o preço pelo qual serão vendidas x centenas de unidades de um certo produto e seja $R(x) = xp(x)$ a receita com a venda das x unidades. Determine a receita marginal $R'(x)$ e plote as curvas de receita e receita marginal no mesmo gráfico. Para que nível de produção a receita é máxima?

56. LUCRO DE UM MONOPÓLIO Para produzir x unidades de um certo produto, um fabricante que detém o monopólio das vendas tem um custo total de

$$C(x) = 2x^2 + 3x + 5$$

e uma receita total $R(x) = xp(x)$, onde $p(x) = 5 - 2x$ é o preço pelo qual são vendidas as x unidades. Determine a função de lucro $P(x) = R(x) - C(x)$ e plote o gráfico associado. Para que nível de produção o lucro é máximo?

57. MEDICINA A concentração de um medicamento t horas após ter sido injetado no braço de um paciente é dada por

$$C(t) = \frac{0,15t}{t^2 + 0,81}$$

Faça um gráfico da concentração em função do tempo. Para que valor de t a concentração é máxima?

58. CONTROLE DA POLUIÇÃO As autoridades de uma certa cidade determinam que, se x milhões de reais são investidos no controle da poluição, a porcentagem de poluição removida é dada por

$$P(x) = \frac{100\sqrt{x}}{0,04x^2 + 12}$$

a. Desenhe a curva de $P(x)$.
b. Que investimento resulta na maior porcentagem de remoção da poluição?

59. PUBLICIDADE Uma empresa determina que se x milhares de reais forem investidos na propaganda de um certo produto, $S(x)$ unidades do produto serão vendidas, onde

$$S(x) = -2x^3 + 27x^2 + 132x + 207 \qquad 0 \le x \le 17$$

a. Desenhe a curva de $S(x)$.
b. Quantas unidades serão vendidas se a empresa não investir em publicidade?
c. Quanto a empresa deve investir em publicidade para maximizar as vendas? Qual é o nível máximo de vendas?

60. PUBLICIDADE Repita o Problema 59 para a função de vendas

$$S(x) = \frac{200x + 1.500}{0,02x^2 + 5}$$

61. **REFINANCIAMENTO DE IMÓVEIS** Quando os juros estão baixos, muitos proprietários aproveitam a oportunidade para refinanciar seus imóveis. Quando os juros começam a subir, às vezes há um surto de atividade, com os retardatários se apressando para refinanciar seus imóveis enquanto ainda é lucrativo fazê-lo. Finalmente, os juros atingem um nível que desencoraja novos pedidos de refinanciamento.

Suponha que em uma certa comunidade haja $M(r)$ mil pedidos de refinanciamento quando a taxa de juros para um financiamento de 30 anos é $r\%$, onde

$$M(r) = \frac{1 + 0{,}05r}{1 + 0{,}004r^2} \quad \text{para} \quad 1 \leq r \leq 8$$

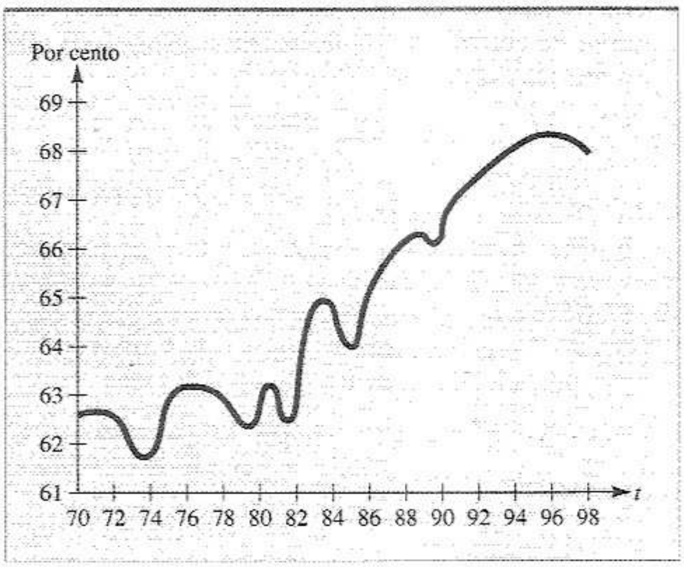
a. Para que valores de r a função $M(r)$ é crescente?
b. Para que taxa de juros r o número de pedidos de refinanciamento é máximo? Qual é este número máximo?

62. **DISTRIBUIÇÃO DE POPULAÇÃO** Um estudo demográfico realizado em uma certa cidade indica que $P(r)$ centenas de pessoas moram a r quilômetros do centro da cidade, onde

$$P(r) = \frac{5(3r + 1)}{r^2 + r + 2}$$

a. Qual é a população no centro da cidade?
b. Para que valores de r a função $P(r)$ é crescente? Para que valores é decrescente?
c. A que distância do centro da cidade a população é máxima? Qual é esta população máxima?

63. **PRODUTO DOMÉSTICO BRUTO** O gráfico a seguir mostra o consumo da geração do *baby boom** como porcentagem do PDB (produto doméstico bruto) no período de 1970-1997.
a. Em que anos ocorrem máximos relativos?
b. Em que anos ocorrem mínimos relativos?
c. Qual era a taxa aproximada de aumento do consumo em 1987?
d. Qual era a taxa aproximada de diminuição do consumo em 1972?



PROBLEMA 63

Consumo da Geração do *Baby Boom* como Porcentagem do PDB.

Fonte: BUREAU of Economic Analysis.

*Geração nascida nos Estados Unidos logo após a Segunda Guerra Mundial. (N.T.)

64. **DEPRECIAÇÃO** O valor V (em milhares de reais) de uma máquina industrial pode ser modelado pela função

$$V(N) = \left(\frac{3N + 430}{N + 1}\right)^{2/3}$$

onde N é o número de horas de uso da máquina por dia. Suponha que o número de horas de uso da máquina por dia varie de acordo com a função

$$N(t) = \sqrt{t^2 - 10t + 61}$$

onde t é o número de meses após a máquina entrar em operação.
a. Durante que período de tempo o valor da máquina aumenta? Durante que período de tempo o valor da máquina diminui?
b. Em que instante t o valor da máquina é máximo? Qual é este valor máximo?

65. **CRIAÇÃO DE PEIXES** O gerente de uma criação de peixes determina que t semanas depois que 300 peixes de uma certa espécie são colocados em um tanque, o peso médio de um peixe (em quilogramas) durante as primeiras 10 semanas é dado por

$$w(t) = 3 + t - 0{,}05t^2$$

O gerente determina também que a fração de peixes que ainda estão vivos após t semanas é dada por

$$p(t) = \frac{31}{31 + t}$$

a. A produção do tanque $Y(t)$ após t semanas é o peso total dos peixes que ainda estão vivos. Expresse $Y(t)$ em termos de $w(t)$ e $p(t)$ e plote $Y(t)$ para $0 \leq t \leq 10$.
b. Qual é o valor de t para o qual a produção é máxima? Qual é esta produção máxima?

66. **CRIAÇÃO DE PEIXES** Suponha que, para a situação descrita no Problema 65, depois que os peixes são colocados no tanque, a manutenção e supervisão do tanque durante t semanas custe $C(t) = 50 + 1{,}2t$ e cada peixe recolhido após t semanas pode ser vendido por R$ 2,75 o quilo.
a. Se todos os peixes que permanecem vivos no tanque após t semanas são recolhidos, expresse o lucro obtido pelo criador em função de t.
b. Em que semana os peixes devem ser recolhidos para maximizar o lucro? Qual é o lucro máximo?

67. **ETOLOGIA** A porcentagem de ovos de bicho da maçã* que chocam a uma dada temperatura (em graus Celsius) é dada por

$$H(T) = -0{,}53T^2 + 25T - 209 \quad \text{para} \quad 15 \leq T \leq 30$$

Faça um gráfico da função $H(T)$. Para que temperatura T ($15 \leq T \leq 30$) a porcentagem de ovos chocados é máxima? Qual é esta porcentagem máxima? (Para mais informações a respeito do bicho da maçã, veja o artigo Para Pensar do Capítulo 2.)

68. Faça um esboço da curva de uma função com as seguintes propriedades:

*P. L. Shaffer and H. J. Gold, "A Simulation Model of Population Dynamics of the Codling Moth *Cydia pomonelia*", *Ecological Modeling*, Vol. 30 (1985), pp. 247-274.

a. $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$
b. $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e $x > 2$
c. $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$ e $1 < x < 2$

69. Faça um esboço da curva de uma função com as seguintes propriedades:
a. $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$
b. $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$
c. $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $1 < x < 2$, e $x > 2$

70. Faça um esboço da curva de uma função com as seguintes propriedades:
a. $f'(x) > 0$ para $x < -5$ e para $x > 1$
b. $f'(x) < 0$ para $-5 < x < 1$
c. $f(-5) = 4$ e $f(1) = -1$

71. Faça um esboço da curva de uma função com as seguintes propriedades:
a. $f'(x) < 0$ para $x < -1$
b. $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 3$ e para $x > 3$
c. $f'(-1) = 0$ e $f'(3) = 0$

72. Determine os valores das constantes a, b e c para que a curva da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenha um máximo relativo no ponto $(5, 12)$ e intercepte o eixo y no ponto $(0, 3)$.

73. Determine os valores das constantes a, b, c e d para que a curva da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha um máximo relativo no ponto $(-2, 8)$ e um mínimo relativo no ponto $(1, -19)$.

74. Plote a função $f(x) = (x - 1)^{2/5}$. Explique por que $f'(x)$ não existe no ponto $x = 1$.

75. Plote a função $f(x) = 1 - x^{3/5}$.

76. Use os métodos do cálculo para demonstrar que o extremo relativo da função do segundo grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

acontece para $x = -\dfrac{b}{2a}$. Em que intervalo $f(x)$ é crescente? Em que intervalo é decrescente?

77. Use os métodos do cálculo para demonstrar que o extremo relativo da função do segundo grau $(x - p)(x - q)$ ocorre no ponto médio das duas interseções com o eixo x.

Nos Problemas 78 a 81, use uma calculadora gráfica para plotar $f(x)$. Em seguida, determine $f'(x)$ e plote a função no mesmo gráfico que $f(x)$. Finalmente, use **TRACE**, **ZOOM** *ou outro recurso para determinar os valores de x para os quais $f'(x) = 0$.*

78. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4$

79. $f(x) = (x^2 + x - 1)^3(x + 3)^2$

80. $f(x) = x^5 - 7{,}6x^3 + 2{,}1x^2 - 5$

81. $f(x) = (1 - x^{1/2})^{1/2}$

82. Use uma calculadora gráfica para plotar a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 11$. Em seguida, plote a função $g(x) = (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 11$ no mesmo gráfico. Escreva a equação de uma função $h(x)$ com a mesma forma que $f(x)$, mas deslocada 2 unidades para cima e 3 unidades para a esquerda.

83. Seja $f(x) = 4 + \sqrt{9 - 2x - x^2}$. Antes de mais nada, tente imaginar que aspecto terá a curva. Use uma calculadora gráfica para plotar a função. Seu palpite estava certo?

84. Seja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 11$. Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x)$. Em seguida, plote, no mesmo gráfico, a função

$$g(x) = f(2x) = (2x)^3 - 6(2x)^2 + 5(2x) - 11$$

Qual é a relação entre os dois gráficos?

SEÇÃO 3.2 Concavidade e Pontos de Inflexão

Na Seção 3.1, vimos que o sinal da derivada $f'(x)$ pode ser usado para verificar se $f(x)$ está aumentando ou diminuindo e se a função possui extremos relativos. Nesta seção, vamos ver que a derivada segunda $f''(x)$ também fornece informações úteis a respeito de $f(x)$. À guisa de introdução, aqui está uma breve descrição de uma situação na indústria que pode ser analisada usando a derivada segunda.

O número de unidades que um operário de fábrica produz em t horas de trabalho muitas vezes é dado por uma função $Q(t)$ parecida com a que aparece na Figura 3.12. Observe que a curva aumenta lentamente a princípio. A inclinação, porém, aumenta até a curva atingir um ponto de máxima inclinação, a partir do qual começa a diminuir. Isto reflete o fato de que a produtividade dos operários é baixa no início do dia. A produtividade aumenta com o passar do tempo até que o operário atinja o ponto de máxima eficiência, a partir do qual, por causa da fadiga, a produtividade começa a cair. O ponto P de máxima eficiência é conhecido pelos economistas como **ponto de retornos decrescentes.**

O comportamento desta função de produção de cada lado do ponto de retornos decrescentes pode ser descrito em termos de retas tangentes. À esquerda do ponto, a inclinação da reta tangente aumenta quando t aumenta. À direita do ponto, a inclinação da reta tangente diminui quando t aumenta. É este aumento e diminuição das inclinações que vamos examinar nesta seção com a ajuda da derivada segunda. (Voltaremos à questão da eficiência dos operários e do ponto de retornos decrescentes no Exemplo 3.2.6.)

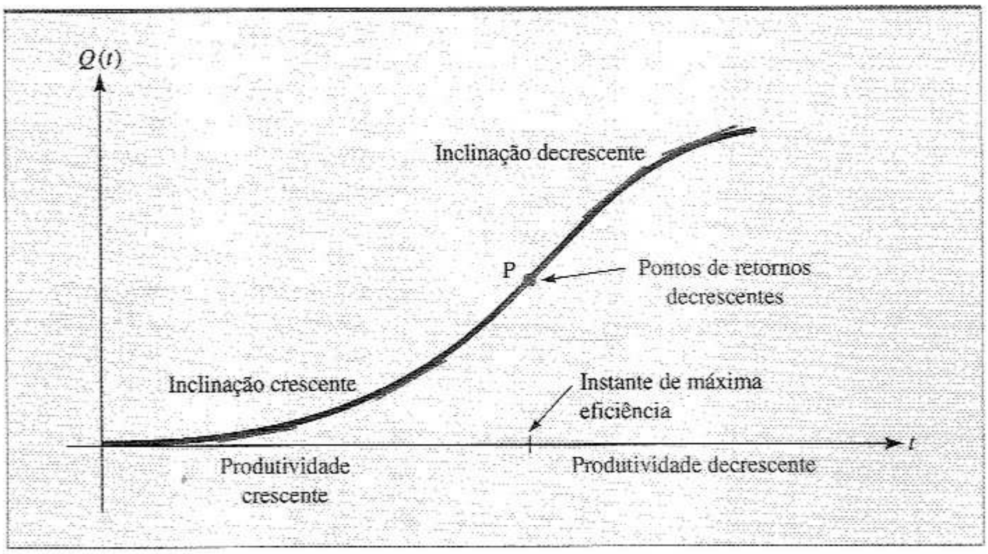


FIGURA 3.12 Produção $Q(t)$ de um operário de fábrica t horas depois de chegar ao trabalho.

Concavidade

O aumento e diminuição da inclinação da reta tangente a uma curva são descritos através de um conceito conhecido como **concavidade**. Segue uma definição deste termo.

> **Concavidade** ■ Se uma função $f(x)$ é derivável no intervalo $a < x < b$, a curva de f tem
> **concavidade para cima** no intervalo $a < x < b$ se f' é crescente em todo o intervalo
> **concavidade para baixo** no intervalo $a < x < b$ se f' é decrescente em todo o intervalo

(a) Concavidade para cima: a curva está acima de todas as retas tangentes.

(b) Concavidade para baixo: a curva está abaixo de todas as retas tangentes.

FIGURA 3.13 Concavidade.

Também podemos dizer que a concavidade de uma curva é para cima em um intervalo se a curva está acima de todas as retas tangentes no intervalo (Figura 3.13a) e que a concavidade é para baixo se a curva está abaixo de todas as retas tangentes no intervalo (Figura 3.13b). Podemos dizer informalmente que a concavidade é para baixo quando a curva "derrama água" e é para cima quando a curva "retém água", como ilustrado na Figura 3.14.

Determinação do Tipo de Concavidade Usando o Sinal de f''

Existe uma relação simples entre o tipo de concavidade da curva de uma função $f(x)$ e o sinal da derivada segunda, $f''(x)$. Como vimos na Seção 3.1, a curva de uma função $f(x)$ é crescente quando sua derivada, $f'(x)$, é positiva. Da mesma forma, a curva da função derivada $f'(x)$ é crescente quando sua derivada, $f''(x)$, é positiva. Suponha que $f''(x) > 0$ em um intervalo $a < x < b$. Nesse caso, $f'(x)$ é crescente, o que, por sua vez, significa que a concavidade da curva de $f(x)$ é para cima neste intervalo. Analogamente, em um intervalo $a < x < b$ no qual $f''(x) < 0$, a derivada $f'(x)$ é decrescente e a concavidade da curva de $f(x)$ é para baixo. Usando estas informações, podemos modificar o método para determinar os intervalos em que uma função é crescente e decrescente, apresentado na Seção 3.1, para obter um método que determine os intervalos em que a concavidade de uma função é para cima e para baixo.

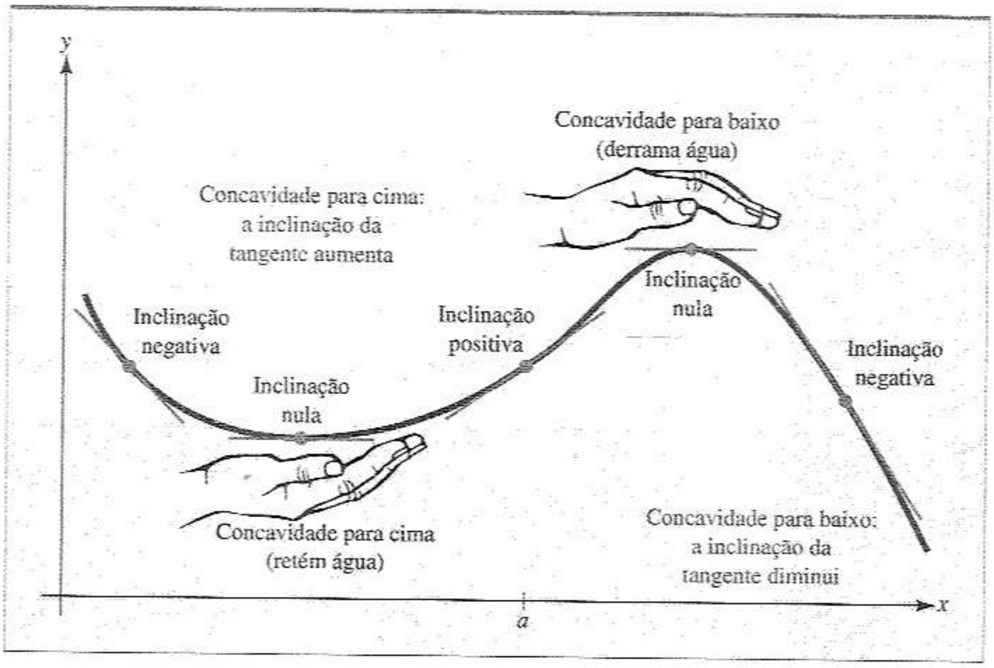


FIGURA 3.14 Concavidade e inclinação da tangente.

> **Uso da Derivada Segunda para Determinar os Intervalos em que a Concavidade da Função f É para Cima e para Baixo**
>
> **1° passo:** Determine todos os valores de x para os quais $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe e assinale estes valores em uma reta de números, dividindo assim a reta em um certo número de intervalos abertos.
>
> **2º passo:** Escolha um número de teste c para cada intervalo $a < x < b$ determinado no 1º passo e calcule $f''(c)$.
>
> Se $f''(c) > 0$, a concavidade da função $f(x)$ é crescente no intervalo $a < x < b$.
> Se $f''(c) < 0$, a concavidade da função $f(x)$ é decrescente no intervalo $a < x < b$.

EXEMPLO 3.2.1

Determine os intervalos de concavidade da função

$$f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$$

Solução

Derivando $f(x)$ duas vezes, obtemos $f'(x) = 12x^5 - 20x^3 + 7$ e

$$f''(x) = 60x^4 - 60x^2 = 60x^2(x^2 - 1) = 60x^2(x - 1)(x + 1)$$

A derivada segunda $f''(x)$ é contínua para qualquer valor de x e $f''(x) = 0$ para $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$. Estes números dividem o eixo x em quatro intervalos nos quais $f''(x)$ não muda de sinal: $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ e $x > 1$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada um destes intervalos (como, por exemplo, $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = 5$, respectivamente), obtemos:

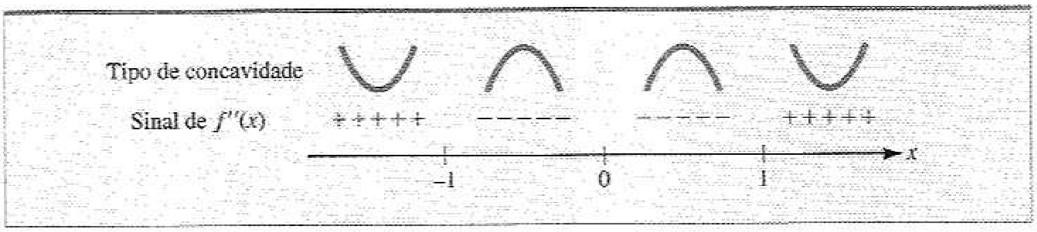
$$f''(-2) = 720 > 0 \qquad f''\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-45}{4} < 0$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-45}{4} < 0 \qquad f''(5) = 36.000 > 0$$

Assim, a concavidade da curva de $f(x)$ é para cima para $x < -1$ e para $x > 1$ e para baixo para $-1 < x < 0$ e para $0 < x < 1$, como mostra o diagrama de concavidades a seguir.

5 EXPLORE!

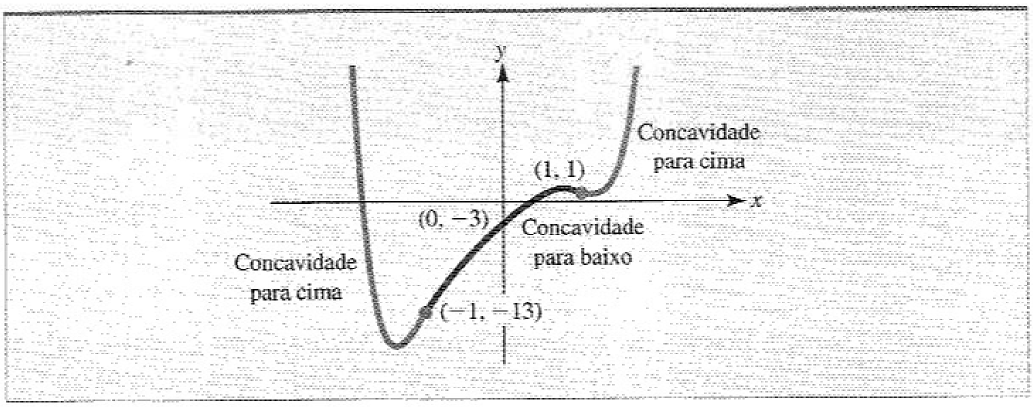
Entre com a função $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$ do Exemplo 3.2.1 em Y1 usando o estilo negrito. Entre com Y2 = nDeriv(Y1,X,X), mas desative Y2 posicionando o cursor no sinal de igualdade e apertando **ENTER** para que Y2 não seja plotada. Entre com Y3 = nDeriv(Y2,X,X). Plote Y1 e Y3 usando uma janela [−2,35; 2,35]1 por [−18,8]2. Qual é a relação entre o comportamento de Y3, que representa $f''(x)$, e a concavidade de $f(x)$, especialmente em X = −1, 0 e 1?



Intervalos de concavidade para $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$

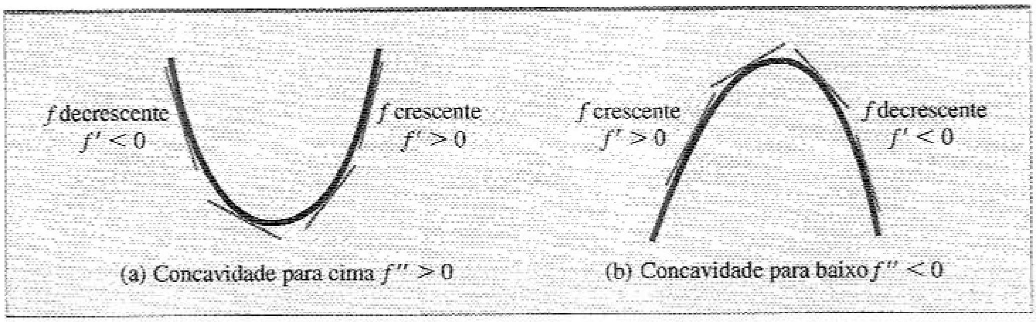
A Figura 3.15 mostra o gráfico de $f(x)$.

FIGURA 3.15 Gráfico de $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$.



NOTA O leitor não deve confundir a concavidade de uma curva com suas subidas e descidas. A curva de uma função f pode ser crescente ou decrescente em um intervalo independentemente do fato de a concavidade da curva ser para cima ou para baixo no intervalo. As quatro possibilidades estão ilustradas na Figura 3.16. ■

FIGURA 3.16 Combinações possíveis de subida, descida e concavidade.



Pontos de Inflexão

Um ponto $P(c, f(c))$ da curva de uma função f é chamado de *ponto de inflexão* se a concavidade da curva muda em P, isto é, se a concavidade da curva de f é para cima de um lado de P e para baixo do lado oposto. Estes pontos de transições fornecem informações úteis a respeito da curva de f. Assim, por exemplo, o diagrama de concavidade da função $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$, analisado no Exemplo 3.2.1, mostra que a concavidade da curva de f muda de "para cima" para "para baixo" em $x = -1$ e de "para baixo" para "para cima" em $x = 1$, o que significa que os pontos correspondentes da curva, $(-1, -13)$ e $(1, 1)$, são pontos de inflexão de f. Os pontos de inflexão podem ser de interesse prático para a interpretação de um modelo matemático baseado na função f. Por exemplo: o ponto de retornos decrescentes da curva de produção de Figura 3.12 é um ponto de inflexão.

Em um ponto de inflexão $P(c, f(c))$, a concavidade de f não pode ser nem para cima $[f''(c) > 0]$ nem para baixo $[f''(c) < 0]$. Assim, se $f''(c)$ existe neste ponto, devemos ter $f''(c) = 0$. Resumindo:

Ponto de Inflexão ■ Ponto de inflexão é um ponto $(c, f(c))$ da curva de uma função f no qual a concavidade muda. Neste ponto, $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existe.

Método para Determinar os Pontos de Inflexão de uma Função f

1º passo: Calcule $f''(x)$ e determine os pontos do domínio de f nos quais $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe.

2º passo: Para cada número c encontrado no 1º passo, determine o sinal de $f''(x)$ à esquerda de $x = c$ e à direita de $x = c$, ou seja, para $x < c$ e para $x > c$. Se $f''(x) > 0$ de um lado de $x = c$ e $f''(x) < 0$ do outro lado, $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão de f.

EXEMPLO 3.2.2

Em cada caso, determine todos os pontos de inflexão da função dada.

a. $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$ **b.** $g(x) = x^{1/3}$

Solução

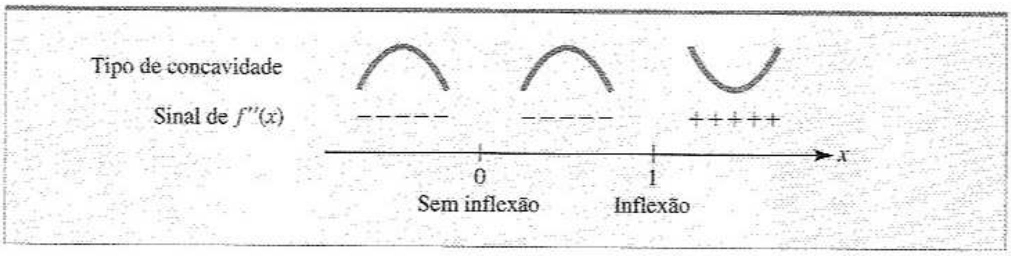
a. Observe que $f(x)$ existe para qualquer valor de x e que

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$$
$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$$

Assim, $f''(x)$ é contínua para qualquer valor de x e $f''(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = 1$. Testando o sinal de $f''(x)$ de cada lado de $x = 0$ e $x = 1$ (em $x = -1$, $\frac{1}{2}$ e 2, por exemplo), obtemos:

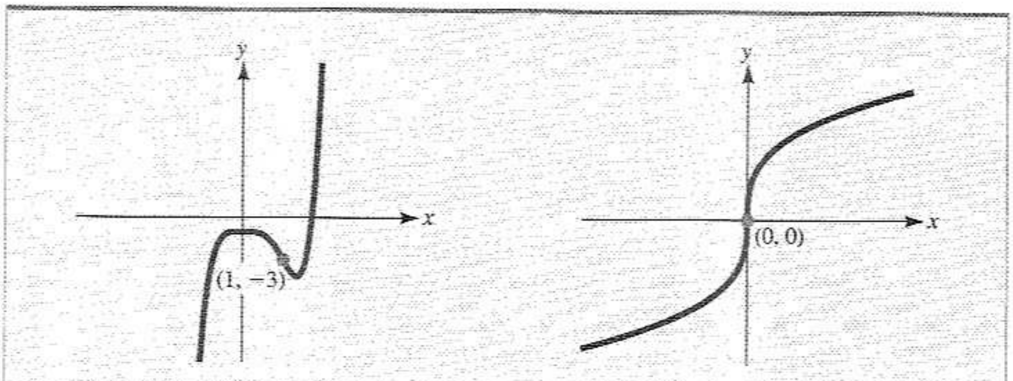
$$f''(-1) = -120 < 0 \qquad f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-15}{2} < 0 \quad f''(2) = 240 > 0$$

o que leva ao seguinte diagrama de concavidades:



Vemos que a concavidade não muda em $x = 0$, mas muda de "para baixo" para "para cima" em $x = 1$. Como $f(1) = -3$, $(1, -3)$ é um ponto de inflexão de f. A curva de f aparece na Figura 3.17a.

FIGURA 3.17 Dois gráficos com pontos de inflexão.



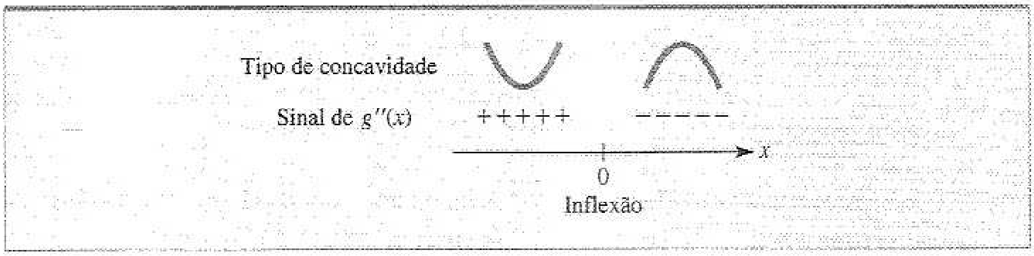
(a) O gráfico de $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$ possui um ponto de inflexão em $(1, -3)$.

(b) O gráfico de $g(x) = x^{1/3}$ possui um ponto de inflexão na origem $(0, 0)$.

b. A função $g(x)$ é contínua para qualquer valor de x; como

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad \text{e} \qquad g''(x) = \frac{-2}{9}x^{-5/3}$$

vemos que $g''(x)$ não se anula para nenhum valor de x e não existe para $x = 0$. Testando o sinal de $g''(x)$ dos dois lados de $x = 0$, obtemos os seguintes resultados, mostrados na forma de um diagrama de concavidades:



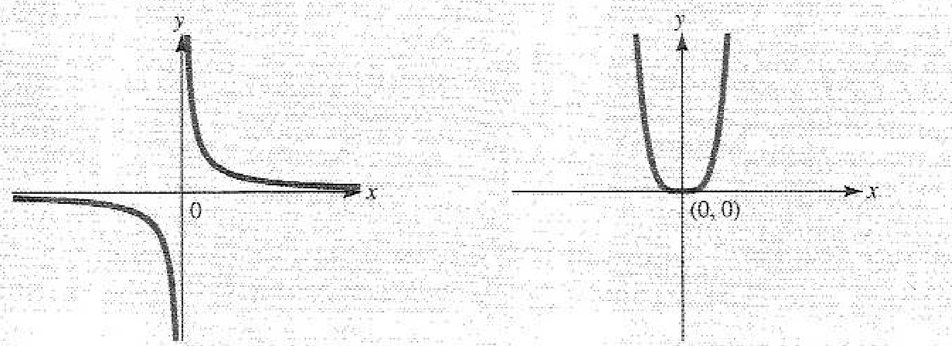
Como a concavidade da curva muda em $x = 0$ e $g(0) = 0$, $(0, 0)$ é um ponto de inflexão de f. A curva de f aparece na Figura 3.17b.

NOTA Uma função pode ter um ponto de inflexão apenas nos pontos em que é contínua. Em particular, se $f(c)$ não existe, não pode haver um ponto de inflexão em $x = c$ mesmo que $f''(x)$ mude de sinal em $x = c$. Assim, por exemplo, se $f(x) = 1/x$, $f''(x) = 2/x^3$ e, portanto, $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e $f''(x) > 0$ para $x > 0$. Isto significa que a concavidade muda de "para baixo" para "para cima" em $x = 0$ (veja Figura 3.18a), mas não existe um ponto de inflexão em $x = 0$, já que $f(0)$ não existe.

Entretanto, mesmo que $f(c)$ exista e $f''(c) = 0$, isto não é suficiente para garantir que $(c, f(c))$ seja um ponto de inflexão. Assim, por exemplo, se $f(x) = x^4$, $f(0) = 0$ e $f''(x) = 12x^2$, o que significa que $f''(0) = 0$. Entretanto, $f''(x) > 0$ para qualquer número $x \neq 0$ e, portanto, a concavidade de f é para cima tanto para $x < 0$ como para $x > 0$, ou seja, $(0,0)$ não é um ponto de inflexão (veja Figura 3.18b).

O leitor acha que se $f(c)$ existe e $f''(c) = 0$ é possível ao menos concluir que existe um ponto de inflexão ou um extremo relativo em $x = c$? Esta questão é discutida no Problema 67. ■

FIGURA 3.18 Um gráfico não precisa ter um ponto de inflexão nos pontos em que $f'' = 0$ ou f'' não existe.



(a) Curva de $f(x) = \frac{1}{x}$. A concavidade muda em $x = 0$, mas não há um ponto de inflexão porque $f(0)$ não existe.

(b) A concavidade da curva de $f(x) = x^4$ é sempre para cima e, portanto, $(0,0)$ não é um ponto de inflexão, embora $f''(0) = 0$.

Uso da Derivada Segunda para Esboçar Curvas

Do ponto de vista geométrico, os pontos de inflexão são os locais em que o gráfico da função apresenta uma "cobra", como se pode ver no quadro que se segue.

Comportamento do Gráfico de $f(x)$ no Ponto de Inflexão $P(c, f(c))$

A Curva Está Subindo ($f' > 0$)

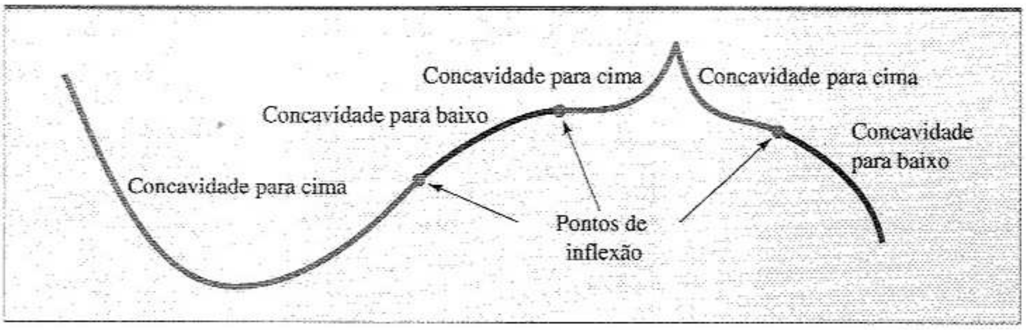
Antes de P (para $x < c$)	Depois de P (para $x > c$)	Forma da curva em P
$f'' > 0$	$f'' < 0$	 P
$f'' < 0$	$f'' > 0$	 P

(continua)

A Curva Está Descendo ($f' < 0$)		
Antes de P (para $x < c$)	Depois de P (para $x > c$)	Forma da curva em P
$f'' > 0$	$f'' < 0$	
$f'' < 0$	$f'' > 0$	

A Figura 3.19 mostra alguns pontos de inflexão de uma curva.

FIGURA 3.19 Curva com vários pontos de inflexão.



Acrescentando as informações relativas à concavidade e aos pontos de inflexão aos métodos baseados na derivada primeira, discutidos na Seção 3.1, podemos obter esboços bastante fiéis da maioria das funções. Segue um exemplo.

EXEMPLO 3.2.3

Determine se a função

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$$

é crescente ou decrescente e se possui concavidade para cima ou para baixo. Determine todos os extremos relativos e pontos de inflexão e faça um esboço da curva da função.

Solução

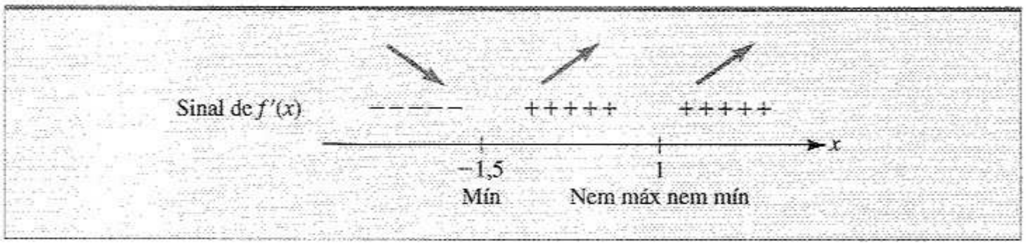
Em primeiro lugar, como a função $f(x)$ é um polinômio, é contínua para qualquer valor de x e as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ também são contínuas para qualquer valor de x. A derivada primeira de $f(x)$ é

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 24x + 18 = 6(x - 1)^2(2x + 3)$$

e $f'(x) = 0$ apenas nos pontos $x = 1$ e $x = -1{,}5$. O sinal de $f'(x)$ não muda para $x < -1{,}5$, no intervalo $-1{,}5 < x < 1$ e para $x > 1$. Calculando o valor de $f'(x)$ para números de teste em cada intervalo (para $x = -2$, 0 e 3, digamos), obtemos o diagrama de setas mostrado a seguir. Observe que existe um mínimo relativo em $x = -1{,}5$, mas não há nenhum extremo em $x = 1$.

6 EXPLORE!

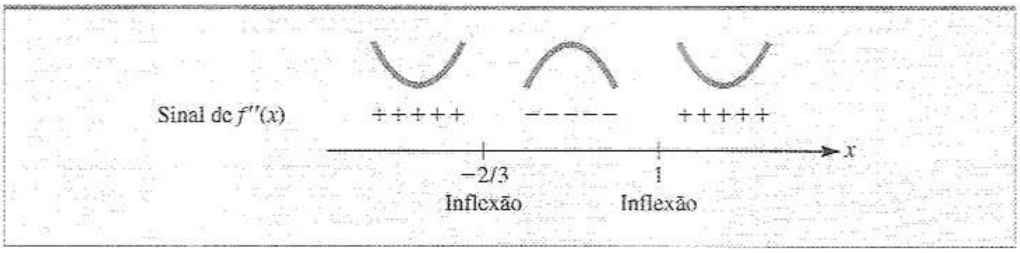
Para confirmar graficamente os resultados do Exemplo 3.2.3, plote $f(x)$ (em negrito) e $f'(x)$ no mesmo gráfico e observe a localização dos extremos relativos de $f(x)$. Em seguida, plote $f(x)$ (em negrito) e $f''(x)$ no mesmo gráfico e observe as mudanças de concavidade de $f(x)$.



A derivada segunda é

$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 24 = 12(x - 1)(3x + 2)$$

e $f''(x) = 0$ apenas para $x = 1$ e $x = \dfrac{-2}{3}$. O sinal de $f''(x)$ não muda para $x < \dfrac{-2}{3}$, no intervalo $\dfrac{-2}{3} < x < 1$ e para $x > 1$. Calculando o valor de $f''(x)$ para números de teste em cada intervalo, obtemos o diagrama de concavidades mostrado a seguir.



Examinando os dois diagramas, chegamos à conclusão de que o ponto $x = -1{,}5$ é um mínimo relativo e os pontos $x = \dfrac{-2}{3}$ e $x = 1$ são pontos de inflexão (já que a concavidade muda nesses pontos).

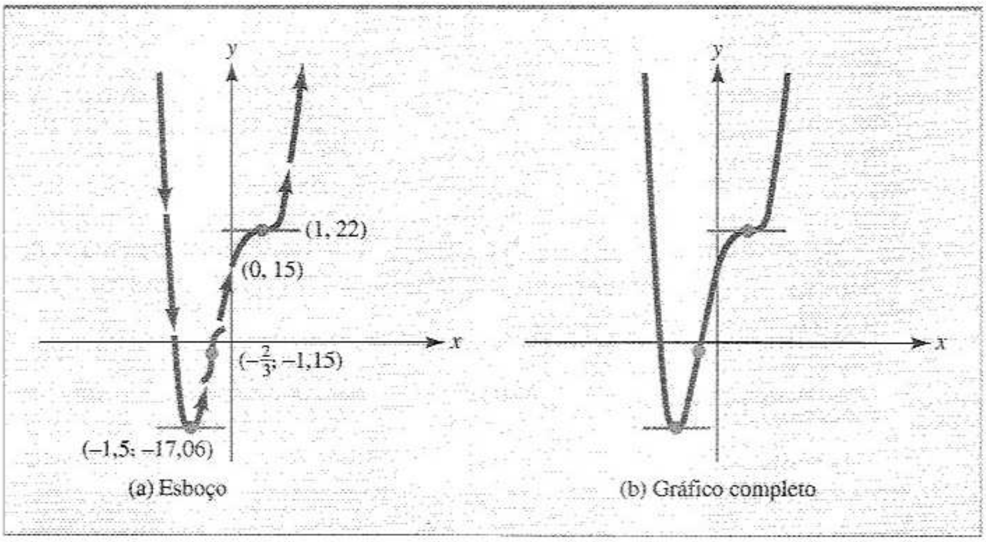


FIGURA 3.20 Gráfico de $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$.

Para traçar o gráfico, calculamos o valor da função no ponto de mínimo e nos pontos de inflexão

$$f(-1{,}5) = -17{,}06 \qquad f\left(\frac{-2}{3}\right) = -1{,}15 \qquad f(1) = 22$$

e plotamos um "copo" em $(-1{,}5; -17{,}06)$ para estabelecer a forma da curva nas vizinhanças do mínimo relativo. Também plotamos "cobras" em $(\frac{-2}{3}; -1{,}15)$ e em $(1; 22)$ para estabelecer a forma da curva nas vizinhanças dos pontos de inflexão. Usando os diagramas de setas e de concavidades, chegamos ao esboço da Figura 3.20a. Finalmente, completamos o desenho fazendo passar uma curva suave pelo ponto de mínimo, pelos pontos de inflexão e pela interseção (0; 15) com o eixo y (Figura 3.20b).

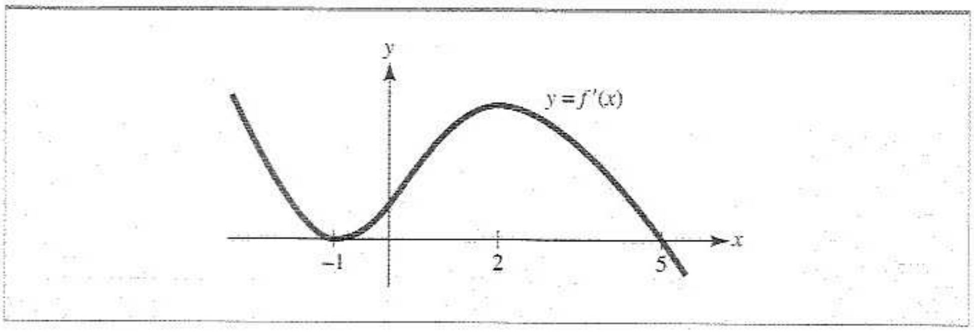
Às vezes, há necessidade de analisar o comportamento de uma função $f(x)$ a partir do gráfico da derivada primeira, $f'(x)$. Assim, por exemplo, se um fabricante conhece o custo marginal $C'(x)$ associado à produção de x unidades de uma determinada mercadoria, é natural que queira saber o máximo possível a respeito do custo total $C(x)$. O exemplo a seguir ilustra este tipo de análise.

EXEMPLO 3.2.4

A primeira figura da página seguinte mostra o gráfico da derivada primeira $f'(x)$ de uma função $f(x)$. Determine os intervalos em que $f(x)$ é uma função crescente e decrescente, as concavidades e todos os extremos relativos e pontos de inflexão da função. Em seguida, faça um esboço da curva de $f(x)$.

Solução

Em primeiro lugar, observe que para $x < -1$, $f'(x)$ é positiva e, portanto, $f(x)$ está aumentando. Além disso, $f'(x)$ está diminuindo e, portanto, $f''(x) < 0$ e a concavidade de $f(x)$ é para baixo. Os outros



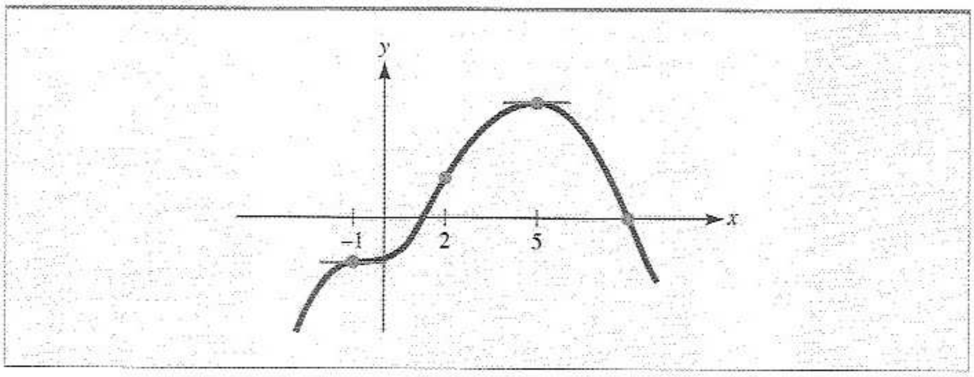
intervalos de interesse podem ser analisados da mesma forma; os resultados aparecem na tabela a seguir.

x	Descrição de $y' = f'(x)$	Descrição de $y = f(x)$
$x < -1$	Positiva; decrescente	Crescente; concavidade para baixo
$x = -1$	Intercepta o eixo x; tangente horizontal	Tangente horizontal; ponto de inflexão ($f'' = 0$)
$-1 < x < 2$	Positiva; crescente	Crescente; concavidade para cima
$x = 2$	Tangente horizontal	Possível ponto de inflexão
$2 < x < 5$	Positiva; decrescente	Crescente; concavidade para baixo
$x = 5$	Intercepta o eixo x	Tangente horizontal
$x > 5$	Negativa; decrescente	Decrescente; concavidade para baixo

Como a concavidade muda no ponto $x = -1$ (de "para baixo" para "para cima"), este ponto é um ponto de inflexão; além disso, como $y' = 0$ neste ponto, a tangente é horizontal. Em $x = 2$ há também um ponto de inflexão (a concavidade muda de "para cima" para "para baixo") mas a tangente não é horizontal. Como a curva de $f(x)$ é crescente à esquerda de $x = 5$ e decrescente à direita, existe um máximo relativo em $x = 5$.

Uma curva possível de $y = f(x)$, com todas estas características, aparece na Figura 3.21. Observe, porém, que como não conhecemos os valores de $f(-1)$, $f(2)$ e $f(5)$, muitas outras curvas também satisfazem a estes requisitos.

FIGURA 3.21 Um possível gráfico de $y = f(x)$.



O Teste da Derivada Segunda

A derivada segunda também pode ser usada para classificar os pontos críticos de função como máximos ou mínimos relativos. Para isso, basta aplicar o teste a seguir, conhecido como **teste da derivada segunda**.

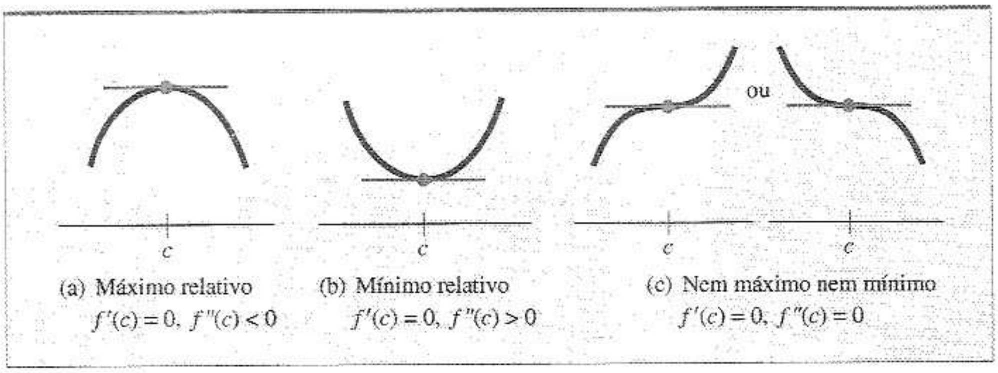
Teste da Derivada Segunda ■ Suponha que $f'(x)$ exista em um intervalo aberto e que $f'(c) = 0$.

Se $f''(c) > 0$, f possui um mínimo relativo em $x = c$.

Se $f''(c) < 0$, f possui um máximo relativo em $x = c$.

Caso $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não exista, o teste não pode ser aplicado; $x = c$ pode ser um máximo relativo de f, um mínimo relativo ou nem uma coisa nem outra.

FIGURA 3.22 Teste da derivada segunda.



Para compreender como funciona o teste da derivada segunda, examine a Figura 3.22, que mostra quatro possibilidades compatíveis com o fato de que $f'(c) = 0$. De acordo com a Figura 3.22a, se $f''(c) < 0$ o gráfico de f tem a concavidade para baixo e, portanto, o ponto $x = c$ é um máximo relativo. De acordo com a Figura 3.22b, se $f''(c) > 0$ o gráfico de f tem a concavidade para cima e, portanto, o ponto $x = c$ é um mínimo relativo. De acordo com a Figura 3.22c, se um ponto no qual $f'(c) = 0$ não é um extremo relativo, é um ponto de inflexão e $f''(c) = 0$ [se $f''(c)$ existir]. Podemos concluir, portanto, que se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, $P(c, f(c))$ é um máximo relativo, enquanto se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, o ponto crítico correspondente é um mínimo relativo.

O exemplo a seguir ilustra o uso do teste da derivada segunda.

EXEMPLO 3.2.5

Determine os pontos críticos da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ e use o teste da derivada segunda para classificar cada ponto crítico como máximo ou mínimo relativo.

Solução

Como a derivada primeira

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

se anula em $x = -2$ e em $x = 1$, os pontos correspondentes, $(-2, 13)$ e $(1, -14)$ são os pontos críticos de f. Para testar estes pontos, basta calcular a derivada segunda

$$f''(x) = 12x + 6$$

e calcular o seu valor em $x = -2$ e em $x = 1$. Como

$$f''(-2) = -18 < 0$$

sabemos que o ponto crítico $(-2, 13)$ é um máximo relativo; como

$$f''(1) = 18 > 0$$

sabemos que o ponto crítico $(1, -14)$ é um mínimo relativo. A curva de f aparece na Figura 3.23.

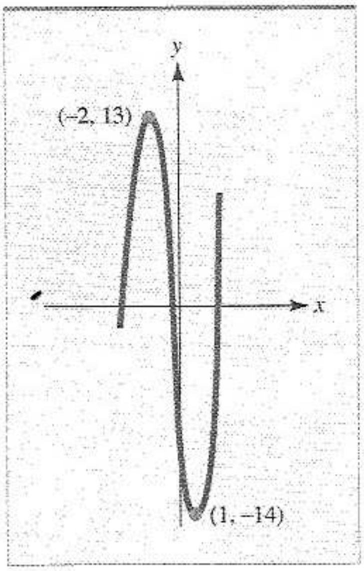


FIGURA 3.23 Gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

NOTA Embora tenha sido fácil usar o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos no Exemplo 3.2.5, o teste apresenta algumas limitações. No caso de certas funções, o trabalho necessário para calcular a derivada segunda pode ser considerável, o que torna o teste menos atraente. Além disso, o teste se aplica aos pontos críticos nos quais a derivada primeira é nula, mas não aos pontos em que a derivada primeira não existe. Finalmente, se tanto $f'(c)$ como $f''(c)$ são nulas, o teste da derivada segunda não permite chegar a nenhuma conclusão. Este fato está ilustrado na Figura 3.24, que mostra os gráficos de três funções cujas derivadas primeira e segunda são nulas no ponto $x = 0$, uma com um máximo relativo, outra com um mínimo relativo e outra com um ponto de inflexão. Nos casos em que é pouco prático ou impossível usar o teste da derivada segunda, é sempre possível usar o teste da primeira derivada, descrito na Seção 3.1, para classificar os pontos críticos. ■

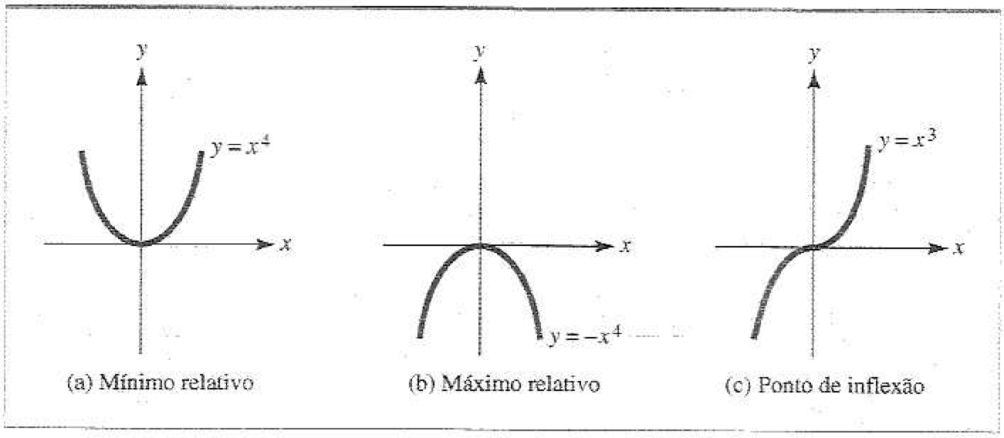


FIGURA 3.24 Três funções cujas derivadas primeira e segunda são nulas em $x = 0$.

No Exemplo 3.2.6, vamos voltar às questões da produtividade dos operários e dos retornos decrescentes que discutimos no início desta seção. Nosso objetivo será maximizar a *produtividade* dos operários, ou seja, a derivada da produção. Assim, igualamos a zero a derivada *segunda* da produção e encontramos um ponto de inflexão na função de produção, que interpretamos como o ponto de retornos decrescentes da produção.

EXEMPLO 3.2.6

Um estudo de eficiência realizado em uma fábrica durante o turno da manhã mostra que um operário que começa a trabalhar às 8 h terá produzido, em média, $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades t horas mais tarde. Em que hora da manhã os operários são mais produtivos?

Solução

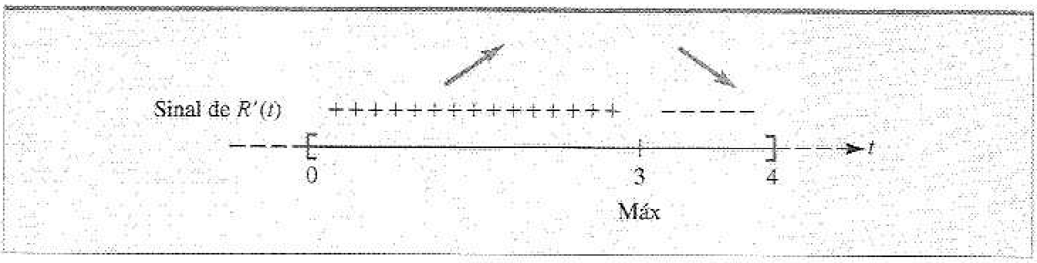
A produtividade dos operários é a derivada

$$R(t) = Q'(t) = -3t^2 + 18t + 12$$

da função de produção $Q(t)$. Supondo que o turno da manhã vá de 8 h ao meio-dia, o objetivo é encontrar o maior valor possível de $R(t)$ para $0 \leq t \leq 4$. A derivada da função de produtividade é

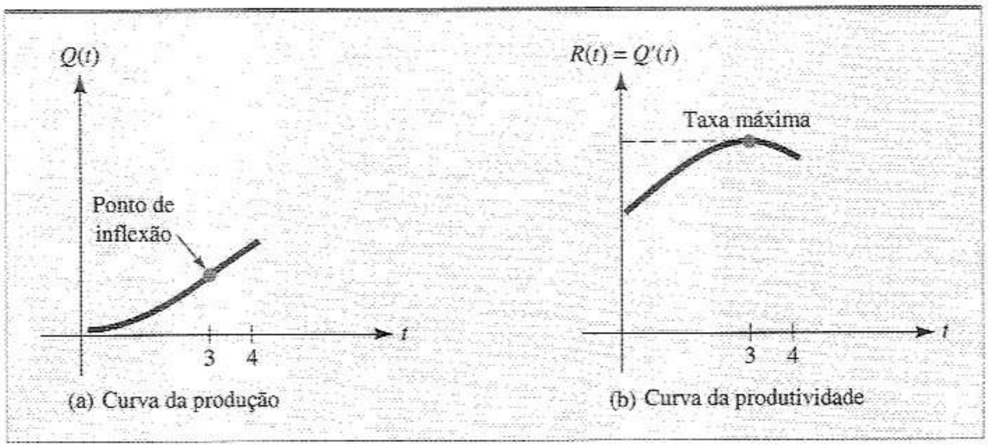
$$R'(t) = Q''(t) = -6t + 18$$

que é nula para $t = 3$, positiva para $0 < t < 3$ e negativa para $3 < t < 4$, como mostra o diagrama de setas a seguir.



Assim, a produtividade $R(t)$ aumenta para $0 < t < 3$, diminui para $3 < t < 4$ e é máxima para $t = 3$, isto é, às 11 horas. Isto significa que a função produção $Q(t)$ tem um ponto de inflexão em $t = 3$, já que neste instante $Q''(t) = R'(t)$ muda de sinal. O gráfico da função de produção $Q(t)$ aparece na Figura 3.25a, enquanto o da função produtividade $R(t)$ aparece na Figura 3.25b.

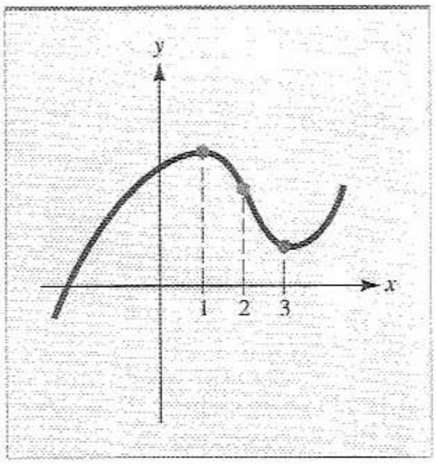
FIGURA 3.25 Produção de um operário.



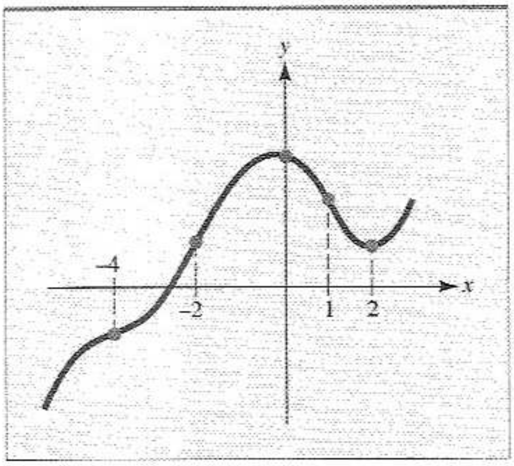
PROBLEMAS | 3.2

Nos Problemas 1 a 4, determine em que intervalo(s) a derivada segunda da função é positiva e em que intervalo(s) é negativa.

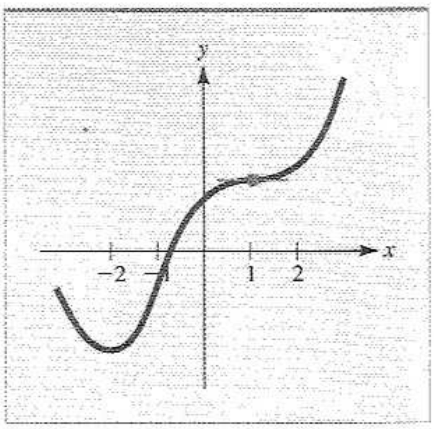
1.



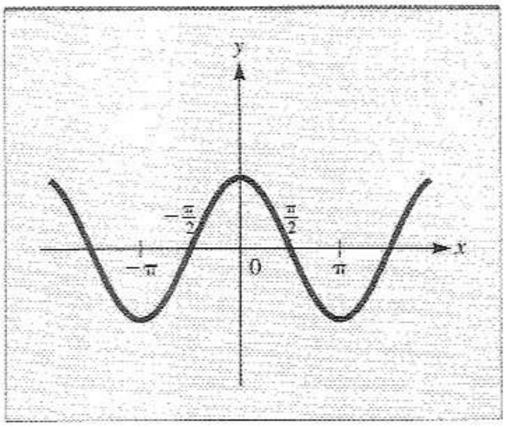
2.



3.



4.



Nos Problemas 5 a 12, determine em que intervalo(s) a concavidade da função dada é para cima e em que intervalo(s) a concavidade é baixo. Determine também as coordenadas de todos os pontos de inflexão.

5. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$

6. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10x - 9$

7. $f(x) = x(2x + 1)^2$

8. $f(s) = s(s + 3)^2$

9. $g(t) = t^2 - \dfrac{1}{t}$

10. $F(x) = (x - 4)^{7/3}$

11. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x - 5$

12. $g(x) = 3x^5 - 25x^4 + 11x - 17$

Nos Problemas 13 a 26, determine em que intervalo(s) a função dada é crescente e decrescente e em que intervalo(s) a concavidade da função é para cima e para baixo. Encontre os extremos relativos e os pontos de inflexão e faça um esboço da curva da função.

13. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$

14. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

15. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

16. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

17. $f(x) = (x - 2)^3$

18. $f(x) = x^5 - 5x$

19. $f(x) = (x^2 - 5)^3$

20. $f(x) = (x - 2)^4$

21. $f(s) = 2s(s + 4)^3$

22. $f(x) = (x^2 - 3)^2$

23. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

26. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 24$

Nos Problemas 27 a 38, use o teste da derivada segunda para determinar os máximos e mínimos relativos da função dada.

27. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

28. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

29. $f(x) = (x^2 - 9)^2$

30. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

31. $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{18}{x}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

33. $f(x) = x^2(x - 5)^2$

34. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2$

35. $h(t) = \dfrac{2}{1 + t^2}$

36. $f(s) = \dfrac{s + 1}{(s - 1)^2}$

37. $f(x) = \dfrac{(x - 2)^3}{x^2}$

38. $h(t) = \dfrac{(t + 3)^3}{(t - 1)^2}$

Nos Problemas 39 a 42, a derivada segunda $f''(x)$ de uma função é dada. Em cada caso, use esta informação para determinar os intervalos em que a concavidade da curva de $f(x)$ é para cima e os intervalos em que a concavidade é para baixo e determine todos os valores de x para os quais existe um ponto de inflexão. [Não é necessário determinar $f(x)$ nem a coordenada y dos pontos de inflexão].

39. $f''(x) = x^2(x - 3)(x - 1)$

40. $f''(x) = x^3(x^2 + 2x - 3)$

41. $f''(x) = (x - 1)^{1/3}$

42. $f''(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4}$

Nos Problemas 43 a 46, a derivada primeira $f'(x)$ de uma função $f(x)$ é dada. Em cada caso,

(a) Determine os intervalos nos quais f é crescente e os intervalos nos quais é decrescente.
(b) Determine os intervalos nos quais a concavidade da curva de f é para cima e os intervalos nos quais a concavidade é para baixo.
(c) Determine as coordenadas x dos extremos relativos e dos pontos de inflexão de f.
(d) Faça um esboço de uma curva possível de f.

43. $f'(x) = x^2 - 4x$

44. $f'(x) = x^2 - 2x - 8$

45. $f'(x) = 5 - x^2$

46. $f'(x) = x(1 - x)$

47. Faça um esboço da curva de uma função com as seguintes propriedades:

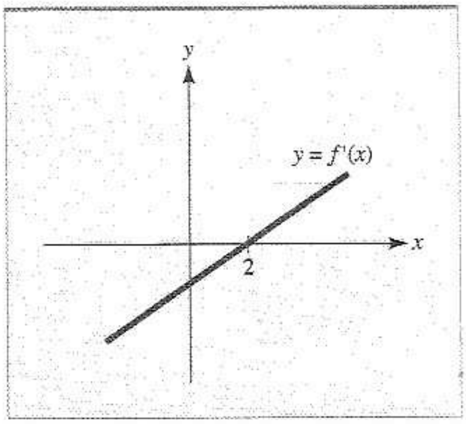
a. $f'(x) > 0$ para $x < -1$ e para $x > 3$
b. $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$
c. $f''(x) < 0$ para $x < 2$
d. $f''(x) > 0$ para $x > 2$

48. Faça um esboço da curva de uma função com as seguintes propriedades:

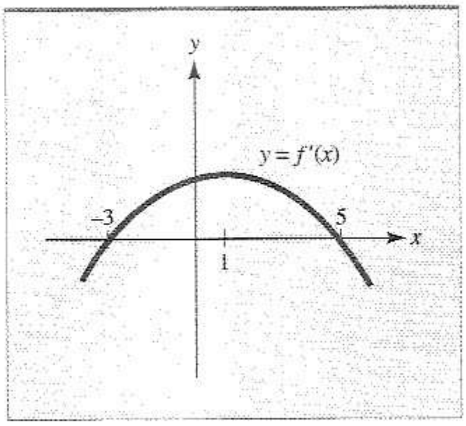
a. O gráfico apresenta descontinuidades em $x = -1$ e em $x = 3$
b. $f'(x) > 0$ para $x < 1, x \neq -1$
c. $f'(x) < 0$ para $x > 1, x \neq 3$
d. $f''(x) > 0$ para $x < -1$ e $x > 3$ e $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 3$
e. $f(0) = 0 = f(2), f(1) = 3$

Nos Problemas 49 a 52 é dado o gráfico de uma função derivada $y' = f'(x)$. Descreva a função $f(x)$ e faça um esboço de $y = f(x)$.

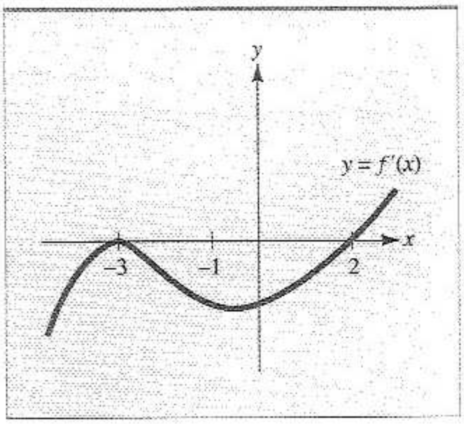
49.



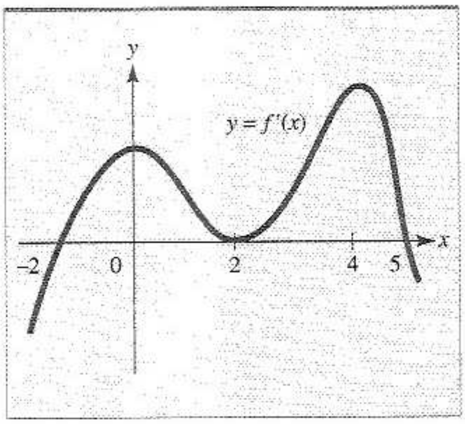
50.



51.



52.



53. ANÁLISE MARGINAL O custo para produzir x unidades de uma certa mercadoria por semana é

$$C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$$

a. Determine o custo marginal $C'(x)$ e plote no mesmo gráfico as curvas das funções $C'(x)$ e $C(x)$.

b. Determine o(s) valor(es) de x para os quais $C''(x) = 0$. Qual a relação entre este(s) ponto(s) e a curva do custo marginal?

54. VENDAS Uma empresa estima que quando x milhares de reais são investidos na comercialização de um certo produto, $Q(x)$ unidades do produto são vendidas, onde

$$Q(x) = -4x^3 + 252x^2 - 3.200x + 17.000$$

para $10 \leq x \leq 40$. Faça um esboço da curva de $Q(x)$. Onde fica o ponto de inflexão da função? Qual o significado do investimento em comercialização correspondente a este ponto?

55. EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã (das 8 h ao meio-dia) revela que um operário que chega para trabalhar às 8 h produziu $Q(t) = -t^3 + \dfrac{9}{2}t^2 + 15t$ unidades t horas mais tarde.

a. Em que instante do turno da manhã a produtividade dos operários é máxima?

b. Em que instante do turno da manhã a produtividade é mínima?

56. EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA Um estudo de eficiência realizado no turno da manhã (das 8 h ao meio-dia) revela que um operário que chega para trabalhar às 8 h produziu $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ receptores de rádio t horas mais tarde.

a. Em que instante do turno da manhã a produtividade dos operários é máxima?

b. Em que instante do turno da manhã a produtividade é mínima?

57. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Uma projeção, válida para 5 anos, revela que daqui a t anos a população de um certo bairro será $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 50$ mil habitantes.

a. Em que instante, dentro do período de 5 anos, a taxa de crescimento da população será máxima?

b. Em que instante, dentro do período de 5 anos, a taxa de crescimento da população será mínima?

c. Em que instante a taxa de crescimento da população estará variando mais rapidamente?

58. PUBLICIDADE O gerente de uma fábrica de calçados determina que t meses após o início de uma campanha publicitária $S(t)$ centenas de pares serão vendidos, onde

$$S(t) = \frac{3}{t+2} - \frac{12}{(t+2)^2} + 5$$

a. Determine $S'(t)$ e $S''(t)$.

b. Em que mês o número de pares vendidos será máximo? Qual é o número de pares vendidos neste mês?

c. O gerente pretende encerrar a campanha quando o número de pares vendidos passar pelo valor mínimo. Em que mês isto acontece? Qual é o número de pares vendidos neste mês? Qual é a taxa de variação do número de pares vendidos?

59. DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA Um epidemiologista determina que uma certa doença se dissemina de tal fora que, t semanas após o início de um surto, N centenas de casos novos são observados, onde

$$N(t) = \frac{5t}{12 + t^2}$$

a. Determine $N'(t)$ e $N''(t)$.
b. Em que semana o número de casos da doença é máximo? Qual é este número máximo de casos?
c. As autoridades consideram a epidemia sob controle quando a taxa de aumento do número de novos casos é mínima. Em que semana isto ocorre?

60. GASTOS DO GOVERNO Durante uma recessão, o Congresso decide estimular a economia liberando um verba para contratar desempregados para trabalhar em projetos do governo. Suponha que t meses após o início do programa existam $N(t)$ milhares de pessoas desempregadas, onde

$$N(t) = -t^3 + 45t^2 + 408t + 3.078$$

a. Qual é o número máximo de desempregados? Quantos meses após o início do programa este número é atingido?
b. Para não estimular excessivamente a economia (o que levaria a uma inflação), o governo decide encerrar o programa de estímulo no momento em que o índice de desemprego começar a diminuir. Quantos meses após o início do programa isto acontece? Qual é o número de desempregados nesta ocasião?

61. HABITAÇÃO Suponha que em uma certa cidade $M(r)$ milhares de novas casas serão construídas se a taxa fixa de juros para um financiamento em 30 anos for $r\%$, onde

$$M(r) = \frac{1 + 0{,}02r}{1 + 0{,}009r^2}$$

a. Determine $M'(r)$ e $M''(r)$.
b. Faça um esboço da curva da função $M(r)$.
c. Qual é a taxa de juros para a qual a taxa de construção de novas casas é mínima?

62. A jarra da figura é enchida com água a uma vazão constante. Seja $h(t)$ a altura da água na jarra no instante t (suponha que a jarra esteja vazia no instante $t = 0$). Faça um esboço da função $h(t)$. Em particular, o que acontece quando o nível da água chega ao pescoço da jarra?

PROBLEMA 62

63. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Os estudos mostram que, quando fatores ambientais impõem um limite superior ao tamanho de uma população $P(t)$, a população muitas vezes cresce de tal forma que a taxa de variação percentual de $P(t)$ satisfaz a equação

$$\frac{100\,P'(t)}{P(t)} = A - BP(t)$$

onde A e B são constantes positivas. Qual é a localização dos pontos críticos de $P'(t)$? Qual é o significado destes pontos? (A resposta deve ser dada em função de A e B.)

64. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA Seja $Q(t)$ o número de pessoas em uma cidade com uma população N_0 que estão infectadas com uma certa doença t dias após começar uma epidemia. Os estudos mostram que a taxa $R(Q)$ com a qual uma epidemia se espalha é proporcional ao número de pessoas que contraíram a doença e ao número de pessoas que ainda não contraíram a doença: $R(Q) = kQ(N_0 - Q)$. Faça um esboço da curva da função $R(Q)$ e interprete esta curva. Em particular, qual é o significado do ponto mais alto da curva de $R(Q)$?

65. CRESCIMENTO DE UM TECIDO Suponha que a cultura de um certo tecido tenha uma certa área $A(t)$ no instante t e uma área máxima potencial M. Com base nas propriedades da divisão celular, é razoável supor que a área A aumenta a uma taxa proporcional a $\sqrt{A(t)}$ e a $M - A(t)$, ou seja, que

$$\frac{dA}{dt} = k\sqrt{A(t)}\,[M - A(t)]$$

onde k é uma constante positiva.
a. Seja $R(t) = A'(t)$ a taxa de crescimento do tecido. Mostre que $R'(t) = 0$ para $A(t) = M/3$.
b. A taxa de crescimento do tecido é máxima ou mínima para $A(t) = M/3$? [*Sugestão:* Use o teste da derivada primeira ou o teste da derivada segunda.]
c. Com base das informações dadas e no resultado do item (a), o que se pode dizer a respeito da curva de $A(t)$?

66. Use os métodos do cálculo para demonstrar que a função do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ tem a concavidade para cima quando a é positivo e a concavidade para baixo quando a é negativo.

67. Seja $f(x) = x^4 + x$. Mostre que embora $f''(0) = 0$, a curva de f não possui um extremo relativo nem um ponto de inflexão em $x = 0$. Faça um esboço da curva de $f(x)$.

68. Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas com um ponto de inflexão em $x = c$, é verdade que a soma $h(x) = f(x) + g(x)$ também possui um ponto de inflexão em $x = c$? Explique por que a resposta é afirmativa ou apresente um exemplo de funções $f(x)$ e $g(x)$ para as quais a afirmativa é falsa.

69. Dada a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$, faça o seguinte:
a. Plote a função usando janelas $[-10, 10]1$ por $[-10, 10]1$ e $[-10, 10]1$ por $[-20, 20]2$.
b. Complete a tabela a seguir.

x	-4	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						
$f''(x)$						
$f'(x)$						

c. Determine as interseções da função com o eixo x e com o eixo y com precisão de duas casas decimais.
d. Determine os máximos e mínimos relativos de $f(x)$.
e. Determine os intervalos em que $f(x)$ é crescente.
f. Determine os intervalos em que $f(x)$ é decrescente.
g. Determine os pontos de inflexão.
h. Determine os intervalos em que a concavidade de $f(x)$ é para cima.
i. Determine os intervalos em que a concavidade de $f(x)$ é para baixo.
j. Mostre que a concavidade se inverte quando a curva de $f(x)$ passa por um ponto de inflexão.
k. Determine o máximo e mínimo absolutos de $f(x)$ no intervalo $-4 \leq x \leq 2$.

70. Repita o Problema 69 para a função

$$f(x) = 3{,}7x^4 - 5{,}03x^3 + 2x^2 - 0{,}7$$

SEÇÃO 3.3 Traçado de Curvas

Nas seções anteriores, vimos que é possível usar a derivada $f'(x)$ para verificar se a curva de $f(x)$ é crescente ou decrescente e a derivada segunda $f''(x)$ para verificar se a concavidade de $f(x)$ é para cima ou para baixo. Embora estes instrumentos sejam adequados para identificar os pontos altos e baixos de uma curva e desenhar suas tortuosidades, existem outros aspectos gráficos que podem ser mais bem descritos usando limites.

Lembrete

É importante lembrar que ∞ não é um número e sim um símbolo usado para representar um processo de aumento sem limite ou o resultado deste aumento.

Vimos na Seção 1.5 que um limite da forma $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, no qual a variável independente x aumenta ou diminui indefinidamente, é chamado de *limite no infinito*. Por outro lado, se os valores de $f(x)$ aumentam sem limite quando x se aproxima de um número c, dizemos que $f(x)$ tem um limite infinito em $x = c$ e escrevemos $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ se $f(x)$ aumenta indefinidamente quando x tende a c ou $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ se $f(x)$ diminui indefinidamente. Quando tomados em conjunto, os limites no infinito e limites infinitos recebem o nome de **limites que envolvem o infinito**. Nosso primeiro objetivo nesta seção é mostrar de que forma os limites que envolvem o infinito podem ser interpretados graficamente. Em seguida, esta informação será combinada com os métodos da Seção 3.1 e 3.2 para formar um método geral de traçado de curvas.

Assíntotas Verticais

Os limites que envolvem o infinito podem ser usados para descrever retas, chamadas *assíntotas*, que estão freqüentemente associadas a funções. Em particular, dizemos que uma função $f(x)$ possui uma **assíntota vertical** no ponto $x = c$ se $f(x)$ aumenta ou diminui indefinidamente quando x tende a c pelo lado direito ou pelo lado esquerdo.

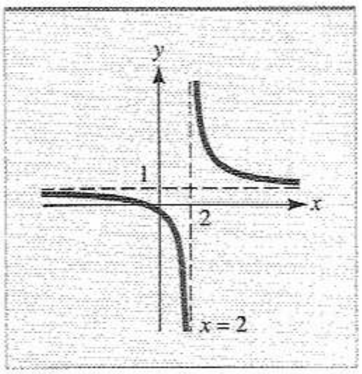


FIGURA 3.26 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Considere, por exemplo, a função racional

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

Quando x tende a 2 pela esquerda ($x < 2$), os valores da função diminuem indefinidamente; quando x tende a 2 pela direita ($x > 2$), os valores da função aumentam indefinidamente. Este comportamento está ilustrado na tabela a seguir e na Figura 3.26.

x	1,95	1,97	1,99	1,999	2	2,001	2,005	2,01
$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$	-59	-99	-299	-2.999	Não existe	3.001	601	301

O comportamento da função neste exemplo pode ser resumido da seguinte forma, usando a notação de limite unilateral apresentada na Seção 1.6:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

Da mesma forma, podemos usar a notação de limite unilateral para definir o conceito de assíntota vertical.

Assíntota Vertical ■ A reta $x = c$ é uma *assíntota vertical* da curva da função $f(x)$ se

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty \quad (\text{ou} -\infty)$$

ou

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty \quad (\text{ou} -\infty)$$

Uma função racional $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ possui uma assíntota vertical $x = c$ sempre que $q(c) = 0$ e $p(c) \neq 0$. O exemplo a seguir envolve uma função com uma assíntota vertical.

EXEMPLO 3.3.1

Determine todas as assíntotas verticais da curva da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$$

Solução

Sejam $p(x) = x^2 - 9$ e $q(x) = x^2 + 3x$ o numerador e o denominador de $f(x)$, respectivamente. O denominador $q(x)$ se anula para $x = -3$ e para $x = 0$. Entretanto, para $x = -3$, também temos $p(-3) = 0$ e

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{x} = 2$$

o que significa que a curva de $f(x)$ tem um "buraco" no ponto $(-3, 2)$ e $x = -3$ *não é* uma assíntota vertical.

Por outro lado, para $x = 0$ temos $q(0) = 0$ e $p(0) \neq 0$, o que sugere que o eixo y (ou seja, a reta vertical $x = 0$) é uma assíntota vertical da curva de $f(x)$. Para confirmar este comportamento assintótico, observamos que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = -\infty$$

A Figura 3.27 mostra o gráfico de $f(x)$.

7 EXPLORE!

Plote a função do Exemplo 3.3.1, $f(x) = (x^2 - 9)/(x^2 + 3x)$, usando uma janela decimal expandida [−4,7; 4,7]1 por [−6,2; 6,2]1. Use **TRACE** para confirmar que $f(x)$ não existe em X = −3 e X = 0. De que forma a calculadora mostra que uma função não existe em um certo ponto?

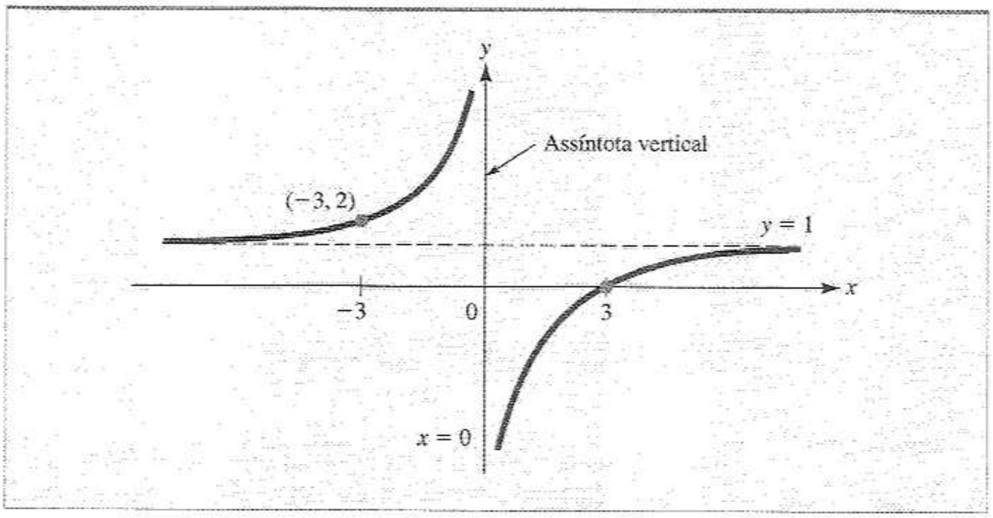


FIGURA 3.27 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$.

Assíntotas Horizontais

Observe na Figura 3.27 que a curva da função se aproxima da reta horizontal $y = 1$ quando x aumenta ou diminui indefinidamente, ou seja,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = 1$$

Quando uma função $f(x)$ tende para um valor finito b quando x aumenta ou diminui indefinidamente (ou as duas coisas, como neste exemplo), dizemos que a reta horizontal $y = b$ é uma **assíntota horizontal** da curva de $f(x)$. Segue uma definição formal.

Assíntota Horizontal ■ A reta $y = b$ é uma *assíntota horizontal* da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

EXEMPLO 3.3.2

Determine todas as assíntotas horizontais da função

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

Solução

Dividindo todos os termos da função racional $f(x)$ por x^2 (a potência mais elevada de x no denominador), obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2/x^2}{x^2/x^2 + x/x^2 + 1/x^2}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + 1/x + 1/x^2} = \frac{1}{1 + 0 + 0} = 1 \quad \textit{regras das potências inversas}$$

e, analogamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1$$

Assim, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal da curva de $f(x)$. O gráfico da função aparece na Figura 3.28.

Lembrete

Lembre-se das regras das potências inversas para limites (Seção 1.5):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A}{x^k} = 0$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{A}{x^k} = 0$$

para A e k constantes, com $k > 0$ e x^k definidos para todo x.

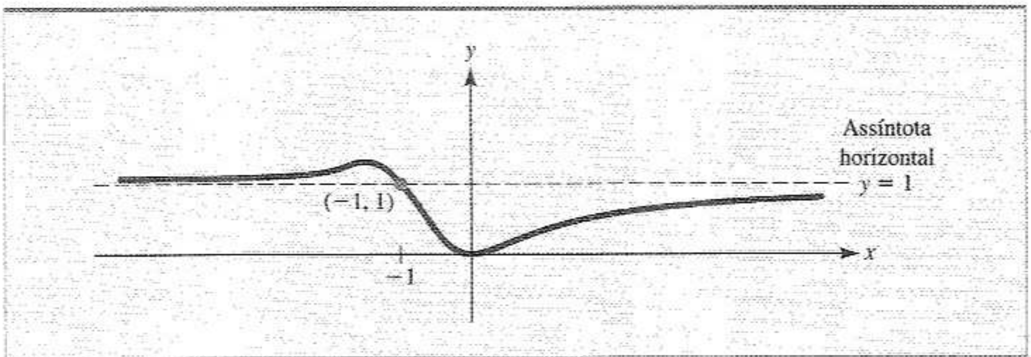


FIGURA 3.28 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$.

NOTA A curva de uma função $f(x)$ jamais atravessa uma assíntota vertical $x = c$, já que pelo menos um dos limites unilaterais $\lim_{x \to c^-} f(x)$ e $\lim_{x \to c^+} f(x)$ é infinito. Por outro lado, nada impede que a curva de uma função atravesse uma assíntota horizontal. No Exemplo 3.3.2, a curva de função $y = x^2/(x^2 + x + 1)$ atravessa a assíntota horizontal $y = 1$ no ponto em que

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1$$
$$x^2 = x^2 + x + 1$$
$$x = -1$$

ou seja, no ponto $(-1, 1)$. ■

Método Geral de Traçado de Curvas

Agora dispomos de todos os instrumentos necessários para apresentar um método geral de traçado de curvas.

Método Geral para Traçar a Curva de $f(x)$

1º passo: Determine o domínio de $f(x)$.

2º passo: Determine as interseções com os eixos x e y. As interseções com o eixo y (isto é, os pontos em que $x = 0$) são normalmente fáceis de calcular, mas para determinar as interseções com o eixo x [isto é, os pontos em que $f(x) = 0$] pode ser necessário usar uma calculadora.

3º passo: Determine todas as assíntotas verticais e horizontais da curva da função. Plote as assíntotas.

4º passo: Calcule $f'(x)$ e use-a para determinar os números críticos de $f(x)$ e os intervalos em que a função é crescente e decrescente.

5º passo: Determine as duas coordenadas de todos os extremos relativos. Plote os máximos relativos como uma "copa" ( ) e os mínimos relativos como um "copo" ( ).

6º passo: Calcule $f''(x)$ e use-a para determinar os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão. Plote os pontos de inflexão como "cobras" (ou) para ter uma idéia da forma da curva das proximidades do ponto.

7º passo: O resultado dos passos anteriores é um gráfico preliminar, com as assíntotas, os pontos de interseção e "copas", "copos" e "cobras" mostrando a forma da curva nos pontos mais importantes. Complete o esboço ligando os pontos já marcados. Não se esqueça de que a curva da função não pode atravessar uma assíntota vertical.

Segue uma análise passo a passo da curva de uma função racional.

EXEMPLO 3.3.3

Plote a função

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Solução

1º e 2º passos: A função existe para todos os valores de x exceto $x = -1$, e a única interseção está na origem (0, 0).

3º passo: Como $f(x)$ diminui indefinidamente quando x tende a -1 pela esquerda, a reta $x = -1$ é uma assíntota vertical, ou seja,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$$

Além disso, como

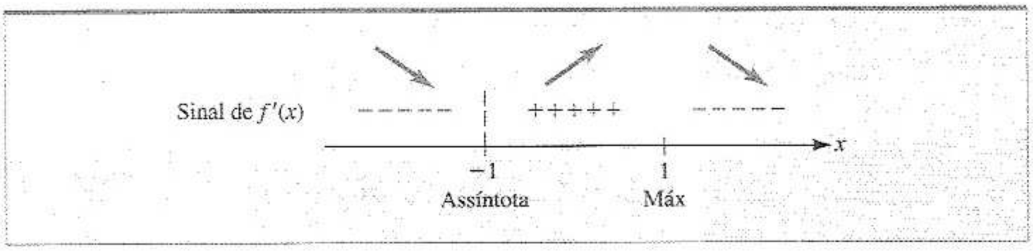
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = 0$$

o eixo x (reta $y = 0$) é uma assíntota horizontal. Trace as retas $x = -1$ e $y = 0$ no gráfico.

4º passo: Calcule a derivada $f(x)$ usando a regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(1) - x[2(x+1)(1)]}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

Como $f'(1) = 0$, $x = 1$ é um número crítico. Observe que embora $f'(-1)$ não exista, $x = -1$ não é um número crítico porque não pertence ao domínio de $f(x)$. Assinale $x = 1$ e $x = -1$ em uma reta de números com uma reta vertical tracejada em $x = -1$ para indicar que existe uma assíntota vertical neste ponto. Calcule o valor de $f'(x)$ em pontos apropriados (como -2, 0 e 3, por exemplo) para obter o diagrama de setas que aparece a seguir.

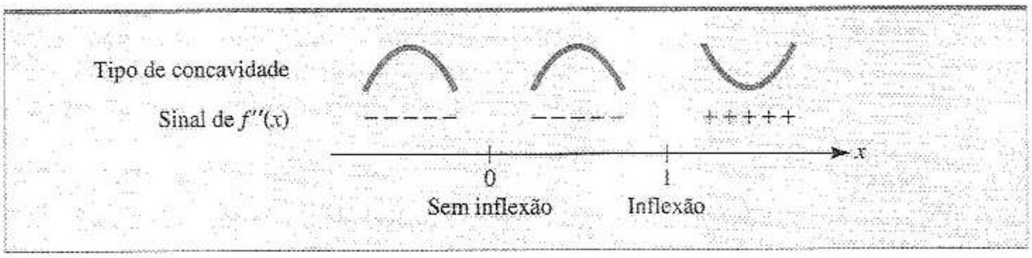


5º passo: De acordo com o diagrama de setas obtido no 4º passo, existe um máximo relativo para $x = 1$. Como $f(1) = \dfrac{1}{4}$, plotamos uma "copa" no ponto $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$.

6º passo: Use de novo a regra do quociente para obter

$$f''(x) = \frac{2(x - 2)}{(x + 1)^4}$$

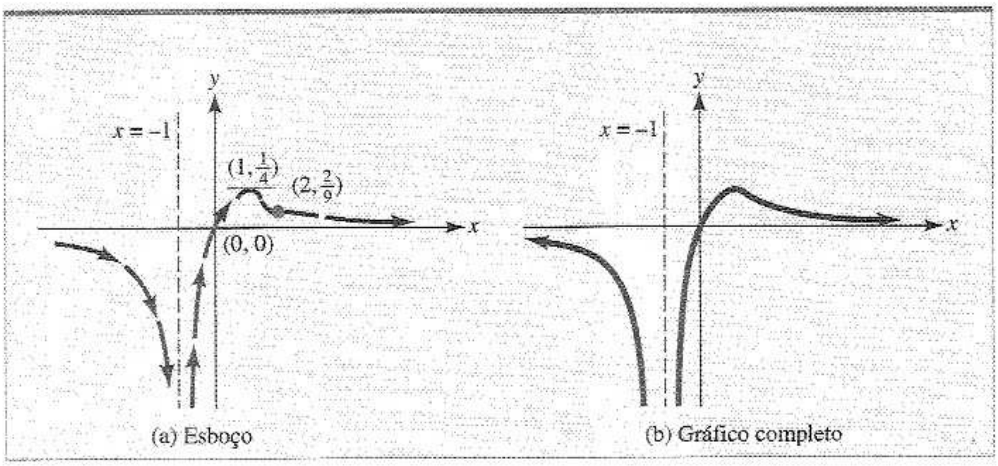
Como $f'(x) = 0$ para $x = 2$ e $f'(x)$ não existe para $x = -1$, marque os pontos -1 e 2 em uma reta de números e verifique o sinal de $f'(x)$ nos intervalos $x < -1$, $-1 < x < 2$ e $x > 2$ para obter o diagrama de concavidades que aparece a seguir.



Observe a mudança de concavidade em $x = 2$. Como $f(2) = \dfrac{2}{9}$, plote uma "cobra" ⤥ no ponto $\left(2, \dfrac{2}{9}\right)$ para indicar o ponto de inflexão associado.

7º passo: O gráfico preliminar aparece na Figura 3.29a. Observe que a assíntota vertical (reta tracejada) divide a curva em duas partes. Ligue os pontos à esquerda e à direita da linha tracejada por curvas suaves para obter o gráfico da Figura 3.29b.

FIGURA 3.29 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.



No Exemplo 3.3.4 desenhamos a curva de uma função racional mais complexa usando uma forma compacta da solução apresentada no Exemplo 3.3.3.

8 EXPLORE!

Entre com a função $f(x)$ do Exemplo 3.3.4 no editor de equações. Como se comporta a curva de $f(x)$ para grandes valores de x?

EXEMPLO 3.3.4

Plote a função

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2x - 15}$$

Solução

Como $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, a função $f(x)$ é definida para todos os valores de x exceto $x = -5$ e $x = 3$. O único ponto de interseção é a origem $(0, 0)$.

Sabemos que $x = 3$ e $x = -5$ são assíntotas verticais porque se fazemos $f(x) = p(x)/q(x)$, onde $p(x) = 3x^2$ e $q(x) = x^2 + 2x - 15$, $q(3) = 0$ e $q(-5) = 0$, enquanto $p(3) \neq 0$ e $p(-5) \neq 0$. Além disso, $y = 3$ é uma assíntota horizontal, já que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1 + 2/x - 15/x^2} = \frac{3}{1 + 0 - 0} = 3$$

e, analogamente, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$. Começamos a esboçar a curva traçando as assíntotas $x = 3$, $x = -5$ e $y = 3$ como retas tracejadas em um sistema de eixos coordenados.

Em seguida, usamos a regra do quociente para obter

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x - 15)(6x) - (2x + 2)(3x^2)}{(x^2 + 2x - 15)^2} = \frac{6x(x - 15)}{(x^2 + 2x - 15)^2}$$

Vemos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = 15$ e que $f'(x)$ não existe para $x = -5$ e $x = 3$. Fazemos $x = -5$, 0, 3 e 15 em uma reta de números e obtemos o diagrama de setas da Figura 3.30a determinando o sinal de $f'(x)$ para números de teste apropriados (como, por exemplo, -7, -1, 2, 5 e 20). Interpretando o diagrama de setas, vemos que existe um máximo relativo em $x = 0$ e um mínimo relativo em $x = 15$. Como $f(0) = 0$ e $f(15) \approx 2{,}81$, incluímos em nosso esboço uma "copa" em $(0, 0)$ e um "copo" em $(15; 2{,}81)$.

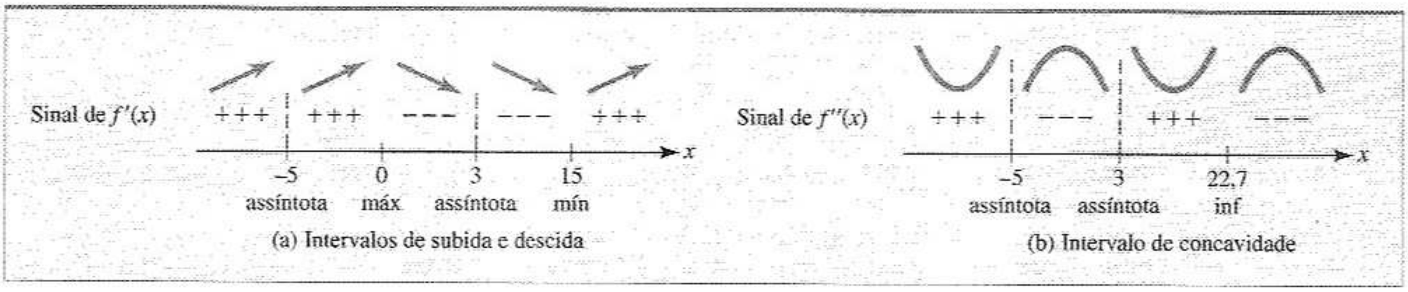


FIGURA 3.30 Diagramas de setas e concavidade para $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2x - 15}$.

Usando de novo a regra do quociente, obtemos:

$$f''(x) = \frac{-6(2x^3 - 45x^2 - 225)}{(x^2 + 2x - 15)^3}$$

Vemos que $f''(x)$ não existe para $x = -5$ e para $x = 3$ e que $f''(x) = 0$ para

$$2x^3 - 45x^2 - 225 = 0$$
$$x \approx 22{,}7 \qquad \textit{usando uma calculadora}$$

Assinalamos os pontos $x = -5$, 3 e 22,7 em uma reta de números e obtemos o diagrama de concavidades da Figura 3.30b determinando o sinal de $f''(x)$ em pontos de teste apropriados (como, por exemplo, -6, 0, 4 e 25). Observe que a concavidade muda em todos os pontos assinalados, mas apenas $x = 22{,}7$ corresponde a um ponto de inflexão, já que $x = -5$ e $x = 3$ não pertencem ao domínio de $f(x)$. Calculamos $f(22{,}7) \approx 2{,}83$ e introduzimos uma "cobra" ( ) no ponto $(22{,}7; 2{,}83)$.

O gráfico preliminar aparece na Figura 3.31a. Observe que as duas assíntotas verticais dividem a curva em três partes. Ligue os pontos dentro de cada região por curvas suaves para obter o gráfico da Figura 3.31b.

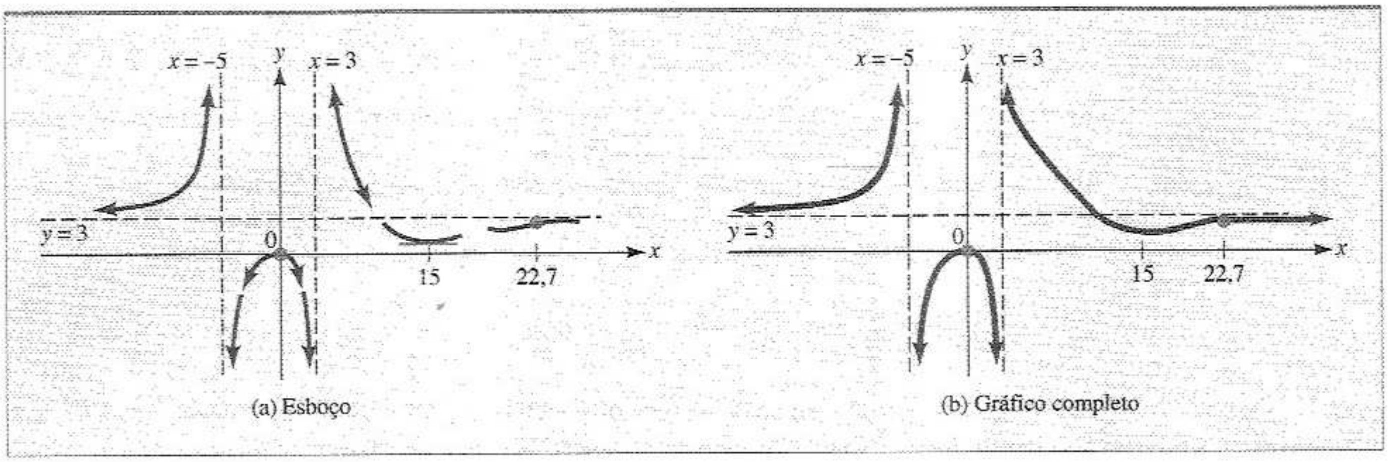


FIGURA 3.31 Gráfico de $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2x-15}$.

Quando $f'(x)$ não existe para um ponto $x = c$ pertencente ao domínio de $f(x)$, existem várias possibilidades para a curva de $f(x)$ no ponto $(c, f(c))$. Duas dessas possibilidades são examinadas no Exemplo 3.3.5.

EXEMPLO 3.3.5

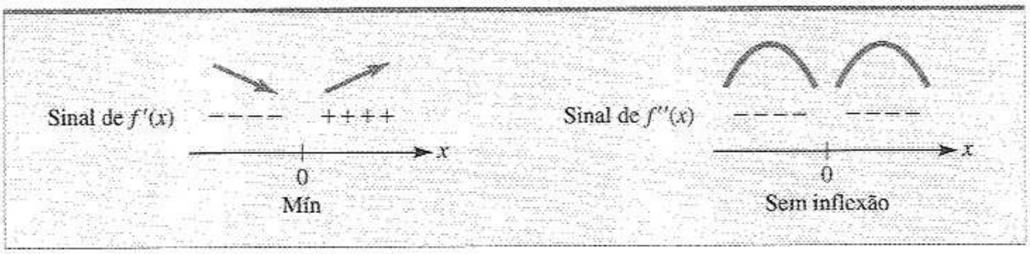
Plote as curvas de $f(x) = x^{2/3}$ e $g(x) = (x-1)^{1/3}$.

Solução

As duas funções existem para qualquer valor de x. Para $f(x) = x^{2/3}$, temos

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-4/3} \qquad x \neq 0$$

O único ponto crítico é (0, 0); os diagramas de setas e de concavidades são mostrados a seguir.



Interpretando estes digramas, concluímos que a concavidade da curva de $f(x)$ é para baixo para todos os valores de $x \neq 0$, mas a curva é decrescente para $x < 0$ e crescente para $x > 0$. Assim, a curva de $f(x)$ possui um mínimo na origem (0, 0) e sua forma nas proximidades da origem é a de uma "cúspide" ⋎. A curva de $f(x)$ aparece na Figura 3.32a.

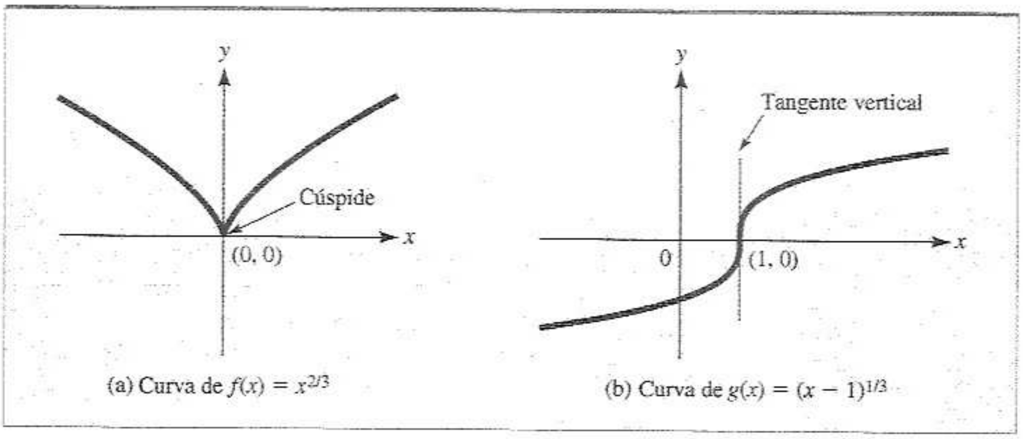
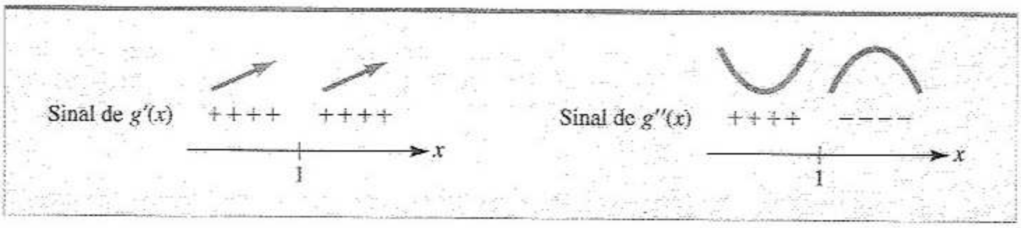


FIGURA 3.32 Gráfico com uma cúspide e outro com uma tangente vertical.

As derivadas de $g(x) = (x - 1)^{1/3}$ são

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} \qquad \text{e} \qquad g''(x) = \frac{-2}{9}(x-1)^{-5/3} \qquad x \neq 1$$

O único ponto crítico é (1, 0); os diagramas de setas e de concavidades são mostrados a seguir.



Assim, a curva de $g(x)$ é crescente para qualquer valor de $x \neq 0$ mas a concavidade é para cima para $x < 1$ e para baixo para $x > 1$. Isto significa que (1, 0) é um ponto de inflexão. Além disso, porém, observe que

$$\lim_{x \to 1^-} g'(x) = \lim_{x \to 1^+} g'(x) = +\infty$$

Geometricamente, isto significa que, quando x tende a 0 pela esquerda ou pela direita, a inclinação da reta tangente no ponto $(x, g(x))$ aumenta indefinidamente. Isto pode ser interpretado como uma indicação de que a curva de $g(x)$ possui uma reta tangente no ponto (1, 0) com inclinação "infinita", ou seja, uma **tangente vertical**. A curva de $g(x)$ aparece na Figura 3.32b.

Às vezes, a representação gráfica das observações de um fenômeno pode permitir uma compreensão melhor do que está acontecendo. Este fato é ilustrado no Exemplo 3.3.6.

EXEMPLO 3.3.6

A população de uma certa cidade é 230.000 habitantes em 1990 e aumenta a uma taxa crescente durante 5 anos, chegando a 300.000 habitantes em 1995. Continua a aumentar, mas a uma taxa decrescente, até passar por um máximo de 350.000 habitantes em 2002. Em seguida, a população diminui a uma taxa decrescente durante 3 anos até atingir o valor de 320.000 habitantes e depois a uma taxa crescente, tendendo a longo prazo para 280.000 habitantes. Represente estas informações em um gráfico.

Solução

Seja $P(t)$ a população da cidade t anos após o ano-base de 1990, onde P é medida em unidades de 10.000 habitantes. Como a população aumenta a uma taxa crescente durante 5 anos de 230.000 para 300.000 habitantes, a curva de $P(t)$ sobe de (0, 23) para (5, 30) com a concavidade para cima no intervalo $(0 < t < 5)$. A população continua a aumentar até 2002, mas a uma taxa decrescente, até atingir o valor máximo de 350.000 habitantes. Isto significa que neste intervalo a curva continua a subir, de (5, 30) para (12, 35), mas agora a concavidade é para baixo. Como a concavidade muda em $x = 5$ (de "para cima" para "para baixo"), a curva possui um ponto de inflexão em (5, 30).

Durante os 3 anos seguintes, a população diminui a uma taxa decrescente, o que significa que a curva de $P(t)$ é decrescente com a concavidade para baixo no intervalo $12 < t < 15$. Como a população continua a diminuir após 2005, mas a uma taxa crescente, a curva continua a descer para $t > 15$, mas com a concavidade para cima. Como a concavidade muda em $x = 15$ (de "para cima" para "para baixo"), a curva possui um segundo ponto de inflexão em (15, 32).

A afirmação de que "a população diminui a uma taxa crescente" para $t > 15$ significa que a população está variando a uma taxa negativa que está se tornando menos negativa com o passar do tempo. Em outras palavras, a queda da população se torna mais lenta após 2005. Este fato, combinado com a afirmação de que a população "tende a longo prazo para 280.000 habitantes", sugere que a curva da população $y = P(t)$ se "estabiliza" e tende assintoticamente para $y = 28$ quando $t \to +\infty$.

Estas observações estão resumidas na Tabela 3.2 e representadas graficamente na Figura 3.33.

TABELA 3.2 Comportamento de uma População $P(t)$

Período de tempo	O valor da função $P(t)$...	e a curva de $P(t)$ está...
$t = 0$	é $P(0) = 23$	no ponto (0, 23)
$0 < t < 5$	está aumentando a uma taxa crescente	aumentando com a concavidade para cima
$t = 5$	é $P(5) = 30$	no ponto de inflexão (5, 30)
$5 < t < 12$	está aumentando a uma taxa decrescente	aumentando com a concavidade para baixo
$t = 12$	é $P(12) = 35$	no ponto de máximo (12, 35)
$12 < t < 15$	está diminuindo a uma taxa decrescente	diminuindo com a concavidade para baixo
$t = 15$	é $P(15) = 32$	no ponto de inflexão (15, 32)
$t > 15$	está diminuindo a uma taxa crescente e tendendo para 28	diminuindo com a concavidade para baixo e tendendo assintoticamente para $y = 28$

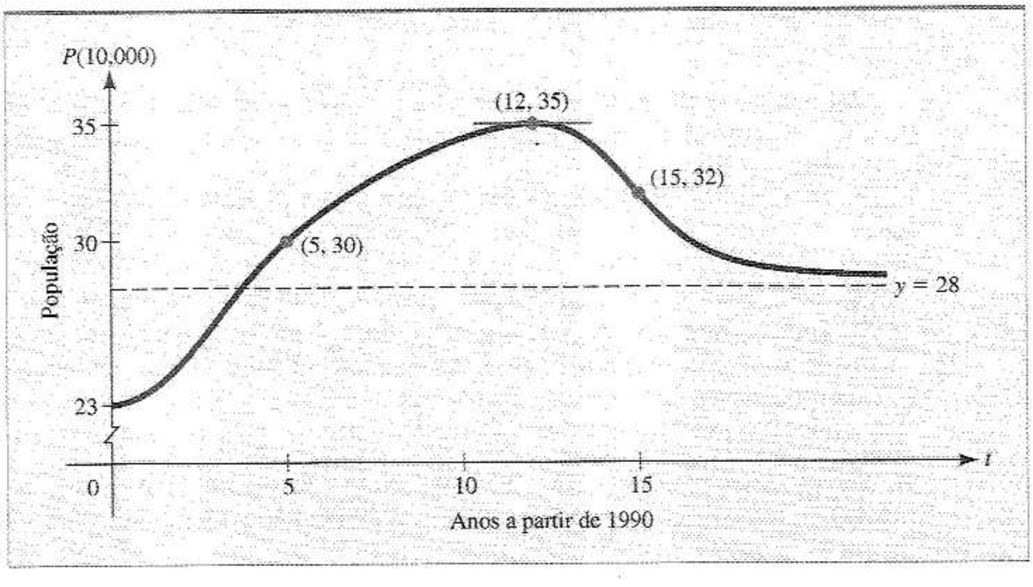
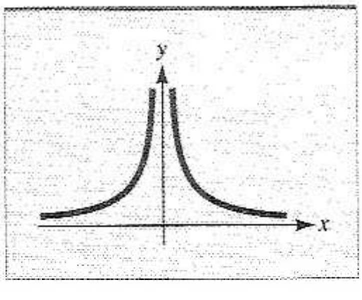


FIGURA 3.33 Gráfico de uma função de população.

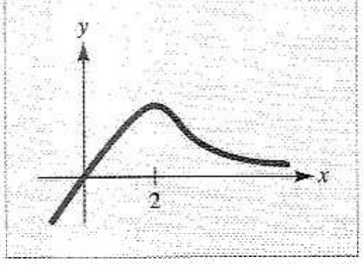
PROBLEMAS | 3.3

Nos Problemas 1 a 8, identifique as assíntotas verticais e horizontais de cada curva.

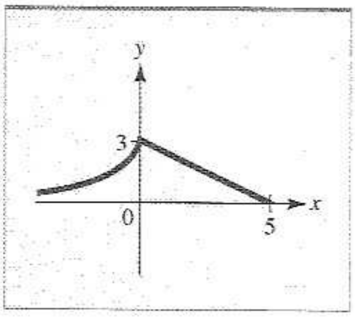
1.



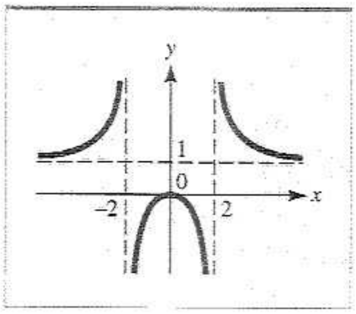
2.



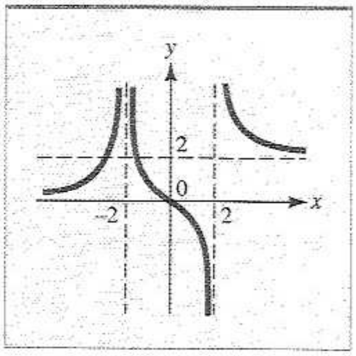
3.



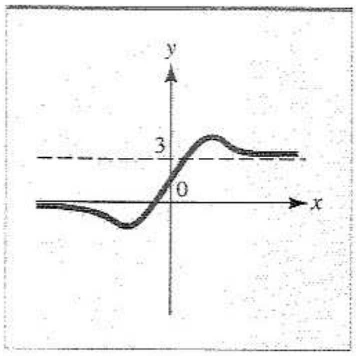
4.



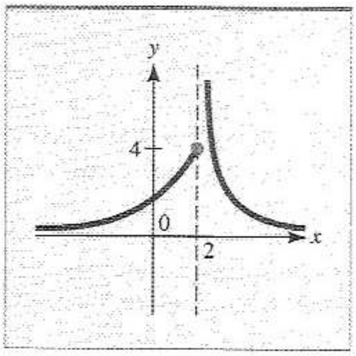
5.



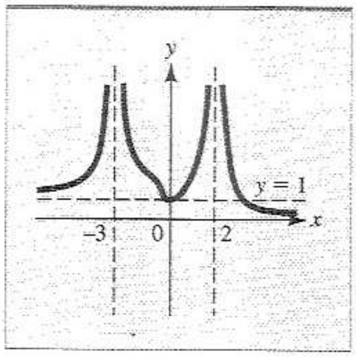
6.



7.



8.



Nos Problemas 9 a 16, identifique as assíntotas verticais e horizontais da curva de cada função.

9. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$

11. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

12. $f(t) = \dfrac{t + 2}{t^2}$

13. $f(t) = \dfrac{t^2 + 3t - 5}{t^2 - 5t + 6}$

14. $g(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 - 3x + 4}$

15. $h(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 1}$

16. $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}$

Nos Problemas 17 a 32, desenhe a curva da função dada.

17. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

18. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 93$

19. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$

20. $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3$

21. $f(x) = (2x - 1)^2(x^2 - 9)$

22. $f(x) = x^3 - 3x^4$

23. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$

24. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 5}$

25. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$

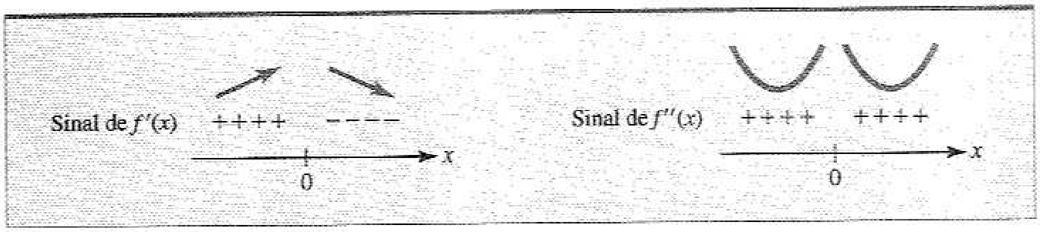
30. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

31. $f(x) = x^{3/2}$

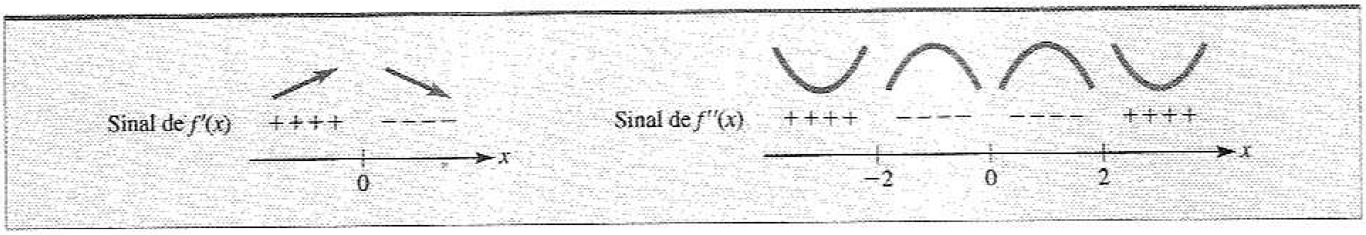
32. $f(x) = x^{4/3}$

Nos Problemas 33 a 38, desenhe a curva de uma função compatível com os diagramas de setas e de concavidades especificados.

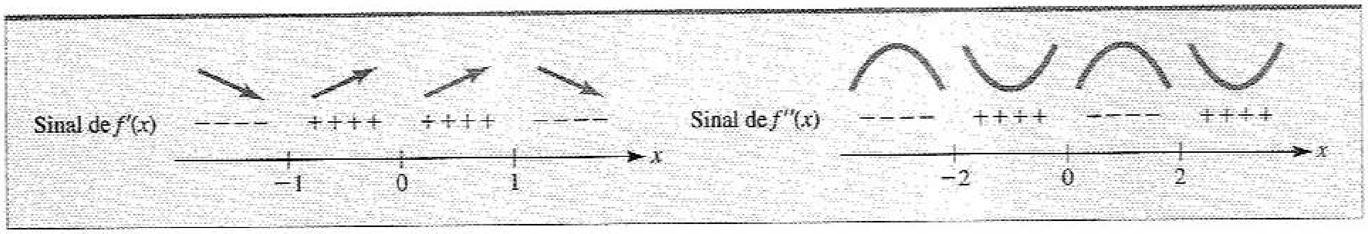
33.



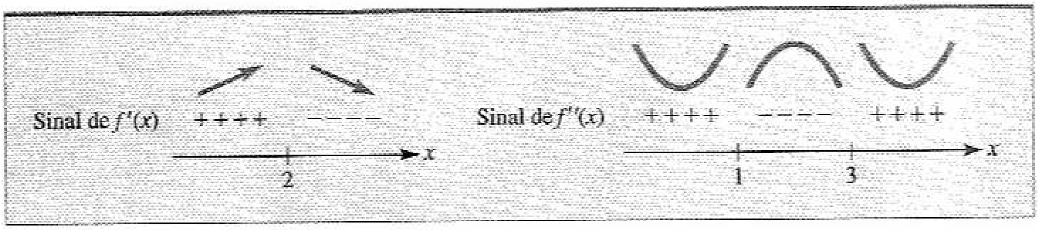
34.



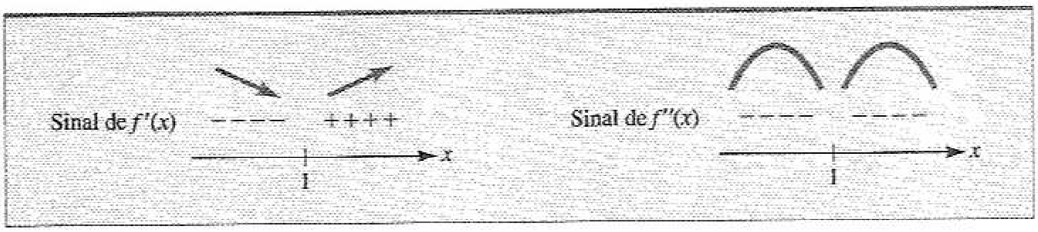
35.



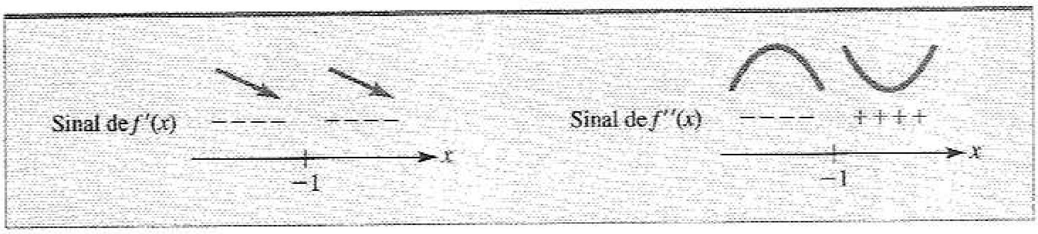
36.



37.



38.



Nos Problemas 39 a 42, a derivada $f'(x)$ de uma função derivável $f(x)$ é dada. Em cada caso,

(a) Determine os intervalos em que $f(x)$ é crescente e decrescente.
(b) Determine os valores de x para os quais existem máximos e mínimos relativos na curva de $f(x)$.
(c) Calcule $f''(x)$ e determine os intervalos em que a concavidade de $f(x)$ é para cima e para baixo.
(d) Determine os valores de x para os quais existem pontos de inflexão na curva de $f(x)$.

39. $f'(x) = x^3(x-2)^2$

40. $f'(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$

41. $f'(x) = \dfrac{x+3}{(x-2)^2}$

42. $f'(x) = x^2(x+1)^3$

43. Determine os valores das constantes A e B para que a curva da função

$$f(x) = \frac{Ax - 3}{5 + Bx}$$

possua uma assíntota vertical para $x = 2$ e uma assíntota vertical para $y = 4$. Plote $f(x)$ para estes valores de A e B.

44. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO Um paciente recebe uma injeção de um certo medicamento e amostras de sangue são colhidas a intervalos regulares para determinar a concentração do remédio no sangue do paciente. Observa-se que a concentração aumenta rapidamente na primeira hora e continua a aumentar durante as três horas seguintes, embora com menor rapidez. Em seguida, a concentração diminui com rapidez crescente durante uma hora e depois diminui gradualmente até zero. Faça um esboço da curva da concentração do remédio, $C(t)$, em função do tempo.

45. POPULAÇÃO DE UMA COLÔNIA DE BACTÉRIAS A população de uma colônia de bactérias aumenta com rapidez crescente durante uma hora; em seguida, continua a aumentar, mas com uma rapidez que diminui gradualmente até zero. Faça um esboço da curva do número de bactérias, $P(t)$, em função do tempo.

46. EPIDEMIOLOGIA Os epidemiologistas que estudam uma doença contagiosa observam que o número de novas pessoas infectadas aumenta a uma taxa crescente durante os primeiros 3 anos da epidemia. Neste momento, um novo medicamento começa a ser usado e o número de pessoas infectadas diminui a uma taxa decrescente. Dois anos após ser introduzido, o medicamento começa a perder eficácia. O número de novos casos continua a diminuir por mais 1 ano, mas a uma taxa crescente, até começar a aumentar de novo a uma taxa crescente. Desenhe uma possível curva do número de novos casos, $N(t)$, em função do tempo.

47. ELETRODOMÉSTICOS Desenhe uma possível curva da porcentagem de residências que dispõem de um novo tipo de eletrodoméstico se esta porcentagem aumenta a uma taxa constante durante os primeiros 2 anos e, em seguida, a taxa de aumento diminui, com a penetração no mercado do novo eletrodoméstico chegando a 90% a longo prazo.

48. PSICOLOGIA EXPERIMENTAL Para estudar a facilidade que os animais têm de aprender, um estudante de psicologia executou um experimento no qual um rato teve que encontrar várias vezes a saída de um labirinto. O tempo gasto pelo rato para atravessar o labirinto na enésima tentativa é dado por $f(n) = 3 + \frac{12}{n}$ minutos.

a. Plote a função $f(n)$.

b. Que valores de n são relevantes para a situação considerada?

c. O que acontece com a curva para valores arbitrariamente grandes de n? Interprete a resposta em termos práticos.

49. CUSTO MÉDIO O custo total em reais para fabricar x unidades de um certo produto é C mil reais, onde $C(x) = 3x^2 + x + 48$, e o custo médio é

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = 3x + 1 + \frac{48}{x}$$

a. Determine todas as assíntotas verticais e horizontais da curva de $A(x)$.

b. Observe que, quando x aumenta indefinidamente, o termo $48/x$ de $A(x)$ se torna cada vez menor. O que isto significa do ponto de vista da relação entre a curva de custo médio $y = A(x)$ e a reta $y = 3x + 1$?

c. Desenhe a curva de $A(x)$, levando em conta o resultado do item (b). [*Nota:* A reta $y = 3x + 1$ é chamada de *assíntota oblíqua* da curva.]

50. CUSTO DE ARMAZENAMENTO Um fabricante estima que, se cada remessa de matérias-primas contém x unidades, o custo total em reais para adquirir e armazenar um suprimento de matérias-primas para um ano é dado por

$$C(x) = 2x + \frac{80.000}{x}.$$

a. Determine todas as assíntotas verticais e horizontais da curva de $C(x)$.

b. Observe que, quando x aumenta seu limite, o termo $\frac{80.000}{x}$ de $C(x)$ se torna cada vez menor. O que isto significa em termos da relação entre a curva de $y = C(x)$ e a reta $y = 2x$?

c. Desenhe a curva de $C(x)$, levando em conta o resultado do item (b). [*Nota:* A reta $y = 2x$ é chamada de *assíntota oblíqua* da curva].

51. CUSTO DE DISTRIBUIÇÃO O número W de homens-horas necessários para distribuir novos catálogos telefônicos a x% das residências de uma certa cidade pode ser modelado pela função

$$W(x) = \frac{200x}{100 - x}$$

a. Desenhe a curva de $W(x)$.

b. Suponha que apenas 1.500 homens-horas estejam disponíveis para distribuir catálogos. Que percentagem dos domicílios não receberá os novos catálogos?

52. VACINAÇÃO Durante um programa nacional para vacinar a população contra uma nova gripe, as autoridades de saúde pública estimam que o custo para vacinar x% da população suscetível será aproximadamente

$$C(x) = \frac{1{,}7x}{100 - x}$$

milhões de reais.

a. Plote a função de custo $C(x)$.

b. Suponha que o governo disponha apenas de 40 milhões de reais para o programa. Que porcentagem da população suscetível será vacinada?

53. VENDAS Uma empresa estima que, se investir x milhares de reais na comercialização de um certo produto, $Q(x)$ milhares de unidades do produto serão vendidas, onde

$$Q(x) = \frac{7x}{27 + x^2}$$

a. Desenhe a curva da função de vendas $Q(x)$.

b. Para que investimento em comercialização x as vendas são maximizadas? Qual é o nível máximo de vendas?

c. Para que valor de x a taxa de variação das vendas é mínima?

54. **PRODUÇÃO** O gerente de uma empresa determina que t meses após o início da fabricação de um novo produto o número de unidades produzidas será P milhões por mês, onde

$$P(t) = \frac{t}{(t+1)^2}$$

a. Determine $P'(t)$ e $P''(t)$.
b. Plote $P(t)$.
c. O que acontece com a produção a longo prazo (quando $t \to \infty$)?

55. **PESQUISAS DE OPINIÃO** Uma pesquisa encomendada por um candidato a um cargo público revela que t dias após se declarar a favor de uma certa lei, a porcentagem de antigos eleitores que continuarão a apoiá-lo é dada por

$$S(t) = \frac{100(t^2 - 3t + 25)}{t^2 + 7t + 25}$$

A eleição será realizada 10 dias depois que o político anunciar sua posição.
a. Plote $S(t)$ para $0 \leq t \leq 10$.
b. Em que dia a porcentagem de eleitores que continuam a apoiar o candidato é máxima? Em que dia é mínima?
c. A derivada $S'(t)$ pode ser considerada uma taxa de aprovação. A taxa de aprovação é positiva ou negativa no dia da eleição? A taxa de aprovação está aumentando ou diminuindo nessa ocasião? Interprete estes resultados.

56. **PUBLICIDADE** Um fabricante de motocicletas estima que se investir x milhares de reais em publicidade, o número de motocicletas vendidas (para $x > 1$) será dado por

$$M(x) = 2.300 + \frac{125}{x} - \frac{500}{x^2}$$

a. Plote a função de vendas $M(x)$.
b. Qual é o valor do investimento para o qual o número de motocicletas vendidas é máximo?

57. **GERENCIAMENTO DE CUSTOS** Uma empresa usa um caminhão para entregar seus produtos. Para estimar o custo, o gerente modela o consumo de combustível pela função

$$G(x) = \frac{1}{2.000}\left(\frac{800}{x} + 5x\right)$$

litros/quilômetro, supondo que o caminhão mantenha uma velocidade constante de x quilômetros por hora para $x \geq 5$. O motorista recebe R\$ 18,00 por hora para realizar uma viagem de 400 quilômetros e o litro de óleo diesel custa R\$ 2,95. A velocidade do caminhão na estrada deve ser mantida no intervalo $30 \leq x \leq 65$.
a. Escreva uma expressão para o custo $C(x)$ de uma viagem. Plote a curva de $C(x)$ para o intervalo $30 \leq x \leq 65$.
b. Qual é a velocidade para a qual o custo da viagem é mínimo? Qual é este custo mínimo?

58. Seja $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$.
a. Calcule $f'(x)$ e determine os intervalos nos quais $f(x)$ é crescente e decrescente. Determine todos os extremos relativos da curva de $f(x)$.
b. Calcule $f''(x)$ e determine os intervalos nos quais a concavidade de $f(x)$ é para cima e para baixo. Determine todos os pontos de inflexão da curva de $f(x)$.
c. Determine todos os pontos em que a curva de $f(x)$ intercepta os eixos x e y. A curva possui alguma assíntota?
d. Plote $f(x)$.

59. Repita o Problema 58 para a função

$$f(x) = x^{2/3}(2x - 5)$$

60. Repita o Problema 58 para a função

$$f(x) = \frac{x + 9,4}{25 - 1,1x - x^2}$$

61. Sejam $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ e $g(x) = \dfrac{x-1,01}{x^2-1}$.
a. Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x)$. O que acontece no ponto $x = 1$?
b. Plote $g(x)$. O que acontece neste caso no ponto $x = 1$?

SEÇÃO 3.4 Otimização

Em muitos problemas discutidos nas seções e capítulos anteriores, os métodos do cálculo foram usados para determinar o menor ou o maior valor uma função de interesse, como, por exemplo, o menor custo e o maior lucro. Na maioria destes problemas de otimização, o objetivo é encontrar o mínimo absoluto ou o máximo absoluto de uma função dentro de um certo intervalo de interesse. O máximo absoluto de uma função dentro de um intervalo é o maior valor da função neste intervalo e o mínimo absoluto é o menor valor da função neste intervalo. Apresentamos a seguir uma definição dos extremos absolutos.

Máximos e Mínimos Absolutos de uma Função ■ Seja f uma função definida em um intervalo I que contém o número c. Nesse caso,

$f(c)$ é o *máximo absoluto* de f em I se $f(c) \geq f(x)$ para todo x pertencente a I

$f(c)$ é o *mínimo absoluto* de f em I se $f(c) \leq f(x)$ para todo x pertencente a I

Os máximos e mínimos absolutos são conhecidos pelo nome global de *extremos absolutos*.

Os extremos absolutos nem sempre coincidem com os extremos relativos. Na Figura 3.34, por exemplo, o máximo absoluto e o máximo relativo no intervalo $a \leq x \leq b$ ocorrem no mesmo ponto, mas, ao contrário do mínimo relativo, o mínimo absoluto ocorre no limite esquerdo do intervalo, ou seja, no ponto $x = a$.

9 EXPLORE!

Use uma calculadora gráfica para plotar $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x+2}}$ usando uma janela decimal modificada [0; 4,7]1 por [0, 60]5. Use **TRACE** e **ZOOM** para determinar o máximo absoluto e o mínimo absoluto de $f(x)$ no intervalo [1, 3].

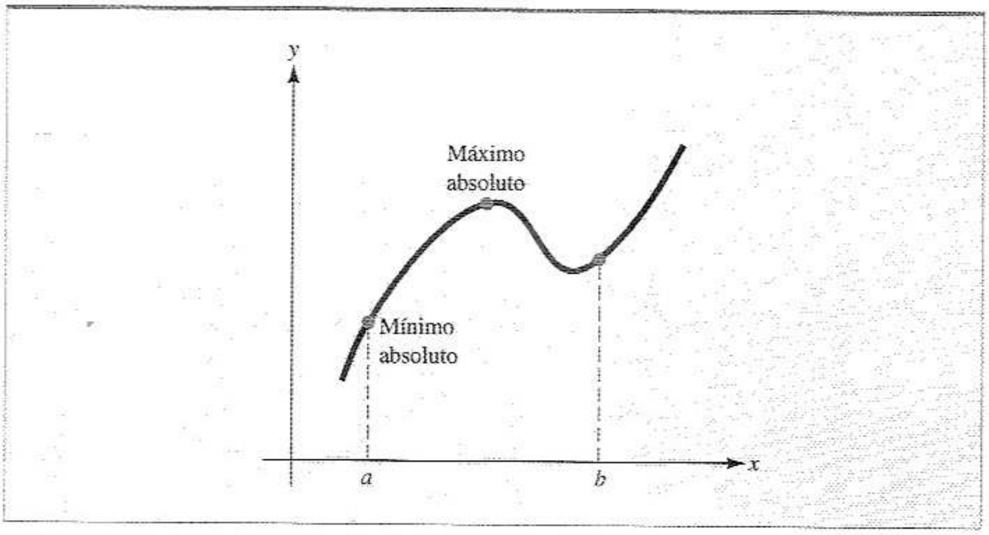
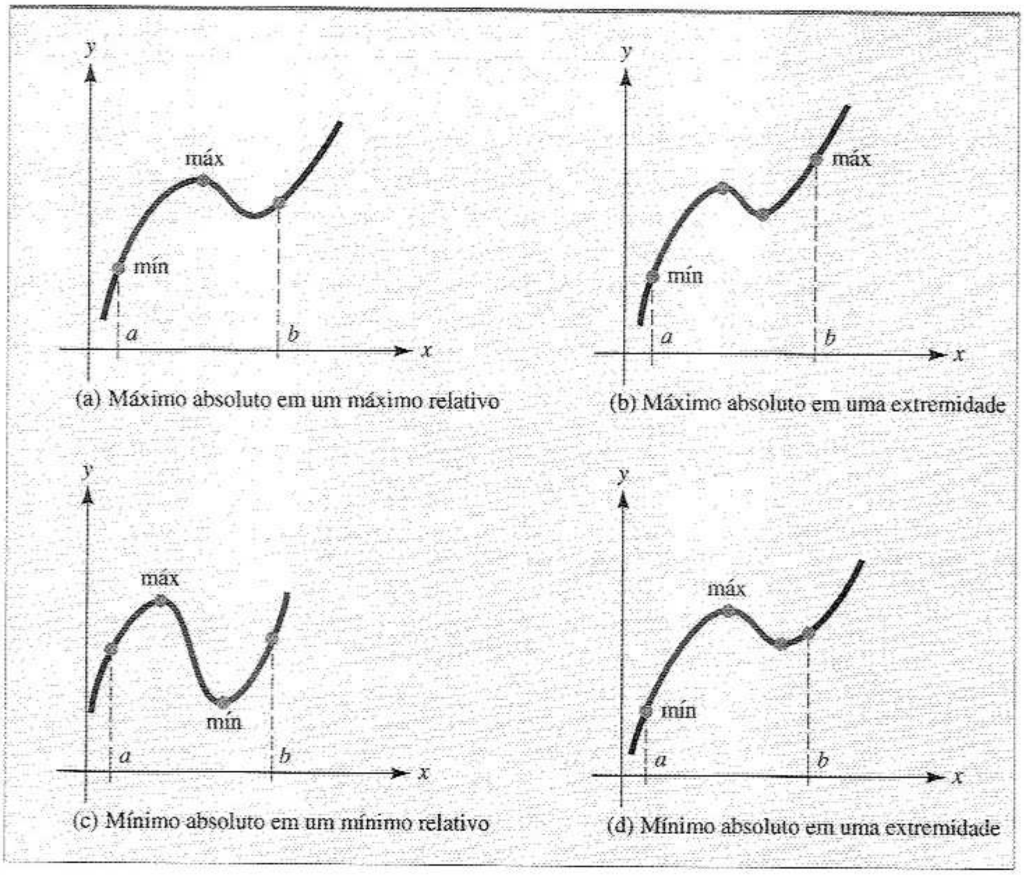


FIGURA 3.34 Extremos absolutos.

Nesta seção, vamos aprender a localizar os extremos absolutos das funções. Começamos por considerar intervalos "fechados", isto é, do tipo $a \leq x \leq b$, que incluem os pontos extremos a e b. É possível demonstrar que uma função que seja contínua em um intervalo fechado contém necessariamente um máximo absoluto e um mínimo absoluto neste intervalo. Cada um destes extremos absolutos pode ocorrer em um dos pontos extremos do intervalo (a ou b) ou em um ponto c situado no interior do intervalo, ou seja, tal que $a < c < b$ (Figura 3.35).

Propriedade dos Valores Extremos ■ Cada um dos extremos absolutos de uma função $f(x)$ que seja contínua no intervalo fechado $a \leq x \leq b$ pode ocorrer em um dos pontos extremos do intervalo (a ou b) ou em um ponto crítico c tal que $a < c < b$.

FIGURA 3.35 Extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo $a \leq x \leq b$.



Graças à propriedade dos valores extremos, podemos localizar os extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo fechado $a \leq x \leq b$ usando o método descrito a seguir.

Como Localizar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua *f* em um Intervalo Fechado $a \leq x \leq b$

1º passo: Encontre todos os números críticos de f no intervalo aberto $a < x < b$.

2º passo: Calcule $f(x)$ nos números críticos encontrados no 1º passo e nos pontos extremos do intervalo, $x = a$ e $x = b$.

3º passo (interpretação): O maior e o menor dos valores encontrados no 2º passo são, respectivamente, o máximo e o mínimo absoluto de $f(x)$ no intervalo fechado $a \leq x \leq b$.

O método é ilustrado nos Exemplos 3.4.1 a 3.4.3.

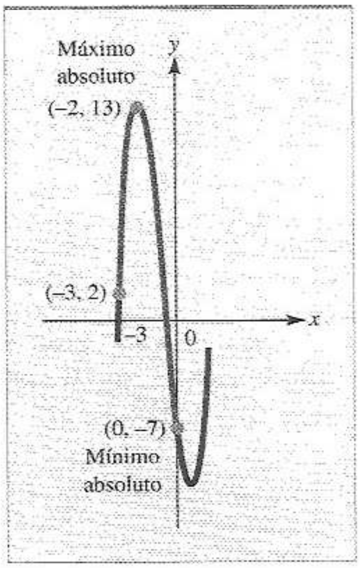


FIGURA 3.36 Extremos absolutos da função $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ no intervalo $-3 \leq x \leq 0$.

EXEMPLO 3.4.1

Determine o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$$

no intervalo $-3 \leq x \leq 0$.

Solução

Calculando a derivada

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

vemos que os números críticos são $x = -2$ e $x = 1$. Destes números, apenas $x = -2$ está no intervalo $-3 \leq x \leq 0$. O passo seguinte consiste em calcular $f(x)$ no ponto $x = -2$ e nos pontos extremos do intervalo, $x = -3$ e $x = 0$.

$$f(-2) = 13 \qquad f(-3) = 2 \qquad f(0) = -7$$

Comparando estes valores, constatamos que o máximo absoluto de f no intervalo $-3 \leq x \leq 0$ é $f(-2) = 13$ e o mínimo absoluto é $f(0) = -7$.

Observe que não é necessário classificar os pontos críticos ou plotar a curva para identificar os extremos absolutos. A curva da Figura 3.36 é mostrada apenas para fins ilustrativos.

EXEMPLO 3.4.2

Durante várias semanas, o departamento de trânsito vem registrando a velocidade dos veículos que passam em um certo quarteirão. Os resultados mostram que entre as 13 e as 18 h de um dia de semana a velocidade neste quarteirão é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20$ quilômetros por hora, onde t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante entre as 13 e as 18 h em que o trânsito é mais rápido? Qual o instante em que o trânsito é mais lento?

10 EXPLORE!

Na situação descrita no Exemplo 3.4.2, devido a um aumento do limite de velocidade, a velocidade média dos veículos que passam no quarteirão passou a ser $v_1(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 25$. Plote $v_1(t)$ e $v(t)$ no mesmo gráfico usando uma janela [0, 6]1 por [20, 60]5. Em que instante entre 13 h e 18 h o tráfego é mais rápido, de acordo com a nova função $v_1(t)$? Em que instante é mais lento?

Solução

O objetivo é determinar o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função $v(t)$ no intervalo $1 \leq t \leq 6$. Calculando a derivada

$$v'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 3(t^2 - 7t + 10) = 3(t - 2)(t - 5)$$

verificamos que os números críticos são $t = 2$ e $t = 5$, ambos pertencentes ao intervalo $1 \leq t \leq 6$.

Calculando $v(t)$ para estes valores de t e para os valores correspondentes aos extremos do intervalo, $t = 1$ e $t = 6$, obtemos:

$$v(1) = 40{,}5 \qquad v(2) = 46 \qquad v(5) = 32{,}5 \qquad v(6) = 38$$

Como o maior destes valores é $v(2) = 46$ e o menor é $v(5) = 32{,}5$, concluímos que o trânsito é mais rápido às 14 h, quando os carros passam no quarteirão com uma velocidade média de 46 km/h, e mais lento às 17 h, quando a velocidade média é 32,5 km/h. A Figura 3.37 (incluída aqui apenas para fins ilustrativos) mostra o gráfico de $v(t)$.

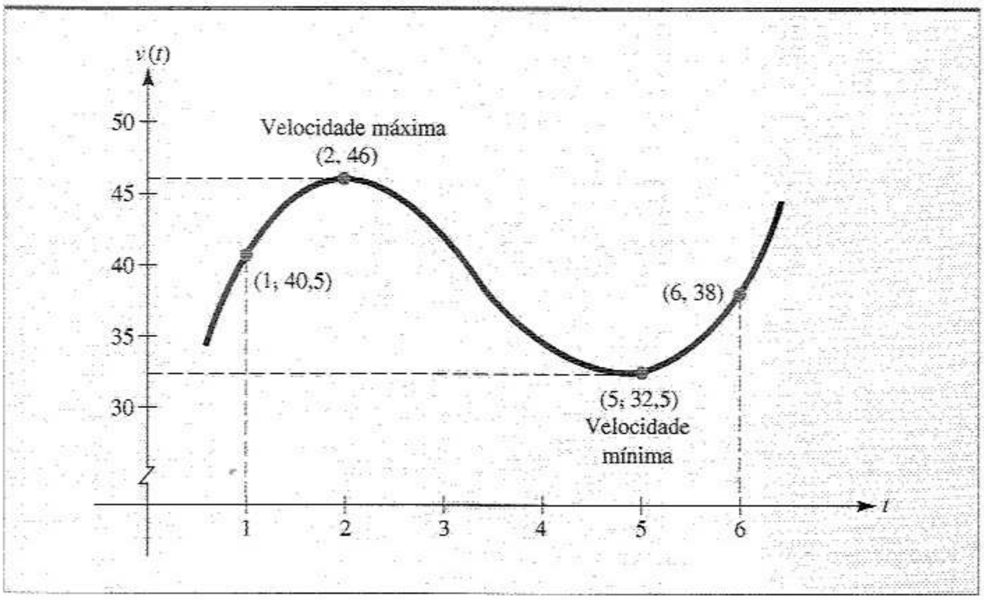


FIGURA 3.37 Gráfico da função $v(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20$.

EXEMPLO 3.4.3

Quando uma pessoa tosse, o raio da traquéia diminui, afetando a velocidade do ar na traquéia. Se r_0 é o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade v do ar e o raio r da traquéia é dado por uma função da forma $v(r) = ar^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva.* Determine o raio r para o qual a velocidade do ar é máxima.

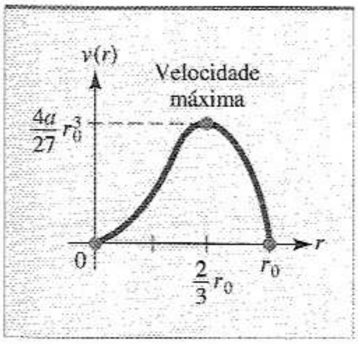


FIGURA 3.38 Gráfico da função $v(r) = ar^2(r_0 - r)$.

Solução

O raio r da traquéia contraída não pode ser maior que o raio normal r_0 ou menor que zero; assim, o objetivo é encontrar o máximo absoluto de $v(r)$ no intervalo $0 \leq r \leq r_0$.

Em primeiro lugar, derivamos $v(r)$ em relação a r usando a regra do produto e fatoramos o resultado (observe que a e r_0 são constantes):

$$v'(r) = -ar^2 + (r_0 - r)(2ar) = ar[-r + 2(r_0 - r)] = ar(2r_0 - 3r)$$

Em seguida, igualamos a derivada a zero para obter os números críticos:

$$ar(2r_0 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{ou} \quad r = \frac{2}{3}r_0$$

Estes dois valores de r pertencem ao intervalo $0 \leq r \leq r_0$; um deles está em um dos extremos do intervalo. Calculando $v(r)$ para estes dois valores de r e para o valor correspondente ao outro extremo no intervalo, temos:

$$v(0) = 0 \qquad v\left(\frac{2}{3}r_0\right) = \frac{4a}{27}r_0^3 \qquad v(r_0) = 0$$

Comparando estes valores, chegamos à conclusão de que a velocidade do ar é máxima quando o raio da traquéia contraída é $\frac{2}{3}r_0$, isto é, quando é igual a dois terços do raio normal da traquéia.

A Figura 3.38 mostra o gráfico da função $v(r)$. Observe que as interseções com o eixo x se tornam óbvias quando a função é escrita na forma fatorada, $v(r) = ar^2(r_0 - r)$. Observe também que a curva da função possui tangentes horizontais em $r = 0$ e $r = \frac{2}{3}r_0$, os pontos em que $v'(0) = 0$.

Casos Mais Gerais de Otimização

Quando o intervalo no qual desejamos maximizar ou minimizar uma função contínua não é da forma $a \leq x \leq b$, o método ilustrado nos Exemplos 3.4.1 a 3.4.3 não pode ser usado, já que não há nenhuma

*Philip M. Tuchinsky, "The Human Cough", *UMAP Modules 1976: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Application, Inc., Lexington, MA, 1977.

garantia de que a função possua um máximo ou mínimo absoluto no intervalo em questão. Entretanto, se um extremo absoluto existe e a função é contínua no intervalo, o extremo absoluto deve ocorrer em um extremo relativo ou em um dos pontos extremos do intervalo. Várias possibilidades para funções em intervalos unilaterais estão ilustradas na Figura 3.39.

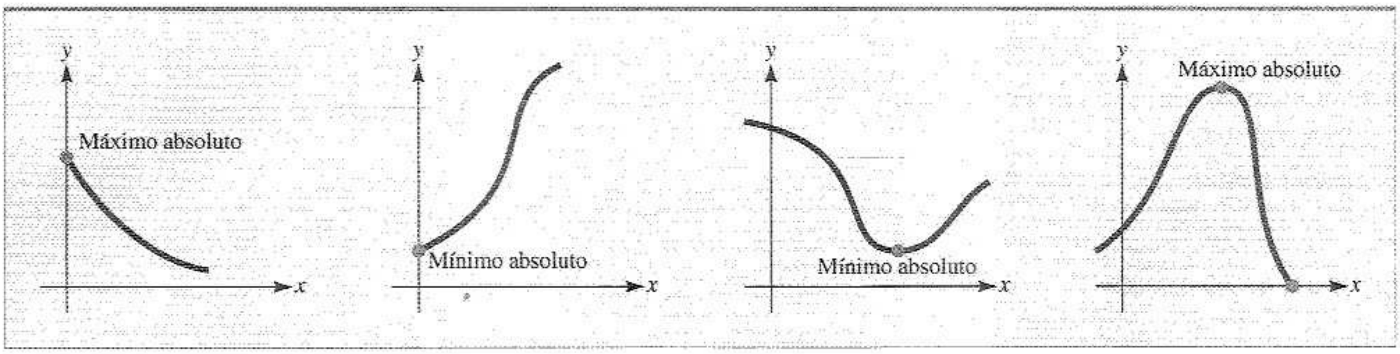


FIGURA 3.39 Extremos de funções definidas em intervalos unilaterais.

Para determinar os extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo que não é da forma $a \leq x \leq b$, também calculamos o valor da função para os números críticos e para os extremos do intervalo. Antes de tirar qualquer conclusão, porém, devemos verificar se a função realmente possui extremos absolutos no intervalo. Uma forma de fazer isto é usar a derivada primeira para determinar em que intervalos a função é crescente e em que intervalos é decrescente e plotar a função. A técnica é ilustrada no Exemplo 3.4.4.

EXEMPLO 3.4.4

Determine o máximo absoluto e o mínimo absoluto (se existirem) da função $f(x) = x^2 + 16/x$ no intervalo $x > 0$.

Solução

A função é contínua no intervalo $x > 0$, já que é descontínua apenas no ponto $x = 0$. A derivada é

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$$

que é nula para

$$x^3 - 8 = 0 \qquad x^3 = 8 \qquad \text{ou} \qquad x = 2$$

Como $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$, a função $f(x)$ é decrescente para $0 < x < 2$ e crescente para $x > 2$, como mostra a Figura 3.40. Assim,

$$f(2) = 2^2 + \frac{16}{2} = 12$$

é o mínimo absoluto de f no intervalo $x > 0$ e não existe um máximo absoluto.

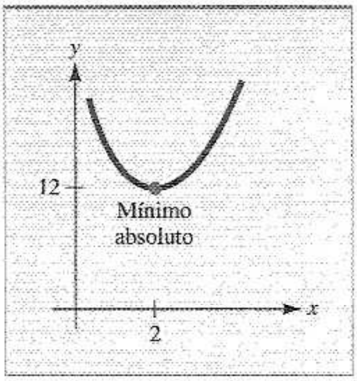


FIGURA 3.40 Gráfico da função $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ no intervalo $x > 0$.

FIGURA 3.41 O mínimo relativo não é o mínimo absoluto por causa da existência de um segundo ponto crítico.

O método ilustrado no Exemplo 3.4.4 pode ser usado sempre que estamos interessados em encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função f que é contínua em um intervalo I e possui *um e apenas um* número crítico c neste intervalo. Em particular, se $f(x)$ possui apenas um máximo (mínimo) *relativo* no ponto $x = c$, isto significa que a função possua um máximo (mínimo) *absoluto* no mesmo ponto. Para compreender por quê, suponha que a função possui um máximo relativo no ponto $x = c$. Nesse caso, a função é crescente para qualquer valor de x menor que c e decrescente para qualquer valor de x maior que c, já que qualquer mudança adicional de inclinação estaria necessariamente associada à existência de um segundo ponto crítico (veja Figura 3.41). Assim, o máximo relativo também é um máximo absoluto. Esta observação mostra que, neste caso especial, qualquer teste para extremos relativos é também um teste para extremos absolutos. Apresentamos a seguir uma definição do teste da derivada segunda para extremos absolutos.

> **Teste da Derivada Segunda para Extremos Absolutos** ■ Se uma função $f(x)$ é contínua no intervalo I e $x = c$ é o único número crítico neste intervalo,
>
> se $f''(c) > 0$, $f(c)$ é o mínimo absoluto de $f(x)$ no intervalo I.
>
> se $f''(c) < 0$, $f(c)$ é o máximo absoluto de $f(x)$ no intervalo I.

O Exemplo 3.4.5 a seguir ilustra o uso do teste da derivada segunda para determinar extremos absolutos.

EXEMPLO 3.4.5

Um fabricante estima que, quando q milhares de unidades de uma certa mercadoria são produzidas por mês, o custo total é $C(q) = 0{,}4q^2 + 3q + 40$ mil reais e que as q unidades podem ser vendidas por um preço $p(q) = 22{,}2 - 1{,}2q$ reais a unidade.

a. Determine o nível de produção para o qual o lucro é máximo. Qual é o lucro máximo?

b. Para que nível de produção o custo médio unitário $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ é mínimo? Qual é este custo?

c. Para que nível de produção o custo médio é igual ao custo marginal $C'(q)$?

Solução

a. A receita é

$$R(q) = qp(q) = q(22{,}2 - 1{,}2q) = -1{,}2q^2 + 22{,}2q$$

mil reais e, portanto, o lucro é

$$\begin{aligned} P(q) = R(q) - C(q) &= -1{,}2q^2 + 22{,}2q - (0{,}4q^2 + 3q + 40) \\ &= -1{,}6q^2 + 19{,}2q - 40 \end{aligned}$$

mil reais. Temos

$$\begin{aligned} P'(q) &= -1{,}6(2q) + 19{,}2 = -3{,}2q + 19{,}2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

para

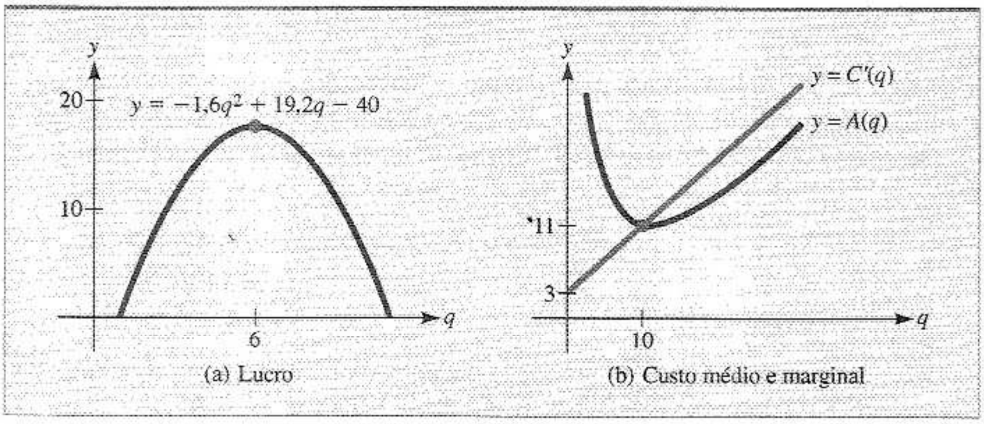
$$\begin{aligned} -3{,}2q + 19{,}2 &= 0 \\ q &= \frac{19{,}2}{3{,}2} = 6 \end{aligned}$$

Como $P''(q) = -3{,}2 < 0$, o teste da derivada segunda para extremos absolutos mostra que o lucro é máximo quando 6 (mil) unidades são produzidas. O lucro máximo é

$$\begin{aligned} P(6) &= -1{,}6(6)^2 + 19{,}2(6) - 40 \\ &= 17{,}6 \end{aligned}$$

mil reais (R$ 17.600,00). O gráfico da função de lucro aparece na Figura 3.42a.

FIGURA 3.42 Gráficos de lucro, custo e custo marginal do Exemplo 3.4.5.



b. O custo médio é

$$A(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{0{,}4q^2 + 3q + 40}{q} \qquad \frac{\textit{milhares de reais}}{\textit{milhares de unidades}}$$

$$= 0{,}4q + 3 + \frac{40}{q} \qquad \frac{\textit{reais}}{\textit{unidades}}$$

para $q > 0$ (o nível de produção não pode ser nulo ou negativo). A derivada desta função é

$$A'(q) = 0{,}4 - \frac{40}{q^2} = \frac{0{,}4q^2 - 40}{q^2}$$

que se anula para $q > 0$ apenas no ponto $q = 10$. Como

$$A''(q) = \frac{80}{q^3} > 0 \quad \text{para} \quad q > 0$$

a função de custo médio $A(q)$, de acordo com o teste da derivada segunda para extremos absolutos, é mínima para $q = 10$ (mil) unidades. O custo médio mínimo é

$$A(10) = 0{,}4(10) + 3 + \frac{40}{10} = 11 \qquad \textit{reais/unidades}$$

c. O custo marginal é $C'(q) = 0{,}8q + 3$, que é igual ao custo médio para

$$0{,}8q + 3 = 0{,}4q + 3 + \frac{40}{q}$$

$$0{,}4q = \frac{40}{q}$$

$$0{,}4q^2 = 40$$

$$q = 10 \text{ (mil) unidades}$$

que corresponde ao nível ótimo de produção calculado no item (b). Os gráficos do custo marginal $C'(q)$ e do custo médio $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ aparecem na Figura 3.42b.

Dois Princípios Gerais de Análise Marginal

Se a receita proveniente da venda de q unidades é $R(q)$ e o custo para produzir estas unidades é $C(q)$, o lucro é $P(q) = R(q) - C(q)$. Como

$$P'(q) = [R(q) - C(q)]' = R'(q) - C'(q)$$

sabemos que $P'(q) = 0$ para um valor de q, q_c, tal que $R'(q_c) = C'(q_c)$. Se além disso $P''(q_c) < 0$, ou seja, $R''(q_c) < C''(q_c)$, o lucro é máximo para $q = q_c$.

> **Critério de Análise Marginal para o Lucro Máximo** ■ O lucro $P(q) = R(q) - C(q)$ é máximo para um nível de produção q_c no qual a receita marginal é igual ao custo marginal e a taxa de variação do custo marginal é maior que a taxa de variação da receita marginal, ou seja,
>
> $$R'(q_c) = C'(q_c) \quad \text{e} \quad R''(q_c) < C''(q_c)$$

No Exemplo 3.4.5, por exemplo, a função de receita é $R(q) = -1{,}2q^2 + 22{,}2q$ e a função de custo é $C(q) = 0{,}4q^2 + 3q + 40$. Assim, a receita marginal é $R'(q) = -2{,}4q + 22{,}2$ e o custo marginal é $C'(q) = 0{,}8q + 3$. A receita marginal é igual ao custo marginal para

$$R'(q) = C'(q)$$

$$-2{,}4q + 22{,}2 = 0{,}8q + 3$$

$$3{,}2q = 19{,}2$$

$$q = 6$$

que é o nível ótimo de produção encontrado no item (a) do Exemplo 3.4.5. Observe que a condição $R'' < C''$ também é satisfeita, já que $R'' = -2{,}4$ e $C'' = 0{,}8$.

No item (c) do Exemplo 3.4.5, vimos que o custo marginal é igual ao custo médio em um nível de produção para o qual o custo médio é mínimo. Isto também não é uma coincidência. Para entender por quê, suponha que $C(q)$ seja o custo para produzir q unidades de uma mercadoria. Nesse caso, o custo médio unitário é $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$; usando a regra do quociente, temos:

$$A'(q) = \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2}$$

Assim, $A'(q) = 0$ quando o numerador do lado direito é zero, ou seja, para

$$qC'(q) = C(q)$$

uma igualdade que pode ser escrita na forma

$$\underbrace{C'(q)}_{\substack{custo\\ marginal}} = \underbrace{\frac{C(q)}{q}}_{\substack{custo\\ médio}} = A(q)$$

Para demonstrar que o custo médio é mínimo (e não máximo) quando o custo médio é igual ao custo marginal, é necessário fazer algumas suposições a respeito do custo total (veja Problema 52).

Critério da Análise Marginal para o Custo Médio Mínimo ■ O custo médio é mínimo para o nível de produção no qual o custo médio é igual ao custo marginal, ou seja, para um nível de produção q_c tal que $A(q_c) = C'(q_c)$.

Vamos apresentar agora uma explicação informal da relação entre o custo médio e o custo marginal que aparece freqüentemente nos livros de economia. O custo marginal (CM) é aproximadamente igual ao custo necessário para produzir uma unidade a mais. Se esta unidade a mais custar menos para produzir que o custo médio (A) das unidades já produzidas (ou seja, se CM < A), a unidade a mais fará diminuir o custo médio por unidade. Por outro lado, se a unidade a mais custar mais para produzir que o custo médio das unidades já produzidas (ou seja, se CM > A), a unidade a mais fará aumentar o custo médio por unidade. Se o custo da unidade a mais for igual ao custo médio das unidades já produzidas (ou seja, se CM = A), a unidade produzida a mais não terá nenhum efeito sobre o custo médio por unidade, ou seja, o custo médio marginal AM será nulo.

A relação entre o custo médio e o custo marginal pode ser generalizada para qualquer par de grandezas; a única modificação que talvez seja necessária diz respeito à natureza do ponto crítico que ocorre quando a grandeza média é igual à grandeza marginal. Assim, por exemplo, a receita média geralmente apresenta um *máximo* relativo (em vez de um mínimo relativo) quando a receita média é igual à receita marginal.

Elasticidade-Preço da Demanda

Na Seção 1.1, definimos o conceito econômico de demanda como um meio de expressar a relação entre o preço unitário p de uma mercadoria e o número de unidades q que são demandadas (isto é, fabricadas e compradas) por consumidores. Anteriormente, expressamos o preço unitário p em função do nível de produção q, mas para a presente discussão é mais conveniente expressar esta relação no sentido inverso e escrever a relação entre oferta e demanda na forma $q = D(p)$.

Em geral, um aumento no preço unitário de uma mercadoria produz uma redução da demanda, mas a sensibilidade ou resposta da demanda a uma variação do preço pode variar de acordo com o produto. Assim, por exemplo, a demanda de produtos como sabonete, pilha de lanterna e sal não é muito afetada por uma pequena variação percentual do preço, enquanto uma variação percentual da mesma ordem no preço das passagens aéreas ou dos aluguéis residenciais pode afetar drasticamente a demanda.

A sensibilidade da demanda é normalmente medida pela razão entre a taxa de variação percentual da demanda e a taxa de variação percentual do preço. Este número é aproximadamente igual à variação de demanda produzida por uma variação de 1% no preço unitário. Como vimos na Seção 2.2, a taxa de variação percentual de uma grandeza $Q(x)$ é dada por $\dfrac{100Q'(x)}{Q(x)}$. Em particular, se a função de demanda $q = D(p)$ é derivável, temos:

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{Taxa de variação}\\ \textbf{percentual da demanda } q\end{array}\right] = \frac{100\dfrac{dq}{dp}}{q}$$

e

$$\begin{bmatrix}\textbf{Taxa de variação}\\ \textbf{percentual do preço } p\end{bmatrix} = \frac{100\dfrac{dp}{dp}}{p} = \frac{100}{p}$$

Assim, a sensibilidade a uma variação no preço é dada pela razão

$$\frac{\textbf{Taxa de variação percentual de } q}{\textbf{Taxa de variação percentual de } p} = \frac{\dfrac{100\dfrac{dq}{dp}}{q}}{\dfrac{100}{p}} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

que, em economia, é chamada de *elasticidade-preço da demanda*. Resumindo:

Elasticidade-Preço da Demanda ■ Se $q = D(p)$ unidades de uma mercadoria são demandadas pelo mercado quando o preço unitário é p, onde D é uma função derivável, a elasticidade-preço da demanda da mercadoria é dada por

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

e interpretada da seguinte forma:

$$E(p) \approx \begin{bmatrix}\text{Taxa de variação percentual da demanda } q\\ \text{produzida por uma taxa de variação de } 1\% \text{ no preço } p\end{bmatrix}$$

NOTA Como a demanda q diminui quando o preço p aumenta, temos $dq/dp < 0$. Como $q > 0$ e $p > 0$, a elasticidade-preço da demanda é sempre negativa:

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} < 0$$

Assim, por exemplo, quando dizemos que uma certa mercadoria tem uma elasticidade-preço da demanda de $-0{,}5$ para um certo preço p, isto significa que um aumento de 10% no preço da mercadoria resulta em uma redução de aproximadamente 5% no número de unidades demandadas (vendidas). Estas idéias estão ilustradas no Exemplo 3.4.6. ■

EXEMPLO 3.4.6

Suponha que a demanda q e o preço p de um certo produto estejam relacionados pela equação linear $q = 240 - 2p$ (para $0 \leq p \leq 120$).

a. Expresse a elasticidade da demanda em função de p.
b. Calcule a elasticidade da demanda quando o preço é $p = 100$. Interprete a resposta.
c. Calcule a elasticidade da demanda quando o preço é $p = 50$. Interprete a resposta.
d. Para que preço a elasticidade da demanda é -1? Qual é o significado econômico deste preço?

Solução

a. A elasticidade da demanda é

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{q}(-2) = \frac{-2p}{240 - 2p} = \frac{-p}{120 - p}$$

b. Para $p = 100$, a elasticidade da demanda é

$$E(100) = \frac{-100}{120 - 100} = -5$$

Isto significa que para um preço $p = 100$ um aumento de 1% no preço produz uma redução de aproximadamente 5% na demanda.

c. Para $p = 50$, a elasticidade da demanda é

$$E(50) = \frac{-50}{120 - 50} \approx -0{,}71$$

Isto significa que para um preço $p = 50$ um aumento de 1% no preço produz uma redução da demanda de aproximadamente 0,71%.

d. A elasticidade da demanda é igual a -1 quando

$$-1 = \frac{-p}{120 - p} \qquad 120 - p = p \qquad 2p = 120 \qquad \text{ou} \qquad p = 60$$

Para este preço, um aumento de 1% no preço produz uma redução de aproximadamente a mesma porcentagem na demanda.

Existem três níveis de elasticidade, dependendo do fato de $|E(p)|$ ser maior, menor ou igual a 1. Segue uma descrição e interpretação econômica de cada nível.

Níveis de Elasticidade

$\lvert E(p)\rvert > 1$	**Demanda elástica.** A redução percentual da demanda é maior que o aumento percentual do preço. Isto significa que a demanda é muito sensível a variações do preço.
$\lvert E(p)\rvert < 1$	**Demanda inelástica.** A redução percentual da demanda é menor que o aumento percentual do preço. Isto significa que a demanda é pouco sensível a variações do preço.
$\lvert E(p)\rvert = 1$	**Demanda de elasticidade unitária.** As variações percentuais do preço e da demanda são aproximadamente iguais.

De acordo com o item (b) do Exemplo 3.4.6, $E(100) = -5$. Assim, a demanda neste caso é elástica em relação ao preço para $p = 100$, já que $|E(100)| = 5 > 1$. De acordo com o item (c) do mesmo exemplo, $E(50) = -0{,}71$ e, portanto, a demanda é inelástica para $p = 50$, já que $|E(50)| = 0{,}71 < 1$. Finalmente, no item (d), obtivemos $E(60) = -1$ e, portanto, a demanda é de elasticidade unitária para $p = 60$, já que $|E(60)| = 1$.

O nível de elasticidade da demanda de uma mercadoria fornece uma informação útil a respeito da receita total R obtida com a venda de q unidades a um preço unitário de p reais. A receita é dada por $R(p) = pq(p)$; supondo que a demanda q seja uma função derivável do preço unitário p, podemos derivar implicitamente em relação a p para obter

$$\frac{dR}{dp} = p\frac{dq}{dp} + q \qquad \textit{pela regra do produto}$$

Para calcular a elasticidade $E(p) = \dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp}$, basta multiplicar e dividir por q a expressão do lado direito:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{q}{q}\left(p\frac{dq}{dp} + q\right) = q\left(\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} + 1\right) = q[E(p) + 1]$$

Suponha que a demanda seja elástica, ou seja, que $|E(p)| > 1$. Nesse caso, $E(p) < -1$ [já que $E(p) < 0$] e portanto $E(p) + 1 < 0$ e

$$\frac{dR}{dp} = q(p)\,[E(p) + 1] < 0$$

o que significa que um pequeno aumento no preço resulta numa redução da receita. Analogamente, quando a demanda é inelástica, temos $-1 < E(p) < 0$ e, portanto, $E(p) + 1 > 0$ e $\dfrac{dR}{dp} > 0$. Nesse caso, um pequeno aumento no preço resulta em um aumento da receita. Se a demanda é de elasticidade unitária, $E(p) = -1$, $\dfrac{dR}{dp} = 0$ e um pequeno aumento no preço não tem um efeito significativo sobre a receita (ou seja, a receita permanece aproximadamente a mesma). Estas observações podem ser resumidas da seguinte forma:

Níveis de Elasticidade e o Efeito sobre a Receita

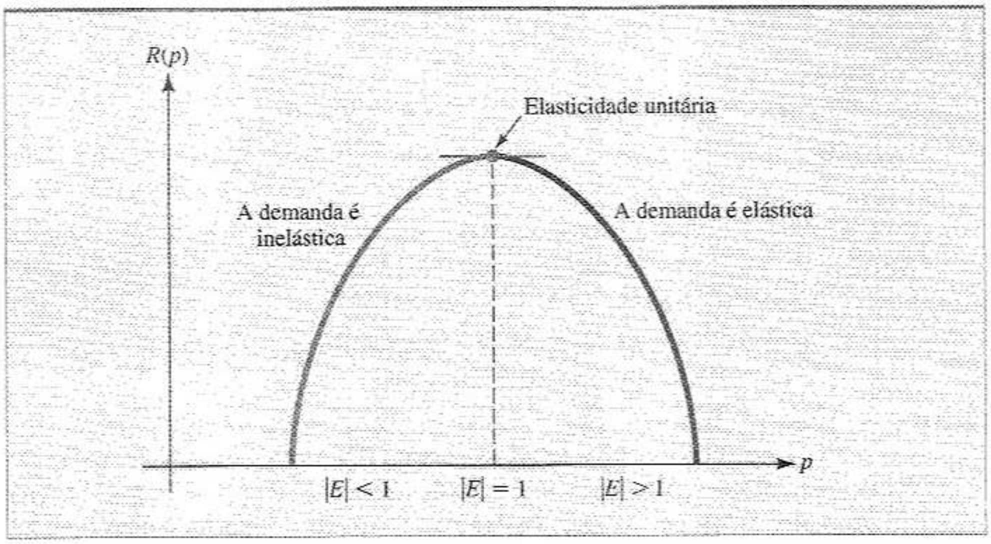
Se a demanda é **elástica** ($|E(p)| > 1$), a receita R diminui quando o preço p aumenta.

Se a demanda é **inelástica** ($|E(p)| < 1$), a receita R aumenta quando o preço p aumenta.

Se a demanda é de **elasticidade unitária** ($|E(p)| = 1$), a receita não é afetada por uma pequena variação no preço.

A relação entre receita e preço é mostrada graficamente na Figura 3.43. Observe que a curva de receita é crescente na região em que a demanda é inelástica, decrescente na região em que a demanda é elástica e possui uma tangente horizontal no ponto em que a demanda é de elasticidade unitária.

FIGURA 3.43 Receita em função do preço.



A relação entre elasticidade da demanda e receita total é ilustrada do Exemplo 3.4.7.

EXEMPLO 3.4.7

O gerente de uma livraria determina que, quando o preço de um certo romance é p reais, a demanda diária é $q = 300 - p^2$ exemplares, onde $0 \leq p \leq \sqrt{300}$.

a. Determine para que valores do preço a demanda é elástica, inelástica e de elasticidade unitária.

b. Interprete os resultados do item (a) em termos do comportamento da receita em função do preço.

Solução

a. A elasticidade da demanda é

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{300 - p^2}(-2p) = \frac{-2p^2}{300 - p^2}$$

e, como $0 \leq p \leq \sqrt{300}$,

$$|E(p)| = \frac{2p^2}{300 - p^2}$$

A demanda é de elasticidade unitária quando $|E| = 1$, ou seja, quando

$$\begin{aligned} \frac{2p^2}{300 - p^2} &= 1 \\ 2p^2 &= 300 - p^2 \\ 3p^2 &= 300 \\ p &= \pm 10 \end{aligned}$$

mas apenas a solução $p = 10$ pertence ao intervalo de interesse $0 \leq p \leq \sqrt{300}$. Para $0 \leq p < 10$,

$$|E| = \frac{2p^2}{300 - p^2} < \frac{2(10)^2}{300 - (10)^2} = 1$$

e, portanto, a demanda é inelástica. Para $10 < p < \sqrt{300}$,

$$|E| = \frac{2p^2}{300 - p^2} > \frac{2(10)^2}{300 - (10)^2} = 1$$

e a demanda é inelástica.

b. A receita total, $R = pq$, aumenta quando a demanda é inelástica, isto é, quando $0 \leq p < 10$. Para esta faixa de preços, um aumento percentual no preço resulta em uma redução percentual menor da demanda e, portanto, a livraria obtém uma receita maior se aumentar o preço até o valor de R$ 10,00 o exemplar.

Por outro lado, na faixa de preços $10 < p \leq \sqrt{300}$, a demanda é elástica e, portanto, a receita diminui quando o preço aumenta. Se o preço do livro está nesta faixa, um aumento percentual do preço resulta em uma redução percentual maior da demanda e, portanto, em uma redução da receita. Assim, se a livraria aumentar o preço do livro acima de R$ 10,00, terá uma queda na receita.

Isto significa que o preço ótimo é R$ 10,00 o exemplar, que corresponde à elasticidade unitária. As curvas de demanda e receita aparecem na Figura 3.44.

11 EXPLORE!

Suponha que a equação da demanda em função do preço do Exemplo 3.4.7 seja $q = 300 - ap^2$. Verifique de que forma a receita é afetada quando a demanda é de elasticidade unitária para $a = 0, 1, 3$ ou 5 examinando as curvas de $x(300 - ax^2)$ para estes valores de x. Use uma janela de [0, 20]1 por [0, 3.000]500.

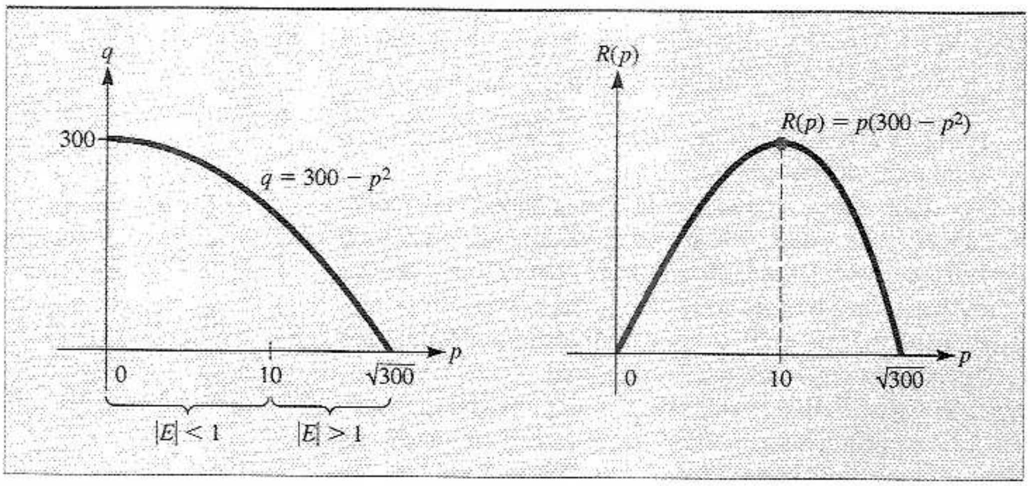


FIGURA 3.44 Curvas de demanda e receita do Exemplo 3.4.7.

PROBLEMAS | 3.4

Nos Problemas 1 a 16, determine o máximo absoluto e o mínimo absoluto (se existirem) da função dada no intervalo especificado.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 5; -3 \leq x \leq 1$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1; -3 \leq x \leq 2$

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2; 0 \leq x \leq 2$

4. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1; 0 \leq x \leq 5$

5. $f(t) = 3t^5 - 5t^3; -2 \leq t \leq 0$

6. $f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 3; -1 \leq x \leq 1$

7. $f(x) = (x^2 - 4)^5; -3 \leq x \leq 2$

8. $f(t) = \frac{t^2}{t - 1}; -2 \leq t \leq -\frac{1}{2}$

9. $g(x) = x + \frac{1}{x}; \frac{1}{2} \leq x \leq 3$

10. $g(x) = \frac{1}{x^2 - 9}; 0 \leq x \leq 2$

11. $f(u) = u + \frac{1}{u}; u > 0$

12. $f(u) = 2u + \frac{32}{u}; u > 0$

13. $f(x) = \frac{1}{x}; x > 0$

14. $f(x) = \frac{1}{x^2}; x > 0$

15. $f(x) = \frac{1}{x + 1}; x \geq 0$

16. $f(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}; x \geq 0$

LUCRO MÁXIMO E CUSTO MÉDIO MÍNIMO *Nos Problemas 17 a 22, é dado o preço $p(q)$ pelo qual q unidades de uma certa mercadoria podem ser vendidas e o custo total $C(q)$ para produzir as q unidades.*

(a) *Determine a função de receita $R(q)$, a receita marginal $R'(q)$ e o custo marginal $C'(q)$. Plote $P(q)$, $R'(q)$ e $C'(q)$ no mesmo gráfico e determine o nível de produção q para o qual $P(q)$ é máxima.*

(b) *Determine o custo médio $A(q) = C(q)/q$, plote no mesmo gráfico as curvas de $A(q)$ e do custo marginal $C'(q)$ e determine o nível de produção para o qual $A(q)$ é mínima.*

17. $p(q) = 49 - q$; $C(q) = \dfrac{1}{8}q^2 + 4q + 200$

18. $p(q) = 37 - 2q$; $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

19. $p(q) = 180 - 2q$; $C(q) = q^3 + 5q + 162$

20. $p(q) = 710 - 1{,}1q^2$;
$C(q) = 2q^3 - 23q^2 + 90{,}7q + 151$

21. $p(q) = 1{,}0625 - 0{,}0025q$; $C(q) = \dfrac{q^2 + 1}{q + 3}$

22. $p(q) = 81 - 3q$; $C(q) = \dfrac{q + 1}{q + 3}$

ELASTICIDADE DA DEMANDA *Nos Problemas 23 a 28, calcule a elasticidade da demanda para a função de demanda $D(p)$ e determine se a demanda é elástica, inelástica ou de elasticidade unitária para o preço p especificado.*

23. $D(p) = -1{,}3p + 10$; $p = 4$

24. $D(p) = -1{,}5p + 25$; $p = 12$

25. $D(p) = 200 - p^2$; $p = 10$

26. $D(p) = \sqrt{400 - 0{,}01p^2}$; $p = 120$

27. $D(p) = \dfrac{3.000}{p} - 100$; $p = 10$

28. $D(p) = \dfrac{2.000}{p^2}$; $p = 5$

29. RECEITA MÉDIA A receita total em reais proveniente da venda de q unidades de um certo produto é $R(q) = -2q^2 + 68q - 128$.

a. Para que nível de vendas a receita média por unidade é igual à receita marginal?

b. Verifique que a receita média é uma função crescente se o nível de vendas for menor que o nível calculado no item (a) e uma função decrescente se o nível de vendas for maior que o nível calculado no item (a).

c. Plote no mesmo gráfico as partes relevantes das funções de receita média e de receita marginal.

30. Em que ponto a curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$ possui uma reta tangente com a menor inclinação? Qual é a inclinação da reta tangente neste ponto?

31. Para que valor de x no intervalo $-1 \leq x \leq 4$ a curva da função

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

é mais inclinada? Qual é a inclinação da reta tangente neste ponto?

Nos Problemas 32 a 38, resolva o problema prático de otimização e use uma das técnicas apresentadas nesta seção para verificar que o extremo absoluto encontrado está correto.

32. RADIODIFUSÃO Uma estação de rádio fez o levantamento dos hábitos dos ouvintes entre as 17 h e meia-noite. A pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação x horas após as 17 h é

$$f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$$

a. Em que instante, entre as 17 h e meia-noite, existem mais ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?

b. Em que instante, entre as 17 h e meia-noite, existem menos ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?

33. QUADRO DE ASSOCIADOS O número de membros de uma associação de consumidores x anos após sua fundação, em 1992, é dado por

$$f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$$

a. Em que ano, entre 1992 e 2006, a associação teve o maior número de membros? Qual foi este número?

b. Em que ano, entre 1992 e 2006, a associação teve o menor número de membros? Qual foi este número?

34. VELOCIDADE DE UMA AVE Em um modelo* proposto por C.J. Pennycuick, a potência P necessária para que uma ave se mantenha voando é dada pela expressão

$$P = \frac{w^2}{2\rho S v} + \frac{1}{2}\rho A v^3$$

onde v é a velocidade da ave em relação ao ar, w é o peso da ave, ρ é a densidade do ar e S e A são constantes positivas associadas à forma e tamanho da ave. Qual é a velocidade v para a qual a potência é mínima?

35. APRENDIZADO Em um modelo de aprendizado, duas respostas (A e B) são possíveis para cada uma de uma série de observações. Se existe uma probabilidade p de obter a resposta A em uma observação isolada, a probabilidade de obter a resposta A exatamente n vezes em uma série de m observações é $F(p) = p^n(1 - p)^{m-n}$. A **estimativa de máxima probabilidade** é o valor de p que maximiza a função $F(p)$ para $0 \leq p \leq 1$. Qual é este valor?

36. ETOLOGIA Mais um problema sobre o bicho da maçã** (veja o Problema 67 da Seção 3.1). A porcentagem de bichos da maçã que sobrevivem ao estágio de pupa a uma certa temperatura T (em graus Celsius) pode ser modelada pela expressão

$$P(T) = -1{,}42T^2 + 68T - 746$$
$$\text{para } 20 \leq T \leq 30$$

*C. J. Pennycuick, "The Mechanics of Bird Migration", *Ibis* III, 1969, pp. 525-556.
**P. L. Shaffer and H. J. Gold, "A Simulation Model of Population Dynamics of the Codling Moth *Cydia pomonelia*", *Ecological Modeling*, Vol. 30, 1985, pp. 247-274.

Determine as temperaturas em que o número de bichos da maçã sobreviventes é máximo e mínimo.

37. CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA De acordo com a lei de Poiseuille, a velocidade do sangue a r centímetros de distância do eixo central de uma artéria de raio R é $S(r) = c(R^2 - r^2)$, onde c é uma constante positiva. A que distância do eixo central da artéria a velocidade do sangue é máxima?

38. POLÍTICA Uma pesquisa de opinião revela que, x meses após anunciar sua candidatura, um certo político terá o apoio de $S(x)$ por cento dos eleitores, onde

$$S(x) = \frac{1}{29}(-x^3 + 6x^2 + 63x + 1.080)$$
$$\text{para } 0 \leq x \leq 12$$

Se a eleição estiver marcada para novembro, qual o melhor mês para anunciar a candidatura? Se, para vencer, o político necessita de pelo menos 50% por cento dos votos, é provável que seja eleito?

39. ELASTICIDADE DA DEMANDA Quando o preço de um certo produto é p reais, os consumidores demandam q unidades, onde p e q estão relacionados pela equação $q^2 + 3pq = 22$.

a. Determine a elasticidade da demanda deste produto.

b. A demanda é elástica, inelástica ou de elasticidade unitária para um preço de R$ 3,00?

40. ELASTICIDADE DA DEMANDA Quando uma loja de eletrodomésticos fixa o preço de um certo aparelho de som em p centenas de reais, q aparelhos de som são vendidos por mês, onde $q^2 + 2p^2 = 41$.

a. Determine a elasticidade da demanda de aparelhos de som.

b. A demanda é elástica, inelástica ou de elasticidade unitária para um preço $p = 4$ (R$ 400,00)?

41. DEMANDA DE OBRAS DE ARTE Uma galeria de arte põe à venda 50 reproduções de um quadro famoso. Se cada reprodução desta edição limitada custar p reais, espera-se que $q = 500 - 2p$ reproduções sejam vendidas.

a. Em que intervalo deve estar o preço p?

b. Calcule a elasticidade da demanda e determine os valores de p para os quais a demanda é elástica, inelástica e de elasticidade unitária.

c. Interprete os resultados do item (b) em termos do comportamento da receita total em função do preço p.

d. Se você fosse o dono da galeria, que preço cobraria pelas reproduções? Justifique sua resposta.

42. DEMANDA DE PASSAGENS AÉREAS Uma empresa aérea determina que quando uma passagem de ida e volta entre Rio de Janeiro e São Paulo custa p reais ($0 \leq p \leq 160$), a demanda diária de passagens é $q = 256 - 0{,}01p^2$.

a. Determine a elasticidade da demanda e calcule os valores de p para os quais a demanda é elástica, inelástica e de elasticidade unitária.

b. Interprete os resultados do item (a) em termos do comportamento da receita total em função do preço p.

c. Que preço você acha que a companhia aérea deveria cobrar pela passagem? Justifique sua resposta.

43. ORNITOLOGIA De acordo com os resultados* de Tucker e Schmidt-Koenig, o consumo de energia de uma certa espécie de periquito é dado pela expressão

$$E(v) = \frac{1}{v}[0{,}074(v - 35)^2 + 22]$$

onde v é a velocidade do pássaro em km/h.

a. Qual é a velocidade para a qual o consumo de energia é mínimo?

b. Leia a respeito do uso de modelos matemáticos para estudar o comportamento dos animais e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas dizendo o que pensa a respeito da validade destes modelos. Um bom ponto de partida é a referência citada neste problema.

44. CONSUMO INTERNO Suponha que o consumo interno total seja dado por uma função $C(x)$, onde x é a renda interna total. A derivada $C'(x)$ é chamada de **tendência marginal para o consumo**. Se $S = x - C$ representa a poupança interna total, $S'(x)$ é chamada de **tendência marginal para a poupança**. Suponha que a função de consumo seja $C(x) = 8 - 0{,}8x - 0{,}8\sqrt{x}$. Determine a tendência marginal para o consumo e calcule o valor de x para o qual a poupança total é mínima.

45. SENSIBILIDADE A MEDICAMENTOS A reação do organismo à administração de um medicamento é freqüentemente representada* por uma equação da forma

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

onde D é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de $R(D)$ com D é chamada de **sensibilidade**.

a. Determine o valor de D para o qual a sensibilidade é máxima. Qual é a máxima sensibilidade? (Expresse a resposta em termos de C).

b. Qual é a reação (em termos de C) quando a dose que produz a máxima sensibilidade é usada?

46. AERODINÂMICA Um parâmetro importante para o projeto de aeronaves é o chamado arrasto, ou seja, a resistência exercida pelo ar ao avanço da aeronave. De acordo com um modelo, a força de arrasto é dada por uma expressão da forma

$$F(v) = Av^2 + \frac{B}{v^2}$$

onde A e B são constantes positivas. Observa-se experimentalmente que o arraste é mínimo para $v = 256$ km/h. Use esta informação para calcular a razão $\frac{B}{A}$.

47. ELETRICIDADE Quando um resistor de R ohms é ligado aos terminais de uma bateria com uma força eletromotriz de E volts e uma resistência interna de r ohms, uma corrente de I ampères atravessa o circuito e dissipa uma potência de P watts, com

$$I = \frac{E}{r + R} \qquad \text{e} \qquad P = I^2R$$

*V. A. Tucker and K. Schmidt-Koenig, "Flight Speeds of Birds in Relation to Energetics and Wind Directions", *The Auk*, Vol. 88 (1971), pp. 97-107.

*R. M. Thrall *et al.*, *Some Mathematical Models in Biology*, U. of Michigan, 1967.

Supondo que r seja constante, qual é o valor de R para o qual a potência dissipada é máxima?

48. SOBREVIVÊNCIA DE ANIMAIS AQUÁTICOS Sabe-se que uma massa de água que ocupa um volume de 1 litro a 0°C ocupa um volume de

$$V(T) = \left(\frac{-6{,}8}{10^8}\right)T^3 + \left(\frac{8{,}5}{10^6}\right)T^2 - \left(\frac{6{,}4}{10^5}\right)T + 1$$

litros quando a temperatura é T °C, para $0 \leq T \leq 30$.

a. Use uma calculadora gráfica para plotar $V(T)$ para $0 \leq T \leq 10$. A massa específica da água é máxima quando $V(T)$ é mínimo. Em que temperatura isto acontece?

b. O leitor ficou surpreso com a resposta do item (a)? Pois deveria ficar. A água é o único líquido de uso corrente cuja massa específica é máxima a uma temperatura *maior* que a temperatura de fusão (0°C, no caso da água). Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre a relação entre esta propriedade da água e a sobrevivência dos animais aquáticos durante o inverno.

49. PRODUÇÃO DE SANGUE Um modelo para a produção $p(x)$ de células do sangue envolve uma função da forma

$$p(x) = \frac{Ax}{B + x^m}$$

onde x é o número de células presentes e A, B e m são constantes positivas.*

a. Determine a taxa de produção de células do sangue $R(x) = p'(x)$ e encontre o valor de x para o qual $R(x) = 0$.

b. Determine a taxa de variação de $R(x)$ e encontre os valores de x para os quais $R'(x) = 0$.

c. Se $m > 1$, o número crítico diferente de zero obtido no item (b) corresponde a um máximo relativo ou a um mínimo relativo? Justifique sua resposta.

50. AMPLITUDE DE OSCILAÇÕES É possível demonstrar que a amplitude $A(r)$ das oscilações forçadas de uma partícula em um meio viscoso é dada por

$$A(r) = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + kr^2}$$

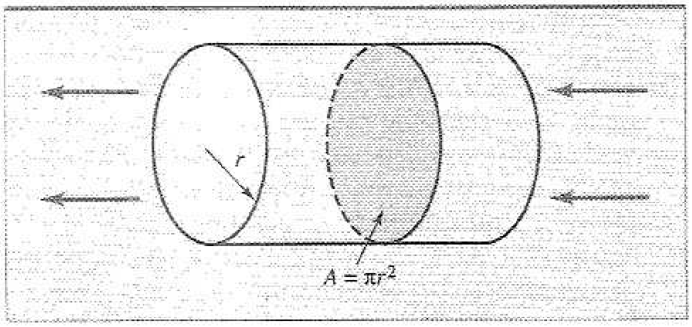
onde r é a razão entre a freqüência da força motriz e a freqüência natural de oscilação e k é uma constante positiva que expressa o efeito do meio viscoso. Mostre que $A(r)$ possui um e apenas um número crítico. Este número crítico corresponde a um máximo relativo ou a um mínimo relativo? O que se pode dizer a respeito dos extremos *absolutos* de $A(r)$?

51. RESPIRAÇÃO Os fisiologistas definem a vazão F de ar na traquéia através da expressão $F = SA$, onde S é a velocidade do ar e A é a área de uma seção reta da traquéia.

a. Suponha que a traquéia possua uma seção reta circular de raio r. Use a expressão para a velocidade do ar na traquéia durante um acesso de tosse, dada no Exemplo 3.4.3, para expressar a vazão de ar F em termos de r.

b. Determine o raio r para o qual a vazão é máxima.

*M. C. Mackey e L. Glass, "Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems", *Science*, Vol. 197, pp. 287-289.



PROBLEMA 51

52. ANÁLISE MARGINAL Uma fábrica produz q unidades de uma mercadoria por um custo total de $C(q)$ reais e um custo médio $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Nesta seção, mostramos que $q = q_c$ satisfaz à equação $A'(q_c) = 0$ se e apenas se $C'(q_c) = A(q_c)$, isto é, se o custo marginal for igual ao custo médio. O objetivo deste problema é mostrar que $A(q)$ é *mínimo* para $q = q_c$.

a. De forma geral, a taxa de variação do custo de produção de uma mercadoria aumenta quando o número de unidades produzidas aumenta. Tomando esta afirmação como verdadeira, o que se pode dizer a respeito do sinal de $C''(q)$?

b. Mostre que $A''(q_c) > 0$ se e apenas se $C''(q_c) > 0$. Em seguida, use o resultado do item (a) para mostrar que o custo médio $A(q)$ é mínimo para $q = q_c$.

53. ELASTICIDADE E RECEITA Suponha que a demanda de uma certa mercadoria seja dada por $q = b - ap$, onde a e b são constantes positivas e $0 \leq p \leq b/a$.

a. Expresse a elasticidade da demanda em função de p.

b. Mostre que a demanda é de elasticidade unitária no ponto médio $p = b/2a$ do intervalo $0 \leq p \leq b/a$.

c. Para que valores de p a demanda é elástica? Para que valores é inelástica?

54. ELASTICIDADE-RENDA DA DEMANDA A **elasticidade-renda da demanda** é definida como a variação percentual da demanda dividida pela variação percentual da renda.

a. Escreva uma expressão para a elasticidade-renda da demanda E em termos da renda I e da demanda Q.

b. Qual você espera que seja maior no Brasil, a elasticidade-renda da demanda de automóveis ou a de alimentos?

c. O que significa um valor *negativo* da elasticidade-renda da demanda? Entre os produtos a seguir, escolha os que teriam maior probabilidade de apresentar $E < 0$: roupas usadas, computadores pessoais, passagens de ônibus, geladeiras, carros usados? Justifique sua resposta.

d. Leia a respeito da elasticidade-renda da demanda e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do motivo pelo qual a elasticidade-renda da demanda de alimentos é muito maior nas nações em desenvolvimento que em países como os Estados Unidos e o Japão.*

*O leitor pode encontrar um ponto de partida bastante útil para sua pesquisa em Campbell R. McConnell and Stanley L. Brue, *Microeconomics*, 12th ed., New York: McGraw-Hill, 1993.

55. ELASTICIDADE DA DEMANDA Suponha que a equação da demanda de uma certa mercadoria seja $q = \dfrac{a}{p^m}$, onde a e m são constantes positivas. Mostre que a elasticidade da demanda é igual a $-m$ para qualquer valor de p. Interprete este resultado.

SEÇÃO 3.5 Problemas Práticos de Otimização

Na Seção 3.4, examinamos vários problemas nos quais o objetivo era determinar o máximo ou o mínimo de uma expressão conhecida. Na prática, as coisas muitas vezes não são tão simples e é necessário reunir informações a respeito de uma grandeza de interesse para poder formular e analisar um modelo matemático apropriado.

Nesta seção, vamos aprender a combinar as técnicas de elaboração de modelos da Seção 1.4 com as técnicas de otimização da Seção 3.4. O método geral para lidar com este tipo de problemas está resumido a seguir.

Método Geral para Analisar Problemas Práticos de Otimização

1° passo: Escolha a grandeza a ser otimizada. Em seguida, rotule todas as variáveis de interesse. Pode ser interessante usar letras que tenham alguma relação com a grandeza, como R para receita e A para área.

2º passo: Expresse as relações entre as variáveis em termos de equações ou desigualdades. Uma figura pode ajudar.

3º passo: Expresse a grandeza a ser otimizada (maximizada ou minimizada) em termos de apenas uma variável (a variável independente). Para isso, pode ser necessário usar uma ou mais das equações obtidas no 2º passo para eliminar outras variáveis. Determine também as possíveis restrições da variável independente.

4° passo: Se $f(x)$ é a grandeza a ser otimizada, calcule $f'(x)$ e determine todos os números críticos de f. Em seguida, determine o valor máximo ou mínimo pedido, usando os métodos da Seção 3.4 (a propriedade dos valores extremos ou o teste da derivada segunda para extremos absolutos). Dependendo do problema, pode ser necessário verificar o valor de $f(x)$ nos pontos extremos de um intervalo.

5º passo: Interprete os resultados em termos das grandezas físicas, geométricas ou econômicas apropriadas.

Este método é ilustrado nos Exemplos 3.5.1 a 3.5.3.

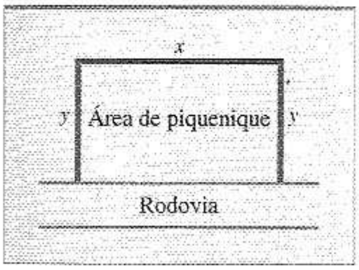


FIGURA 3.45 Área de piquenique retangular.

EXEMPLO 3.5.1

O departamento de estradas de rodagem pretende construir uma área de piquenique para motoristas à beira de uma rodovia movimentada. O terreno deve ser retangular, com uma área de 5.000 metros quadrados, e ser cercado nos três lados que não dão para a rodovia. Qual o menor comprimento da cerca necessária para a obra?

Solução

1º passo: Desenhe a área de piquenique, como na Figura 3.45. Chame de x (em metros) o comprimento da área (o lado paralelo à rodovia) e y (em metros) a largura.

2º passo: Como o parque deve ter uma área de 5.000 metros quadrados, $xy = 5.000$.

3° passo: O comprimento da cerca F é igual a $x + 2y$, onde x e y são dois números positivos. Como

$$xy = 5.000 \quad \text{ou} \quad y = \frac{5.000}{x}$$

podemos eliminar y da expressão de F para obter uma expressão que dependa apenas de x:

$$F(x) = x + 2y = x + 2\left(\frac{5.000}{x}\right) = x + \frac{10.000}{x} \quad \text{para } x > 0$$

4º passo: A derivada de $F(x)$ é

$$F'(x) = 1 - \frac{10.000}{x^2}$$

e podemos obter os números críticos de $F(x)$ fazendo $F'(x) = 0$ e explicitando x:

$$F'(x) = 1 - \frac{10.000}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 10.000}{x^2} = 0 \qquad \textit{reduzindo a um denominador comum}$$

$$x^2 = 10.000 \qquad \textit{igualando o numerador a 0}$$

$$x = 100 \qquad \textit{desprezando } -100 \textit{ já que } x > 0$$

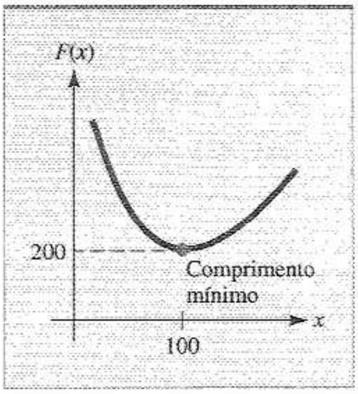


FIGURA 3.46 Gráfico da função $F(x) = x + \dfrac{10.000}{x}$ para $x > 0$.

Como $x = 100$ é o único número crítico no intervalo $x > 0$, podemos usar o teste da derivada segunda para extremos absolutos. A derivada segunda de $F(x)$ é

$$F''(x) = \frac{20.000}{x^3}$$

e, portanto, $F''(100) > 0$ e o ponto crítico $x = 100$ corresponde a um mínimo absoluto de $F(x)$. O gráfico de $F(x)$, incluído apenas para fins ilustrativos, aparece na Figura 3.46.

5º passo: Mostramos que o comprimento mínimo da cerca é

$$F(100) = 100 + \frac{10.000}{100} = 200 \text{ metros}$$

que corresponde a uma área com $x = 100$ metros de comprimento e

$$y = \frac{5.000}{100} = 50 \text{ metros}$$

de largura.

EXEMPLO 3.5.2

Uma lata cilíndrica deve conter um certo volume de líquido. O custo do material usado para o fundo e a tampa da lata é 3 centavos por centímetro quadrado e o custo do material usado para o lado da lata é 2 centavos por centímetro quadrado. Use os métodos do cálculo para obter uma relação simples entre o raio e a altura da lata de modo a que o custo de matéria-prima seja o menor possível.

Solução

Seja r o raio, h a altura, C o custo (em centavos) e V o volume (especificado) da lata. O objetivo é minimizar o custo, dado pela seguinte expressão:

$$\text{Custo} = \text{custo da tampa} + \text{custo do fundo} + \text{custo do lado}$$

na qual, para cada componente do custo,

$$\text{Custo} = (\text{custo por centímetro quadrado})(\text{área})$$

Assim,

$$\text{Custo da tampa} = \text{custo do fundo} = 3(\pi r^2)$$

e

$$\text{Custo do lado} = 2(2\pi rh) = 4\pi rh$$

O custo total é, portanto,

$$C = \underbrace{3\pi r^2}_{\textit{tampa}} + \underbrace{3\pi r^2}_{\textit{fundo}} + \underbrace{4\pi rh}_{\textit{lado}} = 6\pi r^2 + 4\pi rh$$

Antes de aplicar os métodos do cálculo, precisamos expressar o custo em termos de uma única variável. Para isso, usamos o fato de que a lata deve ter um volume especificado V_0 e explicitamos h na expressão $V_0 = \pi r^2 h$ para obter

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

Substituindo esta expressão de h na expressão de C, podemos expressar o custo em termos apenas de r:

$$C(r) = 6\pi r^2 + 4\pi r\left(\frac{V_0}{\pi r^2}\right) = 6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}$$

Como o raio r pode ser qualquer número positivo, o objetivo é determinar o mínimo absoluto de $C(r)$ no intervalo $r > 0$. Derivando $C(r)$, obtemos

$$C'(r) = 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2} \qquad \textit{note que } V_0 \textit{ é constante}$$

Como $C'(r)$ existe para qualquer valor de $r > 0$, todos os valores críticos $r = R$ devem satisfazer a equação $C'(R) = 0$, ou seja,

$$C'(R) = 12\pi R - \frac{4V_0}{R^2} = 0$$

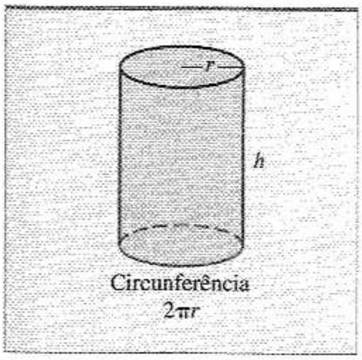
$$12\pi R = \frac{4V_0}{R^2}$$

$$R^3 = \frac{4V_0}{12\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}$$

Lembrete

Um cilindro de raio r e altura h tem uma área lateral $A = 2\pi rh$ e um volume $V = \pi r^2 h$.



Se H é a altura da lata que corresponde ao raio R, $V_0 = \pi r^2 H$ e como R deve satisfazer a equação

$$12\pi R = \frac{4V_0}{R^2}$$

obtemos

$$12\,\pi R = \frac{4(\pi R^2 H)}{R^2} = 4\pi H$$

ou

$$H = \frac{12\pi R}{4\pi} = 3R$$

Finalmente, observe que a derivada segunda de $C(r)$ satisfaz a desigualdade

$$C''(r) = 12\pi + \frac{8V_0}{r^3} > 0 \qquad \text{para qualquer } r > 0$$

Assim, como $r = R$ é o único ponto crítico de $C(r)$ e como $C''(R) > 0$, o teste da derivada segunda para extremos absolutos assegura que o custo de matéria-prima é o menor possível quando a altura da lata é três vezes maior que o raio. O gráfico de $C(r)$, incluído apenas para fins ilustrativos, aparece na Figura 3.47.

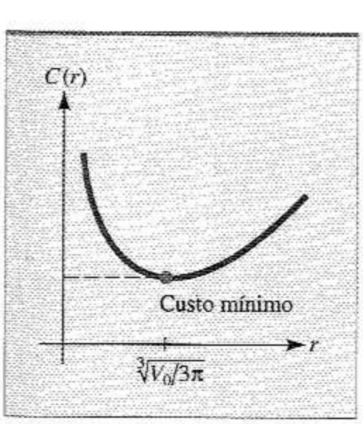


FIGURA 3.47 Gráfico da função de custo $C(r) = 6\pi r^2 + \dfrac{4V}{r}$ para $r > 0$.

EXEMPLO 3.5.3

Um fabricante produz uma fita de vídeo virgem a um custo de R$ 2,00 a unidade. As fitas vêm sendo vendidas a R$ 5,00 a unidade; por este preço, são vendidas 4.000 fitas por mês. O fabricante pretende aumentar o preço da fita e calcula que para cada R$ 1,00 de aumento no preço, menos 400 fitas serão vendidas por mês. Qual deve ser o preço de venda das fitas para que o lucro do fabricante seja máximo?

Solução

Seja x o novo preço de venda das fitas e $P(x)$ o lucro correspondente. O objetivo é maximizar o lucro. Como no Exemplo 1.4.5, começamos por expressar o lucro em palavras:

$$\text{Lucro} = (\text{número de fitas vendidas})(\text{lucro por fita})$$

Como 4.000 fitas são vendidas por mês quando o preço é R$ 5,00 e menos 400 fitas serão vendidas para cada R$ 1,00 de aumento no preço, temos:

$$\text{Número de fitas vendidas} = 4.000 - 400(\text{número de aumentos de 1 real})$$

O número de aumentos de R$ 1,00 no preço é a diferença $x - 5$ entre o preço novo e o antigo. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Número de fitas vendidas} &= 4.000 - 400(x - 5)\\ &= 400[10 - (x - 5)]\\ &= 400(15 - x)\end{aligned}$$

O lucro por fita vendida é simplesmente a diferença entre o preço de venda x e o custo R$ 2,00. Então,

$$\text{Lucro por fita} = x - 2$$

Combinando as relações anteriores, obtemos:

$$P(x) = 400(15 - x)(x - 2)$$

O objetivo é determinar o máximo absoluto da função de lucro $P(x)$. Para estabelecer qual é o intervalo relevante para este problema, basta observar que, como foi dito no enunciado que o novo preço será mais alto que o antigo, devemos ter $x \geq 5$. Por outro lado, o número de fitas vendidas é $400(15 - x)$, um número que se torna negativo (e, portanto, não tem significado físico) para $x > 15$. Assim, podemos restringir o problema de otimização ao intervalo fechado $5 \leq x \leq 15$.

Para determinar os pontos críticos, basta calcular a derivada usando as regras do produto e da multiplicação por uma constante. O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned}P'(x) &= 400[(15 - x)(1) + (x - 2)(-1)]\\ &= 400(15 - x - x + 2) = 400(17 - 2x)\end{aligned}$$

que se anula para

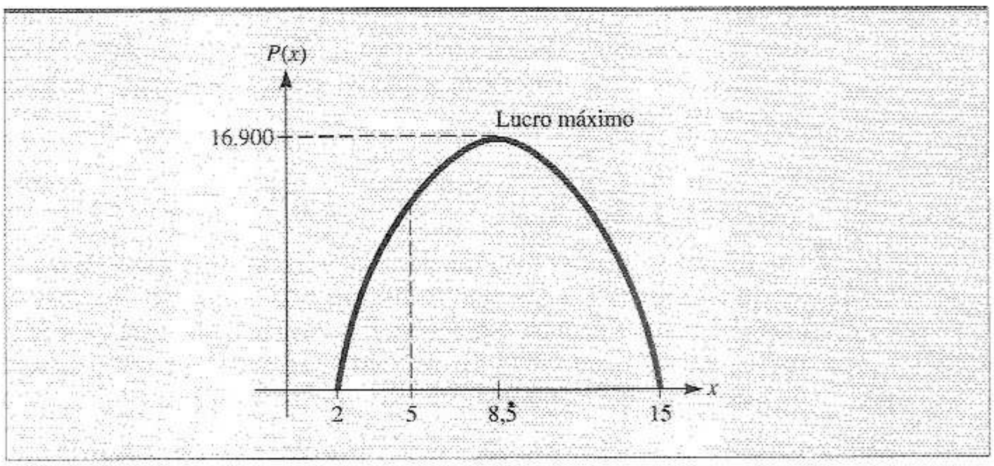
$$17 - 2x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x = 8,5$$

Comparando os valores da função de lucro

$$P(5) = 12.000 \qquad P(8,5) = 16.900 \qquad \text{e} \qquad P(15) = 0$$

neste ponto crítico e nos extremos do intervalo, chegamos à conclusão de que o maior lucro possível é R$ 16.900,00, que será obtido se as fitas forem vendidas por R$ 8,50 a unidade. O gráfico de $P(x)$, incluído apenas para fins ilustrativos, aparece na Figura 3.48.

FIGURA 3.48 Gráfico da função de lucro $P(x) = 400(15 - x)(x - 2)$.



NOTA Solução Alternativa para o Problema de Maximização do Lucro do Exemplo 3.5.3
Como o número de fitas vendidas no Exemplo 3.5.3 é expresso em termos do número N de aumentos de R$ 1,00 no preço, é possível resolver o problema usando N como variável independente em vez do novo preço. Neste caso, temos:

$$\text{Número de fitas} = 4.000 - 400N$$
$$\text{Lucro por fita} = (N + 5) - 2 = N + 3$$

Assim, o lucro total é dado por

$$P(N) = (4.000 - 400N)(N + 3) = 400(10 - N)(N + 3)$$

e o intervalo de interesse é $0 \leq N \leq 10$ (o leitor é capaz de explicar por quê?). O máximo absoluto neste caso ocorre para $x = 3{,}5$ (os detalhes ficam por conta do leitor), ou seja, para maximizar o lucro o preço deve ser aumentado de R$ 5,00 para R$ 5,00 + R$ 3,50 = R$ 8,50. Como seria de se esperar, este resultado é idêntico ao obtido usando o preço como variável independente no Exemplo 3.5.3. ■

Nas cidades modernas, em que novas zonas residenciais são muitas vezes criadas nas vizinhanças de antigas fábricas, é importante monitorar e controlar a emissão de poluentes. No Exemplo 3.5.4, analisamos um problema de modelagem no qual os métodos do cálculo são usados para determinar o local, em um certo bairro, onde a poluição é mínima.

12 EXPLORE!

Entre com a função do Exemplo 3.5.4, $P(x) = 75/x + 300/(15 - x)$, em Y1 e plote usando uma janela decimal modificada [0, 14]1 por [0,350]10. Use **TRACE** para mover o cursor de X = 1 até X = 14 e confirmar a localização do ponto em que a poluição é mínima. Para observar o comportamento da derivada $P'(x)$, entre com Y2 = nDeriv(Y1,X,X) e plote usando uma janela [0, 14]1 por [−75, 300]10. O que você observa?

EXEMPLO 3.5.4

Duas fábricas, A e B, estão situadas a 15 quilômetros de distância uma da outra e emitem 75 ppm (partes por milhão) e 300 ppm de material particulado, respectivamente. Cada fábrica é cercada por uma área de segurança com 1 quilômetro de raio, na qual não são permitidas construções residenciais; a concentração de poluentes em qualquer outro ponto Q nas vizinhanças das fábricas é inversamente proporcional à distância entre o ponto Q e a fábrica considerada. Em que ponto da estrada que liga as duas fábricas deve ser construída uma casa para que a poluição proveniente das duas fábricas seja a menor possível?

Solução

Suponha que uma casa C esteja situada a x quilômetros da fábrica A e, portanto, a $15 - x$ quilômetros da fábrica B, onde x satisfaz a condição $1 \leq x \leq 14$, já que existe uma área de segurança de 1 quilômetro de raio em torno de cada fábrica (veja Figura 3.49). Como a concentração de material particulado que chega a C é inversamente proporcional à distância de cada fábrica, a concentração de poluentes provenientes da fábrica A é $75/x$ e a concentração de poluentes provenientes da fábrica B é $300/(15 - x)$. Assim, a concentração total de material particulado que chega a C é dada pela função

$$P(x) = \underbrace{\frac{75}{x}}_{\substack{\textit{poluição}\\ \textit{de A}}} + \underbrace{\frac{300}{15 - x}}_{\substack{\textit{poluição}\\ \textit{de B}}}$$

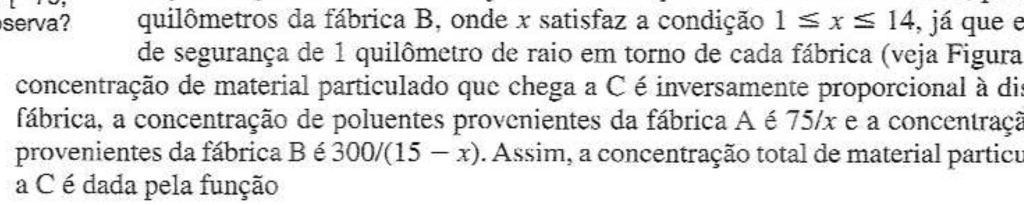


FIGURA 3.49 Poluição em uma casa situada entre duas fábricas.

Para minimizar a poluição total $P(x)$, calculamos a derivada $P'(x)$ e resolvemos a equação $P'(x) = 0$. Usando a regra do quociente e a regra da cadeia, obtemos

$$P'(x) = \frac{-75}{x^2} + \frac{-300(-1)}{(15 - x)^2} = \frac{-75}{x^2} + \frac{300}{(15 - x)^2}$$

Lembrete

Multiplicação cruzada significa que se

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

então

$$AD = CB$$

Resolvendo a equação $P'(x) = 0$, temos:

$$\frac{-75}{x^2} + \frac{300}{(15 - x)^2} = 0$$

$$\frac{75}{x^2} = \frac{300}{(15 - x)^2}$$

$$75(15 - x)^2 = 300x^2 \qquad \textit{por multiplicação cruzada}$$

$$x^2 - 30x + 225 = 4x^2 \qquad \textit{dividindo por 75 e expandindo}$$

$$3x^2 + 30x - 225 = 0 \qquad \textit{combinando termos}$$

$$3(x - 5)(x + 15) = 0 \qquad \textit{fatorando}$$

$$x = 5,\ x = -15$$

Lembrete

O símbolo ≈ significa "aproximadamente igual a". Assim, $a \approx b$ significa "a é aproximadamente igual a b".

O único número crítico no intervalo permitido $1 \le x \le 14$ é $x = 5$. Calculando $P(x)$ em $x = 5$ e nas duas extremidades do intervalo, $x = 1$ e $x = 14$, obtemos

$$P(1) \approx 96{,}43 \text{ ppm}$$
$$P(5) = 45 \text{ ppm}$$
$$P(14) \approx 305{,}36 \text{ ppm}$$

Assim, a poluição total é a menor possível quando a casa está situada a 5 quilômetros da fábrica A.

EXEMPLO 3.5.5

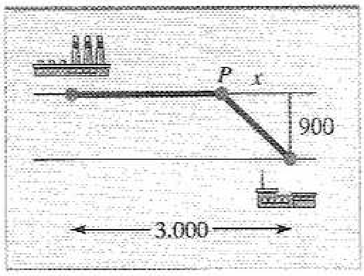


FIGURA 3.50 Posições relativas de uma fábrica, um rio e uma usina de força.

Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio com 900 metros de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000 metros rio abaixo. O custo para estender um cabo no rio é R$ 5,00 o metro e o custo para estender um cabo em terra é R$ 4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para estender o cabo?

Solução

Para visualizar a situação, começamos por desenhar um diagrama como o da Figura 3.50. (Observe que, ao desenharmos o diagrama, supusemos que o cabo é estendido *em linha reta* nos dois trechos considerados. O leitor pode explicar por que esta é a opção mais razoável?)

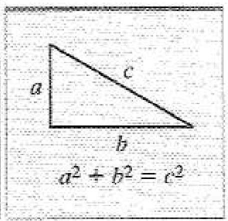
O objetivo é minimizar o custo de instalação do cabo. Seja C este custo. Podemos representá-lo da seguinte forma:

$$C = 5(\text{número de metros de cabo na água}) + 4(\text{número de metros de cabo em terra})$$

Como estamos interessados em descrever o trajeto ótimo para o cabo, é conveniente escolher uma variável em termos da qual o ponto P possa ser facilmente localizado. Duas escolhas razoáveis para a variável x estão representadas na Figura 3.51.

Lembrete

De acordo com o teorema de Pitágoras, o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos.



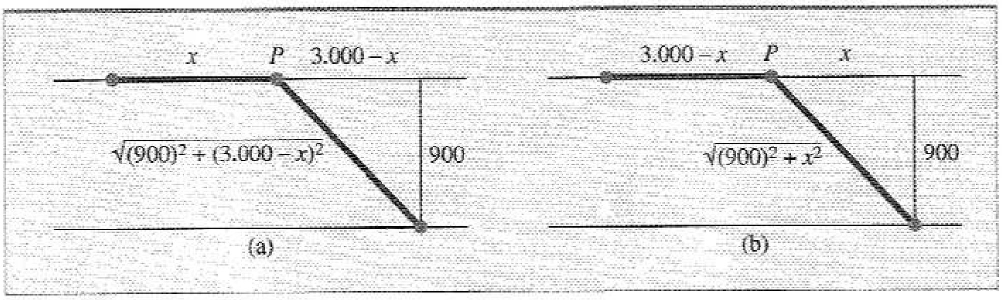


FIGURA 3.51 Duas escolhas possíveis para a variável x.

Antes de começar os cálculos, vamos verificar qual dessas duas escolhas é a mais adequada. Na Figura 3.51a, a distância sobre a água entre a usina e o ponto P (de acordo com o teorema de Pitágoras) é $\sqrt{(900)^2 + (3.000 - x)^2}$ e a função de custo total é

$$C(x) = 5\sqrt{(900)^2 + (3.000 - x)^2} + 4x$$

Na Figura 3.51b, a distância sobre a água é $\sqrt{(900)^2 + x^2}$ e a função de custo total é

$$C(x) = 5\sqrt{(900)^2 + x^2} + 4(3.000 - x)$$

A segunda função é mais adequada porque o termo $3.000 - x$ aparece simplesmente multiplicado por 4, enquanto na primeira função é elevado ao quadrado e aparece dentro do radical. Assim, definimos a variável x como na Figura 3.51b e trabalhamos com a função de custo total

$$C(x) = 5\sqrt{(900)^2 + x^2} + 4(3.000 - x)$$

Como as distâncias x e $3.000 - x$ não podem ser negativas, o intervalo de interesse é $0 \leq x \leq 3.000$ e o objetivo é determinar o mínimo absoluto da função $C(x)$ neste intervalo fechado. Para calcular os valores críticos, igualamos a zero a derivada

$$C'(x) = \frac{5}{2}[(900)^2 + x^2]^{-1/2}(2x) - 4 = \frac{5x}{\sqrt{(900)^2 + x^2}} - 4$$

para obter

$$\frac{5x}{\sqrt{(900)^2 + x^2}} - 4 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{(900)^2 + x^2} = \frac{5}{4}x$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da última equação e explicitando x, temos:

$$(900)^2 + x^2 = \frac{25}{16}x^2$$

$$x^2 - \frac{25}{16}x^2 = -(900)^2 \qquad \textit{subtraindo } \frac{25x^2}{16} \textit{ e } (900)^2 \textit{ de ambos os lados}$$

$$-\frac{9}{16}x^2 = -(900)^2 \qquad \textit{combinando os termos do lado esquerdo}$$

$$x^2 = \frac{16}{9}(900)^2 \qquad \textit{multiplicado por } -\frac{16}{9}$$

$$x = \pm\frac{4}{3}(900) = \pm 1.200 \qquad \textit{extraindo a raiz quadrada de ambos os lados}$$

Como o único valor positivo, $x = 1.200$, pertence ao intervalo $0 \leq x \leq 3.000$, calculamos $C(x)$ neste ponto crítico e também nos extremos do intervalo, $x = 0$ e $x = 3.000$. Como

$$C(0) = 5\sqrt{(900)^2 + 0} + 4(3.000 - 0) = 16.500$$
$$C(1.200) = 5\sqrt{(900)^2 + (1.200)^2} + 4(3.000 - 1.200) = 14.700$$
$$C(3.000) = 5\sqrt{(900)^2 + (3.000)^2} + 4(3.000 - 3.000) = 15.660$$

chegamos à conclusão de que o custo mínimo de instalação é R\$ 14.700,00. Para que o custo tenha este valor, é preciso que o ponto P esteja a 1.200 m de distância da usina de força.

No Exemplo 3.5.6, a função a ser maximizada tem significado físico apenas quando a variável independente é um número inteiro. Como o método de otimização leva a um resultado fracionário, é necessário interpretá-lo para chegar a uma solução que faça sentido.

EXEMPLO 3.5.6

Uma empresa de turismo aluga ônibus com capacidade para 50 pessoas a grupos de 35 pessoas ou mais. Quando um grupo contém exatamente 35 pessoas, cada pessoa paga R\$ 60,00. Nos grupos maiores, o preço por pessoa é reduzido de R\$ 1,00 para cada pessoa que exceder 35. Determine o tamanho do grupo para o qual a receita da empresa é máxima.

Solução

Seja R a receita da empresa. Temos:

$$R = (\text{número de pessoas no grupo})(\text{preço por pessoa})$$

A variável x poderia ser usada para designar o número total de pessoas no grupo, mas é mais conveniente chamar de x o número de pessoas que exceder de 35. Nesse caso,

$$\text{Número de pessoas no grupo} = 35 + x$$

e

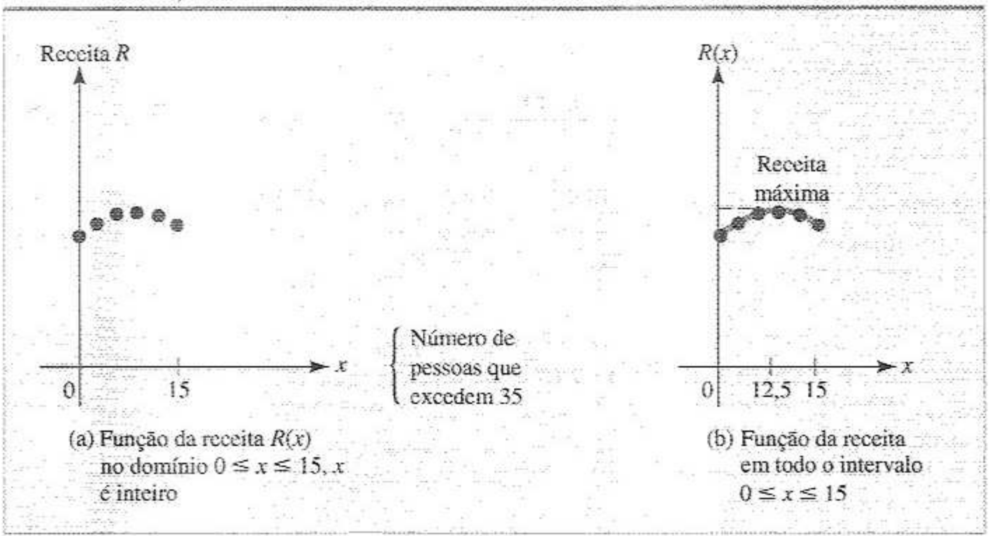
$$\text{Preço por pessoa} = 60 - x$$

e, portanto, a função de receita é

$$R(x) = (35 + x)(60 - x)$$

Como o número total de pessoas não pode ser maior que 50 nem menor que 35, o objetivo é maximizar $R(x)$ para um número inteiro positivo x no intervalo $0 \leq x \leq 15$ (veja Figura 3.52a). Entretanto, para podermos usar os métodos do cálculo, trabalhamos com uma função *contínua* $R(x) = (35 + x)(60 - x)$ definida no intervalo $0 \leq x \leq 15$ (veja Figura 3.52b).

FIGURA 3.52 Gráfico da função de receita $R(x) = (35 + x)(60 - x)$.



A derivada

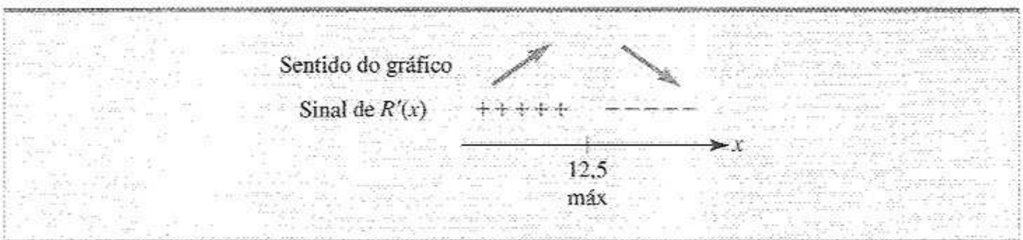
$$R'(x) = (35 + x)(-1) + (60 - x)(1) = 25 - 2x$$

é nula para $x = 12{,}5$. Como

$$R(0) = 2.100 \qquad R(12{,}5) = 2.256{,}25 \qquad R(15) = 2.250$$

chegamos à conclusão de que o máximo absoluto de $R(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 15$ ocorre para $x = 12{,}5$.

Como x representa um certo número de pessoas, deve ser um número inteiro. Assim, $x = 12{,}5$ não pode ser a solução deste problema prático de otimização. Para determinar o valor *inteiro* ótimo de x, observe que R é uma função crescente para $0 < x < 12{,}5$ e uma função decrescente para $x > 12{,}5$, como mostra o diagrama de setas a seguir (veja também a Figura 3.52b).



O valor inteiro ótimo de x deve ser, portanto, $x = 12$ ou $x = 13$. Como

$$R(12) = 2.256 \qquad \text{e} \qquad R(13) = 2.256$$

concluímos que a receita da empresa de turismo será máxima quando o grupo contiver 12 ou 13 pessoas a mais que 35, ou seja, quando o grupo for composto por 47 ou 48 pessoas. A receita, nesse caso, será R$ 2.256,00.

Controle de Estoque

O controle de estoque é um problema muito comum no mundo dos negócios. Para cada remessa de matérias-primas, o fabricante tem que pagar uma taxa de transporte. Quando as matérias-primas chegam, devem permanecer em estoque até serem utilizadas, o que resulta em um certo custo de armazenamento. Quando uma grande quantidade de matérias-primas é adquirida de cada vez, o número de remessas é menor, o que diminui os gastos de transporte, mas o custo de armazenamento aumenta. Por outro lado, quando são feitas pequenas encomendas, os gastos com transporte aumentam, porque um número maior de remessas é necessário, mas os custos de armazenamento diminuem. O Exemplo 3.5.7 mostra de que forma os métodos do cálculo podem ser usados para determinar o tamanho das remessas para o qual o custo total é o menor possível.

EXEMPLO 3.5.7

Um fabricante de bicicletas compra 6.000 pneumáticos por ano de um distribuidor. A taxa de transporte é R$ 20,00 por encomenda, o custo de armazenamento é 96 centavos por pneu por ano e cada pneu custa R$ 5,75. Suponha que a demanda de pneus se mantenha constante durante todo o ano e cada remessa seja entregue no momento em que o estoque se esgotou. Quantos pneus o fabricante de bicicletas deve encomendar de cada vez para minimizar o custo?

Solução

O objetivo é minimizar o custo total, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Custo total} = \text{custo de armazenamento} + \text{custo de transporte} + \text{custo de aquisição}$$

Seja x o número de pneus em cada remessa e $C(x)$ o custo total correspondente em reais. Nesse caso,

$$\text{Custo de transporte} = (\text{custo de transporte por semana})(\text{número de remessas})$$

Como 6.000 pneus são encomendados durante o ano e cada remessa contém x pneus, o número de remessas é $\dfrac{6.000}{x}$ e, portanto,

$$\text{Custo de transporte} = 20\left(\frac{6.000}{x}\right) = \frac{120.000}{x}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\text{Custo de aquisição} &= (\text{número total de pneus})(\text{preço de um pneu})\\ &= 6.000(5{,}75) = 34.500\end{aligned}$$

O cálculo do custo de armazenamento é um pouco mais complicado. Quando uma remessa chega, todos os x pneus são armazenados e passam a ser retirados a uma taxa constante. O estoque diminui de forma linear até que não restam mais pneus, momento em que uma nova remessa é recebida. O processo está ilustrado na Figura 3.53a. Por razões óbvias, esta forma de gerenciar o estoque é conhecida como *just-in-time* (bem a tempo, em português).

13 EXPLORE!

Escreva a função de custo do Exemplo 3.5.7 supondo que o custo de transporte por remessa seja q. Plote a função de custo para q = 10, 15, 20 e 25, usando uma janela de [0, 6.000]500 por [30.000, 40.000]5.000. Observe a diferença entre as curvas para diferentes valores de q. Determine o custo mínimo em cada caso. Descreva como varia o mínimo quando q varia.

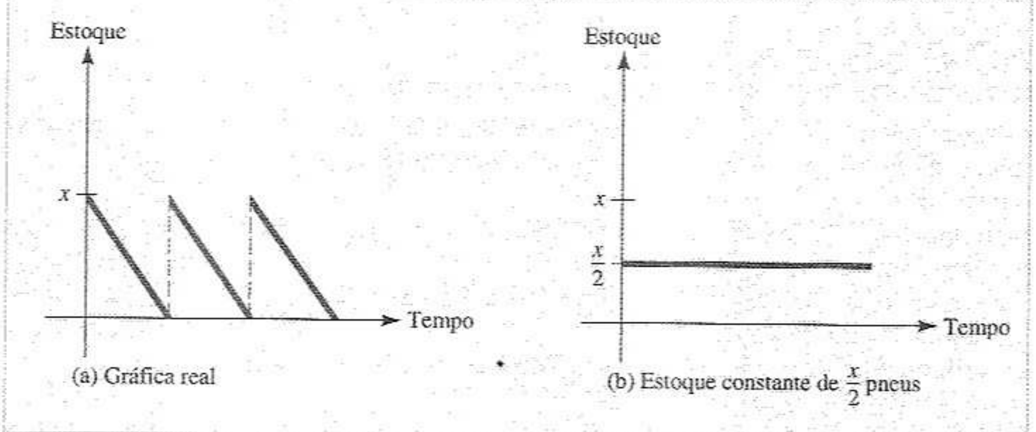


FIGURA 3.53 Gráficos de estoque.

O número médio de pneus armazenados durante o ano é $x/2$ e o custo anual de armazenamento destes pneus é o mesmo que se $x/2$ pneus fossem mantidos em estoque durante todo o ano (veja Figura

3.53b). (Esta afirmação, embora razoável, não é óbvia; o leitor tem todo o direito de exigir uma prova. Esta prova, porém, terá que esperar até o Capítulo 5, pois exige o uso do cálculo integral.) Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}\text{Custo de armazenamento} &= \text{(número médio de pneus armazenados)(custo de armazenamento por pneu)}\\ &= \frac{x}{2}(0{,}96) = 0{,}48x\end{aligned}$$

Combinando as equações anteriores, temos:

$$C(x) = \underbrace{0{,}48x}_{\substack{\textit{custo de}\\ \textit{armazenamento}}} + \underbrace{\frac{120.000}{x}}_{\substack{\textit{custo de}\\ \textit{transporte}}} + \underbrace{34.500}_{\substack{\textit{custo de}\\ \textit{aquisição}}}$$

e o objetivo é determinar o mínimo absoluto de $C(x)$ no intervalo

$$0 < x \leq 6.000$$

A derivada de $C(x)$ é

$$C'(x) = 0{,}48 - \frac{120.000}{x^2}$$

que se anula para

$$x^2 = \frac{120.000}{0{,}48} = 250.000 \qquad \text{ou} \qquad x = \pm 500$$

Como $x = 500$ é o único número crítico no intervalo de interesse $0 < x \leq 6.000$, podemos usar o teste da derivada segunda para extremos absolutos. A derivada segunda da função de custo é

$$C''(x) = \frac{240.000}{x^3}$$

que é positiva para $x > 0$. Assim, o mínimo absoluto do custo total $C(x)$ no intervalo $0 < x \leq 6.000$ ocorre para $x = 500$. Isto significa que o fabricante deve encomendar os pneus em lotes de 500. O gráfico de $C(x)$, incluído apenas para fins ilustrativos, aparece na Figura 3.54.

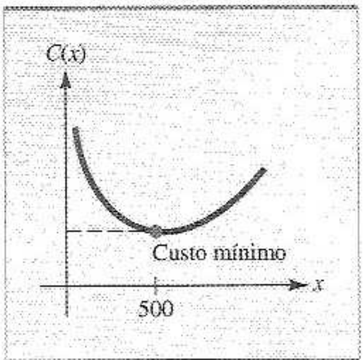


FIGURA 3.54 Gráfico da função de custo total $C(t) = 0{,}48x + \dfrac{120.000}{x} + 34.500$.

NOTA Como a derivada do preço total de compra dos pneus no Exemplo 3.5.7 era nula, já que supusemos que o preço de compra se manteve constante durante todo o processo, esta componente do custo não teve nenhuma influência na solução. Em geral, os economistas fazem distinção entre os **custos fixos** (como o preço de compra dos pneus no exemplo que acabamos de discutir) e os **custos variáveis** (como os custos de armazenamento e transporte). Para minimizar o custo total, basta minimizar a soma dos custos variáveis. ■

PROBLEMAS | 3.5

1. Determine o número que excede o próprio quadrado do maior valor possível. [*Sugestão:* determine o número x para o qual $f(x) = x - x^2$ é mínima.]
2. Determine o número que é excedido pela própria raiz quadrada do maior valor possível.
3. Determine dois números positivos cuja soma é 50 e cujo produto é o maior possível.
4. Determine dois números positivos x e y cuja soma é 30 e tais que o produto xy^2 é o maior possível.
5. **VENDAS A VAREJO** Uma loja está vendendo um *videogame* por R$ 40,00 a unidade e por este preço tem vendido 50 unidades por mês. O dono da loja quer aumentar o preço do jogo e calcula que, para cada R$ 1,00 de aumento do preço, 3 unidades a menos serão vendidas por mês. Se o armazenamento de cada unidade custa à loja R$ 25,00, por que preço deve ser vendido o jogo para que o lucro seja máximo?
6. **VENDAS A VAREJO** Uma livraria pode conseguir um certo livro de uma editora por um preço de R$ 3,00 o exemplar. A livraria vem oferecendo o livro pelo preço de R$ 15,00 o exemplar e, por este preço, tem vendido 200 exemplares por mês. A livraria pretende diminuir o preço para aumentar as vendas e estima que, para cada redução de R$ 1,00 no preço do livro, 20 livros a mais serão vendidos por mês. Por que preço a livraria deve vender o livro para que o lucro seja o maior possível?
7. **PRODUTIVIDADE AGRÍCOLA** Um fazendeiro de São Paulo calcula que, se plantar 60 pés de laranja, cada árvore

produzirá em média 400 laranjas. A produtividade diminui de 4 laranjas por árvore para cada árvore a mais que é plantada no mesmo terreno. Quantas árvores o fazendeiro deve plantar para maximizar a produção?

8. **COLHEITA** Os fazendeiros conseguem vender 1 kg de batatas por R$ 2,00 no primeiro dia do ano, mas, depois disso, o preço cai à razão de 2 centavos por quilo por dia. No dia 1º de janeiro, um fazendeiro tem 80 kg de batatas no campo e calcula que a produção esteja aumentando à razão de 1 kg por dia. Em que dia o fazendeiro deve colher as batatas para maximizar a receita?

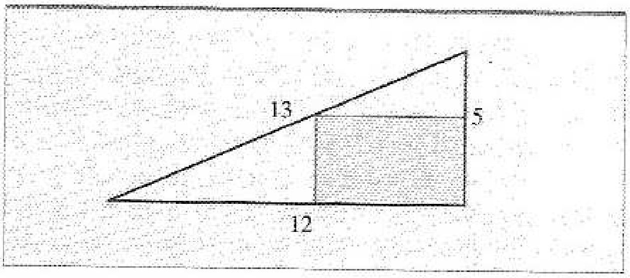
9. **CONSTRUÇÃO DE CERCAS** A prefeitura de um município pretende construir um parque retangular, cercado, com uma área de 3.600 metros quadrados. Que forma deve ter o parque para que o comprimento da cerca seja mínimo?

10. **CONSTRUÇÃO DE CERCAS** Existem 320 metros de cerca disponíveis para cercar um terreno retangular. Como deve ser cercado o terreno para que a área seja a maior possível?

11. Demonstre que, entre todos os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é o que possui a maior área.

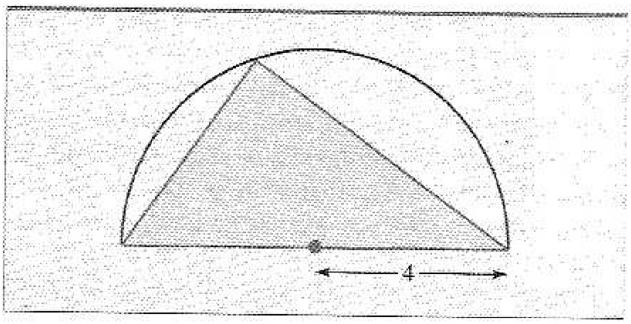
12. Demonstre que, entre todos os retângulos com a mesma área, o quadrado é o que possui o menor perímetro.

13. Um retângulo é inscrito em um triângulo retângulo, como mostra a figura a seguir. Se os lados do triângulo são 5, 12 e 13, quais são as dimensões do retângulo inscrito com a maior área possível?



PROBLEMA 13

14. Um triângulo retângulo é posicionado com a hipotenusa sobre o diâmetro de uma circunferência, como na figura a seguir. Se o raio da circunferência é 4, quais são as dimensões do triângulo de área máxima?



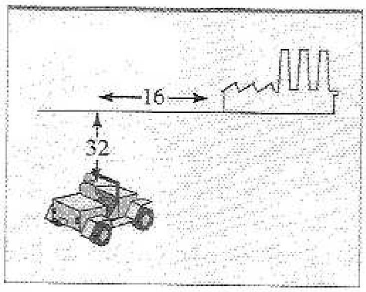
PROBLEMA 14

15. **CUSTO DE CONSTRUÇÃO** Um carpinteiro recebeu a missão de construir uma caixa aberta de fundo quadrado. O material usado para fazer os lados da caixa custa R$ 3,00 o metro quadrado e o material usado para fazer o fundo custa R$ 4,00 o metro quadrado. Quais são as dimensões da caixa de maior volume que pode ser construída por R$ 48,00?

16. **CUSTO DE CONSTRUÇÃO** Uma caixa fechada de fundo quadrado tem um volume de 250 metros cúbicos. O material usado para fazer a tampa e o fundo da caixa custa R$ 2,00 o metro quadrado e o material usado para fazer os lados custa R$ 1,00 o metro quadrado. A caixa pode ser construída por menos de R$ 300,00?

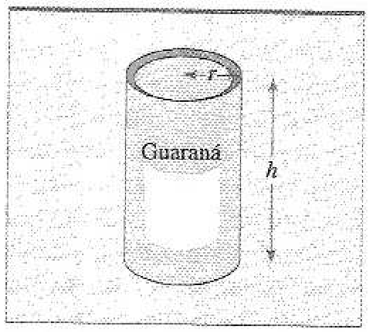
17. **DISTÂNCIA ENTRE VEÍCULOS EM MOVIMENTO** Um caminhão está 300 km a leste de um carro e está viajando para oeste a uma velocidade constante de 30 km/h. Enquanto isso, o carro está viajando para o norte a uma velocidade constante de 60 km/h. Em que instante a distância entre o carro e o caminhão é mínima? [*Sugestão:* para simplificar os cálculos, minimize o *quadrado* da distância entre o carro e o caminhão. O leitor sabe explicar por que esta simplificação pode ser usada?]

18. **ESPIONAGEM** É meio-dia e nosso espião está de volta do espaço sideral (veja o Problema 70 da Seção 2.2), dirigindo um jipe no deserto, no pequeno principado de Alta Loma. O agente se encontra a 32 km do ponto mais próximo de uma estrada pavimentada retilínea. A uma distância de 16 km, nesta mesma estrada, existe uma usina de energia elétrica abandonada na qual um grupo de espiões rivais está mantendo refém o seu chefe, cujo codinome é "N". Se nosso amigo não chegar com o resgate até as 12 h 50 min, os bandidos vão executar N. O jipe pode viajar a 48 km/h na areia do deserto e a 80 km/h na estrada pavimentada. Nosso herói conseguirá chegar a tempo? [*Sugestão:* O objetivo é minimizar o tempo, que é a distância dividida pela velocidade.]



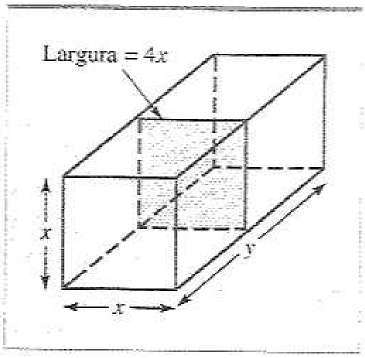
PROBLEMA 18

19. **EMBALAGENS** Use o fato de que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico para determinar as dimensões de uma lata de refrigerante de 330 mL construída com a menor quantidade possível de metal. Compare as dimensões calculadas com as de uma lata de refrigerante comercial. A que você atribui a diferença?



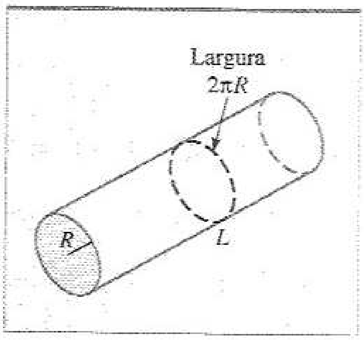
PROBLEMA 19

20. **CUSTO DE INSTALAÇÃO** Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio com 1.200 metros de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 1.500 metros rio abaixo. O custo para estender um cabo no fundo do rio é R$ 25,00 o metro e o custo para estender um cabo em terra é R$ 20,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?
21. **CUSTO DE INSTALAÇÃO** Repita o Problema 20 supondo que a usina de força esteja a 2.000 metros de distância da fábrica.
22. **EMBALAGENS** Uma lata cilíndrica tem capacidade para 65π mL de suco de laranja. O custo por centímetro quadrado para fazer a tampa e fundo de metal é duas vezes maior que o custo por centímetro quadrado para fazer o lado de papelão. Quais são as dimensões da lata mais barata?
23. **EMBALAGENS** Qual é o maior volume possível de uma lata cilíndrica sem tampa feita de 27π centímetros quadrados de chapa metálica?
24. **EMBALAGENS** Uma lata cilíndrica (com tampa) deve ser construída com uma certa área de chapa metálica. Use os métodos do cálculo para encontrar uma relação simples entre o raio e a altura da lata para que o volume seja máximo.
25. **EMBALAGENS** Pretende-se construir um recipiente cilíndrico, sem tampa, com um volume dado. O custo do material usado para fazer o fundo é 3 centavos por centímetro quadrado e o do material usado para fazer o lado é 2 centavos por centímetro quadrado. Use os métodos do cálculo para encontrar uma relação simples entre o raio e a altura do recipiente para que o custo seja mínimo.
26. **DIAGRAMAÇÃO** Uma gráfica recebe uma encomenda para imprimir um cartaz retangular com 25 centímetros quadrados de área impressa e margens de 2 centímetros de cada lado e 4 centímetros em cima e embaixo. Quais são as dimensões do menor pedaço de papel que pode ser usado para fazer o cartaz? [*Sugestão:* Se as variáveis forem mal escolhidas, o problema se tornará desnecessariamente complicado.]
27. **CUSTO DE PRODUÇÃO** Uma fábrica de produtos de plástico recebeu uma encomenda para fabricar 8.000 pranchas de isopor. A firma possui 10 máquinas, cada uma das quais com capacidade para produzir 30 pranchas por hora. O custo de programar as máquinas para fabricar as pranchas é de R$ 20,00 por máquina. As máquinas são automáticas e necessitam apenas de um supervisor que ganha R$ 15,00 por hora.
    a. Quantas máquinas devem ser usadas para minimizar o custo de produção?
    b. Quanto ganhará o supervisor pelo trabalho se o número ideal de máquinas for usado?
    c. Qual será o custo para programar as máquinas?
28. **CONTROLE DE ESTOQUE** Uma firma de eletrônica usa 600 caixas de circuitos integrados por ano. Cada caixa custa R$ 1.000,00. O custo para armazenar uma caixa durante um ano é 90 centavos e o custo de cada encomenda é R$ 30,00. Quantas caixas a firma deve encomendar de cada vez para minimizar o custo total? (Admita que os circuitos são usados com a mesma rapidez durante o ano inteiro e que as encomendas são recebidas no instante em que os circuitos da remessa anterior se esgotaram.)
29. **CONTROLE DE ESTOQUE** Uma loja pretende vender 800 vidros de perfume este ano. Cada vidro de perfume custa R$ 20,00, o custo de cada encomenda é R$ 10,00 e o custo para manter o perfume em estoque é 40 centavos por vidro por ano. O perfume é consumido com a mesma rapidez durante o ano inteiro e as encomendas são recebidas no instante em que os vidros da encomenda anterior se esgotaram.
    a. Quantos vidros a loja deve encomendar de cada vez para que o custo seja mínimo?
    b. Com que freqüência a loja deve fazer as encomendas do perfume?
30. **CONTROLE DE ESTOQUE** Um fabricante de equipamentos médicos usa 36.000 caixas de circuitos integrados por ano. O custo de cada encomenda é R$ 54,00 e o custo anual de armazenamento é R$ 1,20 por caixa. Os circuitos são usados com a mesma rapidez durante o ano inteiro e as encomendas são recebidas no instante em que os circuitos da remessa anterior se esgotaram.
31. **GERENCIAMENTO DE UMA CONTA** João precisa de R$ 10.000,00 para despesas pessoais por ano, que retira de uma conta de poupança fazendo N saques iguais. Para cada saque é cobrada uma taxa de R$ 8,00 e o dinheiro depositado rende juros de 4% ao ano.
    a. O custo total C de gerenciamento da conta é igual ao custo das transações mais a perda de juros devido aos saques. Expresse C em função de N. [*Sugestão:* Use a relação $1 + 2 + ... + N = N(N + 1)/2$.]
    b. Quantas retiradas João deve fazer por ano para minimizar o custo total de gerenciamento da conta $C(N)$?
32. **CUSTO DE PRODUÇÃO** Cada máquina de uma certa fábrica pode produzir 50 unidades por hora. O custo para preparar as máquinas é R$ 80,00 por máquina e o custo de operação é R$ 5,00 por hora. Quantas máquinas devem ser usadas para produzir 8.000 unidades de modo que o custo seja o menor possível? (Não se esqueça de que a resposta deve ser um número inteiro.)
33. **VENDAS A VAREJO** Um comerciante comprou várias caixas de um certo vinho importado. Quando um vinho envelhece, seu valor aumenta a princípio, mas depois de um certo tempo começa a diminuir. Suponha que daqui a x anos o valor de uma caixa esteja variando à razão de $53 - 10x$ reais por ano. Suponha também que o custo de armazenamento durante todo o período seja de R$ 3,00 por caixa por ano. Em que ocasião o comerciante deve vender o vinho para obter o maior lucro possível?
34. **EMBALAGENS** Pretende-se fazer uma caixa aberta a partir de uma folha quadrada de papelão de 18 centímetros por 18 centímetros removendo um quadrado de cada canto e dobrando as abas para formar os lados. Quais são as dimensões da caixa de maior volume que pode ser construída desta forma?
35. **TARIFAS POSTAIS** De acordo com o regulamento do correio dos Estados Unidos, a soma da largura com o comprimento de um pacote não pode exceder 108 polegadas no caso de uma remessa de quarta classe. Qual é o maior volume de um pacote retangular com dois lados quadrados que pode ser enviado como uma remessa de quarta classe?



PROBLEMA 35

36. TARIFAS POSTAIS Repita o Problema 35 para o caso de um pacote cilíndrico.



PROBLEMA 36

37. CUSTO DE PRODUÇÃO Um fabricante observa que a fabricação de x unidades por dia de um certo produto (para $0 < x < 100$) envolve três custos:

a. Um custo fixo de R\$ 1.200,00 por dia em salários

b. Um custo de produção de R\$ 1,20 por dia por unidade produzida

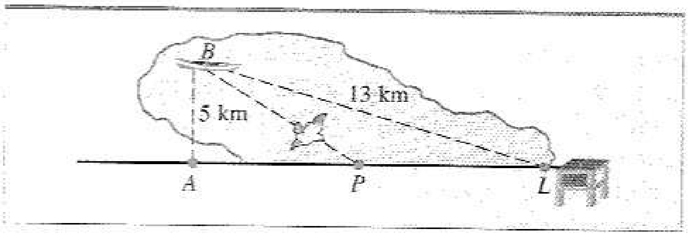
c. Um custo de matéria-prima de $100/x^2$ reais por dia

Expresse o custo total em função de x e determine o nível de produção para o qual o custo total é mínimo.

38. CUSTO DE TRANSPORTE Para velocidades entre 60 e 100 quilômetros por hora, um caminhão faz $1.350/x$ quilômetros por litro quando está viajando a uma velocidade constante de x quilômetros por hora. O óleo diesel custa R\$ 1,12 por litro e o motorista recebe R\$ 12,00 por hora. Qual é a velocidade mais econômica entre 60 e 100 quilômetros por hora?

39. ETOLOGIA Os pombos-correios preferem não sobrevoar grandes extensões de água, possivelmente porque é preciso mais energia para manter a altitude no ar mais denso que existe acima da água fria.* Um pombo é liberado de um barco B que flutua em um lago a 5 quilômetros de um ponto A em terra e a 13 quilômetros do pombal L, como mostra a figura. Supondo que o pombo gaste duas vezes mais energia para voar sobre a água do que sobre a terra, qual deve ser a trajetória do pombo para voltar ao pombal gastando o mínimo possível de energia? Suponha que a margem do lago no trecho de interesse seja uma linha reta e descreva a trajetória como uma linha reta de B a um ponto P na margem, seguida por outra linha reta de P até L.

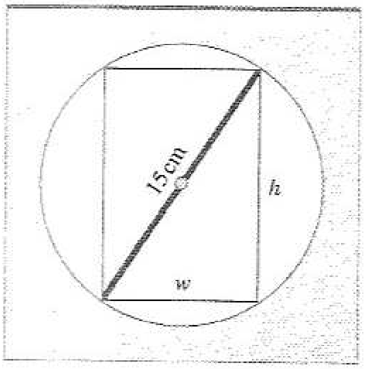
*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Sciences*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, pp. 276-277.



PROBLEMA 39

40. CONSTRUÇÃO CIVIL A resistência mecânica de uma viga retangular é proporcional ao produto da largura w pelo quadrado da profundidade h. Determine as dimensões da viga mais resistente que pode ser fabricada usando uma tora de madeira de 15 centímetros de diâmetro. (Observe a figura.)

41. CONSTRUÇÃO CIVIL A rigidez de uma viga retangular é proporcional ao produto da largura w pelo cubo da profundidade h. Determine as dimensões da viga mais rígida que pode ser fabricada usando uma tora de madeira de 15 centímetros de diâmetro. (Observe a figura.)



PROBLEMAS 40 E 41

42. CUSTO DE TRANSPORTE Um caminhão é contratado para transportar mercadorias de uma fábrica para um depósito. O motorista é pago por hora e, portanto, o gasto com o motorista é inversamente proporcional à velocidade do caminhão. O consumo de combustível é diretamente proporcional à velocidade do caminhão e o preço do combustível permanece constante durante a viagem. Mostre que a velocidade para a qual o custo é mínimo é aquela em que o gasto com o do motorista é igual ao gasto com o combustível.

43. PLANEJAMENTO URBANO Duas fábricas, A e B, estão situadas a 18 quilômetros de distância e emitem, respectivamente 80 ppm (partes por milhão) e 720 ppm de material particulado. A fábrica A está cercada por uma área de segurança com 1 quilômetro de raio, enquanto a área de segurança em torno da fábrica B tem 2 quilômetros de raio. A concentração de poluentes em qualquer outro ponto Q nas vizinhanças das fábricas é inversamente proporcional à distância entre o ponto Q e a fábrica considerada. Em que ponto da estrada que liga as duas fábricas deve ser construída uma casa para que a poluição proveniente das duas fábricas seja a menor possível?

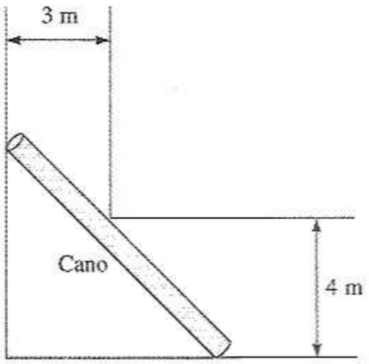
44. PLANEJAMENTO URBANO No Problema 43, suponha que a concentração de material particulado que chega a um ponto Q seja inversamente proporcional ao *quadrado* da distância entre o ponto Q e a fábrica considerada. Com esta alteração, em que ponto da estrada que liga as duas fábricas deve ser construída uma casa para que a poluição proveniente das duas unidades industriais seja a menor possível?

45. CUSTO DE PREPARAÇÃO Em uma certa fábrica, o custo de preparação é diretamente proporcional ao número N de máquinas usadas e o custo de operação é inversamente proporcional a N. Mostre que, quando o custo total é mínimo, o custo de instalação é igual ao custo de instalação.

46. RECICLAGEM Para levantar fundos, uma organização beneficente está recolhendo garrafas usadas, que pretende vender a uma indústria para serem recicladas. Desde que a campanha começou, há 80 dias, a organização já recolheu 24 toneladas de garrafas, pelas quais a indústria se dispõe a pagar 1 centavo por quilo. Como, porém, as garrafas estão se acumulando mais depressa do que podem ser recicladas, a indústria já avisou que vai reduzir de 1 centavo por dia o preço que paga por 100 quilos de garrafas usadas. Supondo que a organização possa continuar a recolher a mesma quantidade de garrafas por dia e que os custos de transporte tornem inviável realizar mais de uma viagem à indústria de garrafas, qual é a data mais favorável para a organização encerrar a campanha e entregar as garrafas?

47. CUSTO DE INSTALAÇÃO A empresa encarregada de instalar o cabo do Exemplo 3.5.5 contratou João Safo como consultor. João, lembrando-se de um problema que estudou no primeiro ano da faculdade, garante que, qualquer que seja a distância a que a fábrica está situada rio abaixo (além de 1.200 metros), será mais econômico fazer com que o cabo chegue à margem oposta 1.200 metros rio abaixo em relação à usina de força. O supervisor, irritado com a aparente ingenuidade de João, argumenta: "Qualquer idiota pode ver que quanto mais afastada estiver a fábrica, mais afastado deve estar o ponto em que o cabo chega à margem oposta. É uma questão de bom senso!" É claro que João não é nenhum idiota, mas será que ele tem razão? Por quê?

48. CONSTRUÇÃO CIVIL João deseja passar com um cano pela esquina que aparece vista de cima na figura sem tirá-lo da horizontal. Qual o comprimento máximo do cano para que a manobra tenha sucesso?



PROBLEMA 48

49. CUSTO DE PRODUÇÃO Uma empresa recebe uma encomenda de q unidades de um certo produto. As máquinas da empresa podem produzir n unidades por hora cada uma. O custo de preparação das máquinas para o trabalho é s reais por máquina e o custo de operação é p reais por hora.

a. Escreva uma expressão para o número de máquinas que devem ser usadas para que o custo total seja o menor possível.

b. Prove que o custo total é mínimo quando o custo de preparação das máquinas é igual ao custo de operação.

50. CONTROLE DE ESTOQUE O modelo de estoque analisado no Exemplo 3.5.7 não é o único possível. Suponha que uma empresa deva fornecer N unidades de um certo produto por período de tempo a uma taxa constante. Suponha ainda que o custo de armazenamento por unidade seja D_1 reais por período de tempo e que o custo fixo seja D_2 reais por unidade. Se o produto é fabricado a uma taxa constante de m unidades por período de tempo (e não resta nenhuma unidade em estoque no final de cada período), é possível demonstrar que o custo total de armazenamento é dado por

$$C_1 = \frac{D_1 x}{2}\left(1 - \frac{N}{m}\right)$$

onde x é o número de unidades produzidas em cada jornada de trabalho.

a. Mostre que o custo médio total por período é

$$C = \frac{D_1 x}{2}\left(1 - \frac{N}{m}\right) + \frac{D_2 N}{x}$$

b. Encontre uma expressão para o número de unidades que devem ser produzidas em cada jornada de trabalho para que o custo médio total por período seja mínimo.

c. O número encontrado no problema de estoque do Exemplo 3.5.7 é, às vezes, chamado de **lote econômico de compra (LEC)**, enquanto o número encontrado do item (b) deste problema é chamado de **lote econômico de produção (LEP)**. As técnicas modernas de gerenciamento de estoques utilizam modelos muito mais sofisticados, mas elementos dos modelos associados ao LEC e ao LEP ainda são muito importantes. O gerenciamento *just-in-time* discutido no Exemplo 3.5.7, por exemplo, combina muito bem com a filosofia de gerenciamento de produção dos japoneses. Leia a respeito dos métodos de produção dos japoneses e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito das razões pelas quais os japoneses consideram indesejável o uso de espaço para o armazenamento de materiais.*

51. IMPOSTOS O **monopolista** é um fabricante que tem o poder de manipular o preço de uma mercadoria de modo a maximizar o lucro. Quando o governo cobra imposto sobre a produção, o imposto passa a ser um dos componentes de custo e o monopolista se vê forçado a decidir que parcela do imposto deve absorver e que parte deve repassar ao consumidor.

Um certo monopolista estima que, quando x unidades de um certo produto são fabricadas, o custo total é $C(x) = \frac{7}{8}x^2 + 5x + 100$ reais e o preço de venda do produto é $p(x) = 15 -$

*O leitor pode iniciar sua pesquisa com o texto de Philip E. Hicks *Industrial Engineering and Management: A New Perspective*, New York: McGraw-Hill, 1994, 144-170.

$\frac{3}{8}x$ reais a unidade. Suponha que o governo estabeleça um imposto de t reais para cada unidade produzida.

a. Mostre que o lucro é maximizado para $x = \frac{2}{5}(10 - t)$.

b. O governo sabe que o monopolista fixará a produção de modo a maximizar o lucro total. Qual deve ser o valor escolhido para t de modo a que a receita com o imposto seja máxima?

c. Se valor escolhido para o imposto é o calculado no item (b), qual é a parcela do imposto absorvida pelo monopolista e qual é a parcela repassada ao consumidor?

d. Leia a respeito de impostos e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre o efeito dos impostos sobre o consumo.*

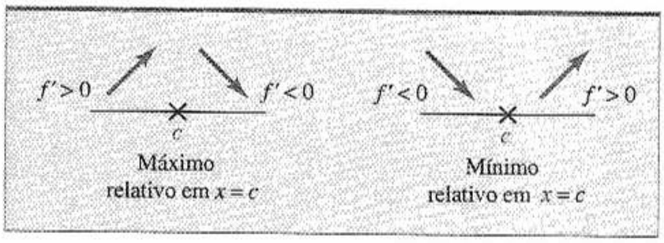
52. PRODUTIVIDADE MÉDIA A produção Q de uma certa fábrica é função do número L de homens-horas utilizados. Use os métodos do cálculo para mostrar que, quando a produção média por homem-hora é máxima, a produção média é igual à produção marginal por homem-hora. [*Sugestão*: a produção marginal por homem-hora é a derivada da produção Q em relação ao número de homens-horas L.] Suponha que o ponto crítico da função produção média seja um máximo absoluto e não um mínimo absoluto.

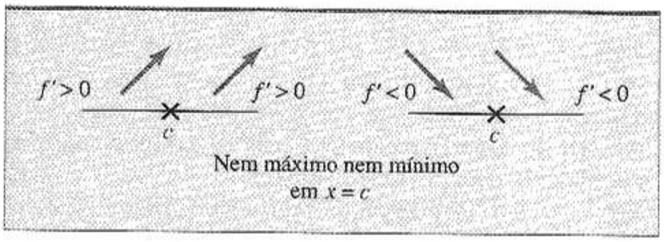
*O leitor pode dar início à sua pesquisa consultando as seguintes referências: Robert Eisner, *The Misunderstood Economics: What Counts and How to Count It*, Boston, MA: Harvard Business School Press, 1994, pp. 196-199; Robert H. Frank, *Microeconomics and Behavior*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1994, pp. 656-657.

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

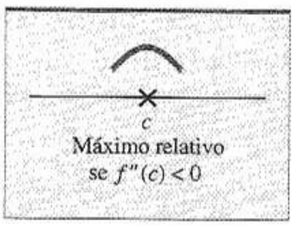
RESUMO DO CAPÍTULO

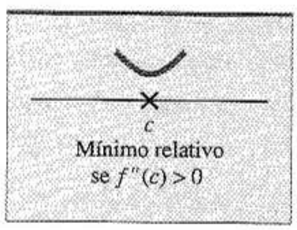
f crescente: $f'(x) > 0$ (Seção 3.1)
f decrescente: $f'(x) < 0$ (Seção 3.1)
Ponto crítico: $(c, f(c))$, onde $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe (Seção 3.1)
Máximos e mínimos relativos (Seção 3.1)
Teste da derivada primeira para extremos relativos: (Seção 3.1)
Se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, então





Ponto de retornos decrescentes (Seção 3.2)
Concavidade: (Seção 3.2)
Para cima se $f'(x)$ está aumentando; logo, $f''(x) > 0$
Para baixo se $f'(x)$ está diminuindo; logo $f''(x) < 0$
Ponto de inflexão: ponto de um gráfico onde a concavidade muda (Seção 3.2)
Teste da derivada segunda para extremos relativos: (Seção 3.2)
Se $f'(c) = 0$, então



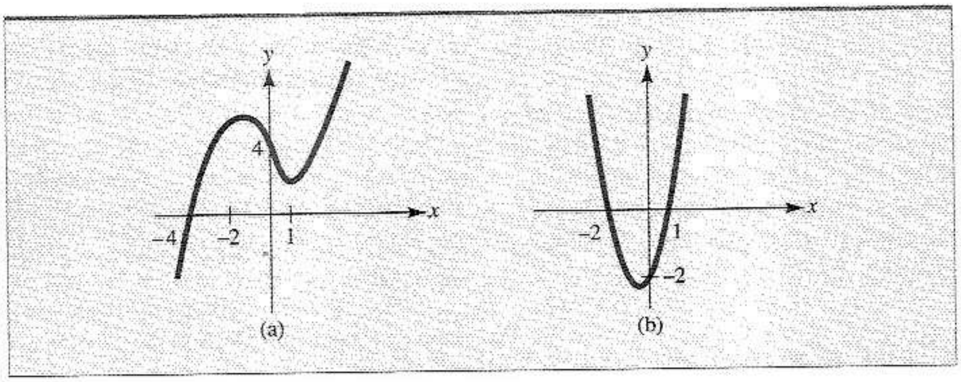


Assíntota vertical (Seção 3.3)
Assíntota horizontal (Seção 3.3)
Máximos e mínimos absolutos (Seção 3.4)
Propriedade dos valores extremos: (Seção 3.4)
Os extremos absolutos de uma função contínua no intervalo fechado $a \le x \le b$ ocorrem em um número crítico em $a < x < b$ ou em um dos pontos extremos do intervalo (a ou b).
Teste da derivada segunda para extremos absolutos:
Se $f(x)$ possui apenas um número crítico $x = c$ em um intervalo I, $f(c)$ é um máximo absoluto em I se $f''(c) < 0$ e um mínimo absoluto se $f''(c) > 0$.
O lucro $P(q) = R(q) - C(q)$ é máximo quando a receita marginal é igual ao custo marginal: $R'(q) = C'(q)$. (Seção 3.4)
O custo médio $A(q) = \frac{C(q)}{q}$ é mínimo quando o custo médio é igual ao custo marginal: $A(q) = C'(q)$. (Seção 3.4)

Elasticidade da demanda $q = D(p)$: $E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$
Níveis de elasticidade da demanda:
inelástica se $|E(p)| < 1$
elástica se $|E(p)| > 1$
elasticidade unitária se $|E(p)| = 1$
Modelos de controle de estoque

Verificação do Capítulo 3

1. Das duas curvas mostradas na figura, uma é a curva de uma função $f(x)$ e a outra é a curva da derivada, $f'(x)$. Determine qual é a curva da derivada e justifique sua resposta.



2. Determine os intervalos nos quais cada uma das funções a seguir é crescente e decrescente e determine se cada número crítico corresponde a um máximo relativo, a um mínimo relativo ou a nem uma coisa nem outra.

   a. $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 5$

   b. $f(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 5$

   c. $g(t) = \dfrac{t}{t^2 + 9}$

   d. $g(x) = \dfrac{4 - x}{x^2 + 9}$

3. Determine os intervalos em que a concavidade da curva de cada uma das funções é para cima ou para baixo e a coordenada x (ou t) de cada ponto de inflexão.

   a. $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 2x - 5$

   b. $f(x) = 3x^5 + 20x^4 - 50x^3$

   c. $f(t) = \dfrac{t^2}{t - 1}$

   d. $g(t) = \dfrac{3t^2 + 5}{t^2 + 3}$

4. Determine todas as assíntotas verticais e horizontais da curva de cada uma das funções.

   a. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

   b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

   c. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x^2 + x - 3}$

   d. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5. Desenhe a curva de cada uma das funções, levando em conta todas as características importantes, como pontos de interseção com os eixos x e y, assíntotas, máximos e mínimos, pontos de inflexão, cúspides e tangentes verticais.

   a. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

   b. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

   c. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}$

   d. $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{(x - 1)^2}$

6. Desenhe a curva de uma função $f(x)$ com as seguintes propriedades:

   a. $f'(x) > 0$ para $x < 0$ e para $0 < x < 2$

   b. $f'(x) < 0$ para $x > 2$

   c. $f'(0) = f'(2) = 0$

   d. $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e para $x > 1$

   e. $f''(x) > 0$ para $0 < x < 1$

   f. $f(-1) = f(4) = 0; f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$

7. **EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA** Um funcionário dos correios chega ao trabalho às 6 h e t horas depois separou aproximadamente $f(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t$ cartas. Em que instante durante o período de 6 h às 10 h o funcionário está trabalhando com eficiência máxima?

8. **MAXIMIZAÇÃO DO LUCRO** Um fabricante pode produzir relógios digitais por um custo unitário de R$ 20,00. Estima-se que, se o preço de venda for x reais, $120 - x$ relógios serão vendidos por mês. Que preço o fabricante deve cobrar para maximizar o lucro?

9. **CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO** A concentração de um medicamento no sangue de um paciente t horas depois de injetado é dada por

$$C(t) = \frac{0{,}05t}{t^2 + 27}$$

miligramas por centímetro cúbico.

   a. Desenhe a curva da função de concentração.

   b. Em que instante a concentração está diminuindo mais depressa?

   c. O que acontece com a concentração a longo prazo (quando $t \to +\infty$)?

10. **POPULAÇÃO DE BACTÉRIAS** Estima-se que uma colônia de bactérias tem uma população de

$$P(t) = \frac{15t^2 + 10}{t^3 + 6} \quad \text{milhões}$$

t horas após a introdução de uma toxina.

a. Qual é a população no instante em que a toxina é introduzida?

b. Em que instante a população é máxima? Qual é esta população?

c. Desenhe a curva da população em função do tempo. O que acontece com a população a longo prazo (quando $t \to +\infty$)?

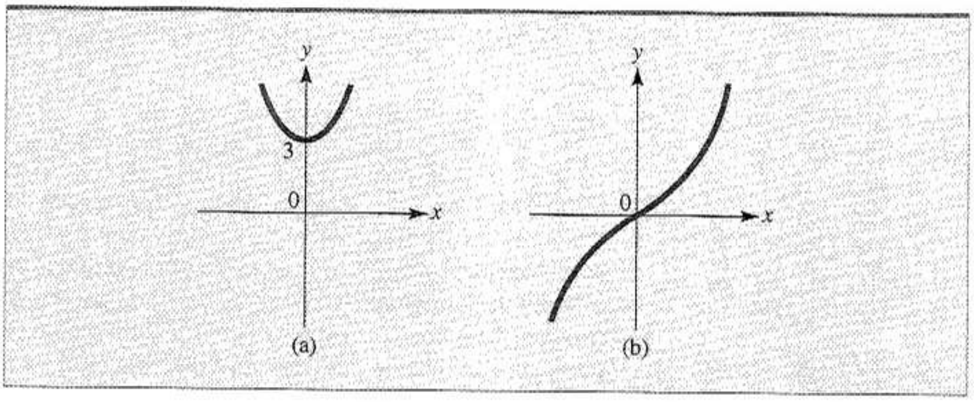
Problemas de Revisão

Nos Problemas 1 a 10, determine em que intervalos a função dada é crescente e decrescente e em que intervalos a concavidade é para cima e para baixo. Em seguida, desenhe a curva da função, levando em conta todas as características importantes, como pontos de interseção com os eixos x e y, assíntotas, máximos e mínimos, pontos de inflexão, cúspides e tangentes verticais.

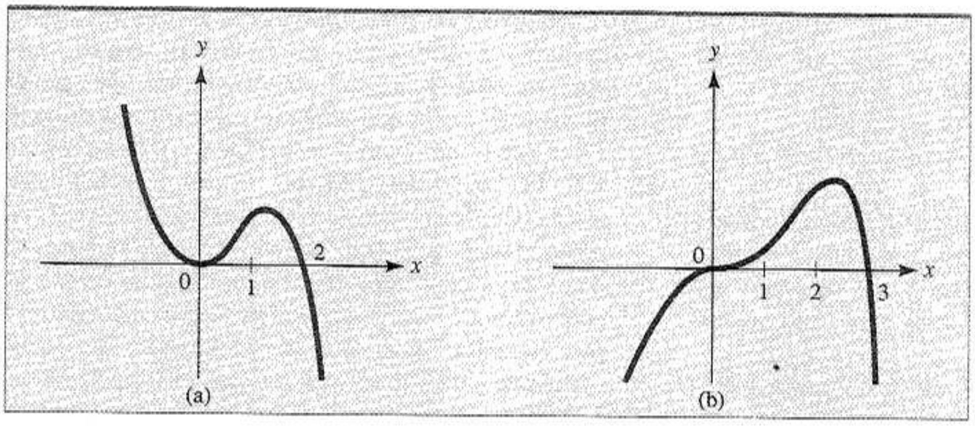
1. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$
2. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
3. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 12x + 17$
4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
5. $f(t) = 3t^5 - 20t^3$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$
7. $g(t) = \dfrac{t^2}{t + 1}$
8. $G(x) = (2x - 1)^2(x - 3)^3$
9. $F(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + 2$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

Nos Problemas 11 e 12, uma das duas curvas mostradas é a curva de uma função f(x) e a outra é a curva da derivada, f′(x). Determine qual é a curva da derivada e justifique sua resposta.

11.



12.



Nos Problemas 13 a 16, a derivada $f'(x)$ de uma função é dada. Use esta informação para classificar cada número crítico de $f(x)$ como máximo relativo, mínimo relativo ou nem uma coisa nem outra.

13. $f'(x) = x^3(2x-3)^2(x+1)^5(x-7)$

14. $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2(x^2+1)}$

15. $f'(x) = \dfrac{x(x-2)^2}{x^4+1}$

16. $f'(x) = \sqrt[3]{x}(3-x)(x+1)^2$

Nos Problemas 17 a 20, desenhe a curva de uma função f com todas as propriedades especificadas.

17. **a.** $f'(x) > 0$ para $x < 0$ e para $x > 5$
b. $f'(x) < 0$ para $0 < x < 5$
c. $f''(x) > 0$ para $-6 < x < -3$ e para $x > 2$
d. $f''(x) < 0$ para $x < -6$ e para $-3 < x < 2$

18. **a.** $f'(x) > 0$ para $x < -2$ e para $-2 < x < 3$
b. $f'(x) < 0$ para $x > 3$
c. $f'(-2) = 0$ and $f'(3) = 0$

19. **a.** $f'(x) > 0$ para $1 < x < 2$
b. $f'(x) < 0$ para $x < 1$ e para $x > 2$
c. $f''(x) > 0$ para $x < 2$ e para $x > 2$
d. $f'(1) = 0$ e $f'(2)$ não existe.

20. **a.** $f'(x) > 0$ para $x < 1$
b. $f'(x) < 0$ para $x > 1$
c. $f''(x) > 0$ para $x < 1$ e para $x > 1$
d. $f'(1)$ não existe.

Nos Problemas 21 a 24, determine todos os números críticos da função dada $f(x)$ e use o teste da derivada segunda para determinar se os pontos críticos (se existirem) são máximos relativos ou mínimos relativos.

21. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

22. $f(x) = x(2x-3)^2$

23. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

24. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(x+3)}$

Nos Problemas 25 a 28, determine o máximo absoluto e o mínimo absoluto (se existirem) da função dada no intervalo especificado.

25. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5; -3 \le x \le 3$

26. $f(t) = -3t^4 + 8t^3 - 10; 0 \le t \le 3$

27. $g(s) = \dfrac{s^2}{s+1}; -\dfrac{1}{2} \le s \le 1$

28. $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + 2; x > 0$

29. A derivada de uma certa função é $f'(x) = x(x-1)^2$.
a. Em que intervalos $f(x)$ é crescente? Em que intervalos é decrescente?
b. Em que intervalos a concavidade de $f(x)$ é para cima? Em que intervalos é para baixo?
c. Determine as coordenadas x dos extremos relativos e dos pontos de inflexão de $f(x)$.
d. Desenhe uma possível curva de $f(x)$.

30. OTIMIZAÇÃO Um fazendeiro dispõe de 320 metros de cerca para delimitar um pasto retangular. Quais devem ser as dimensões do curral para que a área seja máxima
a. se os quatro lados do pasto devem ser cercados?
b. se apenas três lados tiverem que ser cercados e o quarto lado for cercado com um muro?

31. LUCRO Um fabricante pode produzir rádios portáteis por um custo unitário de R\$ 5,00 e estima que, se o preço de venda for x reais, serão vendidos $20 - x$ aparelhos por dia. Que preço o fabricante deve cobrar para maximizar o lucro?

32. CONTROLE DO TRÁFEGO Estima-se que, entre meio-dia e 19 h, a velocidade média dos automóveis em uma certa rua é dada por $S(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 45$ quilômetros por hora, onde t é o número de horas após o meio-dia. Em que instante entre meio-dia e 19 h o tráfego é mais rápido? Em que instante entre meio-dia e 19 h o tráfego é mais lento?

33. DISSEMINAÇÃO DE UM BOATO A rapidez com que um boato se espalha em uma comunidade de P pessoas é proporcional ao produto do número N de pessoas que já ouviram o boato pelo número de pessoas que ainda não o ouviram. Mostre que o boato se espalha com máxima rapidez no instante em que metade das pessoas ainda não ouviu o boato.

34. CUSTO DE FABRICAÇÃO Uma caixa de base retangular deve ser construída com dois materiais. O material usado nos lados e no fundo da caixa custa R\$ 2,00/cm³ e o material da tampa custa R\$ 3,00/cm³. Se a caixa deve ter um volume de 1.215 cm³ e o comprimento da base deve ser duas vezes maior que a largura, quais são as dimensões da caixa que minimizam o custo? Qual é o custo mínimo?

35. CUSTO DE FABRICAÇÃO Um recipiente cilíndrico sem tampa deve ser construído por uma quantia fixa. O custo do material usado para fazer o fundo é 3 centavos por centímetro quadrado e o custo do material usado para fazer o lado é 2 centavos por centímetro quadrado. Use os métodos do cálculo para encontrar uma relação simples entre o raio e a altura do recipiente para que o volume seja o maior possível.

36. LUCRO Um fabricante tem vendido lâmpadas a R\$ 6,00 a unidade; por este preço, os consumidores compram 3.000 lâmpadas por mês. O fabricante quer aumentar o preço e estima que, para cada aumento de R\$ 1,00 no preço, menos 1.000 lâmpadas serão vendidas por mês. As lâmpadas podem ser produzidas a um custo de R$ 4,00 a unidade. Por que preço o fabricante deve vender as lâmpadas para que o lucro seja o maior possível?

37. LUCRO Uma loja de material esportivo pode conseguir bolas de tênis a um preço de R$ 5,00 a caixa. A loja tem vendido as bolas a R$ 10,00 a caixa e, por este preço, vende, em média, 25 caixas por mês. A loja pretende diminuir o preço para aumentar as vendas e estima que, para cada redução de 25 centavos no preço, mais 5 caixas serão vendidas por mês. Por que preço as bolas devem ser vendidas para que o lucro seja máximo?

38. ANÁLISE MARGINAL Um fabricante estima que, se x unidades de uma certa mercadoria forem produzidas, o custo total será $C(x)$ reais, onde

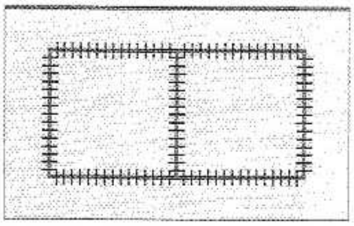
$$C(x) = x^3 - 24x^2 + 350x + 338$$

a. Qual é o nível de produção que minimiza o custo marginal $C'(x)$?

b. Qual é o nível de produção que minimiza o custo médio $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$?

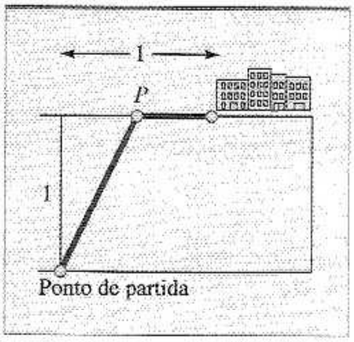
39. ANÁLISE DE CUSTO Estima-se que o custo para construir um edifício de escritórios de n andares seja $C(n) = 2n^2 + 500n + 600$ mil reais. Quantos andares deve ter o edifício para que o custo por andar seja o menor possível? (Não se esqueça de que a resposta deve ser um número inteiro.)

40. CONSTRUÇÃO Um fazendeiro deseja usar 300 metros de cerca para delimitar dois currais retangulares adjacentes, como mostra a figura. Quais devem ser as dimensões dos currais para que a área total seja a maior possível?



PROBLEMA 40

41. TEMPO DE PERCURSO Um homem está de pé na margem de um rio com 1 quilômetro de largura e quer chegar a uma cidade situada na margem oposta, 1 quilômetro rio acima. Para isso, pretende remar em linha reta até um ponto P na margem oposta e caminhar até a cidade. Qual deve ser a localização do ponto P para que o percurso seja coberto no menor tempo possível, sabendo que o homem é capaz de remar a 4 quilômetros por hora e andar a 5 quilômetros por hora?



PROBLEMA 41

42. MERCADO IMOBILIÁRIO Um empresário do setor imobiliário calcula que, se construir 60 casas de luxo em um certo terreno, terá um lucro médio de R$ 47.500,00 por casa. O lucro médio diminuirá de R$ 500,00 por casa para cada casa a mais que for construída no mesmo terreno. Quantas casas o empresário deve construir para auferir o maior lucro possível? (Não se esqueça de que a resposta deve ser um número inteiro.)

43. CUSTO DE PRODUÇÃO Uma empresa americana recebeu uma encomenda para fabricar 400.000 medalhas comemorativas da compra do estado de Louisiana. A firma possui 20 máquinas, cada uma das quais capaz de cunhar 200 medalhas por hora. O custo para preparar as máquinas é R$ 80,00 por máquina e o custo total de operação é de R$ 5,76 por hora. Quantas máquinas devem ser usadas para minimizar o custo de produção das 400.000 medalhas? (Não esqueça de que a resposta deve ser um número inteiro.)

44. ELASTICIDADE DA DEMANDA A equação da demanda de uma certa mercadoria é $q = 60 - 0{,}1p$ (para $0 \leq p \leq 600$).

a. Expresse a elasticidade da demanda em função de p.

b. Calcule a elasticidade da demanda quando o preço é $p = 200$. Interprete a resposta.

c. Para que preço a elasticidade da demanda é igual a -1?

45. ELASTICIDADE DA DEMANDA A equação da demanda de uma certa mercadoria é $q = 200 - 2p^2$ (para $0 \leq p \leq 10$).

a. Expresse a elasticidade da demanda em função de p.

b. Calcule a elasticidade da demanda quando o preço é $p = 6$. Interprete a resposta.

c. Para que preço a elasticidade da demanda é igual a -1?

46. ELASTICIDADE E RECEITA Suponha que $q = 500 - 2p$ unidades de um certo produto sejam vendidas quando o preço é p reais, para $0 \leq p \leq 250$.

a. Determine os intervalos em que a demanda é elástica, inelástica ou de elasticidade unitária em relação ao preço.

b. Use os resultados do item (a) para determinar os intervalos em que a função receita é crescente e decrescente e o preço para o qual a receita é a maior possível.

c. Escreva uma expressão para a função receita e use a derivada primeira para determinar os intervalos em que a função é crescente e decrescente e o preço para o qual a receita é a maior possível.

d. Plote as funções demanda e receita.

47. CRUZEIROS MARÍTIMOS Uma empresa de navegação estima que quando o preço de um camarote de luxo em um cruzeiro marítimo é p milhares de dólares são vendidos q camarotes, onde $q = 300 - 0{,}7p^2$.

a. Determine a elasticidade da demanda de camarotes de luxo.

b. Se o preço atual de um camarote é 8.000 dólares ($p = 8$), a empresa deve aumentar ou diminuir o preço para aumentar a receita?

48. Determine os valores das constantes A, B e C para que a função $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$ tenha um extremo relativo no ponto (2, 11) e um ponto de inflexão no ponto (1, 5). Plote a função $f(x)$ para estes valores das constantes.

49. ARQUITETURA Uma janela tem a forma de um triângulo eqüilátero acima de um retângulo. O retângulo é feito de vidro transparente e transmite duas vezes mais luz que o triângulo, que é feito de vidro colorido. Se a janela inteira tem um perímetro de 2 m, determine as dimensões da janela para que a intensidade da luz que a atravessa seja máxima.

50. EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA Um estudo de eficiência no turno da manhã de uma fábrica mostrou que um operário que chega para trabalhar às 8 h terá montado, em média, $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ receptores de rádio x horas mais tarde. O estudo revelou ainda que, depois de um intervalo de 15 min para descanso, o operário é capaz de montar $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 23x$ receptores de rádio em x horas. Determine para que instante entre as 8 h e o meio-dia deve ser programado o intervalo de descanso de modo que o número de rádios montados entre 8 e 12 h 15 min seja máximo. [*Sugestão:* se o intervalo começar x horas após as 8 horas, restarão $4 - x$ h de trabalho.]

51. CONTROLE DA PRODUÇÃO Um fabricante de brinquedos produz x centenas de uma boneca simples (Lalá) e y centenas de uma boneca de luxo (Lili) de tal forma que $y = \dfrac{82 - 10x}{10 - x}$ para $0 \le x \le 8$. A companhia vende uma Lili pelo *dobro* do preço de uma Lalá. Determine o nível de produção (ou seja, os valores de x e y) para que a receita total com a venda das bonecas seja máxima. Suponha que a empresa consiga vender todas as bonecas que produz.

52. PLATAFORMA DE PETRÓLEO O petróleo de uma plataforma oceânica a 3 quilômetros da costa deve ser bombeado para um reservatório situado no litoral, 8 quilômetros litoral acima. O custo para construir um oleoduto da plataforma até o litoral é 1,5 vez maior do que o custo para construir um oleoduto em terra. Qual deve ser o percurso do oleoduto para que o custo seja mínimo?

53. CONTROLE DE ESTOQUE Através dos postos de gasolina da sua bandeira, uma empresa petrolífera distribui 16.000 mapas rodoviários por ano. O custo de preparar uma máquina para imprimir os mapas é R$ 100,00; além disso, a empresa gasta 6 centavos por ano para imprimir um mapa e 20 centavos por ano para mantê-lo em estoque. Os mapas são fornecidos aos postos com regularidade durante o ano e impressos em lotes iguais, entregues de tal forma que cada lote chega aos postos no momento em que o lote anterior se esgotou. Quantos mapas a empresa deve imprimir em cada lote para minimizar o custo?

54. BIOLOGIA MARINHA Quando um peixe nada rio acima com velocidade v contra uma correnteza constante de velocidade v_w, a energia gasta por unidade de distância pode ser modelada por uma função da forma

$$E(v) = \frac{Cv^k}{v - v_w}$$

onde C é uma constante positiva e $k > 2$ é um número que depende da espécie de peixe considerada.*

a. Mostre que $E(v)$ possui um e apenas um número crítico. Este número corresponde a um máximo relativo ou a um mínimo relativo?

b. Observe que o número crítico do item (a) depende de k. Seja $F(k)$ o número crítico. Desenhe a curva de $F(k)$. O que se pode dizer a respeito de $F(k)$ para grandes valores de k?

55. CONTROLE DE ESTOQUE Uma fábrica recebe matérias-primas em remessas iguais, que chegam a intervalos regulares. O custo de armazenamento das matérias-primas é diretamente proporcional ao tamanho de cada remessa, enquanto o custo de transporte é inversamente proporcional ao tamanho de cada remessa. Mostre que o custo total é mínimo quando o custo de armazenamento e o custo de transporte são iguais.

56. FÍSICO-QUÍMICA Em físico-química, demonstra-se que a pressão P de um gás está relacionada ao volume V e à temperatura T através da *equação de van der Waals*:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

onde a, b, n e R são constantes. A *temperatura crítica* T_c do gás é a temperatura mais alta para a qual as fases gasosa e líquida podem existir como fases separadas.

a. Para $T = T_c$, a pressão P é uma função apenas do volume, $P(V)$. Desenhe a curva de $P(V)$.

b. O volume crítico V_c é o volume para o qual $P'(V_c) = 0$ e $P''(V_c) = 0$. Mostre que $V_c = 3b$.

c. Expresse a pressão crítica $P_c = P(V_c)$ e a temperatura crítica T_c em termos de a, b, n e R.

57. CRISTALOGRAFIA Um problema fundamental da cristalografia é a determinação da **fração de empacotamento** de uma rede cristalina, que é a fração do espaço disponível ocupada pelos átomos da rede, supondo que os átomos se comportem como esferas rígidas. Quando a rede cristalina contém exatamente dois tipos diferentes de átomos, é possível demonstrar que a fração de empacotamento é dada pela expressão**

$$f(x) = \frac{K(1 + c^2x^3)}{(1 + x)^3}$$

onde $x = \dfrac{r}{R}$ é a razão entre os raios, r e R, dos dois tipos de átomos da rede e c e K são constantes positivas.

a. A função $f(x)$ tem um e apenas um número crítico. Calcule este número e use o teste da derivada segunda para classificá-lo como um máximo relativo ou um mínimo relativo.

b. Os valores das constantes c e K e o domínio de $f(x)$ dependem da geometria da rede. No caso do sal de

*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1976, p. 280.

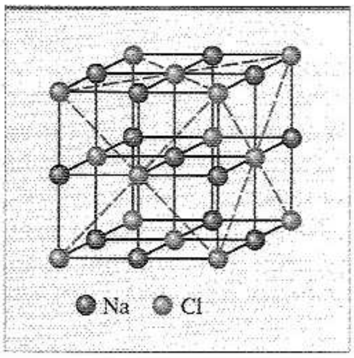
**John C. Lewis and Peter P. Gillis, "Packing Factors in Diatomic Crystals", *American Journal of Physics*, Vol. 61, N.º 5, 1993, pp. 434-438.

cozinha, $c = 1$, $K = \dfrac{2\pi}{3}$ e o domínio é o intervalo $(\sqrt{2} - 1) \leq x \leq 1$. Determine os valores máximo e mínimo de $f(x)$.

c. Repita o item (b) para o caso da β-cristobalita, em que $c = \sqrt{2}$, $K = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{16}$ e o domínio é o intervalo $0 \leq x \leq 1$.

d. O que se pode dizer a respeito da fração de empacotamento $f(x)$ se r é muito maior que K? Responda a esta pergunta calculando $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

e. Leia o artigo citado no problema e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do cálculo e uso dos fatores de empacotamento na cristalografia.



PROBLEMA 57

58. COMPORTAMENTO DOS ELEITORES Após uma eleição para presidente nos Estados Unidos, a fração $h(p)$ de deputados eleitos pelo partido que ganhou a eleição presidencial pode ser modelada pela "regra do cubo":

$$h(p) = \frac{p^3}{p^3 + (1-p)^3} \quad \text{para } 0 \leq p \leq 1$$

onde p é a fração de votos populares recebida pelo candidato que venceu a eleição para presidente.

a. Determine $h'(p)$ e $h''(p)$.

b. Desenhe a curva de $h(p)$.

c. Em 1964, o democrata Lyndon Johnson recebeu 61% dos votos populares. Que porcentagem dos deputados eleitos deveria pertencer ao Partido Democrático, de acordo com a regra do cubo? (A porcentagem real foi 72%.)

d. A regra do cubo tem fornecido resultados muito próximos da realidade em todas as eleições norte-americanas desde 1900. Use a Internet para verificar os resultados destas eleições e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito de suas observações.

59. ELIMINAÇÃO DE REJEITOS Certos rejeitos biológicos perigosos apresentam a propriedade de que o aumento da concentração do substrato (a substância que está sendo transformada por ação de enzimas) tende a inibir a produção dos rejeitos. Este comportamento pode ser descrito pela **equação de Haldane***

$$R(S) = \frac{cS}{a + S + bS^2}$$

onde R é a taxa de aumento da concentração dos rejeitos (ou seja, a rapidez com que as células se multiplicam), S é a concentração do substrato e a, b e c são constantes positivas.

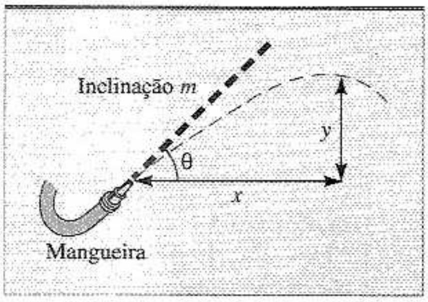
a. Faça um esboço de $R(S)$. A curva parece ter um máximo? Um mínimo? Um ponto de inflexão? O que acontece com a taxa de aumento da concentração de rejeitos quando S aumenta indefinidamente? Interprete suas observações.

b. Leia um artigo a respeito do gerenciamento de rejeitos perigosos e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do uso de modelos matemáticos para desenvolver métodos de eliminação de rejeitos. Um bom lugar para começar é a referência citada no enunciado.

60. COMBATE A INCÊNDIOS Se desprezarmos a resistência do ar, o jato de água emitido por uma mangueira chega a uma altura

$$y = -16(1 + m^2)\left(\frac{x}{v}\right)^2 + mx$$

acima de um ponto situado a 4,8 metros da boca da mangueira, onde m é a inclinação da mangueira e v é a velocidade com que a água deixa a mangueira. Suponha que v seja constante.



PROBLEMA 60

a. Se m também for constante, determine a altura máxima atingida pela água e a distância horizontal atingida pela água (ou seja, o valor de x para $y = 0$).

b. Se m for variável, determine a inclinação para a qual um bombeiro conseguirá atingir o fogo da maior distância possível.

c. Suponha que um bombeiro se encontre a uma distância $x = x_0$ metros da base de um edifício. Se m for variável, qual é o ponto mais alto do edifício que o bombeiro consegue atingir com a água lançada pela mangueira?

61. VIOLÊNCIA URBANA Um estudo* da violência urbana em Detroit, publicado em 1977, revelou que o número médio mensal N_1 de crimes contra a propriedade e o número médio mensal N_2 de crimes pessoais (como estupro e homicídio) estavam relacionados ao preço no varejo p da heroína (em dólares por grama) através das equações

$$N_1 = 3.351p^{0,287} \qquad \text{e} \qquad N_2 = 207{,}8p^{0,349}$$

*Michael D. La Grega, Philip L. Buckingham and Jeffrey C. Evans, *Hazardous Waste Management*, New York: McGraw-Hill, 1994, p. 578.

*As fórmulas dadas neste problema constam da página 170 de UMAP module, citada no item (e). Elas foram apresentadas originalmente por L.P. Silverman e N.L. Spruill no artigo "Urban Crime and the Price of Heroin", *Journal of Urban Economics*, Vol. 4, N.º 1, 1977, pp. 80-103.

Para simplificar o problema, suponha que não haja superposição entre os dois tipos de crime.

a. Determine a elasticidade de N_1 em relação a p. De acordo com este modelo, qual é o aumento percentual dos crimes contra a propriedade quando o preço da heroína aumenta 2%? Qual é o aumento quando o preço aumenta 5%?

b. Responda às mesmas perguntas do item (a) para o caso dos crimes pessoais.

c. Seja $N = N_1 + N_2$ o número total de crimes e suponha que o preço da heroína seja 7 dólares o grama. Determine a elasticidade de N em relação a p e use o resultado para estimar a porcentagem de aumento do número total de crimes se o preço da heroína aumenta 5%.

d. Para que preço p da heroína um aumento de 17% do preço resulta em um aumento de 5% no número total de crimes?

e. Leia o artigo de Yves Nievergelt com o título sugestivo: "Price Elasticity of Demand: Gambling, Heroin, Marijuana, Whiskey, Prostitution and Fish" ("Elasticidade-preço da Demanda: Jogo, Heroína, Maconha, Uísque, Prostituição e Pesca"), *UMAP Modules 1987: Tools for Teaching*, Arlington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1988, pp. 153-181. Em seguida, escreva um ensaio de pelo menos dez linhas com sua opinião a respeito deste tipo de análise socioeconômica.

62. BOTÂNICA Uma plantação experimental contém N plantas anuais, cada uma das quais produzindo S sementes que são plantadas no mesmo local. Em um modelo botânico, o número $A(N)$ de descendentes que sobrevivem até o ano seguinte é dado pela função

$$A(N) = \frac{NS}{1 + (cN)^p}$$

onde c e p são constante positivas.

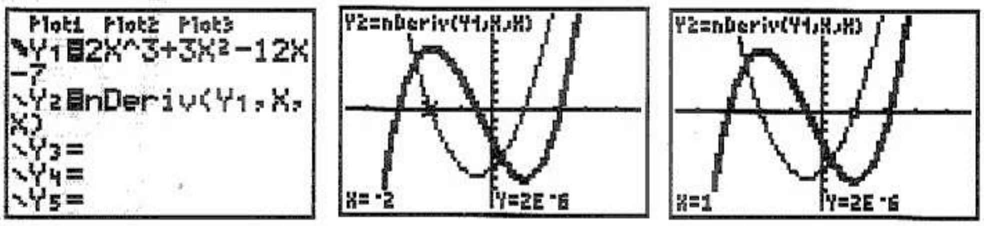
a. Para que valor de N a curva de $A(N)$ atinge o valor máximo? Qual é este valor máximo? Expresse a resposta em termos de S, c e p.

b. Para que valor de N a taxa de sobrevivência $A'(N)$ dos descendentes é mínima?

c. A função $F(N) = A(N)/N$, conhecida como *taxa líquida de reprodução*, é uma medida do número de descendentes que sobrevivem por planta. Determine $F'(N)$ e mostre que, quanto maior o número de plantas, menor o número de descendentes que sobrevivem por planta. Este resultado é conhecido como princípio de *mortalidade dependente da densidade*.

Solução do Exercício EXPLORE! 1

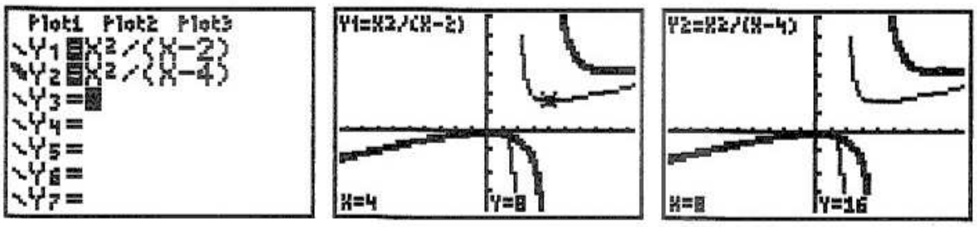
Entre com a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ em Y1 no estilo **BOLD** e com a função $f'(x)$ em Y2, usando a opção de derivada numérica. Plote as duas funções usando uma janela de $[-4.7, 4.7]1$ por $[-20, 20]2$. Use **TRACE** para localizar o ponto em que $f'(x)$ intercepta o eixo x (um valor de y menor que $2E^{-}6 = 0{,}000002$ pode ser considerado nulo).



Observe que $f(x)$ (em negrito) é decrescente entre $x = -2$ e $x = 1$, o mesmo intervalo no qual $f'(x)$ é negativa (a curva está abaixo do eixo x). Nas regiões em que $f(x)$ é crescente (para $x < -2$ e $x > 1$), $f'(x)$ é positiva. Nos pontos em que a derivada é nula, $x = -2$ e $x = 1$, a curva de $f(x)$ passa por um extremo, que, no primeiro caso, é um máximo e, no segundo, é um mínimo.

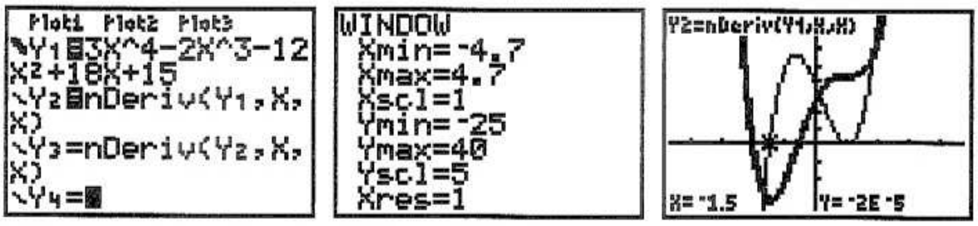
Solução do Exercício EXPLORE! 2

Entre com $f(x) = x^2/(x - 2)$ em Y1 e $g(x) = x^2/(x - 4)$ em Y2, usando o estilo **BOLD**. Use uma janela $[-9.4, 9.4]1$ por $[-20, 30]5$ para mostrar as duas curvas. Qual é a diferença entre elas? O máximo relativo (no ramo da esquerda, antes da assíntota) está na origem das duas curvas. Por outro lado, o mínimo relativo (no ramo da direita) está mais próximo da origem para $f(x)$ (em $x = 4$) do que para $g(x)$ (em $x = 8$). Observe que nas duas curvas o máximo relativo é menor que o mínimo relativo. A função $g(x)$ é decrescente nos intervalos $0 \leq x < 4$ e $4 < x \leq 8$.

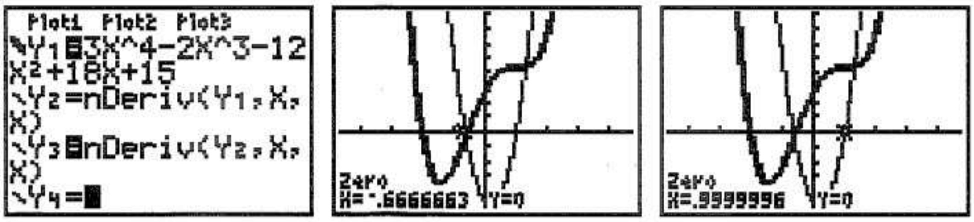


Solução do Exercício EXPLORE! 6

Entre com $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$ em Y1, usando o estilo **BOLD**, e com as funções $y'(x)$ e $y''(x)$ em Y2 e Y3, usando a opção de derivada numérica. Desative Y3 e considere apenas Y1 e Y2, usando a janela decimal modificada que aparece na figura. Os números críticos de $f(x)$ são os zeros de $f'(x)$, $x = -1{,}5$ e $x = 1$; o segundo é uma raiz dupla.

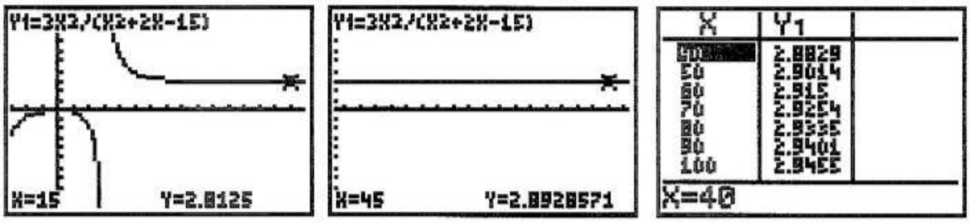


Em seguida, ative Y3 e desative Y2, como mostra a figura a seguir. A curva de Y3, a derivada segunda de $f(x)$, mostra que existem dois pontos de inflexão, em $x = -2/3$ e $x = 1$. A rotina de cálculo de raízes da calculadora pode confirmar que estas são as raízes de $f'(x)$, que coincidem com os pontos em que $f(x)$ muda de concavidade.



Solução do Exercício EXPLORE! 8

Entre com $f(x) = 3x^2/(x^2 + 2x - 15)$ em Y1. Quando a curva é traçada para grandes valores de x, $f(x)$ primeiro se torna ligeiramente menor que 3 e depois se aproxima de 3, deixando claro que $y = 3$ é uma assíntota horizontal. Isto indica que existe um mínimo relativo no ramo direito da curva de $f(x)$? Até que ponto a curva deve ser prolongada para que y assuma um valor maior que 2,9? A tabela da direita da figura que se segue pode ajudar.



PARA PENSAR

MODELANDO UMA EPIDEMIA: MORTES PROVOCADAS PELA AIDS NOS ESTADOS UNIDOS

Os modelos matemáticos são muito usados para estudar doenças infecciosas. Em particular, durante os últimos 20 anos, muitos modelos matemáticos diferentes têm sido propostos para analisar o número de mortes anuais provocadas pela AIDS. Neste ensaio, vamos descrever alguns destes modelos e discutir sua precisão. Antes, porém, convém apresentarmos alguns fatos a respeito da doença.

De 1980 a 1995, o número de vítimas fatais de AIDS nos Estados Unidos aumentou rapidamente de praticamente zero para mais de 51.000. Em meados da década de 1990, parecia que o número de mortes continuaria a aumentar de ano para ano. Entretanto, com o advento de novos tratamentos e medicamentos, o número de mortes nos Estados Unidos diminuiu sensivelmente, com menos de 16.000 vítimas fatais em 2001. Mesmo assim, a tendência futura para o número de mortes por AIDS nos Estados Unidos não é claro. O vírus causador da AIDS se tornou resistente a alguns dos medicamentos usados para combatê-lo; além disso, existem indicações de que muitas pessoas do chamado grupo de risco não estão tomando precauções adequadas para evitar a disseminação a doença. Estes fatores provocarão um aumento no número de mortes provocadas pela AIDS ou os novos medicamentos que estão sendo desenvolvidos conseguirão manter a atual tendência de queda no número de casos fatais?

Ano	Número de Mortes por AIDS nos EUA
1989	27.408
1990	31.120
1991	36.175
1992	40.587
1993	45.850
1994	50.842
1995	51.670
1996	38.296
1997	22.245
1998	18.823
1999	18.249
2000	16.672
2001	15.603

O número total de mortes provocadas pela AIDS nos Estados Unidos de 1989 a 2001 é mostrado na tabela.
FONTE: Centers of Disease Control & Prevention, National Center for HIV, STD, and TB Prevention.

O objetivo da modelagem do número de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos é encontrar uma função $f(t)$ relativamente simples que forneça uma boa aproximação para o número de mortes por AIDS nos Estados Unidos t anos após o ano de 1989. Uma das abordagens mais simples para gerar estas funções é usar a *regressão polinomial*, um método para produzir o polinômio de um certo grau que melhor se ajuste aos dados experimentais. Para usar este método, a primeira coisa a fazer é especificar o grau do polinômio que será usado no ajuste. Quanto maior o grau, melhor a aproximação e mais complicada a função. Suponha que seja escolhido um polinômio do terceiro grau; nesse caso, $f(t)$ é, da forma geral, $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Os coeficientes a, b, c e d da curva procurada são determinados impondo a condição de que a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos experimentais da tabela e os pontos correspondentes do polinômio do terceiro grau $y = f(t)$ seja a menor possível. Os métodos do cálculo para executar este processo de otimização serão apresentados na Seção 7.4. Na prática, porém, os polinômios de regressão são quase sempre obtidos com o auxílio de um computador ou de uma calculadora gráfica. O uso de uma calculadora para ajustar uma função polinomial a dados experimentais é discutido na seção Introdução às Calculadoras, no início deste livro.

É importante notar que não existe nenhuma razão biológica para que um polinômio seja uma boa aproximação para o número de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos durante um ano. Mesmo assim, começamos com estes modelos porque são fáceis de criar. Modelos mais sofisticados, incluindo alguns que se baseiam em argumentos biológicos, podem ser desenvolvidos usando as funções exponenciais que serão estudadas no Capítulo 4.

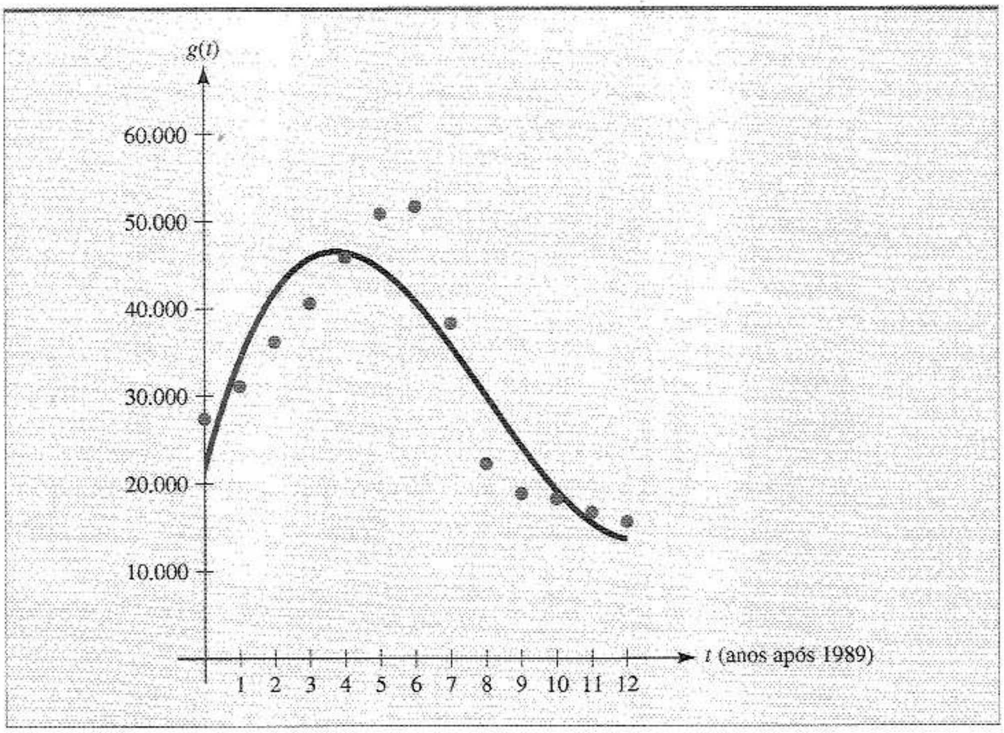


FIGURA 1 Ajuste com um polinômio do terceiro grau.

Vamos examinar os polinômios do terceiro e quarto grau produzidos por regressão polinomial a partir de nossos 13 pontos (t_j, d_j), onde d_j é o número de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos j anos após o ano de 1989. (Nossos dados correspondem a $t_j = 0, 1, \ldots, 12$.) Os cálculos mostram que o polinômio do terceiro grau que mais se aproxima dos dados é

$$g(t) = 107{,}0023t^3 - 2.565{,}0889t^2 + 14.682{,}6031t + 21.892{,}5055$$

Este polinômio foi plotado juntamente com os dados na Figura 1. Cálculos semelhantes mostram que o polinômio do quarto grau que mais se aproxima dos dados é

$$h(t) = 29{,}6957t^4 - 605{,}6941t^3 + 2.801{,}3456t^2 + 1.599{,}5330t + 26.932{,}2873$$

que foi plotado juntamente com os dados na Figura 2. Curvas como as da Figura 1 e da Figura 2 podem ser usadas para analisar novos dados e fazer previsões. Alguns exemplos deste tipo de análise aparecem nos exercícios a seguir.

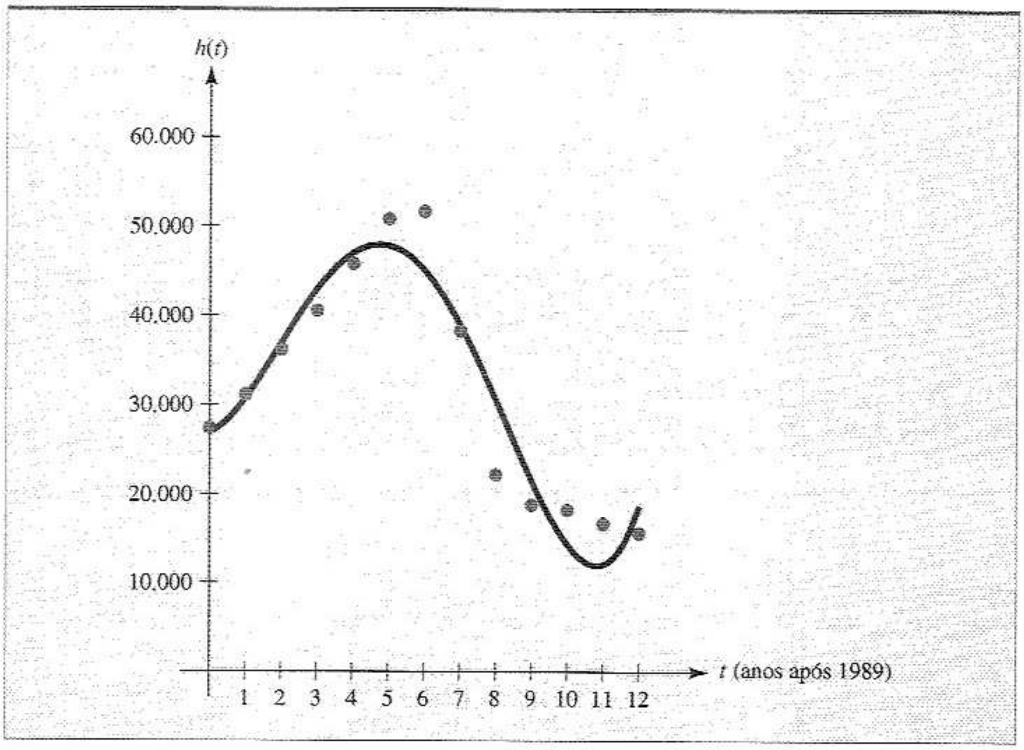


FIGURA 2 Ajuste com um polinômio do quarto grau.

Exercícios

1. Em que período de tempo existe a melhor correspondência entre o polinômio do terceiro grau $g(t)$ e o número de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos? Em que período de tempo existe a pior correspondência? Responda às mesmas perguntas para o polinômio do quarto grau $h(t)$.
2. Determine todos os números críticos do polinômio $g(t)$ para o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 12$. Quais são o maior e o menor número anual de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos previstos por este modelo para o período de 1989 a 2001? Responda às mesmas perguntas para o polinômio $h(t)$. Comente estas previsões.
3. Estime o número de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos em 2004 usando a função $g(t)$ e a função $h(t)$. Compare estas estimativas com o número real de mortes, 15.798, e verifique qual das duas funções proporcionou uma previsão melhor. O que os dois modelos prevêem a respeito do número de mortes causadas pela AIDS nos anos que se seguem a 2002?
4. Por que uma equação linear, como a produzida por uma regressão linear, não é capaz de proporcionar um bom ajuste para o número de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos entre 1989 e 2001?
5. Use uma calculadora gráfica para ajustar aos dados um polinômio do segundo grau $Q(t)$. Responda aos exercícios 2 e 3 para o polinômio $Q(t)$. Comente a respeito da qualidade do ajuste do polinômio aos dados experimentais.
6. Existe um polinômio que concorde exatamente com o número de mortes causadas pela AIDS nos Estados Unidos entre 1989 e 2001? Se a resposta for afirmativa, qual é o grau deste polinômio?

CAPÍTULO | 4

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

SEÇÃO 4.1 | Funções Exponenciais

Dizemos que uma população $Q(t)$ cresce **exponencialmente** quando, ao ser medida a intervalos iguais, a população no final de cada intervalo é igual à população no final do intervalo anterior multiplicada por uma constante maior que 1. Assim, por exemplo, de acordo com as Nações Unidas, no ano 2000 a população mundial era de 6,1 bilhões de habitantes e estava aumentando à taxa anual de 1,4%. Se esta tendência continuasse, a cada ano a população seria 1,014 vez maior que no ano anterior. Assim, chamando de $P(t)$ a população mundial (em bilhões) t anos após o ano 2000, tomado como ano-base, a população aumentaria da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
2000 & P(0) = 6{,}1 \\
2001 & P(1) = 6{,}1(1{,}014) = 6{,}185 \\
2002 & P(2) = 6{,}185(1{,}014) = [6{,}1(1{,}014)](1{,}014) = 6{,}1(1{,}014)^2 = 6{,}272 \\
2003 & P(3) = 6{,}272(1{,}014) = [6{,}1(1{,}014)^2](1{,}014) = 6{,}1(1{,}014)^3 = 6{,}360 \\
\vdots & \vdots \\
2000 + t & P(t) = 6{,}1(1{,}014)^t
\end{array}$$

O gráfico de $P(t)$ aparece na Figura 4.1a. Observe que de acordo com este modelo a população mundial cresce lentamente, a princípio, mas se torna duas vezes maior em apenas 50 anos, chegando a 12,22 bilhões de habitantes em 2050.

Esta forma de aumento da população é conhecida como *modelo malthusiano* em homenagem a Thomas Malthus (1766-1834), um economista inglês que previu que grande parte da população mundial passaria fome se a população crescesse exponencialmente enquanto o suprimento de alimentos aumentava a uma taxa constante (linearmente). Felizmente, a população mundial não continuou a aumentar exponencialmente, como previa o modelo de Malthus; modelos que levam em conta várias limitações da taxa de crescimento fornecem previsões mais exatas. A curva de crescimento da população que resulta de um destes modelos, o chamado modelo *logístico*, aparece na Figura 4.1b. Observe que a curva do crescimento logístico se comporta inicialmente como a curva exponencial, mas depois a taxa de cresci-

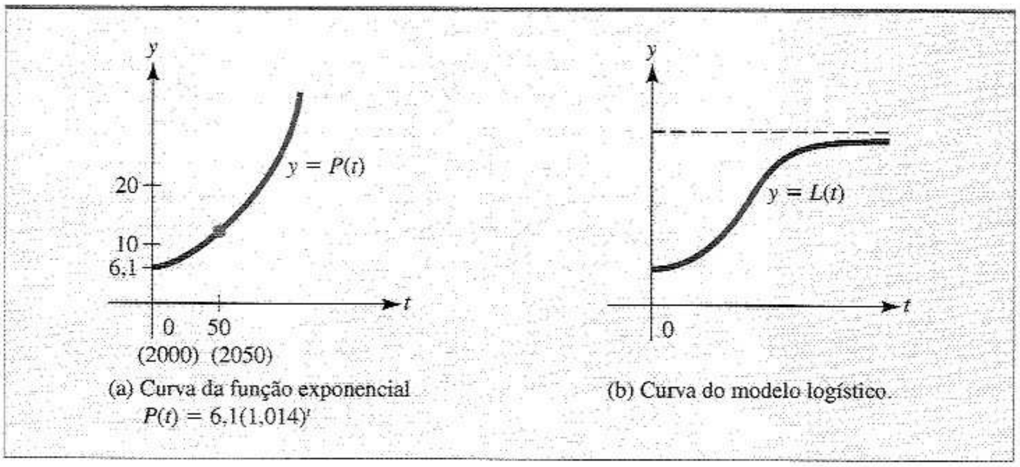


FIGURA 4.1 Dois modelos para o aumento das populações.

mento diminui e tende a zero porque o aumento da população é limitado por fatores ambientais. Iremos abordar curvas logísticas na Seção 4.4 (Exemplo 4.4.5) e novamente no Capítulo 6 como parte de um estudo mais detalhado de modelos populacionais.

Uma função da forma geral $f(x) = b^x$, onde b é um número positivo, é conhecida como **função exponencial**. As funções exponenciais são usadas para descrever o crescimento exponencial, o crescimento logístico e muitos outros processos importantes. Assim, por exemplo, as funções exponenciais são usadas na demografia para prever o tamanho de populações, nas finanças para calcular o valor de investimentos, na arqueologia para datar artefatos antigos, na psicologia para estudar padrões de aprendizado e na indústria para estimar a confiabilidade dos produtos.

Nesta seção, vamos estudar as propriedades das funções exponenciais e apresentar alguns modelos básicos nos quais estas funções desempenham um papel importante. Aplicações adicionais, como o modelo logístico, serão discutidas em outra seções.

Revisão das Propriedades das Funções Exponenciais

Para trabalhar com funções exponenciais, é preciso saber usar a notação exponencial e conhecer as operações com expoentes. Exemplos resolvidos e problemas para praticar usando esta notação podem ser encontrados na Revisão de Álgebra do Apêndice A. Segue um breve resumo das propriedades das funções exponenciais.

Definição de b^n para Valores Racionais de n (e $b > 0$) ■ Potências inteiras: se n é um número inteiro positivo,

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ fatores}}$$

Potências fracionárias: se n e m são números inteiros positivos,

$$b^{n/m} = (\sqrt[m]{b})^n = \sqrt[m]{b^n}$$

onde $\sqrt[m]{b}$ é a raiz m de b.

Potências negativas: $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$

Potência nula: $b^0 = 1$

Eis alguns exemplos:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2 \qquad 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{-3/2} = \frac{1}{4^{3/2}} = \frac{1}{8} \qquad 27^{-2/3} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

1 EXPLORE!

Plote a função $y = (-1)^x$ usando uma janela decimal modificada $[-4{,}7,\ 4{,}7]1$ por $[-1,\ 7]1$ e explique por que a curva aparece pontilhada. Em seguida, plote a função $y = b^x$ para $b = 0{,}5$; $0{,}25$ e $0{,}1$. Explique o comportamento destes gráficos.

A potência b^r é definida para qualquer número racional r, mas se tentarmos plotar a função $y = b^x$, haverá "buracos" na curva para valores de x, como $\sqrt{2}$, que não são racionais. Entretanto, é possível demonstrar, usando métodos que não cabe discutir aqui, que os números racionais são tão "abundantes" que existe apenas uma curva contínua passando por todos os pontos (r, b^r) para os quais r é um número racional. Em outras palavras, existe uma função contínua $f(x)$ que é definida univocamente para todos os números reais x e é igual a b^r quando $x = r$ é um número racional. Quando x é um número irracional, definimos b^x como o valor de $f(x)$ neste ponto. A definição desta forma generalizada da função exponencial é apresentada a seguir.

Função Exponencial ■ Se b é um número positivo diferente de 1 ($b > 0$, $b \neq 1$), existe uma e apenas uma função chamada de *função exponencial* de base b, definida como

$$f(x) = b^x \qquad \text{para qualquer número real } x$$

Para ter uma idéia do aspecto da curva de uma função exponencial, considere o Exemplo 4.1.1.

EXEMPLO 4.1.1

Plote as funções $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solução

Para começar, construímos uma tabela de valores de $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	−15	−10	−1	0	1	3	5	10	15
$y = 2^x$	0,00003	0,001	0,5	1	2	8	3,2	1.024	32.768
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	32.768	1.024	2	1	0,5	0,125	0,313	0,001	0,00003

Os valores da tabela sugerem que as funções $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ apresentam as seguintes características:

A função $y = 2^x$	**A função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$**
sempre crescente	sempre decrescente
$\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

Usando estas informações, desenhamos as curvas que aparecem na Figura 4.2. Observe que as duas curvas interceptam o eixo y no ponto $(0, 1)$, têm o eixo x como assíntota horizontal e parecem ter a concavidade para cima para qualquer valor de x. As curvas também parecem ser simétricas em relação ao eixo y; a prova de que isto é verdade fica por conta do leitor (Problema 62).

2 EXPLORE!

Plote a função $y = b^x$ para $b = 1$, 2, 3 e 4 usando uma janela decimal modificada $[-4{,}7,\ 4{,}7]1$ por $[-1,\ 7]1$. Explique os resultados. Estime e depois verifique a posição da curva $y = 4^x$ em relação às curvas $y = 2^x$ e $y = 6^x$. Em que posição estaria a curva $y = e^x$, já que e é um número entre 2 e 3?

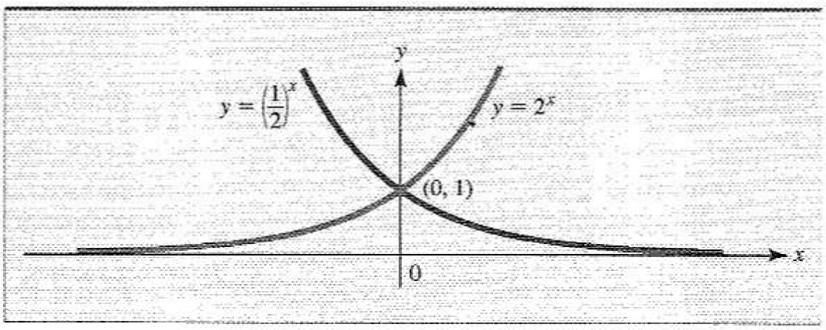


FIGURA 4.2 As curvas das funções $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

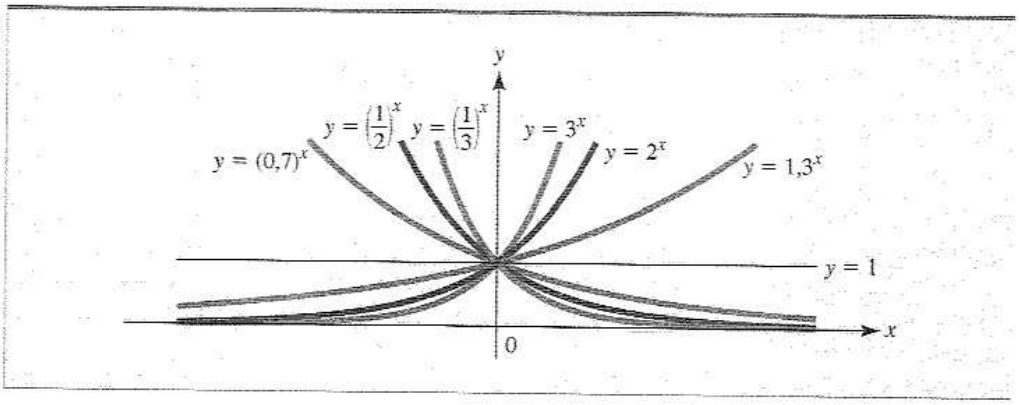


FIGURA 4.3 Curvas da família de funções exponenciais $y = b^x$.

A Figura 4.3 mostra as curvas de vários membros da família de funções exponenciais $y = b^x$. Observe que as curvas de $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ da Figura 4.2 são típicas da função $y = b^x$ para $b > 1$ e $0 < b < 1$, respectivamente.

NOTA Os estudantes muitas vezes confundem a função *potência* $p(x) = x^b$ com a função *exponencial* $f(x) = b^x$. Observe que em x^b, a variável x é a base e o expoente b é constante, enquanto em b^x a base b é constante e a variável x é o expoente. As curvas de $y = x^2$ e $y = 2^x$ aparecem na Figura 4.4. Note que à direita do ponto de interseção (4, 16), a curva exponencial $y = 2^x$ aumenta muito mais rapidamente com x do que a curva de potência $y = x^2$. Assim, por exemplo, para $x = 10$, o valor de y na curva de potência é $y = 10^2 = 100$, enquanto o valor de y na curva exponencial é $y = 2^{10} = 1.024$. ■

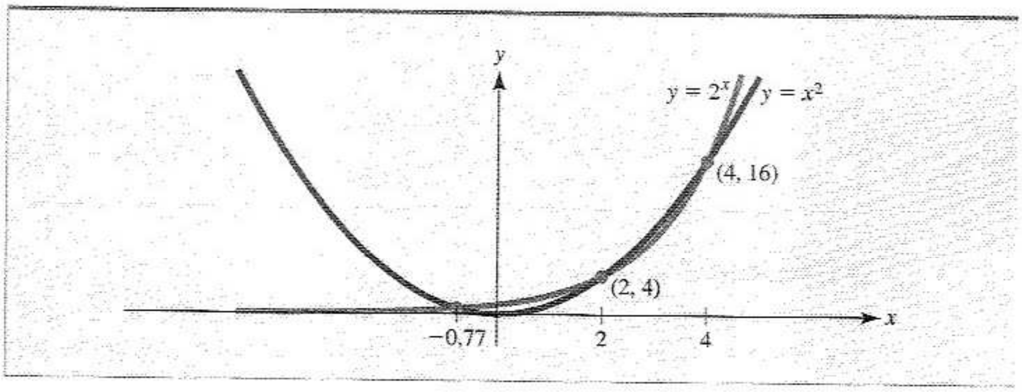


FIGURA 4.4 Comparação das curvas da função potência $y = x^2$ e da função exponencial $y = 2^x$.

As funções exponenciais obedecem às regras apresentadas a seguir.

Propriedades Básicas das Funções Exponenciais ■ Dadas as bases a e b ($a > 0$, $b > 0$) e os números reais x e y, temos:

Regra da igualdade: $b^x = b^y$ se e apenas se $x = y$

Regra do produto: $b^x b^y = b^{x+y}$

Regra do quociente: $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

Regra da potência: $(b^x)^y = b^{xy}$

Regra da multiplicação: $(ab)^x = a^x b^x$

Regra da divisão: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

EXEMPLO 4.1.2

Calcule o valor das expressões exponenciais dadas.

a. $(3)^2(3)^3$ **b.** $(2^3)^2$ **c.** $(5^{1/3})(2^{1/3})$

d. $\dfrac{2^3}{2^5}$ **e.** $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3$

Solução

a. $(3)^2(3)^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

b. $(2^3)^2 = 2^{(3)(2)} = 2^6 = 64$

c. $(5^{1/3})(2^{1/3}) = [(5)(2)]^{1/3} = 10^{1/3} = \sqrt[3]{10}$

d. $\dfrac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

e. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3 = \dfrac{4^3}{7^3} = \dfrac{64}{343}$

EXEMPLO 4.1.3

Se $f(x) = 5^{x^2+2x}$, determine todos os valores de x para os quais $f(x) = 125$.

Solução

A equação $f(x) = 125 = 5^3$ é satisfeita se e apenas se

$$\begin{aligned} 5^{x^2+2x} &= 5^3 \\ x^2 + 2x &= 3 \qquad \textit{pois } b^x = b^y \textit{ apenas se } x = y \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x-1)(x+3) &= 0 \qquad \textit{fatorando} \\ x &= 1,\ x = -3 \end{aligned}$$

Assim, $f(x) = 125$ se e apenas se $x = 1$ ou $x = -3$.

O Número *e*

Na álgebra, é comum usar as bases $b = 10$ e $b = 2$, mas no cálculo costuma ser mais conveniente utilizar como base um número representado pela letra e e definido da seguinte forma:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

"Um momento!" — devem ter exclamado alguns leitores. "Este limite tem que ser igual a 1, já que $(1 + \frac{1}{n})$ certamente tende a 1 quando n tende a infinito, e $1^n = 1$ para qualquer valor de n." Entretanto, o processo de calcular o limite não funciona desta forma, como se pode ver na tabela a seguir.

n	10	100	1.000	10.000	100.000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2,59374	2,70481	2,71692	2,71815	2,71827

O número e é um dos números mais importantes da matemática e foi calculado com grande precisão. Eis o seu valor até a quinta casa decimal:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

3 EXPLORE!

Entre com $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ em Y1 do editor de funções e examine o gráfico. Trace o gráfico para a direita para grandes valores de x. Para que número tende y para grandes valores de x? Use a calculadora para construir uma tabela, fixando o valor inicial e o incremento primeiro em 10, depois em 1.000 e finalmente em 100.000. Estime o limite com precisão de cinco casas decimais. Repita o processo para valores negativos de x e observe o novo limite.

Para obter o valor de e^N para um dado número N, consultamos uma tabela ou apertamos a tecla "e^x" de uma calculadora científica. Assim, por exemplo, para obter o valor de $e^{1,217}$, apertamos a tecla e^x e entramos com 1.217; o resultado é, aproximadamente, 3,37704.

Capitalização Contínua dos Juros

O número e é chamado de "base dos logaritmos naturais", embora a princípio seja difícil entender o que existe de "natural" nos logaritmos baseados em um número que precisa ser definido através de um limite. Para mostrar que este número aparece naturalmente em problemas práticos, vamos usá-lo para descrever uma prática de contabilidade conhecida como capitalização contínua dos juros.

Em primeiro lugar, vamos rever as idéias básicas com relação aos juros compostos. Suponha que uma certa quantia seja investida e que os juros sejam capitalizados apenas uma vez. Se P é o investimento inicial (o *principal*) e r é a taxa de juros (expressa em forma decimal), o montante B depois que os juros são acrescentados é dado por

$$B = P + Pr = P(1 + r) \quad \text{reais}$$

Assim, para calcular o montante no final de um certo período, basta multiplicar o montante no início do período pelo fator $1 + r$, onde r é a taxa de juros para o período.

Na maioria dos bancos, os juros são capitalizados mais de uma vez ao ano. Os juros que são acrescentados à conta durante cada período passam a render juros nos períodos subseqüentes. Se a taxa anual de juros é r e os juros são capitalizados k vezes por ano, o ano é dividido em k períodos iguais e a taxa de juros em cada período é r/k. Assim, o montante no final do primeiro período é

$$P_1 = \underbrace{P}_{\textit{principal}} + \underbrace{P\left(\frac{r}{k}\right)}_{\textit{juros}} = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

No final do segundo período, o montante é

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + P_1\left(\frac{r}{k}\right) = P_1\left(1 + \frac{r}{k}\right) \\ &= \left[P\left(1 + \frac{r}{k}\right)\right]\left(1 + \frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^2 \end{aligned}$$

No final do $m^{\underline{o}}$ período, o montante é

$$P_m = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^m$$

Como um ano tem k períodos, o montante após 1 ano é

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$$

Depois de transcorridos t anos, os juros terão sido capitalizados kt vezes e o montante será dado pela função

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Resumindo:

Juros Compostos ■ Se P reais são investidos a uma taxa anual de juros r (expressa em forma decimal) e os juros são capitalizados k vezes por ano, o montante $B(t)$ após t anos é dado por

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \quad \text{reais}$$

4 EXPLORE!

Imagine que você disponha de R$ 1.000,00 para investir. Qual é o melhor investimento: 5% capitalizados mensalmente por 10 anos ou 6% capitalizados trimestralmente por 10 anos? Entre com 1.000(1+R/K)^(K*T) na calculadora e calcule o valor da expressão depois de especificar valores apropriados para *R*, *K* e *T*.

Quanto maior a freqüência com a qual os juros são capitalizados, maior o montante correspondente $B(t)$; assim, um banco que capitaliza freqüentemente os juros tende a atrair mais clientes do que um banco que oferece a mesma taxa de juros mas capitaliza os juros com menor freqüência. O que acontece, porém, com o montante ao final de t anos quando a freqüência com a qual os juros são capitalizados tende a infinito? Mais especificamente, qual será o montante ao final de t anos se os juros não forem capitalizados anualmente, nem mensalmente, nem diariamente, mas de forma contínua? Em termos matemáticos, isto equivale a perguntar o que acontece à expressão $P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$ quando k tende a infinito. Como mostramos a seguir, a resposta envolve o número e.

Para simplificar os cálculos, vamos fazer $n = \frac{k}{r}$. Nesse caso, $k = nr$ e, portanto,

$$P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = P\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nrt} = P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt}$$

Como n tende a infinito quando k tende a infinito e como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ tende a e quando n tende a infinito, temos:

$$B(t) = \lim_{k\to+\infty} P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = P\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{rt} = Pe^{rt}$$

Resumindo:

Juros Compostos Continuamente ■ Se P reais são investidos a uma taxa anual de juros r (expressa em forma decimal) e os juros são capitalizados continuamente, o montante $B(t)$ após t anos é dado por

$$B(t) = Pe^{rt} \quad \text{reais}$$

5 EXPLORE!

Entre com P*(1+R/K)^(K*T) e P*e^(R*T) na calculadora e compare os valores das duas expressões para os valores de P, R, T e K do Exemplo 4.1.4. Repita o cálculo usando os mesmos valores de P, R e K, mas com T = 15 anos.

EXEMPLO 4.1.4

A quantia de R$ 1.000,00 é investida a uma taxa anual de juros de 6%. Determine o montante após 10 anos se os juros forem capitalizados

a. Trimestralmente **b.** Mensalmente **c.** Diariamente **d.** Continuamente

Solução

a. Para calcular o montante após 10 anos se os juros forem capitalizados trimestralmente, usamos a expressão $B(t) = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$, com $t = 10$, $P = 1.000$, $r = 0{,}06$ e $k = 4$:

$$B(10) = 1.000\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{40} \approx \text{R\$}1.814{,}02$$

b. Desta vez, fazemos $t = 10$, $P = 1.000$, $r = 0{,}06$ e $k = 12$ para obter

$$B(10) = 1.000\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{120} \approx \text{R\$}1.819{,}40$$

c. Fazemos $t = 10$, $P = 1.000$, $r = 0{,}06$ e $k = 365$ para obter

$$B(10) = 1.000\left(1+\frac{0{,}06}{365}\right)^{3.650} \approx \text{R\$}1.822{,}03$$

d. No caso em que os juros são compostos continuamente, usamos a expressão $B(t) = Pe^{rt}$ com $t = 10$, $P = 1.000$ e $r = 0{,}06$:

$$B(10) = 1.000e^{0{,}6} \approx \text{R\$}1.822{,}12$$

Este último valor, R$ 1.822,12, constitui um limite superior para o montante. Por maior que seja a freqüência com a qual os juros são capitalizados, R$ 1.000,00 investidos a uma taxa anual de juros de 6% não podem render mais do que R$ 1.822,12 em 10 anos.

Valor Atual

A grandeza $B(t)$, que definimos como o "montante ao final de t quando P reais são investidos" é às vezes chamada de *valor futuro* de P reais em t anos. Invertendo as coisas, o *valor atual* de B reais pagáveis em t anos é a quantia P que deve ser investida no dia de hoje (como principal) para obter um montante $B(t)$ no final do período de t anos.

Para chegar a uma expressão para o valor atual, basta explicitar P na expressão de B. Assim, se o investimento é capitalizado k vezes por ano a uma taxa anual k, temos:

$$B = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Lembrete

Se $C \neq 0$, o valor de P na equação

$$A = PC$$

pode ser obtido multiplicando ambos os membros por

$$\frac{1}{C} = C^{-1}$$

então,

$$P = AC^{-1}$$

e o valor atual de B reais em t anos é obtido multiplicando ambos os membros da equação por $\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$:

$$P = B\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$$

Se a capitalização é contínua, temos:

$$B = Pe^{rt}$$

e o valor atual é dado por

$$P = Be^{-rt}$$

Resumindo:

Valor Atual ■ O **valor atual** de B reais em t anos investidos a uma taxa anual r de juros capitalizados k vezes ao ano é dado por

$$P = B\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$$

Se os juros são capitalizados continuamente à mesma taxa, o valor atual em t anos é dado por

$$P = Be^{-rt}$$

6 EXPLORE!

Calcule o valor atual de tal forma que o montante daqui a 25 anos seja R$ 40.000,00 se a taxa anual de juros é de 6% capitalizados continuamente. Para isso, entre com a equação F − P*e^(R*T) = 0 no editor de equações da calculadora (usando a opção **SOLVER**), com F = 40.000, R = 0,06 e T = 25. Em seguida, determine o valor de P.

EXEMPLO 4.1.5

Susana acabou de passar no vestibular. Quando se formar, daqui a 4 anos, gostaria de fazer uma viagem à Europa que, de acordo com os seus cálculos, custará R$ 5.000,00. Determine a quantia que deve investir a juros anuais de 7% para conseguir dinheiro suficiente para a viagem se os juros forem capitalizados:

a. Trimestralmente **b.** Continuamente

Solução

O valor futuro desejado é B = R$ 5.000,00 em $t = 4$ anos com $r = 0{,}07$.

a. Se os juros forem capitalizados trimestralmente, $k = 4$ e o valor atual será

$$P = 5.000\left(1 + \frac{0{,}07}{4}\right)^{-4(4)} = \text{R\$}3.788{,}08$$

b. Se os juros forem capitalizados continuamente, o valor atual será

$$P = 5.000e^{-0{,}07(4)} = \text{R\$}3.778{,}92$$

Assim, Susana terá que investir mais R$ 9,00 se os juros forem capitalizados trimestralmente em vez de continuamente.

Crescimento e Decaimento Exponencial

Quando uma grandeza $Q(t)$ obedece a uma lei da forma $Q(t) = Q_0e^{kt}$ com $k > 0$, dizemos que **cresce exponencialmente**. Quando $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ com $k > 0$, dizemos que $Q(t)$ **decai exponencialmente**. As variações de muitas grandezas importantes na economia e nas finanças, e também nas ciências físicas, sociais e biológicas, podem ser descritas por um crescimento ou decaimento exponencial. Assim, por exemplo, se os juros são capitalizados continuamente, o valor futuro $B(t) = Pe^{rt}$ cresce exponencialmente; na ausência de limitações ambientais, as populações tendem a crescer exponencialmente. As substâncias radioativas decaem exponencialmente, o que também ocorre com o valor atual dos investimentos, com a concentração dos medicamentos no sangue dos pacientes e com as vendas de certos produtos se o fabricante deixa de anunciá-los.

A Figura 4.5 mostra as curvas típicas de crescimento e decaimento exponencial. Gráficos deste tipo são normalmente traçados apenas para tempos positivos ($t \geq 0$). Observe que em ambos os casos, para $t = 0$,

$$Q(0) = Q_0e^0 = Q_0$$

e, portanto, a curva "começa" em Q_0.

Crescimento e Decaimento Exponencial ■ Uma grandeza $Q(t)$ *cresce exponencialmente* se $Q(t) = Q_0e^{kt}$ para $k > 0$ e *decai exponencialmente* se $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ para $k > 0$.

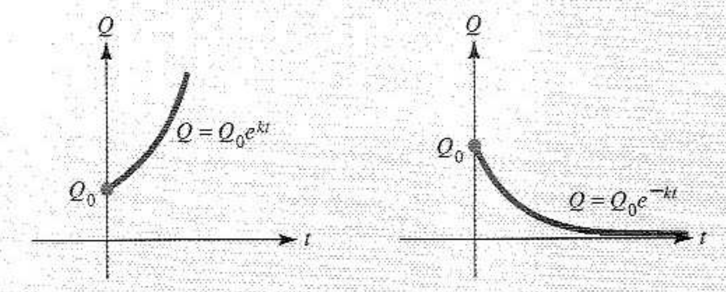


FIGURA 4.5 Curvas típicas de crescimento e decaimento exponencial.

EXEMPLO 4.1.6

A concentração de um medicamento no sangue de um paciente t horas após uma injeção é dada por

$$C(t) = 3{,}97e^{-0{,}9t}$$

miligramas por mililitro (mg/mL). Qual é a taxa média de variação da concentração do medicamento durante a segunda hora?

Solução

Durante a segunda hora (ou seja, de $t = 1$ a $t = 2$), a variação da concentração é $C(2) - C(1)$ e, portanto, a taxa média de variação durante este período de tempo é dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{C(2) - C(1)}{2 - 1} \\ &= \frac{3{,}97e^{-0{,}9(2)} - 3{,}97e^{-0{,}9(1)}}{1} = 3{,}97(e^{-1{,}8} - e^{-0{,}9}) \\ &= 3{,}97(0{,}1653 - 0{,}4066) \\ &= -0{,}9580 \end{aligned}$$

Assim, a concentração do medicamento diminui a uma taxa média de aproximadamente 0,96 mg/mL por hora durante a segunda hora após a injeção.

7 EXPLORE!

Leia o Exemplo 4.1.7. Entre com a equação Q − 2,000*e^(K*T) = 0 na calculadora e determine o valor de K para $Q = 6.000$ e $T = 20$. Mude T para 60 e determine o valor correspondente de Q.

EXEMPLO 4.1.7

Os biólogos observaram que, em condições ideais, o número de bactérias em uma cultura cresce exponencialmente. Suponha que existam inicialmente 2.000 bactérias em uma certa cultura e que 6.000 bactérias estejam presentes 20 minutos depois. Quantas bactérias estarão presentes depois de 1 hora?

Solução

Seja $Q(t)$ o número de bactérias presentes após t minutos. Como o número de bactérias cresce exponencialmente e como existiam inicialmente 2.000 bactérias, Q é uma função da forma

$$Q(t) = 2.000e^{kt}$$

Como 6.000 bactérias estão presentes após 20 minutos, temos:

$$6.000 = 2.000e^{20k} \qquad \text{ou} \qquad e^{20k} = 3$$

Para determinar o número de bactérias presentes depois de 1 hora (60 minutos), basta calcular $Q(60)$ usando a lei da potência para expoentes:

$$Q(60) = 2.000e^{60k} = 2.000(e^{20k})^3 = 2.000(3)^3 = 54.000$$

Assim, 54.000 bactérias estarão presentes depois de 1 hora.

NOTA No Exemplo 4.1.7, resolvemos a equação exponencial $2.000^{60k} = 54.000$ a partir de uma relação conhecida, $e^{20k} = 3$. Na maioria dos casos, porém, equações deste tipo são resolvidas com o auxílio de **logaritmos**, que serão definidos na Seção 4.2. ■

PROBLEMAS | 4.1

Nos Problemas 1 e 2, use uma calculadora para determinar a potência pedida de e. (Arredonde as respostas para três casas decimais).

1. $e^2, e^{-2}, e^{0,05}, e^{-0,05}, e^0, e, \sqrt{e},$ e $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

2. $e^3, e^{-1}, e^{0,01}, e^{-0,1}, e^2, e^{-1/2}, e^{1/3},$ e $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

3. Plote no mesmo gráfico as funções $y = 3^x$ e $y = 4^x$.

4. Plote no mesmo gráfico as funções $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$.

Nos Problemas 5 a 12, determine o valor da expressão dada.

5. a. $27^{2/3}$
b. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3/2}$

6. a. $(-128)^{3/7}$
b. $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{2/3}\left(\dfrac{64}{25}\right)^{3/2}$

7. a. $8^{2/3} + 16^{3/4}$
b. $\left(\dfrac{27 + 36}{121}\right)^{3/2}$

8. a. $(2^3 - 3^2)^{11/7}$
b. $(27^{2/3} + 8^{4/3})^{-3/2}$

9. a. $(3^3)(3^{-2})$
b. $(4^{2/3})(2^{2/3})$

10. a. $\dfrac{5^2}{5^3}$
b. $\left(\dfrac{\pi^2}{\sqrt{\pi}}\right)^{4/3}$

11. a. $(3^2)^{5/2}$
b. $(e^2e^{3/2})^{4/3}$

12. a. $\dfrac{(3^{1,2})(3^{2,7})}{3^{4,1}}$
b. $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{1/4}\left(\dfrac{125}{8}\right)^{-2/3}$

Nos Problemas 13 a 18, use as propriedades da função exponencial para simplificar a expressão dada.

13. a. $(27x^6)^{2/3}$
b. $(8x^2y^3)^{1/3}$

14. a. $(x^{1/3})^{3/2}$
b. $(x^{2/3})^{-3/4}$

15. a. $\dfrac{(x + y)^0}{(x^2y^3)^{1/6}}$
b. $(x^{1,1}y^2)(x^2 + y^3)^0$

16. a. $(-2t^{-3})(3t^{2/3})$
b. $(t^{-2/3})(t^{3/4})$

17. a. $(t^{5/6})^{-6/5}$
b. $(t^{-3/2})^{-2/3}$

18. a. $(x^2y^{-3}z)^3$
b. $\left(\dfrac{x^3y^{-2}}{z^4}\right)^{1/6}$

Nos Problemas 19 a 24, determine todos os números reais x que satisfazem a equação dada.

19. $4^{2x-1} = 16$

20. $3^x 2^{2x} = 144$

21. $2^{3-x} = 4^x$

22. $4^x(\frac{1}{2})^{3x} = 8$

23. $(2{,}14)^{x-1} = (2{,}14)^{1-x}$

24. $(3{,}2)^{2x-3} = (3{,}2)^{2-x}$

Nos Problemas 25 e 26, determine os valores das constantes C e b para que a curva $y = Cb^x$ passe pelos pontos indicados.

25. (2, 12) e (3, 24)

26. (2, 3) e (3, 9)

27. JUROS COMPOSTOS Uma quantia de R$ 1.000,00 é investida a uma taxa anual de juros de 7%. Calcule o montante após 10 anos se os juros forem capitalizados:
a. Anualmente
b. Trimestralmente
c. Mensalmente
d. Continuamente

28. JUROS COMPOSTOS Uma quantia de R$ 5.000,00 é investida a uma taxa anual de juros de 10%. Calcule o montante após 10 anos se os juros forem capitalizados:
a. Anualmente
b. Semestralmente
c. Diariamente (supondo um ano de 365 dias)
d. Continuamente

29. VALOR ATUAL Qual a quantia que deve ser investida a juros anuais de 7%, capitalizados trimestralmente, para que o montante em 5 anos seja R$ 5.000,00?

30. VALOR ATUAL Qual a quantia que deve ser investida a juros anuais de 7%, capitalizados continuamente, para que o montante em 20 anos seja R$ 20.000,00?

31. VALOR ATUAL Determine a quantia que deve ser investida a juros anuais de 7% para que o montante em 5 anos seja R$ 9.000,00 se os juros forem capitalizados:
a. Trimestralmente
b. Continuamente

32. VALOR ATUAL Qual é o valor atual de R$ 10.000,00 para um período de 5 anos se os juros são capitalizados continuamente a uma taxa anual de 7%? Qual é o valor atual de R$ 20.000,00 nas mesmas condições?

33. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t anos a população de um certo país será $P(t) = 50e^{0,02t}$ milhões de habitantes.
a. Qual é a população atual?
b. Qual será a população daqui a 30 anos?

34. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO A população de um certo país está crescendo exponencialmente. Se a população era de 60 milhões de habitantes em 1997 e 90 milhões em 2002, qual será a população em 2012?

35. Determine $f(2)$ se $f(x) = e^{kx}$ e $f(1) = 20$.

36. Determine $f(9)$ se $f(x) = e^{kx}$ e $f(3) = 2$.

37. Determine $f(8)$ se $f(x) = A2^{kx}$, $f(0) = 20$ e $f(2) = 40$.

38. JUROS COMPOSTOS Uma certa quantia é investida a uma taxa de juros fixa e os juros são capitalizados continuamente. Depois de 10 anos, o dinheiro duplicou. Qual será a relação entre o montante e o investimento inicial depois de 20 anos?

39. JUROS COMPOSTOS Uma certa quantia é investida a uma taxa de juros fixa e os juros são capitalizados trimestralmente. Depois de 15 anos, o dinheiro duplicou. Qual será a relação entre o montante e o investimento inicial depois de 30 anos?

40. CRESCIMENTO DO PDB O Produto Doméstico Bruto (PDB) de um certo país foi de 500 bilhões de dólares no início do ano 2000 e aumentou à taxa de 2,7% ao ano.
a. Expresse o PDB deste país em função do número t de anos após 2000.
b. Se esta taxa de crescimento for mantida, qual será o PDB do país no início do ano 2010?

41. COLÔNIA DE BACTÉRIAS A população $P(t)$ de uma colônia de bactérias cresce a uma taxa de 3,1% ao dia. Se a população inicial é de 10.000 bactérias, qual é a população após 10 dias?

42. MERCADO IMOBILIÁRIO Em 1626, Peter Minuit comprou dos índios a ilha de Manhattan por 24 dólares em bugigangas. Suponha que em 1990 a mesma terra valesse 25,2 bilhões de dólares. Se os índios tivessem investido os 24 dólares a uma taxa anual de juros de 7% capitalizados continuamente durante todo o período de 364 anos, quem sairia ganhando na transação? Qual seria o lucro ou prejuízo dos índios?

43. COLÔNIA DE BACTÉRIAS Os dados a seguir foram compilados por um pesquisador durante os primeiros 10 minutos de um experimento destinado a estudar o crescimento de colônias de bactérias:

Número de minutos	0	10
Número de bactérias	5.000	8.000

Supondo que o número de bactérias aumente exponencialmente, quantas bactérias estarão presentes depois de 30 minutos?

44. VENDAS A VAREJO O número total de hambúrgueres vendidos por uma cadeia de lanchonetes está aumentando exponencialmente. Se 4 bilhões de sanduíches foram vendidos em 1995 e 12 bilhões foram vendidos no ano 2000, quantos foram vendidos em 2005?

45. VENDAS Depois que a publicidade que cerca o lançamento de um novo livro é suspensa, as vendas tendem a decair exponencialmente. No momento em que a publicidade de um certo livro foi interrompida, o livro estava vendendo 25.000 exemplares por mês. Um mês depois, a venda tinha caído para 10.000 exemplares por mês. Quantos exemplares serão vendidos no mês seguinte?

46. JUROS COMPOSTOS Um banco paga 5% de juros capitalizados trimestralmente e uma caderneta de poupança paga 4,9% de juros capitalizados continuamente. Qual das duas aplicações paga mais juros em um período de 1 ano? E em um período de 5 anos?

47. DENSIDADE POPULACIONAL A densidade populacional a x quilômetros do centro de uma certa cidade é $D(x) = 12e^{-0,07x}$ mil habitantes por quilômetro quadrado.

a. Qual é a densidade populacional no centro da cidade?

b. Qual é a densidade populacional a 10 quilômetros do centro da cidade?

48. DECAIMENTO RADIOATIVO A massa que resta de uma substância radioativa após t anos é dada por uma função da forma $Q(t) = Q_0e^{-0,0001t}$. Depois de 5.000 anos, restam 200 gramas da substância. Qual era a massa inicial?

49. DECAIMENTO RADIOATIVO Uma substância radioativa decai exponencialmente. Se 500 gramas da substância estavam presentes inicialmente e 400 gramas estão presentes 50 anos depois, quantos gramas estarão presentes após 200 anos?

50. APRENDIZADO Segundo o modelo de Ebbinghaus, a fração $F(t)$ de fatos ensinados em curso que são lembrados t meses após o exame final é dada aproximadamente pela expressão

$$F(t) = B + (1 - B)e^{-kt}$$

onde B é a fração de fatos que nunca mais serão esquecidos e k é uma constante que depende da capacidade de memorização do aluno. Suponha que para um certo aluno $B = 0,3$ e $k = 0,2$. Que fração dos fatos será lembrada por este aluno um mês após o término do curso? Que fração será lembrada um ano após o término do curso?

51. CONFIABILIDADE DE UM PRODUTO Um estudo estatístico revela que a fração de torradeiras elétricas produzidas por uma certa companhia que ainda estão funcionando após t anos de uso é dada por $f(t) = e^{-0,2t}$.

a. Que fração das torradeiras funciona durante pelo menos três anos?

b. Que fração das torradeiras deixa de funcionar antes de completar um ano de uso?

c. Que fração das torradeiras deixa de funcionar durante o terceiro ano de uso?

52. TREINAMENTO DE PESSOAL Uma companhia organiza um programa de treinamento no qual determina que após t semanas um operário em treinamento produz

$$P(t) = 50(1 - e^{-0,15t}) \text{ unidades}$$

enquanto um operário contratado sem treinamento especial produz

$$W(t) = \sqrt{150t} \text{ unidades}$$

a. Quantas unidades um operário treinado produz durante a terceira semana do período de treinamento?

b. Explique por que a função $F(t) = P(t) - W(t)$ pode ser usada para avaliar a eficácia do programa de treinamento. Um programa de treinamento será eficaz se tiver cinco semanas de duração? E se tiver sete semanas de duração? Justifique suas respostas.

53. PLANTAS AQUÁTICAS As plantas aquáticas são encontradas apenas nos 10 metros superiores dos lagos e oceanos, o que é explicado pelo fato de a intensidade da luz diminuir exponencialmente com a profundidade. De acordo com a **lei de Bouguer-Lambert**, um raio luminoso que atinge a superfície da água com intensidade I_0 tem uma intensidade I a uma profundidade de x metros, onde $I = I_0e^{-kx}$ com $k > 0$. A constante k, conhecida como **coeficiente de absorção**, depende do comprimento de onda da luz e da densidade da água. Suponha que um raio de luz solar a 3 metros de profundidade tenha uma intensidade igual a 10% da intensidade na superfície. Qual é a intensidade do mesmo raio a 1 metro de profundidade? (Expresse a resposta em termos de I_0.)

54. TAXA DE JUROS EFETIVA Quando um banco oferece juros a uma taxa anual r (expressa com um número decimal) e capitaliza os juros mais de uma vez por ano, o total de juros pagos durante o ano é maior que $100r$% do montante no início do ano. A percentagem de aumento do montante durante um ano é chamada de **taxa de juros efetiva**, enquanto a taxa anunciada r recebe o nome de **taxa de juros nominal**. Em outras palavras, a taxa de juros efetiva é uma taxa de juros simples equivalente à taxa de juros nominal composta.

a. Se os juros são capitalizados k vezes por ano, mostre que a taxa de juros efetiva é $(1 + i)^k - 1$, onde $i = \dfrac{r}{k}$.

b. Se os juros são capitalizados continuamente, mostre que a taxa de juros efetiva é $e^r - 1$.

Nos Problemas 55 e 56, use as fórmulas da taxa de juros efetiva demonstradas no Problema 54.

55. TAXA DE JUROS EFETIVA Se um banco oferece juros nominais de 6%, qual é a diferença entre as taxas de juros efetivas se os juros são capitalizados continuamente e trimestralmente?

56. TAXA DE JUROS EFETIVA Qual é a oferta mais vantajosa: 8,2% de juros capitalizados trimestralmente o' 8,1% de juros capitalizados continuamente?

57. LINGÜÍSTICA **Glotocronologia** é o nome dado a uma técnica usada pelos lingüistas para determinar quantos anos se passaram desde que duas línguas modernas se ramificaram a partir de um antepassado comum. Os experimentos mostram que se N palavras estão em uso corrente em um instante de referência $t = 0$, o número de palavras $N(t)$ ainda em uso com essencialmente o mesmo significado t milhares de anos mais tarde é dado pela chamada **equação fundamental da glotocronologia***

$$N(t) = N_0e^{-0,217t}$$

a. De um conjunto de 500 palavras básicas usadas no latim clássico em 200 a.C., quantas palavras, aproximadamente, deverão estar uso no italiano moderno no ano de 2010?

b. A pesquisa de C.W. Feng e M. Swadesh mostrou que de um conjunto de 210 palavras usadas no chinês clássico em 950 d.C., 167 ainda estavam em uso no mandarim moderno em 1950. Este número é o previsto pela equação clássica da glotocronologia? A diferença é significativa?

c. Leia a respeito da glotocronologia e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito deste método. Um bom lugar para começar é a referência citada no enunciado.

**Fonte:* Anthony LoBello and Maurice D. Weir, "Glottochronology: An Application of Calculus to Linguistics", *UMAP Modules 1982: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1983.

Amortização de Dívidas ■ Se um empréstimo de A reais é amortizado em n anos a uma taxa anual de juros de $r\%$ (expressa como um número decimal) capitalizados mensalmente, os pagamentos mensais são dados por

$$M = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-12n}}$$

onde $i = \frac{r}{12}$ é a taxa mensal de juros. Use esta expressão nos Problemas 58 a 61.

58. PRESTAÇÕES Determine as prestações mensais para comprar um carro novo no valor de R$ 15.675,00 se a entrada é de R$ 4.000,00 e o restante é financiado em 5 anos a uma taxa anual de 6% de juros capitalizados mensalmente.

59. PRESTAÇÕES Um apartamento no valor de R$ 150.000,00 é financiado a uma taxa anual de juros de 9%, capitalizados mensalmente durante 30 anos. Qual é o valor das prestações mensais?

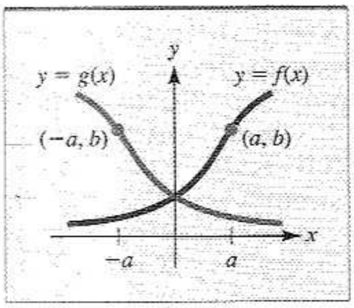
60. PRESTAÇÕES Uma família chega à conclusão de que está em condições de arcar com uma prestação mensal de no máximo R$ 1.200,00. Qual é a maior quantia em dinheiro que pode pedir emprestado, supondo que o emprestador esteja disposto a amortizar a dívida em 30 anos a uma taxa anual de juros de 8% capitalizados mensalmente?

61. EMPRÉSTIMOS O leitor está vendendo seu carro por R$ 6.000,00. Um comprador em potencial diz o seguinte: "Posso pagar R$ 1.000,00 imediatamente e o restante a juros de 12% em prestações mensais durante 3 anos. Vejamos... 12% de R$ 5.000,00 são R$ 600,00 e R$ 5.600,00 divididos por 36 meses são R$ 155,60, mas vou ser bonzinho e arredondar a prestação para R$ 160,00 por mês. Que tal?"

a. Se o leitor considera a proposta razoável, estou vendendo uma ponte quase nova que talvez lhe interesse. Se não, explique o que há de errado no raciocínio do comprador e determine qual seria o valor correto da prestação para amortizar a dívida de R$ 5.000,00 em 3 anos a juros de 12% ao ano.

b. Leia a respeito de matemática financeira e invente alguns exemplos de propostas enganosas, como a do comprador do item (a).

62. Duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são simétricas em relação ao eixo y se para cada ponto (a, b) de uma das curvas existe um ponto $(-a, b)$ na outra curva, como mostra a figura a seguir. Use este critério para mostrar que as curvas $y = b^x$ e $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ para $b > 0$, $b \neq 1$ são simétricas em relação ao eixo y.



PROBLEMA 62

63. Complete a tabela de $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^x$ que aparece a seguir.

x	−2,2	−1,5	0	1,5	2,3
$f(x)$					

64. Programe um computador ou use uma calculadora para obter os valores de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 1.000, 2.000$ e 50.000.

65. Programe um computador ou use uma calculadora para obter os valores de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = -1.000, -2.000$ e -50.000. Com base nos resultados, o que se pode concluir a respeito do comportamento da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende para $-\infty$?

66. Programe um computador ou use uma calculadora para estimar o valor de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$.

67. Programe um computador ou use uma calculadora para estimar o valor de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{5}{2n}\right)^{n/3}$.

SEÇÃO 4.2 Funções Logarítmicas

Suponha que você tenha investido R$ 1.000,00 a juros de 8% capitalizados continuamente e esteja interessado em saber quanto tempo seu investimento levará para dobrar de valor. De acordo com a expressão apresentada na Seção 4.1, o valor da conta após t anos será $1.000e^{0,08t}$; assim, para encontrar a resposta, você precisa resolver a equação

$$1.000e^{0,08t} = 2.000$$

ou, dividindo ambos os membros por 1.000,

$$e^{0,08t} = 2$$

Voltaremos ao problema do seu investimento no Exemplo 4.2.10. Para resolver uma equação exponencial como esta, é preciso usar *logaritmos*, que invertem o processo de exponenciação. Os logaritmos desempenham um papel importante em muitos setores da atividade humana, da medida da capacidade dos canais de comunicações até a famosa escala Richter para indicar a intensidade dos terremotos. Nesta seção, vamos discutir as propriedades básicas das funções logarítmicas e algumas aplicações. Começamos com uma definição.

Função Logarítmica ■ Se x é um número positivo, o **logaritmo** de x na base b ($b > 0$, $b \neq 1$), representado pelo símbolo $\log_b x$, é o número y tal que $b^y = x$, ou seja,

$$y = \log_b x \quad \text{se e apenas se} \quad b^y = x \quad \text{para } x > 0$$

EXEMPLO 4.2.1

Calcule o valor de

a. $\log_{10} 1.000$ **b.** $\log_2 32$ **c.** $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$

Solução

a. $\log_{10} 1.000 = 3$ pois $10^3 = 1.000$.

b. $\log_2 32 = 5$ pois $2^5 = 32$.

c. $\log_5 \frac{1}{125} = -3$ pois $5^{-3} = \frac{1}{125}$.

EXEMPLO 4.2.2

Determine o valor de x nas seguintes equações:

a. $\log_4 x = \frac{1}{2}$ **b.** $\log_{64} 16 = x$ **c.** $\log_x 27 = 3$

Solução

a. Por definição, $\log_4 x = \frac{1}{2}$ equivale a $x = 4^{1/2} = 2$.

b. $\log_{64} 16 = x$ significa que

$$16 = 64^x$$
$$2^4 = (2^6)^x = 2^{6x}$$
$$4 = 6x \qquad \textit{se } b^m = b^n,\ m = n$$
$$x = \frac{2}{3}$$

c. Se $\log_x 27 = 3$,

$$x^3 = 27$$
$$x = (27)^{1/3} = 3$$

Propriedades dos Logaritmos

Os logaritmos foram inventados no século XVII como forma de facilitar os cálculos matemáticos, já que podem ser usados para converter expressões que envolvem produtos e quocientes em expressões muito mais simples envolvendo somas e diferenças. As propriedades dos logaritmos que permitem este tipo de simplificação são as seguintes:

Propriedades dos Logaritmos ■ Seja b ($b > 0$, $b \neq 1$) qualquer base logarítmica. Nesse caso,

$$\log_b 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \log_b b = 1$$

e se u e v são números positivos, temos:

Regra da igualdade $\log_b u = \log_b v$ se e apenas se $u = v$

Regra do produto $\log_b (uv) = \log_b u + \log_b v$

Regra da potência $\log_b u^r = r \log_b u$ para qualquer número real r

Regra do quociente $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$

Regra da inversão $\log_b b^u = u$

Todas estas regras para logaritmos podem ser demonstradas a partir de regras para exponenciais. Assim, por exemplo,

$$\log_b 1 = 0 \qquad \text{pois} \qquad b^0 = 1$$
$$\log_b b = 1 \qquad \text{pois} \qquad b^1 = b$$

Para demonstrar a regra da igualdade, fazemos

$$m = \log_b u \quad \text{e} \quad n = \log_b v$$

de modo que, por definição,

$$b^m = u \quad \text{e} \quad b^n = v$$

e, portanto, se

$$\log_b u = \log_b v$$

temos $m = n$ e, portanto,

$$b^m = b^n \qquad \textit{regra da igualdade para exponenciais}$$

donde

$$u = v$$

como estabelece a regra da igualdade para logaritmos. Para demonstrar a regra do produto para logaritmos, observe que

$$\begin{aligned}
\log_b u + \log_b v &= m + n \\
&= \log_b (b^{m+n}) && \textit{definição de logaritmo} \\
&= \log_b (b^m b^n) && \textit{regra do produto para exponenciais} \\
&= \log_b (uv) && \textit{pois } b^m = u \textit{ e } b^n = v
\end{aligned}$$

A demonstração das regras da potência e do quociente fica a cargo do leitor (Problema 74). A Tabela 4.1 mostra a correspondência entre as propriedades básicas das funções exponencial e logarítmica.

Funções Exponenciais	Funções Logarítmicas
$b^x b^y = b^{x+y}$	$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
$\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$	$\log_b \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
$b^{xp} = (b^x)^p$	$\log_b x^p = p \log_b x$

TABELA 4.1 Comparação das Propriedades das Funções Exponenciais e Logarítmicas

EXEMPLO 4.2.3

Use as regras dos logaritmos para escrever as expressões a seguir em termos de $\log_5 2$ e $\log_5 3$.

a. $\log_5\left(\dfrac{5}{3}\right)$ **b.** $\log_5 8$ **c.** $\log_5 36$

Solução

a. $\log_5\left(\dfrac{5}{3}\right) = \log_5 5 - \log_5 3$ *regra do quociente*

$= 1 - \log_5 3$ *pois* $\log_5 5 = 1$

b. $\log_5 8 = \log_5 2^3 = 3 \log_5 2$ *regra da potência*

c. $\log_5 36 = \log_5 (2^2 3^2)$

$= \log_5 2^2 + \log_5 3^2$ *regra do produto*

$= 2 \log_5 2 + 2 \log_5 3$ *regra da potência*

EXEMPLO 4.2.4

Use as regras dos logaritmos para expandir as expressões a seguir.

a. $\log_3 (x^3 y^{-4})$ **b.** $\log_2 \left(\dfrac{y^5}{x^2}\right)$ **c.** $\log_7 (x^3\sqrt{1 - y^2})$

Solução

a. $\log_3 (x^3y^{-4}) = \log_3 x^3 + \log_3 y^{-4}$ *regra do produto*

$= 3 \log_3 x + (-4) \log_3 y$ *regra da potência*

$= 3 \log_3 x - 4 \log_3 y$

b. $\log_2 \left(\frac{y^5}{x^2}\right) = \log_2 y^5 - \log_2 x^2$ *regra do quociente*

$= 5 \log_2 y - 2 \log_2 x$ *regra da potência*

c. $\log_7 (x^3\sqrt{1 - y^2}) = \log_7 [x^3(1 - y^2)^{1/2}]$

$= \log_7 x^3 + \log_7 (1 - y^2)^{1/2}$ *regra do produto*

$= 3 \log_7 x + \frac{1}{2} \log_7 (1 - y^2)$ *regra da potência*

$= 3 \log_7 x + \frac{1}{2} \log_7 [(1 - y)(1 + y)]$ *fatorando* $1 - y^2$

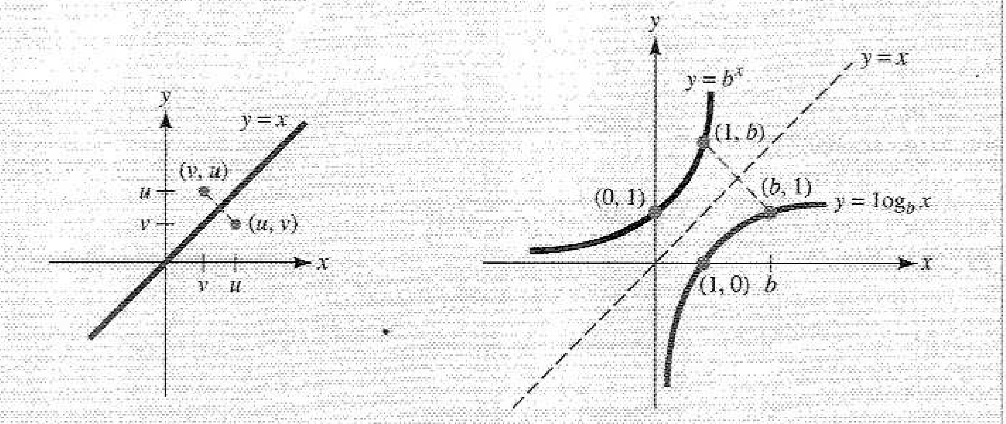
$= 3 \log_7 x + \frac{1}{2} [\log_7 (1 - y) + \log_7 (1 + y)]$ *regra do produto*

$= 3 \log_7 x + \frac{1}{2} \log_7 (1 - y) + \frac{1}{2} \log_7 (1 + y)$

Curvas de Funções Logarítmicas

Existe uma forma simples de obter a curva da função logarítmica $y = \log_b x$ a partir da curva da função exponencial $y = b^x$. A idéia é que como $y = \log_b x$ é equivalente a $x = b^y$, a curva de $y = \log_b x$ é igual à curva de $y = b^x$ com os papéis de x e y invertidos. Assim, se (u, v) é um ponto da curva de $y = \log_b x$, $v = \log_b u$ e, portanto, $u = b^v$, o que significa que (v, u) é um ponto da curva de $y = b^x$. Entretanto, como mostra a Figura 4.6a, os pontos (u, v) e (v, u) são simétricos em relação à reta $y = x$ (veja o Problema 75). Assim, a curva de $y = \log_b x$ pode ser obtida simplesmente traçando a curva *simétrica* da curva de $y = b^x$ em relação à reta $y = x$, como mostra a Figura 4.6b para o caso em que $b > 1$. Resumindo:

Relação entre as Curvas de $y = \log_b x$ e $y = b^x$ ■ As curvas de $y = \log_b x$ e $y = b^x$ são simétricas em relação à reta $y = x$. Assim, a curva de $y = \log_b x$ pode ser obtida traçando a curva simétrica de $y = b^x$ em relação à reta $y = x$.



(a) Os pontos (u, v) e (v, u) são simétricos em relação à reta $y = x$.

(b) As curvas das funções $y = \log_b x$ e $y = b^x$ são simétricas em relação à reta $y = x$.

FIGURA 4.6 Os gráficos de $y = \log_b x$ para $b > 1$ e $y = b^x$ são simétricas em relação à reta $y = x$.

A Figura 4.6b revela os seguintes fatos a respeito da função logarítmica $y = \log_b x$ para $b > 1$ e sua curva:

1. A função $y = \log_b x$ é sempre crescente e a concavidade da curva é para baixo em todo o domínio da função.
2. O único ponto de interseção da curva de $y = \log_b x$ com o eixo x é o ponto $(1, 0)$; não há pontos de interseção com o eixo y, mas este eixo é uma assíntota vertical da curva.
3. A função $y = \log_b x$ tende a infinito quando x tende a infinito e tende a menos infinito quando x tende a zero pela direita:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$$

Qual seria a diferença se a função $y = \log_b x$ e sua curva fossem definidas para $0 < b < 1$? Esta questão é discutida no Problema 76.

O Logaritmo Natural

No cálculo diferencial e integral, a base logarítmica mais usada é o número e. Neste caso particular, o logaritmo $\log_e x$ é chamado de **logaritmo natural** de x e representado pelo símbolo $\ln x$ (que se lê "ele n de x"); assim, para $x > 0$, temos:

$$y = \ln x \quad \text{se e apenas se} \quad e^y = x$$

Para obter o valor de $\ln a$ para um dado número $a > 0$, basta usar a tecla **LN** de uma calculadora. Assim, por exemplo, para descobrir quanto é $\ln(2{,}714)$, aperte a tecla **LN** e entre com o número 2,714 para obter

$$\ln(2{,}714) = 0{,}9984 \qquad \text{(com quatro casas decimais)}$$

O exemplo a seguir ilustra o cálculo de logaritmos naturais.

EXEMPLO 4.2.5

Determine

a. $\ln e$ **b.** $\ln 1$ **c.** $\ln \sqrt{e}$ **d.** $\ln 2$

Solução

a. De acordo com a definição, $\ln e$ é o número c para o qual $e = e^c$. É evidente que este número é $c = 1$. Assim, $\ln e = 1$.

b. $\ln 1$ é o número c para o qual $1 = e^c$. Como $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$.

c. $\ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2}$ é o número c para o qual $e^{1/2} = e^c$; isto significa que $c = \dfrac{1}{2}$. Assim, $\ln \sqrt{e} = \dfrac{1}{2}$.

d. $\ln 2$ é o número c para o qual $2 = e^c$. O valor deste número não é óbvio, mas usando uma calculadora descobrimos que $\ln 2 \approx 0{,}69315$.

Como o logaritmo natural $y = \ln x$ é a função logarítmica mais usada no cálculo diferencial e integral, é interessante dispor de uma lista de suas propriedades.

Propriedades do Logaritmo Natural $y = \ln x$ ■ Para números positivos u e v:

Regra da igualdade	$\ln u = \ln v$ se e apenas se $u = v$
Regra do produto	$\ln(uv) = \ln u + \ln v$
Regra da potência	$\ln u^r = r \ln u$ para qualquer número real r
Regra do quociente	$\ln\left(\dfrac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$
Valores especiais	$\ln 1 = 0$ e $\ln e = 1$

A curva de $y = \ln x$ pode ser obtida tomando os pontos simétricos da curva de $y = e^x$ em relação à reta $y = x$, como mostra a Figura 4.7.

8 EXPLORE!

Entre com $y = e^x$ em Y1, usando o estilo negrito, e com $y = x$ em Y2. Escolha uma janela decimal. Como $y = \ln x$ é equivalente a $e^y = x$, podemos plotar $y = \ln x$ como a função inversa de $e^x = y$ usando a opção **8: DrawInv** da tecla **DRAW (2nd PRGM)** e entrando com **DrawInv Y1** na tela inicial.

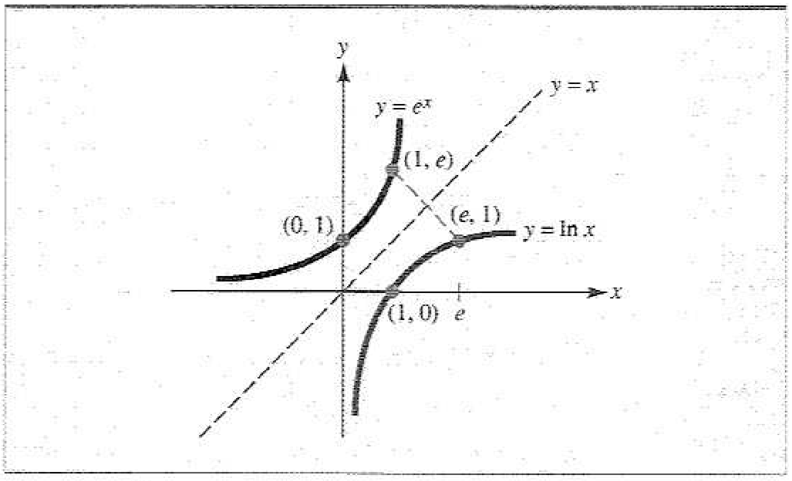


FIGURA 4.7 Gráfico de $y = \ln x$.

EXEMPLO 4.2.6

a. Determine $\ln\sqrt{ab}$ sabendo que $\ln a = 3$ e $\ln b = 7$.

b. Mostre que $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$.

c. Determine x sabendo que $2^x = e^3$.

Solução

a. $\ln\sqrt{ab} = \ln(ab)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln ab = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \dfrac{1}{2}(3 + 7) = 5$

b. $\ln\dfrac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x$

c. Tomando o logaritmo natural de ambos os membros da equação $2^x = e^3$ e explicitando x, obtemos:

$$x\ln 2 = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{3}{\ln 2} \approx 4{,}33$$

A Relação entre e^x e $\ln x$

O Exemplo 4.2.7 envolve duas identidades importantes que mostram que as funções logarítmica e exponencial, sob certo aspecto, se "neutralizam" mutuamente.

EXEMPLO 4.2.7

Simplifique as seguintes expressões:

a. $e^{\ln x}$ (para $x > 0$) **b.** $\ln e^x$

Solução

a. De acordo com a definição, $\ln x$ é o número b para o qual $x = e^b$. Assim, $e^{\ln x} = e^b = x$.

b. Da mesma forma, $\ln e^x$ é o número b para o qual $e^x = e^b$. É evidente que este número b é o próprio x. Assim, $\ln e^x = x$.

As duas identidades apresentadas no Exemplo 4.2.7 mostram que as funções compostas $\ln e^x$ e $e^{\ln x}$ têm como resultado a própria variável x. Duas funções f e g para as quais $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$ são ditas **inversas** uma da outra; assim, a função exponencial $y = e^x$ e a função logarítmica $y = \ln x$ são inversas.

Relação entre e^x e $\ln x$ como Funções Inversas ■

$$e^{\ln x} = x \quad \text{para } x > 0 \qquad \text{e} \qquad \ln e^x = x \quad \text{para todo } x$$

O Exemplo 4.2.8 ilustra o modo como a relação entre e^x e $\ln x$ como funções inversas pode ser usada para resolver equações.

9 EXPLORE!

Resolva a equação

$$3 - e^x = \ln(x^2 + 1)$$

entrando com o lado esquerdo da equação em Y1 e o lado direito em Y2. Use a Janela Padrão (**ZOOM 6**) para determinar as coordenadas x dos pontos de interseção.

EXEMPLO 4.2.8

Determine o valor de x nas seguintes equações:

a. $3 = e^{20x}$ **b.** $2 \ln x = 1$

Solução

a. Tomando o logaritmo natural de ambos os membros, temos:

$$\ln 3 = \ln e^{20x} \qquad \text{ou} \qquad \ln 3 = 20x$$

Explicitando x e usando uma calculadora para obter o valor de ln 3, obtemos:

$$x = \frac{\ln 3}{20} \approx \frac{1{,}0986}{20} \approx 0{,}0549$$

b. Em primeiro lugar, isolamos $\ln x$ do lado esquerdo da equação dividindo ambos os membros por 2:

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

Em seguida, aplicamos a função exponencial a ambos os membros da equação para obter

$$e^{\ln x} = e^{1/2} \qquad \text{ou} \qquad x = e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1{,}6487$$

10 EXPLORE!

Entre com $y = 10^x$ em Y1 e plote a função no estilo negrito. Em seguida, entre com $y = x$ em Y2, $y = \ln x$ em Y3 e $y = \log x$ em Y4. O que você pode concluir a partir desta série de curvas?

Já vimos que a tecla **LN** das calculadoras pode ser usada para determinar os valores dos logaritmos naturais e a maioria das calculadoras também possui uma tecla **LOG** para calcular os logaritmos de base 10, mas o que fazer no caso de logaritmos cuja base não é e nem 10? Suponha que estejamos interessados em calcular o número $c = \log_b a$. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} c &= \log_b a \\ b^c &= a && \textit{definição de logaritmo} \\ \ln b^c &= \ln a \\ c \ln b &= \ln a && \textit{regra da potência} \\ c &= \frac{\ln a}{\ln b} \end{aligned}$$

Assim, o logaritmo $\log_b a$ é igual à razão entre dois logaritmos naturais, $\ln b$ e $\ln a$. Resumindo:

11 EXPLORE!

Entre com $f(x) = B^x$ em Y1 e com $g(x) = \log_B x$ em Y2 como ln(x)/ln(B). Experimente diferentes valores de B, com $1 < B < 2$, usando a tecla **STO▶**, para determinar para que valores de B as duas curvas se interceptam, se tocam em um ponto ou não se encontram, como mostra a Figura 4.6b.

Fórmula de Conversão para Logaritmos ■ Se a e b são números positivos com $b \neq 1$,

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

EXEMPLO 4.2.9

Determine $\log_5 3{,}172$.

Solução

Usando a fórmula de conversão, obtemos

$$\log_5 3{,}172 = \frac{\ln 3{,}172}{\ln 5} \approx \frac{1{,}1544}{1{,}6094} \approx 0{,}7172$$

Tempo para Dobrar de Valor

No exemplo introdutório do início desta seção, perguntamos quanto tempo seria necessário para que um certo investimento dobrasse de valor. Esta pergunta é respondida no Exemplo 4.2.10.

EXEMPLO 4.2.10

Se R$ 1.000,00 são investidos a uma taxa de juros de 8% ao ano, capitalizados continuamente, quanto tempo é necessário para que o investimento dobre de valor? Este tempo seria diferente se a quantia investida fosse maior ou menor que R$ 1.000,00?

Solução

Com um principal de R$ 1.000,00, o montante após t anos será $B(t) = 1.000e^{0,08t}$. O investimento dobrará de valor quando $B(t) =$ R$ 2.000,00, ou seja, quando

$$2.000 = 1.000e^{0,08t}$$

Dividindo por 1.000 e tomando o logaritmo natural de ambos os membros da equação, temos:

$$\begin{aligned} 2 &= e^{0,08t} \\ \ln 2 &= 0,08t \\ t &= \frac{\ln 2}{0,08} \approx 8,66 \text{ anos} \end{aligned}$$

Se o principal fosse P_0 reais em vez de R$ 1.000,00, o tempo para dobrar o investimento teria que satisfazer a equação

$$\begin{aligned} 2P_0 &= P_0e^{0,08t} \\ 2 &= e^{0,08t} \end{aligned}$$

que é idêntica à anterior. Assim, o tempo não depende da quantia investida.

12 EXPLORE!

Entre com F − P*e^(R*T) = 0 na calculadora e resolva a equação para determinar quanto tempo é necessário para duplicar um investimento de R$ 2.500 a uma taxa anual de 8,5% de juros capitalizados continuamente.

A situação ilustrada no Exemplo 4.2.10 se aplica a qualquer grandeza $Q(t) = Q_0e^{kt}$ que aumente exponencialmente com o tempo t. Em particular, como para $t = 0$ temos $Q(0) = Q_0e^0 = Q_0$, o tempo necessário para que a grandeza dobre de valor é dado por

$$\begin{aligned} 2Q_0 &= Q_0e^{kt} \\ 2 &= e^{kt} \\ \ln 2 &= kt \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

Resumindo:

Tempo para Dobrar de Valor ■ Uma grandeza $Q(t) = Q_0e^{kt}$ $(k > 0)$ que está aumentando exponencialmente dobra de valor quando $t = d$, onde

$$d = \frac{\ln 2}{k}$$

Meia-vida

Foi observado experimentalmente que a maioria das substâncias radioativas decai exponencialmente, de modo que se uma amostra possui uma massa inicial Q_0, a massa que resta após t anos é dada por uma função da forma $Q(t) = Q_0e^{-kt}$. A constante positiva k é uma medida da taxa de decaimento, mas esta taxa, em geral, é especificada em termos do tempo t necessário para que metade da amostra decaia. Este tempo é chamado de **meia-vida** da substância radioativa. O Exemplo 4.2.11 mostra qual é a relação entre k e a meia-vida.

EXEMPLO 4.2.11

Mostre que uma substância radioativa que decai segundo a equação $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ tem uma meia-vida $h = \dfrac{\ln 2}{k}$.

Solução

O objetivo é encontrar um valor h para o tempo tal que $Q(h) = \frac{1}{2}Q_0$, ou seja, tal que

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0e^{-kh}$$

Dividindo por Q_0 e tomando o logaritmo natural de ambos os membros, temos:

$$\ln\frac{1}{2} = -kh$$

Assim, a meia-vida é

$$h = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-k}$$
$$= \frac{-\ln 2}{-k} = \frac{\ln 2}{k} \qquad \textit{pois } \ln\frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$$

como queríamos demonstrar.

Datação por Carbono

Em 1960, W. F. Libby ganhou o prêmio Nobel pela descoberta da **datação por carbono**, uma técnica usada para determinar a idade de fósseis e artefatos. Apresentamos a seguir uma descrição resumida da técnica.*

O dióxido de carbono existente no ar contém, além do isótopo estável ^{12}C ("carbono 12"), o isótopo radioativo ^{14}C ("carbono 14"). As plantas vivas absorvem dióxido de carbono do ar, o que significa que a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C em uma planta viva (ou em um animal que se alimente de plantas) é a mesma que no ar. Quando uma planta ou animal morre, deixa de absorver dióxido de carbono. A massa de ^{12}C continua a mesma após a morte do organismo, mas a massa de ^{14}C diminui exponencialmente por causa do decaimento radioativo, o que faz com que a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C também diminua exponencialmente. É razoável imaginar que a razão R_0 entre as massas de ^{14}C e ^{12}C na atmosfera tenha se mantido praticamente constante nos últimos milhares de anos, caso em que podemos supor que a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C em uma amostra (p. ex., um fóssil ou artefato) é dada por uma função da forma $R(t) = R_0e^{-kt}$.[1] A meia-vida do ^{14}C é de 5.730 anos. Comparando $R(t)$ com R_0, os arqueólogos podem estimar a idade da amostra. O Exemplo 4.2.12 ilustra o método de datação por carbono.

EXEMPLO 4.2.12

Um arqueólogo encontrou um fóssil no qual a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C era $\frac{1}{5}$ da razão observada na atmosfera. Qual é a idade aproximada do fóssil?

Solução

A idade do fóssil é o valor de t para o qual $R(t) = \frac{1}{5}R_0$, isto é, para o qual

$$\frac{1}{5}R_0 = R_0e^{-kt}$$

Dividindo por R_0 e tomando os logaritmos de ambos os membros, temos:

$$\frac{1}{5} = e^{-kt}$$

$$\ln\frac{1}{5} = -kt$$

*Para mais detalhes, veja, por exemplo, Raymond J. Cannon, "Exponential Growth and Decay", *UMAP Modules 1977: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1978. Técnicas de datação mais avançadas são discutidas em Paul Campbell, "How Old Is the Earth?" *UMAP Modules 1992: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1993.

[1]O valor atual de R_0 é $1{,}35 \times 10^{-12}$. (N.T.)

e

$$t = \frac{-\ln \frac{1}{5}}{k} = \frac{\ln 5}{k}$$

Como vimos no Exemplo 4.2.11, a meia-vida h satisfaz à equação $h = \frac{\ln 2}{k}$. Como o ^{14}C possui uma meia-vida $h = 5.730$, temos:

$$k = \frac{\ln 2}{h} = \frac{\ln 2}{5.730} \approx 0{,}000121$$

Assim, a idade do fóssil é

$$t = \frac{\ln 5}{k} = \frac{\ln 5}{0{,}000121} \approx 13.300$$

O fóssil tem, portanto, aproximadamente 13.300 anos de idade.

Ajuste de uma Curva Exponencial

Em nosso último exemplo, vamos examinar o uso de logaritmos para ajustar uma função exponencial a um conjunto de dados.

EXEMPLO 4.2.13

A densidade populacional a x quilômetros de uma cidade é dada por uma função da forma $Q(x) = Ae^{-kx}$. Determine esta função, sabendo que a densidade populacional no centro da cidade é de 15.000 habitantes por quilômetro quadrado e a densidade populacional a 10 quilômetros do centro é de 9.000 habitantes por quilômetro quadrado.

Solução

Para simplificar os cálculos, vamos expressar a densidade populacional em milhares de habitantes por metro quadrado. O fato de que $Q(0) = 15$ significa que $A = 15$. O fato de que $Q(10) = 9$ significa que

$$9 = 15e^{-10k} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3}{5} = e^{-10k}$$

Tomando o logaritmo de ambos os membros da equação, temos:

$$\ln \frac{3}{5} = -10k \qquad \text{ou} \qquad k = -\frac{\ln 3/5}{10} \approx 0{,}051$$

Assim, a função exponencial que representa a densidade populacional é $Q(x) = 15e^{-0{,}051x}$.

13 EXPLORE!

Leia o Exemplo 4.2.13. Entre com Q – A∗e^(–K∗X) na calculadora. Calcule a que distância do centro da cidade a densidade populacional é Q = 13.500 habitantes por quilômetro quadrado usando os dados do exemplo: a densidade populacional no centro da cidade é de 15.000 habitantes por quilômetro quadrado e a densidade populacional a 10 quilômetros do centro é de 9.000 habitantes por quilômetro quadrado.

PROBLEMAS | 4.2

Nos Problemas 1 e 2, use uma calculadora para obter os valores dos logaritmos naturais indicados.

1. Determine os valores de $\ln 1$, $\ln 2$, $\ln e$, $\ln 5$, $\ln \frac{1}{5}$ e $\ln e^2$. O que acontece quando você tenta calcular $\ln 0$ e $\ln -2$? Por quê?

2. Determine os valores de $\ln 7$, $\ln \frac{1}{3}$, $\ln e^{-3}$, $\ln \frac{1}{e^{2,1}}$ e $\ln \sqrt[5]{e}$. O que acontece quando você tenta calcular $\ln(-7)$ e $\ln(-e)$?

Nos Problemas 3 a 8, determine o valor da expressão dada usando as propriedades dos logaritmos.

3. $\ln e^3$

4. $\ln \sqrt{e}$

5. $e^{\ln 5}$

6. $e^{2 \ln 3}$

7. $e^{3 \ln 2 - 2 \ln 5}$

8. $\ln \frac{e^3\sqrt{e}}{e^{1/3}}$

Nos Problemas 9 a 12, use as regras dos logaritmos para escrever a expressão dada em termos de $\log_3 2$ *e* $\log_3 5$.

9. $\log_3 270$

10. $\log_3 (2{,}5)$

11. $\log_3 100$

12. $\log_3 \left(\dfrac{64}{125}\right)$

Nos Problemas 13 a 20, use as regras dos logaritmos para simplificar as expressões dadas.

13. $\log_2 (x^4y^3)$

14. $\log_3 (x^5y^{-2})$

15. $\ln \sqrt[3]{x^2 - x}$

16. $\ln(x^2\sqrt{4 - x^2})$

17. $\ln\left[\dfrac{x^2(3 - x)^{2/3}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\right]$

18. $\ln\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right]$

19. $\ln(x^3e^{-x^2})$

20. $\ln\left[\dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^3\sqrt{1 - x^2}}\right]$

Nos Problemas 21 a 36, determine o valor de x.

21. $4^x = 53$

22. $\log_2 x = 4$

23. $\log_3 (2x - 1) = 2$

24. $3^{2x-1} = 17$

25. $2 = e^{0{,}06x}$

26. $\dfrac{1}{2}Q_0 = Q_0e^{-1{,}2x}$

27. $3 = 2 + 5e^{-4x}$

28. $-2 \ln x = b$

29. $-\ln x = \dfrac{t}{50} + C$

30. $5 = 3 \ln x - \dfrac{1}{2} \ln x$

31. $\ln x = \dfrac{1}{3}(\ln 16 + 2 \ln 2)$

32. $\ln x = 2(\ln 3 - \ln 5)$

33. $3^x = e^2$

34. $a^k = e^{kx}$

35. $\dfrac{25e^{0{,}1x}}{e^{0{,}1x} + 3} = 10$

36. $\dfrac{5}{1 + 2e^{-x}} = 3$

37. Se $\log_2 x = 5$, qual é o valor de $\ln x$?

38. Se $\log_{10} x = -3$, qual é o valor de $\ln x$?

39. Se $\log_5 (2x) = 7$, qual é o valor de $\ln x$?

40. Se $\log_3 (x - 5) = 2$, qual é o valor de $\ln x$?

41. Calcule o valor de $\ln \dfrac{1}{\sqrt{ab^3}}$ para $\ln a = 2$ e $\ln b = 3$.

42. Determine o valor de $\dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{\sqrt{b}}{c}\right)^a$ para $\ln b = 6$ e $\ln c = -2$.

43. JUROS COMPOSTOS Quanto tempo um investimento leva para dobrar de valor se os juros anuais forem de 6%, capitalizados continuamente?

44. JUROS COMPOSTOS Quanto tempo um investimento leva para dobrar de valor se os juros anuais forem de 7%, capitalizados continuamente?

45. JUROS COMPOSTOS Um depósito em um certo banco dobra de valor a cada 13 anos. O banco capitaliza os juros continuamente. Qual é a taxa anual de juros oferecida pelo banco?

46. TEMPO PARA TRIPLICAR Quanto tempo uma quantia A_0 leva para triplicar de valor se é investida a uma taxa anual r de juros, capitalizados continuamente?

47. TEMPO PARA TRIPLICAR Se uma conta que rende juros capitalizados continuamente leva 12 anos para dobrar de valor, quanto tempo leva para triplicar de valor?

48. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO Um certo medicamento é injetado no sangue de um paciente; t segundos depois, a concentração do medicamento é C gramas por centímetro cúbico, onde

$$C(t) = 0{,}1(1 + 3e^{-0{,}03t})$$

a. Qual é a concentração do medicamento após 10 segundos?

b. Qual é o tempo necessário para que a concentração do medicamento atinja o valor de 0,12 g/cm³?

49. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO A concentração de um medicamento nos rins de um paciente no instante t (em segundos) é C gramas por centímetro cúbico (g/cm³), onde

$$C(t) = 0{,}4(2 - 0{,}13e^{-0{,}02t})$$

a. Qual é a concentração do medicamento após 20 segundos? E após 60 segundos?

b. Qual é o tempo necessário para que a concentração do medicamento atinja o valor de 0,75 g/cm³?

50. DECAIMENTO RADIOATIVO A massa de uma certa substância radioativa que resta após t anos é dada por uma função da forma $Q(t) = Q_0e^{-0{,}003t}$. Determine a meia-vida da substância.

51. DECAIMENTO RADIOATIVO O elemento rádio decai exponencialmente, com uma meia-vida de 1.690 anos. Quanto tempo uma amostra de 50 g de rádio leva para se reduzir a 5 gramas?

52. PUBLICIDADE O departamento de vendas de uma grande editora estima que se x mil exemplares de um novo livro didático forem distribuídos gratuitamente aos professores, as vendas do livro no primeiro ano serão aproximadamente $f(x) = 20 - 12e^{-0,03x}$ mil exemplares. De acordo com esta estimativa, quantos exemplares gratuitos devem ser distribuídos para que o livro venda 12.000 exemplares no primeiro ano?

53. COLÔNIAS DE BACTÉRIAS Um aluno de medicina que está estudando o crescimento de colônias de bactérias em um certo meio de cultura compilou os seguintes dados:

Número de minutos	0	20
Número de bactérias	6.000	9.000

Use estes dados para chegar a uma função exponencial da forma $Q(t) = Q_0e^{kt}$ que expresse o número de bactérias na colônia em função do tempo. Quantas bactérias estão presentes após 1 hora?

54. PRODUTO DOMÉSTICO BRUTO Um economista compilou os seguintes dados a respeito do Produto Doméstico Bruto (PDB) de um certo país:

Ano	1990	2000
PDB (bilhões)	100	180

Use estes dados para prever qual será o valor do PDB no ano de 2010 se o PDB estiver aumentando:

a. Linearmente **b.** Exponencialmente.

55. EFICIÊNCIA NO TRABALHO Um especialista em eficiência no trabalho, contratado por uma empresa, compilou os seguintes dados a respeito da relação entre a produção e a experiência dos operários:

Experiência t (meses)	0	6
Produção Q (unidades por hora)	300	410

O especialista acredita que a produção Q esteja relacionada à experiência t por uma função da forma $Q(t) = 500 - Ae^{-kt}$. Determine a função $Q(t)$ com esta forma que melhor se ajusta aos dados experimentais. Qual é a produção esperada de um operário com 1 ano de experiência?

56. ARQUEOLOGIA Um arqueólogo encontrou um fóssil no qual a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C é $\dfrac{1}{3}$ da razão existente na atmosfera. Qual é a idade aproximada do fóssil?

57. ARQUEOLOGIA Testes realizados em um artefato descoberto no sítio arqueológico de Debert, na Nova Escócia, revelam que 28% do ^{14}C original ainda estão presentes. Qual é a idade aproximada do artefato?

58. ARQUEOLOGIA Os Pergaminhos do Mar Morto foram escritos por volta do ano 100 a.C. Que porcentagem do ^{14}C original ainda existia nos pergaminhos em 1947, quando foram descobertos?

59. FALSIFICAÇÃO DE OBRAS DE ARTE Um quadro supostamente pintado por Rembrandt em 1640 conserva 99,7% do ^{14}C original. Há quanto tempo foi pintado o quadro? Qual seria a porcentagem de ^{14}C se o quadro fosse legítimo?

60. ARQUEOLOGIA Em 1389, Pierre d'Arcis, o bispo de Troyes, escreveu uma carta para o papa acusando um colega de fazer passar "um certo pano, espertamente pintado" como a mortalha de Jesus Cristo. Apesar da denúncia, a imagem no pedaço de pano era tão realista que muitas pessoas passaram a considerá-lo como uma relíquia sagrada. Conhecido como o sudário de Turim, o pano foi submetido à datação por carbono em 1988. Se fosse autêntico, teria aproximadamente 1.960 anos de idade.

a. Se o sudário tivesse realmente 1.960 anos, que porcentagem do ^{14}C original restaria no tecido?

b. Os cientistas verificaram que o sudário continha 92,3% do ^{14}C original. Com base nesta informação, qual era a idade provável do sudário em 1988?

61. RESFRIAMENTO Para fazer café instantâneo, misturamos água fervente (a 100°C) com café solúvel. Se a temperatura do ar é de 20°C, uma lei da física nos diz que a temperatura do café após t minutos é dada por uma função da forma $f(t) = 20 - Ae^{-kt}$. Depois de esfriar durante 5 minutos, o café ainda está 8°C acima da temperatura ideal, mas 2 minutos depois está pronto para ser bebido. Qual é a temperatura "ideal"?

62. DEMOGRAFIA A população mundial aumenta à taxa de aproximadamente 2% ao ano. Supondo que o aumento da população seja exponencial, a população daqui a t anos será dada por uma função da forma $P(t) = P_0e^{0,02t}$, onde P_0 é a população atual. (Esta expressão será demonstrada no Capítulo 6.) Supondo que este modelo do aumento da população esteja correto, quanto tempo a população mundial levará para dobrar de valor?

63. ESPIONAGEM Depois de salvar o chefe no Problema 18 da Seção 3.5, nosso espião volta para casa e descobre que seu melhor amigo, Alexandre ("Xande") Dentro, foi assassinado. Segunda a polícia, o corpo de Xande foi descoberto às 13 h de uma quinta-feira, dentro de um *freezer* regulado para uma temperatura de −13°C. A polícia também informa que a temperatura do corpo no momento em que foi descoberto era de 4°C. Nosso espião sabe que t horas após a morte, a temperatura de um cadáver é

$$T = T_a + (98{,}6 - T_a)(0{,}97)^t$$

onde T_a é a temperatura do ar nas vizinhanças do corpo. O espião sabe também que o criminoso foi Francesco Petta ou André Scélérat. Se Francesco estava na prisão até meio-dia de quarta-feira e André foi visto deixando a cidade às 18 h de quarta-feira, quem cometeu o crime e quando o crime foi cometido?

64. VOLUME SONORO O **decibel**, que recebeu este nome em homenagem a Alexander Graham Bell, é a menor variação de volume sonoro que pode ser detectada pelo ouvido humano. Devido ao modo como o ouvido humano funciona, quando dois sons de intensidades I_1 e I_2 são ouvidos, a diferença de volume é igual a D decibéis, onde

$$D = 10 \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

Quando o volume sonoro é medido em relação ao limiar da audição humana ($I_0 = 10^{-12}$ watts/cm³), o volume normal de conversação é de 60 decibéis e o som produzido por uma banda de *rock* pode ter um volume 50 vezes maior (110 decibéis).

a. Quantas vezes mais intenso que o som de uma conversação normal é o som produzido por uma banda de *rock*?

b. O limiar da dor é atingido quando o volume sonoro é aproximadamente 10 vezes maior que o som produzido por uma banda de *rock*. Qual é o volume sonoro, em decibéis, correspondente ao limiar da dor?

65. SISMOLOGIA A magnitude de um terremoto na escala Richter é dada por

$$R = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde E é a energia liberada pelo terremoto (em joules) e $E_0 = 10^{4,4}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto, usada como referência.

a. O terremoto de 1906 em San Francisco liberou aproximadamente $5{,}96 \times 10^{16}$ joules de energia. Qual foi a magnitude do terremoto na escala Richter?

b. Qual foi a energia liberada pelo terremoto de 1993 na Índia, que atingiu uma magnitude de 6,4 na escala Richter?

66. APRENDIZADO Em um experimento para testar a memória de curto prazo,* L. R. Peterson e M. J. Peterson observaram que a probabilidade $p(t)$ de que um indivíduo consiga se lembrar de uma lista de números e letras t segundos depois de examiná-la é dada por

$$p(t) = 0{,}89[0{,}01 + 0{,}99(0{,}85)^t]$$

a. Qual é a probabilidade de que o indivíduo se lembre da lista imediatamente após examiná-la (isto é, no instante $t = 0$)?

b. Quanto tempo é necessário para que a probabilidade se reduza a 0,5?

c. Faça o gráfico de $p(t)$.

67. SISMOLOGIA Na escala Richter, a magnitude R de um terremoto de intensidade I é dada por

$$R = \frac{\ln I}{\ln 10}.$$

a. Determine a intensidade do terremoto de 1906 em San Francisco, que atingiu $R = 8{,}3$ na escala Richter.

b. Quantas vezes mais intenso foi o terremoto de 1906 em San Francisco que o terremoto de 1995 em Kobe, no Japão, que atingiu $R = 7{,}1$ na escala Richter?

68. ENTOMOLOGIA Foi determinado que o volume da gema do ovo de uma mosca doméstica diminui de acordo com a equação $V(t) = 5e^{-1{,}3t}$ mm^3 (milímetros cúbicos), onde t é o número de dias após a postura. A larva sai do ovo após 4 dias.

a. Qual é o volume do ovo quando a larva nasce?

b. Desenhe o gráfico do volume da gema para o período de tempo $0 \leq t \leq 4$.

c. Determine a meia-vida do volume da gema, ou seja, o tempo necessário para que o volume da gema se reduza à metade do volume inicial.

69. RADIOLOGIA O iodo radioativo, ^{133}I, tem uma meia-vida de 20,9 horas. Quando injetado na corrente sangüínea, o iodo tende a se acumular na glândula tireóide.

a. Depois de 24 horas, um técnico examina a glândula tireóide do paciente para verificar se está funcionando normalmente. Se a tireóide absorveu todo o iodo injetado, que porcentagem da massa inicial de iodo radioativo deve ser detectada?

b. Um paciente volta à clínica 25 horas depois de receber uma injeção de ^{133}I. O técnico examina a glândula tireóide e detecta a presença de 41,3% da massa de iodo que foi injetada. Qual a porcentagem da massa inicial que permanece no restante do corpo do paciente ou foi eliminada?

70. PRESSÃO DO AR A pressão do ar $f(x)$ a uma altitude de s metros acima do nível do mar é dada por

$$f(s) = e^{-0{,}000125s} \text{ atmosferas}$$

a. A pressão atmosférica do lado de fora de um avião é de 0,25 atmosfera. A que altitude se encontra o avião?

b. Um alpinista decide que vai colocar uma máscara de oxigênio quando chegar a uma altitude de 7.000 metros. Qual é a pressão atmosférica nesta altitude?

71. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Com base na estimativa de que existem 400 bilhões de acres de terras aráveis na Terra e de que cada 10 acres podem produzir comida suficiente para alimentar um indivíduo, alguns demógrafos acreditam que a Terra não seja capaz de sustentar mais de 40 bilhões de habitantes. A população da Terra era aproximadamente de 3 bilhões de habitantes em 1960 e 4 bilhões de habitantes em 1975. Se a população da Terra estivesse crescendo exponencialmente, em que ano atingiria o limite teórico de 40 bilhões de habitantes?

72. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO De acordo com um modelo logístico baseado na hipótese de que a Terra não pode sustentar mais de 40 bilhões de indivíduos, a população mundial (em bilhões de habitantes) t anos após 1960 é dada por uma função da forma $P(t) = \dfrac{40}{1 + Ce^{-kt}}$, onde C e k são constantes positivas. Determine uma função com esta forma que seja compatível com o fato de que a população terrestre era de aproximadamente 3 bilhões de habitantes em 1960 e 4 bilhões em 1975. O que este modelo prevê a respeito da população no ano 2000? Verifique se o modelo é razoável comparando o valor previsto com o valor real para o ano 2000, 6 bilhões de habitantes.

73. ALOMETRIA Suponha que durante os primeiros 6 anos da vida de um alce a altura do animal $H(t)$ e a envergadura dos chifres $A(t)$ aumentem com o tempo t (em anos) de acordo com as expressões $H(t) = 125e^{0{,}08t}$ e $A(t) = 50e^{0{,}16t}$, onde H e A estão em centímetros (cm).

a. Plote no mesmo gráfico $y = H(t)$ e $y = A(t)$ para o período no qual as expressões são válidas, $0 \leq t \leq 6$.

b. Expresse a envergadura A dos chifres em função da altura H. [*Sugestão:* Primeiro tome o logaritmo de ambos os membros da equação $H = 125e^{0{,}08t}$ para expressar o tempo em termos de H e depois substitua o resultado na expressão de $A(t)$.]

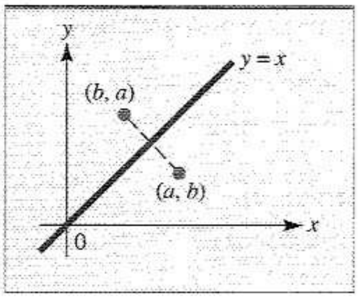
74. Use uma das regras dos expoentes para demonstrar a regra dos logaritmos indicada.

a. Regra do quociente: $\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$

b. Regra da potência: $\ln u^r = r \ln u$

*L. R. Peterson and M. J. Peterson, "Short-Term Retention of Individual Verbal Items", *Journal of Experimental Psychology*, Vol. 58 (1959), pp. 193-198.

75. Mostre que o ponto simétrico do ponto (a, b) em relação à reta $y = x$ é o ponto (b, a). [*Sugestão:* Mostre que a reta que liga os pontos (a, b) e (b, a) é perpendicular à reta $y = x$ e que a distância do ponto (a, b) à reta $y = x$ é igual à distância da reta $y = x$ ao ponto (b, a).]



PROBLEMA 75

76. Depois de fazer um esboço da curva da função $y = \log_b x$ (para $0 < b < 1$) traçando a curva simétrica da curva de $y = b^x$ em relação à reta $y = x$, responda às seguintes perguntas, para $x > 0$:

a. A curva de $y = \log_b x$ é crescente ou decrescente?

b. A concavidade da curva é para cima ou para baixo?

c. Quais são os pontos de interseção da curva com os eixos x e y? A curva possui assíntotas horizontais ou verticais?

d. Quais são os valores de

$$\lim_{x \to +\infty} \log_b x \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \log_b x?$$

77. Mostre que se y é uma função potência de x, ou seja, se $y = Cx^k$, onde C e k são constantes, $\ln y$ é uma função linear de $\ln x$. (*Sugestão:* tome o logaritmo de ambos os membros da equação $y = Cx^k$.)

78. Use uma calculadora gráfica para plotar as funções $y = 10^x$, $y = \log_{10} x$ e $y = x$ no mesmo gráfico (use uma janela $[-5, 5]1$ por $[-5, 5]1$). Existe alguma relação especial entre estes três gráficos?

Nos Problemas 79 a 82, determine o valor de x.

79. $x = \ln(3{,}42 \times 10^{-8{,}1})$

80. $3.500e^{0{,}31x} = \dfrac{e^{-3{,}5x}}{1 + 257e^{-1{,}1x}}$

81. $e^{0{,}113x} + 4{,}72 = 7{,}031 - x$

82. $\ln(x + 3) - \ln x = 5\ln(x^2 - 4)$

83. Sejam a e b dois números positivos diferentes de 1.

a. Mostre que $(\log_a b)(\log_b a) = 1$.

b. Mostre que $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ para qualquer número $x > 0$.

SEÇÃO 4.3 Derivação de Funções Logarítmicas e Exponenciais

As derivadas das funções exponenciais e logarítmicas são fáceis de calcular. Nesta seção, vamos obter expressões para estas derivadas e usá-las em alguns problemas práticos. Começamos com a derivada de $\ln x$.

Derivada de ln x

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x > 0$$

Esta expressão será demonstrada no final da seção, depois que apresentarmos alguns exemplos.

14 EXPLORE!

Plote a função $y = \ln x$ usando uma janela decimal modificada $[-0.7, 8.7]1$ por $[-3.1, 3.1]1$. Escolha um valor para x e trace a reta tangente à curva para este valor de x. Observe quão próxima a inclinação desta reta tangente está de $1/x$. Repita para vários outros valores de x.

EXEMPLO 4.3.1

Determine a derivada da função $f(x) = x \ln x$.

Solução

Combinando a regra do produto com a expressão da derivada de $\ln x$, obtemos:

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x$$

As regras para logaritmos podem facilitar a derivação de expressões complexas. No Exemplo 4.3.2, usamos a regra da potência para logaritmos antes de derivar a expressão.

EXEMPLO 4.3.2

Determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4}$.

Solução

Como $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, temos, de acordo com a regra da potência para logaritmos:

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4} = \frac{\ln x^{2/3}}{x^4} = \frac{\frac{2}{3}\ln x}{x^4}$$

Aplicando a regra do quociente para derivadas, obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}\left[\frac{x^4(\ln x)' - (x^4)'\ln x}{(x^4)^2}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{x^4\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^3 \ln x}{x^8}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{1 - 4\ln x}{x^5}\right] \qquad \textit{dividindo por } x^3 \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.3.3

Determine a derivada da função $g(t) = (t + \ln t)^{3/2}$.

Solução

A função tem a forma $g(t) = u^{3/2}$, onde $u = t + \ln t$. Aplicando a regra da potência para derivadas, obtemos:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(u^{3/2}) = \frac{3}{2}u^{1/2}\frac{du}{dt} \\ &= \frac{3}{2}(t + \ln t)^{1/2}\frac{d}{dt}(t + \ln t) \\ &= \frac{3}{2}(t + \ln t)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Se $f(x) = \ln u(x)$, onde $u(x)$ é uma função derivável de x, a regra da cadeia fornece a seguinte expressão para $f'(x)$:

Regra da Cadeia para Funções Logarítmicas ■ Se $u(x)$ é uma função derivável de x,

$$\frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx}$$

EXEMPLO 4.3.4

Determine a derivada da função $f(x) = \ln(2x^3 + 1)$.

Solução

Neste caso, $f(x) = \ln u$, onde $u(x) = 2x^3 + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2x^3 + 1}\frac{d}{dx}(2x^3 + 1) \\ &= \frac{2(3x^2)}{2x^3 + 1} = \frac{6x^2}{2x^3 + 1} \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.3.5

Escreva a equação da reta tangente à curva de $f(x) = x - \ln\sqrt{x}$ no ponto em que $x = 1$.

Solução

Para $x = 1$, temos:

$$y = f(1) = 1 - \ln(\sqrt{1}) = 1 - 0 = 1$$

e, portanto, o ponto de tangência é (1, 1). Para determinar a inclinação da reta tangente neste ponto, escrevemos

$$f(x) = x - \ln\sqrt{x} = x - \frac{1}{2}\ln x$$

e calculamos a derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x}$$

Assim, a reta tangente passa pelo ponto (1, 1) com inclinação

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, sua equação é

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{1}{2} \qquad \textit{forma ponto-inclinação}$$

ou

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

EXEMPLO 4.3.6

Um fabricante estima que x unidades de um determinado produto serão vendidas se o preço unitário for $p(x) = 112 - x\ln x^3$ centenas de reais.

a. Determine as funções de receita e receita marginal.

b. Use o método de análise marginal para estimar a receita obtida com a produção da quinta unidade. Qual é a receita exata obtida com a produção da quinta unidade?

Solução

a. A receita é

$$R(x) = xp(x) = x(112 - x\ln x^3) = 112x - x^2(3\ln x)$$

centenas de reais e, portanto, a receita marginal é

$$R'(x) = 112 - 3\left[x^2\left(\frac{1}{x}\right) + (2x)\ln x\right] = 112 - 3x - 6x\ln x$$

b. Para $x = 4$, a receita marginal é

$$R'(4) = 112 - 3(4) - 6(4)\ln(4) \approx 66{,}73$$

centenas de reais por unidade, ou seja, R$ 6.673,00 por unidade. A receita exata obtida com a venda da quinta unidade é

$$\begin{aligned} R(5) - R(4) &= [112(5) - 3(5)^2\ln 5] - [112(4) - 3(4)^2\ln 4] \\ &= 439{,}29 - 381{,}46 = 57{,}83 \end{aligned}$$

centenas de reais (R$ 5.783,00).

Funções Exponenciais

Para obter a expressão da derivada de e^x, basta derivar ambos os membros da equação

$$\ln e^x = x$$

em relação a x, usando a regra da cadeia para logaritmos para derivar $\ln e^x$. O resultado é o seguinte:

$$\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{e^x} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

15 EXPLORE!

Plote a função $y = e^x$ usando uma janela decimal modificada $[-0{,}7,\ 8{,}7]1$ por $[-0{,}1,\ 6{,}1]$. Escolha um valor para x e determine o valor da derivada para este valor de x. Observe quão próximo o valor da derivada está da coordenada y da curva. Repita para vários outros valores de x.

Derivada da Função Exponencial

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{para qualquer número real } x$$

O fato de a derivada de e^x ser a própria função significa que em todos os pontos $P(c, e^c)$ da curva $y = e^x$ a inclinação é igual a e^c, a coordenada y do ponto P (veja Figura 4.8). Esta é uma das principais razões pelas quais o número e é usado como base das funções exponenciais no cálculo diferencial e integral.

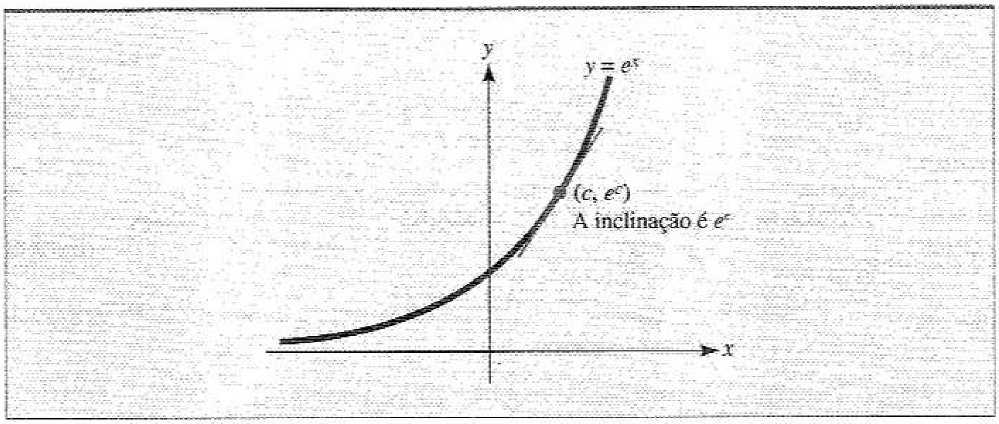


FIGURA 4.8 Em todos os pontos $P(c, e^c)$ da curva $y = e^x$, a inclinação é igual a e^c.

Combinando a regra da cadeia com a expressão da derivada de e^x

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

obtemos a seguinte regra para derivar funções exponenciais:

Regra da Cadeia para Funções Exponenciais ■ Se $u(x)$ é uma função derivável de x,

$$\frac{d}{dx}(e^{u(x)}) = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$$

EXEMPLO 4.3.7

Determine a derivada da função $f(x) = e^{x^2+1}$.

Solução

De acordo com a regra da cadeia, com $u = x^2 + 1$, temos

$$f'(x) = e^{x^2+1}\left[\frac{d}{dx}(x^2 + 1)\right] = 2xe^{x^2+1}$$

EXEMPLO 4.3.8

Determine a derivada da função

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$$

Solução

Usando a regra da cadeia e a regra do quociente, obtemos

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(-3e^{-3x}) - (2x)e^{-3x}}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= e^{-3x}\left[\frac{-3(x^2 + 1) - 2x}{(x^2 + 1)^2}\right] = e^{-3x}\left[\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}\right]$$

EXEMPLO 4.3.9

Determine o maior e o menor valor da função $f(x) = xe^{2x}$ no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Solução

De acordo com a regra do produto,

$$f'(x) = x\frac{d}{dx}(e^{2x}) + e^{2x}\frac{d}{dx}(x) = x(2e^{2x}) + e^{2x}(1) = (2x + 1)e^{2x}$$

e, portanto, para que $f'(x) = 0$ é preciso que

$$(2x + 1)e^{2x} = 0$$

$$2x + 1 = 0 \qquad \textit{pois } e^{2x} > 0 \textit{ para qualquer valor de } x$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Calculando os valores de $f(x)$ no número crítico $x = -\frac{1}{2}$ e nas extremidades do intervalo, $x = -1$ e $x = 1$, descobrimos que

$$f(-1) = (-1)e^{-2} \approx -0{,}135$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-1} \approx -0{,}184 \qquad \textit{mínimo}$$

$$f(1) = (1)e^{2} \approx 7{,}389 \qquad \textit{máximo}$$

Assim, o maior valor de $f(x)$ é 7,389 em $x = 1$ e o menor é $-0{,}184$ em $x = -\frac{1}{2}$.

Crescimento e Decaimento Exponencial

Como vimos na Seção 4.1, dizemos que uma grandeza $Q(t) = Q_0e^{kt}$ **cresce exponencialmente** se $k > 0$ e que **decai exponencialmente** se $k < 0$. Em ambos os casos, note que

$$Q'(x) = Q_0(e^{kx})(k) = k(Q_0e^{kx}) = kQ(x)$$

e que a taxa de variação percentual de Q é dada por

$$\frac{100Q'(x)}{Q(x)} = \frac{100(kQ)}{Q} = 100k$$

Resumindo:

Crescimento e Decaimento Exponencial ■ Se $Q(x) = Q_0e^{kx}$, $Q'(x) = kQ(x)$ e a taxa de variação percentual de $Q(x)$ é $100k$.

NOTA Observe que isto está de acordo com o que já sabemos a respeito dos juros compostos, isto é, que se os juros forem capitalizados continuamente, o montante após t anos será dado por $B(t) = Pe^{rt}$, onde P é o principal e r é a taxa de juros expressa como um número decimal. ■

EXEMPLO 4.3.10

Um demógrafo que está estudando uma certa comunidade usa uma função exponencial $P(t) = P_0e^{kt}$ para modelar a população, onde t é o número de anos após 1990. Se a população era de 100.000 habitantes em 1990 e 145.000 em 2003, qual é a taxa de aumento anual da população, expressa como uma porcentagem?

Solução

Para simplificar os cálculos, vamos expressar a população $P(t)$ em milhares de habitantes. Como a população é 100.000 para $t = 0$ (1990) e 145.000 para $t = 13$ (2003), temos:

$$P_0 = P(0) = 100$$

e

$$\begin{aligned}
P(13) &= 100e^{k(13)} = 145 \\
e^{k(13)} &= \frac{145}{100} = 1{,}45 \\
\ln(e^{k(13)}) &= \ln(1{,}45) && \textit{tomando os logaritmos de ambos os membros} \\
k(13) &= 0{,}3716 && \textit{pois } \ln(e^x) = x \\
k &= \frac{0{,}3716}{13} = 0{,}0286
\end{aligned}$$

Assim, a taxa de aumento anual da população é $100k = 2{,}86\%$.

No Exemplo 4.3.11, usamos a análise marginal para estudar a demanda exponencial de uma certa mercadoria e determinar o preço para o qual a receita obtida com a venda da mercadoria é máxima.

EXEMPLO 4.3.11

Um fabricante estima que $D(p) = 5.000e^{-0{,}02p}$ unidades de uma certa mercadoria serão vendidas se o preço for p reais a unidade.

a. Determine a elasticidade da demanda da mercadoria. Para que valores de p a demanda é elástica, inelástica e de elasticidade unitária?
b. Se o preço for aumentado 3% acima de R$ 40,00, qual é o efeito esperado sobre a demanda?
c. Determine a receita $R(p)$ obtida com a venda de $q = D(p)$ unidades a um preço unitário de p reais. Para que valor de p a receita é máxima?

Solução

a. De acordo com a expressão obtida na Seção 3.4, a elasticidade da demanda é dada por

$$\begin{aligned}
E(p) &= \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \\
&= \left(\frac{p}{5.000e^{-0{,}02p}}\right)[5.000e^{-0{,}02p}(-0{,}02)] \\
&= \frac{p[5.000(-0{,}02)e^{-0{,}02p}]}{5.000e^{-0{,}02p}} = -0{,}02p
\end{aligned}$$

Nesse caso,

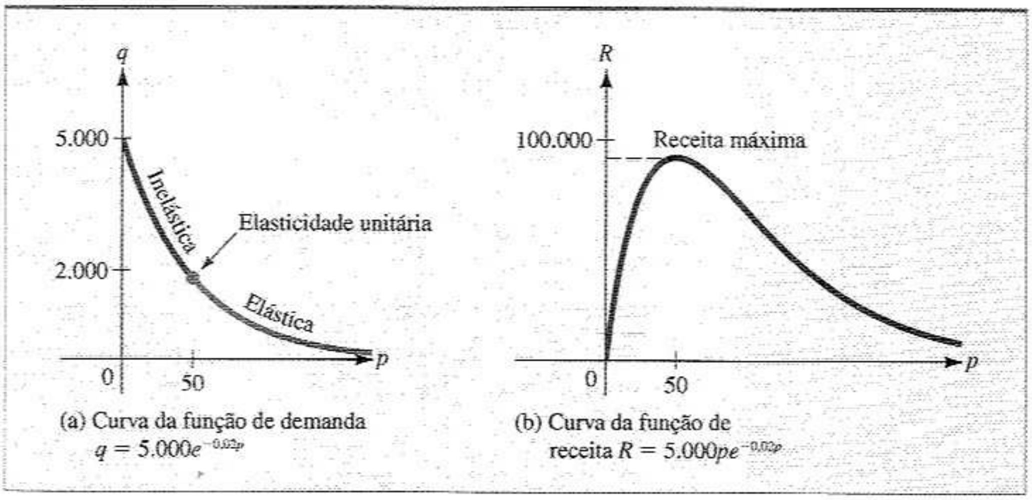
$$|E(p)| = |-0{,}02p| = 0{,}02p$$

e, portanto,

a demanda é de elasticidade unitária para $|E(p)| = 0{,}02p = 1$, ou seja, para $p = 50$
a demanda é elástica para $|E(p)| = 0{,}02p > 1$, ou seja, para $p > 50$
a demanda é inelástica para $|E(p)| = 0{,}02p < 1$, ou seja, para $p < 50$

A curva da função de demanda, mostrando as faixas de elasticidade, aparece na Figura 4.9a.

FIGURA 4.9 Curvas de demanda e receita para a mercadoria do Exemplo 4.3.11.



b. Para $p = 40$, a demanda é

$$q(40) = 5.000e^{-0,02(40)} \approx 2.247 \text{ unidades}$$

e a elasticidade da demanda é

$$E(p) = -0,02(40) = -0,8$$

Assim, um aumento de 1% no preço a partir de $p =$ R\$ 40,00 resulta em uma diminuição na demanda de aproximadamente 0,8%. Então, um aumento de 3% no preço, de R\$ 40,00 para R\$ 41,20, resulta em uma diminuição na demanda de aproximadamente $2.247[3(0,008)] = 54$ unidades, de 2.247 para 2.193 unidades.

c. A função de receita é

$$R(p) = pq = 5.000pe^{-0,02p}$$

para $p \geq 0$ (o preço não pode ser negativo), cuja derivada é

$$R'(p) = 5.000(-0,02pe^{-0,02p} + e^{-0,02p})$$
$$= 5.000(1 - 0,02p)e^{-0,02p}$$

Como $e^{-0,02p}$ é uma grandeza positiva, $R'(p) = 0$ se e apenas se

$$1 - 0,02p = 0 \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{1}{0,02} = 50$$

Para confirmar que $p = 50$ corresponde a um máximo absoluto, observe que

$$R''(p) = 5.000(0,0004p - 0,04)e^{-0,02p}$$

e, portanto,

$$R''(50) = 5.000[0,0004(50) - 0,04]e^{-0,02(50)} \approx -37 < 0$$

Assim, o teste da derivada segunda mostra que o máximo absoluto de $R(p)$ está realmente em $p = 50$ (veja Figura 4.9b).

16 EXPLORE!

Para examinar o caso geral do Exemplo 4.3.11, entre com a função $y = Axe^{Bx}$ em Y1 do editor de equações e determine a posição do máximo de y para diferentes valores de A e B. Assim, por exemplo, faça $A = 1$ e varie o valor de B (fazendo $B = 1$, 0,5 e 0,1, digamos) para ver como varia a posição do máximo. Em seguida, mantenha B constante (fazendo $B = 0,1$) e varie o valor de A (fazendo $A = 1$, 10 e 100). Tente encontrar uma correlação entre estes resultados.

Derivação Logarítmica

Às vezes, é possível simplificar a derivação de funções que envolvem produtos, quocientes e potências calculando primeiramente o logaritmo da função. Esta técnica, conhecida como **derivação logarítmica**, é ilustrada no Exemplo 4.3.12.

EXEMPLO 4.3.12

Determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$.

Solução

É possível resolver este problema usando a regra do quociente e a regra da cadeia, mas os cálculos envolvidos são trabalhosos. (Experimente!)

Um método mais simples consiste em tomar o logaritmo de ambos os membros da expressão de f:

$$\ln f(x) = \ln\left[\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\right] = \ln\sqrt[3]{(x+1)} - \ln(1-3x)^4$$
$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - 4\ln(1-3x)$$

(Observe que, ao introduzirmos o logaritmo, eliminamos o quociente, a raiz cúbica e a quarta potência.)

Agora podemos derivar ambos os membros da equação usando a regra da cadeia para logaritmos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)} - 4\left(\frac{-3}{1-3x}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x}$$

e, portanto,

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x}\right]$$
$$= \left[\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\right]\left[\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x}\right]$$

Às vezes, é necessário derivar uma função exponencial $y = b^x$ ou uma função logarítmica $y = \log_b x$ com uma base $b \neq e$. O Exemplo 4.3.13 mostra de que forma a derivação pode ser usada nesses casos. A obtenção das expressões gerais fica por conta do leitor (Problema 82).

EXEMPLO 4.3.13

Calcule as derivadas das seguintes funções:

a. $y = 2^x$
b. $y = \log_3 x$

Solução

a. Para derivar $y = 2^x$, usamos a derivação logarítmica da seguinte forma:

$$y = 2^x$$
$$\ln y = x(\ln 2) \qquad \textit{tomando os logaritmos naturais de ambos os membros}$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 2 \qquad \textit{derivando ambos os membros}$$
$$\frac{dy}{dx} = (\ln 2)\,y \qquad \textit{multiplicando ambos os membros por } y$$
$$\frac{dy}{dx} = (\ln 2)\,2^x \qquad \textit{fazendo } y = 2^x$$

b. Neste caso, temos:

$$y = \log_3 x$$
$$3^y = x \qquad \textit{definição de logaritmo}$$
$$y\ln 3 = \ln x \qquad \textit{tomando os logaritmos naturais de ambos os membros}$$
$$(\ln 3)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \textit{derivando ambos os membros}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\ln 3)} \qquad \textit{dividindo por } \ln 3$$

Se $Q(x)$ é uma função derivável de x,

$$\frac{d}{dx}(\ln Q) = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

onde a razão do lado direito é a taxa de variação relativa de $Q(x)$. Isto significa que *a taxa de variação relativa de uma grandeza* $Q(x)$ *é igual à derivada de* $\ln Q$. Este tipo especial de derivação logarítmica pode ser usado para simplificar o cálculo de taxas de crescimento, como ilustra o Exemplo 4.3.14.

EXEMPLO 4.3.14

Um país exporta três produtos: trigo (T), aço (A) e petróleo (P). Em um certo instante $t = t_0$, as receitas obtidas com a venda destes produtos, em bilhões de dólares, são

$$T(t_0) = 4 \qquad A(t_0) = 7 \qquad P(t_0) = 10$$

onde A está crescendo a 8%, P está crescendo a 15% e T está diminuindo a 3%. Qual é a taxa relativa de aumento da receita com a exportação dos três produtos?

Solução

Seja $R = T + A + P$. Sabemos que, no instante $t = t_0$,

$$R(t_0) = T(t_0) + A(t_0) + P(t_0) = 4 + 7 + 10 = 21$$

e

$$\frac{T'(t_0)}{T(t_0)} = -0{,}03 \qquad \frac{A'(t_0)}{A(t_0)} = 0{,}08 \qquad \frac{P'(t_0)}{P(t_0)} = 0{,}15$$

de modo que

$$T'(t_0) = -0{,}03T(t_0) \qquad A'(t_0) = 0{,}08A(t_0) \qquad P'(t_0) = 0{,}15P(t_0)$$

Assim, no instante $t = t_0$, a taxa de crescimento relativa de R é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{R'(t_0)}{R(t_0)} &= \frac{d(\ln R)}{dt} = \frac{d}{dt}[\ln(T + A + P)]\Big|_{t=t_0} \\
&= \frac{[T'(t_0) + A'(t_0) + P'(t_0)]}{[T(t_0) + A(t_0) + P(t_0)]} \\
&= \frac{-0{,}03T(t_0) + 0{,}08A(t_0) + 0{,}15P(t_0)}{T(t_0) + A(t_0) + P(t_0)} \\
&= \frac{-0{,}03T(t_0) + 0{,}08A(t_0) + 0{,}15P(t_0)}{R(t_0)} \\
&= \frac{-0{,}03T(t_0)}{R(t_0)} + \frac{0{,}08A(t_0)}{R(t_0)} + \frac{0{,}15P(t_0)}{R(t_0)} \\
&= \frac{-0{,}03(4)}{21} + \frac{0{,}08(7)}{21} + \frac{0{,}15(10)}{21} \\
&= 0{,}0924
\end{aligned}$$

Assim, no instante $t = t_0$ a receita obtida com a exportação dos três produtos está aumentando à taxa de 9,24%.

Demonstração de que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

A demonstração de que $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ se baseia no fato de que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende a e quando n aumenta (ou diminui) sem limite. Para demonstrar a expressão da derivada de $f(x) = \ln x$, o primeiro passo consiste em formar o quociente diferença e aplicar as propriedades dos logaritmos:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{\ln(x + h) - \ln x}{h} \qquad \text{para } x \text{ constante} > 0 \\
&= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x + h}{x}\right) \\
&= \ln\left(\frac{x + h}{x}\right)^{1/h} \\
&= \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}
\end{aligned}$$

Para obter a derivada de ln x, temos que fazer h tender a zero. Fazendo $n = \dfrac{x}{h}$, temos:

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{h} = \frac{n}{x}$$

e, portanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/x} = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1/x}$$

Quando h tende a zero, $n = \dfrac{x}{h}$ aumenta ou diminui sem limite, dependendo do sinal de h. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\ln x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1/x} \\
&= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{1/x} \\
&= \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

PROBLEMAS | 4.3

Nos Problemas 1 a 34, calcule a derivada da função dada.

1. $f(x) = e^{5x}$

2. $f(x) = 3e^{4x+1}$

3. $f(x) = xe^{x}$

4. $f(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$

5. $f(x) = 30 + 10e^{-0.05x}$

6. $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

7. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)e^{6x}$

8. $f(x) = xe^{-x^2}$

9. $f(x) = (1 - 3e^{x})^2$

10. $f(x) = \sqrt{1 + e^{x}}$

11. $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$

12. $f(x) = e^{1/x}$

13. $f(x) = \ln x^3$

14. $f(x) = \ln 2x$

15. $f(x) = x^2 \ln x$

16. $f(x) = x \ln \sqrt{x}$

17. $f(x) = \sqrt[3]{e^{2x}}$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

19. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

20. $f(x) = e^{x} \ln x$

21. $f(x) = e^{-2x} + x^3$

22. $f(t) = t^2 \ln \sqrt[3]{t}$

23. $g(s) = (e^{s} + s + 1)(2e^{-s} + s)$

24. $F(x) = \ln(2x^3 - 5x + 1)$

25. $h(t) = \dfrac{e^{t} + t}{\ln t}$

26. $g(u) = \ln(u^2 - 1)^3$

27. $f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

28. $h(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

29. $f(t) = \sqrt{\ln t + t}$

30. $f(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

31. $f(x) = \ln(e^{-x} + x)$

32. $f(s) = e^{s+\ln s}$

33. $g(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$

34. $L(x) = \ln\left[\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}\right]$

Nos Problemas 35 a 38, determine o maior e o menor valor da função dada no intervalo especificado.

35. $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ para $0 \leq x \leq 2$

36. $F(x) = e^{x^2-2x}$ para $0 \leq x \leq 2$

37. $g(t) = t^{3/2}e^{-2t}$ para $0 \leq t \leq 1$

38. $h(s) = 2s \ln s - s^2$ para $0{,}5 \leq s \leq 2$

Nos Problemas 39 a 44, determine a equação da reta tangente à curva da função $y = f(x)$ no ponto especificado.

39. $f(x) = xe^{-x}$; onde $x = 0$

40. $f(x) = (x+1)e^{-2x}$; onde $x = 0$

41. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$; onde $x = 1$

42. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; onde $x = 1$

43. $f(x) = x^2 \ln \sqrt{x}$; onde $x = 1$

44. $f(x) = x - \ln x$; onde $x = e$

Nos Problemas 45 a 48, determine a derivada segunda da função dada.

45. $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$

46. $f(x) = \ln(2x) + x^2$

47. $f(t) = t^2 \ln t$

48. $g(t) = t^2e^{-t}$

Nos Problemas 49 a 56, use a técnica da derivação logarítmica para calcular a derivada $f'(x)$.

49. $f(x) = (2x+3)^2(x-5x^2)^{1/2}$

50. $f(x) = x^2e^{-x}(3x+5)^3$

51. $f(x) = \dfrac{(x+2)^5}{\sqrt[6]{3x-5}}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{1-3x}}$

53. $f(x) = (x+1)^3(6-x)^2\sqrt[3]{2x+1}$

54. $f(x) = \dfrac{e^{-3x}\sqrt{2x-5}}{(6-5x)^4}$

55. $f(x) = 5^{x^2}$

56. $f(x) = \log_2(\sqrt{x})$

ANÁLISE MARGINAL *Nos Problemas 57 a 60, a função de demanda $q = D(p)$ de um certo produto é dada em termos de um preço unitário p para o qual todas as q unidades serão vendidas. Em cada caso:*

(a) *Determine a elasticidade da demanda e calcule os valores de p para os quais a demanda é elástica, inelástica e de elasticidade unitária.*
(b) *Se o preço for aumentado em 2% a partir de R$ 15,00, qual é o efeito esperado sobre a demanda?*
(c) *Determine a receita $R(p)$ obtida com a venda de q unidades por um preço unitário p. Para que valor de p a receita é máxima?*

57. $D(p) = 3.000e^{-0{,}04p}$

58. $D(p) = 10.000e^{-0{,}025p}$

59. $D(p) = 5.000(p+11)e^{-0{,}1p}$

60. $D(p) = \dfrac{10.000e^{-p/10}}{p+1}$

ANÁLISE MARGINAL *Nos Problemas 61 a 64, o custo $C(x)$ para produzir x unidades de um certo produto é dado. Em casa caso:*

(a) *Determine o custo marginal $C'(x)$.*
(b) *Determine o nível x de produção para o qual o custo médio $A(x) = C(x)/x$ é mínimo.*

61. $C(x) = e^{0{,}2x}$

62. $C(x) = 100e^{0{,}01x}$

63. $C(x) = 12\sqrt{x}\, e^{x/10}$

64. $C(x) = x^2 + 10xe^{-x}$

65. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t anos a população de um certo país será $P(t) = 50e^{0{,}02t}$ milhões de habitantes.

a. Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 10 anos?

b. Qual será a taxa de variação percentual da população com o tempo daqui a t anos? Esta taxa depende de t ou é constante?

66. JUROS COMPOSTOS Uma certa quantia é depositada em um banco e rende juros de 6% ao ano capitalizados continuamente. Determine a taxa de variação percentual do montante com o tempo.

67. DEPRECIAÇÃO Uma certa máquina industrial sofre uma depreciação tal que seu valor após t anos é dado por $Q(t) = 20.000e^{-0{,}4t}$ reais.

a. Qual é a taxa de variação com o tempo do valor da máquina após 5 anos?

b. Qual é a taxa de variação percentual do valor da máquina após t anos? Esta taxa depende de t ou é constante?

68. RESFRIAMENTO Um refrigerante é retirado da geladeira em um dia quente de verão e deixado em um aposento no qual a temperatura é de 30°C. De acordo com uma lei da física, a temperatura da bebida t minutos mais tarde é dada por uma função da forma $f(t) = 30 - Ae^{-kt}$. Mostre que a taxa de variação da temperatura do refrigerante é proporcional à diferença entre a temperatura do aposento e a temperatura da bebida.

69. **ANÁLISE MARGINAL** O responsável pelos livros de matemática de uma grande editora estima que se x mil exemplares forem distribuídos gratuitamente aos professores, um novo livro-texto venderá $f(x) = 20 - 15e^{-0,2x}$ mil exemplares no primeiro ano. No momento, a intenção é distribuir 10.000 exemplares gratuitos.

a. Use os métodos de análise marginal para estimar o aumento das vendas no primeiro ano se, além dos 10.000, mais 1.000 exemplares forem distribuídos.

b. Calcule qual será o aumento real das vendas no primeiro ano se mais 1.000 exemplares forem distribuídos. A estimativa do item (a) é boa?

70. **ECOLOGIA** Em um modelo proposto por John Helms,* a evaporação da água de um pinheiro ponderosa é dada por

$$E(T) = 4{,}6e^{17{,}3T/(T+237)}$$

onde T é a temperatura ambiente em °C.

a. Qual é a taxa de evaporação quando a temperatura ambiente é de 30°C?

b. Qual é a taxa de evaporação percentual? Em que temperatura a taxa de evaporação é igual a 0,5?

71. **APRENDIZADO** De acordo com o modelo de Ebbinghaus (veja o Problema 50 da Seção 4.1), a fração $F(t)$ de fatos ensinados em curso que são lembrados t meses após o exame final é dada aproximadamente pela expressão $F(t) = B + (1 - B)e^{-kt}$, onde B é a fração de fatos que nunca mais serão esquecidos e k é uma constante que depende da capacidade de memorização do aluno.

a. Determine $F'(t)$ e explique o que representa esta derivada.

b. Mostre que $F'(t)$ é proporcional a $F - B$ e interprete este resultado. [*Sugestão:* o que representa $F - B$ em relação aos fatos aprendidos?]

c. Plote a curva de $F(t)$ para $B = 0{,}3$ e $k = 0{,}2$.

72. **CONTROLE DO ALCOOLISMO** A concentração de álcool no sangue t horas após a ingestão de uma dose de uma certa bebida alcoólica é dada por

$$C(t) = 0{,}12te^{-t/2}$$

a. Qual é a taxa de variação da concentração de álcool no sangue no instante t?

b. Quanto tempo após a ingestão a concentração de álcool no sangue começa a diminui?

c. Suponha que o limite legal para a concentração de álcool no sangue seja 0,04%. Quanto tempo após a ingestão a concentração atinge este valor? Qual é a taxa de variação da concentração de álcool no sangue quando este valor é atingido?

73. **DESPESA DO CONSUMIDOR** A demanda de um certo produto é $D(p) = 3.000e^{0{,}01p}$ unidades por mês quando o preço é p reais por unidade.

a. Qual é a taxa de variação da despesa dos consumidores $E(p) = pD(p)$ em relação ao preço p?

b. Para que preço a despesa dos consumidores deixa de aumentar e começa a diminuir?

c. Para que preço a *taxa de variação* da despesa dos consumidores começa a aumentar? Interprete este resultado.

74. **APRENDIZADO** Em um experimento para testar o aprendizado, um indivíduo recebe uma série de tarefas e observa-se que t minutos após o início do experimento o número de tarefas completadas com sucesso é dado por

$$R(t) = \frac{15(1 - e^{-0{,}01t})}{1 + 1{,}5e^{-0{,}01t}}$$

a. Para que valores de t a função de aprendizado $R(t)$ é crescente? Para que valores é decrescente?

b. Para que valores de t a taxa de variação da função de aprendizado $R(t)$ é crescente? Para que valores é decrescente? Interprete estes resultados.

75. **ECOLOGIA** Uma organização internacional determina que o número de membros sobreviventes de uma espécie ameaçada de extinção t anos após ser lançada uma política de proteção pode ser modelado pela função

$$N(t) = \frac{600}{1 + 3e^{-0{,}02t}}$$

a. Qual é a taxa de variação da população no instante t? Para que valores de t a população é crescente? Para que valores é decrescente?

b. Para que valores de t a taxa de variação da população é crescente? Para que valores é decrescente? Interprete estes resultados.

c. O que acontece com a população "a longo prazo" (para $t \to +\infty$)?

76. **ECOLOGIA** A organização do Problema 75 estuda uma segunda espécie ameaçada de extinção mas que não consegue arrecadar recursos suficientes para implementar uma política de proteção. A população da espécie pode ser modelada pela função

$$N(t) = \frac{30 + 500e^{-0{,}3t}}{1 + 5e^{-0{,}3t}}$$

a. Qual é a taxa de variação da população no instante t? Para que valores de t a população é crescente? Para que valores é decrescente?

b. Para que valores de t a taxa de variação da população é crescente? Para que valores é decrescente? Interprete estes resultados.

c. O que acontece com a população "a longo prazo" (para $t \to +\infty$)?

77. **CRESCIMENTO DAS PLANTAS** Duas plantas crescem de uma forma tal que t dias após serem plantadas têm $P_1(t)$ e $P_2(t)$ centímetros de altura, respectivamente, onde

$$P_1(t) = \frac{21}{1 + 25e^{-0{,}3t}} \quad \text{e} \quad P_2(t) = \frac{20}{1 + 17e^{-0{,}6t}}$$

a. Qual é a taxa de crescimento da primeira planta para $t = 10$ dias? A taxa de crescimento da segunda planta é crescente ou decrescente nesta ocasião?

b. Em que dia as duas plantas atingem a mesma altura? Qual é esta altura? Qual das duas plantas está crescendo mais depressa quando as duas plantas têm a mesma altura?

*John A. Helms, "Environmental Control of Net Photosynthesis in Naturally Growing Pinus Ponderosa Nets", *Ecology*, Winter, 1972, p. 92.

78. RENDA PER CAPITA A renda nacional $R(t)$ de um certo país está aumentando 2,3% ao ano, enquanto sua população está diminuindo a uma taxa anual de 1,75%. A renda *per capita* C é definida através da relação $C(t) = \dfrac{R(t)}{P(t)}$.

a. Determine a derivada de $\ln C(t)$.

b. Use o resultado do item (a) para calcular a taxa de aumento percentual da renda *per capita*.

79. AUMENTO DA RECEITA Um país exporta componentes eletrônicos E e tecidos T. Suponha que, em um certo instante $t = t_0$, as receitas obtidas com estas exportações, em bilhões de dólares, são

$$E(t_0) = 11 \quad \text{e} \quad T(t_0) = 8$$

e que E está aumentando uma taxa de 9%, enquanto T está diminuindo a uma taxa de 2%. Qual é a taxa de variação da receita total com as exportações dos dois produtos, $R = E + T$, neste instante?

80. Uma grandeza aumenta de acordo com a equação $Q(t) = Q_0 \dfrac{e^{kt}}{t}$. Determine a taxa de variação percentual de Q com t.

81. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a x anos a população de uma certa cidade será aproximadamente $P(x) = 5.000\sqrt{x^2 + 4x + 19}$. Qual será a taxa de variação percentual da população com o tempo daqui a 3 anos?

82. DERIVADAS DE b^x E $\log_b x$ EM UMA BASE $b \neq e$ Seja b um número positivo diferente de 1 ($b > 0$, $b \neq 1$).

a. Mostre que

$$\frac{d}{dx}(b^x) = (\ln b)b^x$$

b. Mostre que

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{(\ln b)}\frac{1}{x}$$

Nos Problemas 83 a 86, use as expressões do Problema 78 para derivar a função dada.

83. $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

84. $f(x) = x^2 3^{x^2}$

85. $f(x) = x \log_{10} x$

86. $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}}$

87. Use o modo de diferenciação numérica de uma calculadora para determinar $f'(c)$, onde $c = 0{,}65$ e

$$f(x) = \ln\left[\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1+3x)^4}\right]$$

Em seguida, use o modo gráfico para plotar a curva de $f(x)$ e traçar a reta tangente à curva no ponto $x = c$.

88. Repita o Problema 87 para a função

$$f(x) = (3{,}7x^2 - 2x + 1)e^{-3x+2}$$

e $c = -2{,}17$.

SEÇÃO 4.4 Outras Aplicações das Funções Logarítmicas e Exponenciais

Nas seções anteriores deste capítulo discutimos várias aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, como o cálculo de juros capitalizados continuamente, o estudo do crescimento e decaimento exponencial e a datação por carbono. Nesta seção, vamos examinar outras aplicações em áreas como economia e finanças, biologia, psicologia, demografia e sociologia. Começamos com dois exemplos que ilustram os problemas particulares associados ao traçado de curvas exponenciais e logarítmicas.

Traçado de Curvas

Como no caso dos gráficos de funções polinomiais e racionais, o segredo para plotar uma função $f(x)$ que envolva e^x ou $\ln x$ está em usar a derivada primeira $f'(x)$ para determinar os intervalos em que a função é crescente e decrescente e a derivada segunda $f''(x)$ para determinar a concavidade.

17 EXPLORE!

Leia o Exemplo 4.4.1. Plote $f(x)$ no estilo normal e $f'(x)$ em negrito, usando uma janela decimal modificada [0, 4.7]1 por [−3.1, 3.1]1. Localize o ponto de mínimo de $f(x)$ usando o programa de busca de extremos da calculadora aplicado a $f(x)$ ou o programa para encontrar raízes aplicado a $f'(x)$.

EXEMPLO 4.4.1

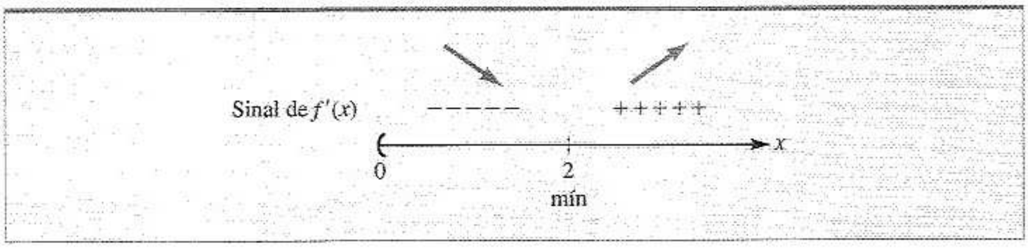
Faça um esboço da função $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

Solução

A função $f(x)$ existe apenas para $x > 0$. Sua derivada é

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x}$$

e $f'(x) = 0$ se e apenas se $2x^2 = 8$ ou $x = 2$ (já que $x > 0$). Testando o sinal de $f'(x)$ para $0 < x < 2$ e para $x > 2$, obtemos os intervalos mostrados na figura a seguir.



De acordo com as setas, existe um mínimo relativo em $x = 2$. Como $f(2) = 2^2 - 8 \ln 2 \approx -1{,}5$, o ponto de mínimo é $(2; -1{,}5)$.

Como a derivada segunda

$$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2}$$

satisfaz a desigualdade $f''(x) > 0$ para qualquer valor de $x > 0$, a concavidade da curva de $f(x)$ é para cima em todo o domínio da função e, portanto, não existem pontos de inflexão.

Procurando por assíntotas, verificamos que

$$\lim_{x \to 0^+} (x^2 - 8 \ln x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 8 \ln x) = +\infty$$

o que mostra que o eixo y ($x = 0$) é uma assíntota vertical e não existem assíntotas horizontais. Os pontos de interseção com o eixo x podem ser determinados usando uma calculadora para resolver a equação

$$x^2 - 8 \ln x = 0$$

$$x \approx 1{,}2 \qquad \text{e} \qquad x \approx 2{,}9$$

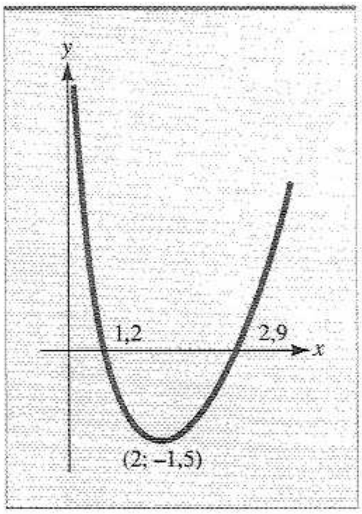


FIGURA 4.10 Curva da função $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

Resumindo, a curva diminui (a partir da assíntota vertical) até o mínimo em $(2; -1{,}5)$ e depois aumenta sem limite, mantendo uma concavidade para cima. Intercepta o eixo x duas vezes, uma antes de chegar ao mínimo, no ponto $(1{,}2; 0)$, e outra depois de passar pelo mínimo, no ponto $(2{,}9; 0)$. A curva aparece na Figura 4.10.

EXEMPLO 4.4.2

Determine os intervalos em que a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

é crescente e decrescente e os intervalos em que a concavidade da curva da função é para cima e para baixo. Determine os extremos relativos e pontos de inflexão e trace a curva.

18 EXPLORE!

Leia o Exemplo 4.4.2. Plote $f(x)$ no estilo normal e $f''(x)$ em negrito, usando uma janela decimal modificada $[-4.7, 4.7]1$ por $[-0.5, 0.5]1$. Determine os pontos em que $f''(x)$ intercepta o eixo x e explique por que são as coordenadas x dos pontos de inflexão de $f(x)$.

Solução

A derivada primeira é

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Como o fator $e^{-x^2/2}$ é sempre positivo, $f'(x)$ é igual a zero se e apenas se $x = 0$. Como $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}4$, o único ponto crítico é $(0; 0{,}4)$. Pela regra do produto, a derivada segunda é

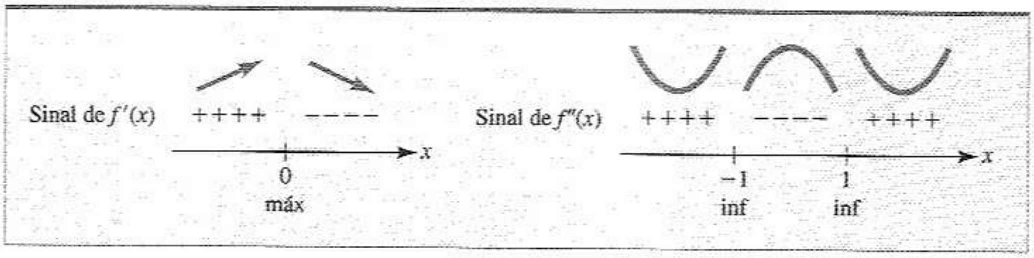
$$f''(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x^2 - 1) e^{-x^2/2}$$

que se anula para $x = \pm 1$. Como

$$f(1) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}24 \qquad \text{e} \qquad f(-1) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}24$$

os possíveis pontos de inflexão são (1; 0,24) e (−1; 0,24).

Plote os pontos críticos e verifique os sinais das derivadas primeira e segunda nos intervalos definidos por estes pontos:

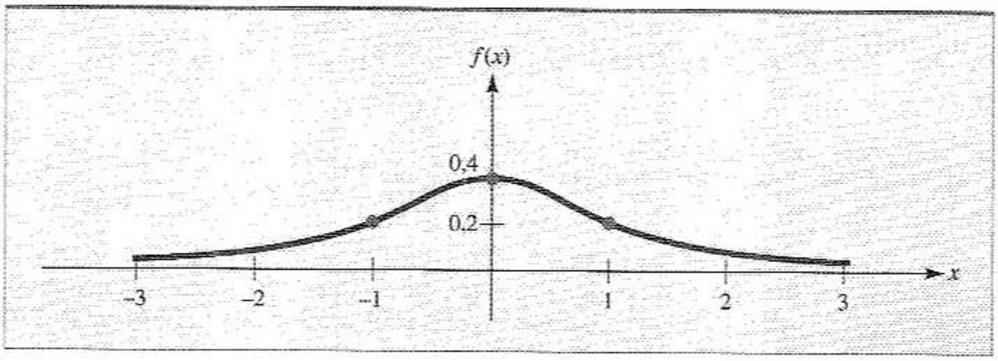


O gráfico de setas mostra que existe um máximo relativo no ponto (0; 0,4); como a concavidade muda em $x = -1$ (de "para cima" para "para baixo") e em $x = 1$ (de "para baixo" para "para cima"), tanto (−1; 0,24) como (1; 0,24) são pontos de inflexão.

Completamos o gráfico da forma indicada na Figura 4.11, ligando os pontos críticos através de uma curva da forma apropriada para cada intervalo. Observe que a curva não possui nenhuma interseção com o eixo x, pois o fator $e^{-x^2/2}$ é sempre positivo, e que o eixo x é uma assíntota horizontal, já que $e^{-x^2/2}$ tende a zero quando x tende a $\pm\infty$.

FIGURA 4.11 Função densidade de probabilidade normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$



NOTA A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, cujo gráfico foi traçado no Exemplo 4.4.2, é conhecida como **função densidade de probabilidade normal** e desempenha um papel importante nos estudos de probabilidade e estatística. A famosa curva em "forma de sino" é usada por físicos e cientistas sociais para descrever as velocidades das moléculas nos gases, os resultados de exames de QI, as características de populações, e muitos outros fenômenos importantes. ■

Melhor Ocasião para Vender

Suponha que alguém possua um bem cujo valor aumenta com o tempo. Quanto mais tempo a pessoa conservar o bem, maior será o seu valor, mas pode haver uma ocasião em que seja mais lucrativo vendê-lo e reinvestir o dinheiro recebido. Os economistas determinam qual é a melhor ocasião para vender um bem maximizando o valor atual do bem para a taxa de juros em vigor, capitalizados continuamente. O uso deste critério é ilustrado no Exemplo 4.4.3.

19 EXPLORE!

Entre com a função $P(x) =$ 20.000*e^($\sqrt{x} - 0{,}07x$) do Exemplo 4.4.3 como Y1 no editor de equações da calculadora. Escolha uma janela apropriada para observar a curva e determine seu valor máximo.

EXEMPLO 4.4.3

Uma pessoa possui um terreno cujo valor de mercado daqui a t anos será $V(t) = 20.000e^{\sqrt{t}}$ reais. Se a taxa de juros permanecer constante em 7% ao ano, capitalizados continuamente, em que ocasião o valor atual do preço de mercado do terreno será máximo?

Solução

Em t anos, o valor de mercado do terreno será $V(t) = 20.000e^{\sqrt{t}}$. O valor atual deste preço é

$$P(t) = V(t)e^{-0,07t} = 20.000e^{\sqrt{t}}e^{-0,07t} = 20.000e^{\sqrt{t}-0,07t}$$

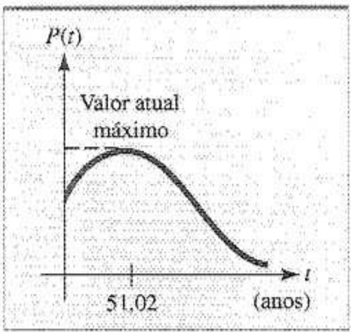


FIGURA 4.12 Valor atual $P(t) = 20.000e^{\sqrt{t}-0,07t}$.

O objetivo é maximizar $P(t)$ para $t \geq 0$. A derivada de P é

$$P'(t) = 20.000e^{\sqrt{t}-0,07t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0,07\right)$$

Assim, $P'(t)$ não existe para $t = 0$ e $P'(t) = 0$ para

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0,07 = 0 \qquad \text{ou} \qquad t = \left[\frac{1}{2(0,07)}\right]^2 \approx 51,02$$

Como $P'(t)$ é positiva para $0 < t < 51,02$ e negativa para $t > 51,02$, a função $P(t)$ é crescente para $0 < t < 51,02$ e decrescente para $t > 51,02$, como mostra a Figura 4.12. Assim, o valor atual do terreno será máximo daqui a aproximadamente 51 anos.

NOTA O critério de otimização usado no Exemplo 4.4.3 não é a única forma de determinar o momento mais apropriado para uma pessoa se desfazer de um bem. Parece razoável, por exemplo, vender o bem no instante em que a taxa de aumento percentual do seu valor se torna igual à taxa de juros vigente (7%, no exemplo). Qual dos dois critérios o leitor considera mais adequado? Na verdade, isto não importa, pois ambos conduzem exatamente ao mesmo resultado! A prova desta equivalência fica a cargo do leitor (Problema 52). ■

Curvas de Aprendizado

O gráfico de uma função da forma $Q(t) = B - Ae^{-kt}$, onde A, B e k são constantes positivas, é chamado de **curva de aprendizado**. O nome se deve ao fato de que, em muitas situações, funções desta forma descrevem, para $t \geq 0$, a relação entre a eficiência com que um indivíduo realiza uma tarefa e o tempo de treinamento ou experiência na atividade considerada.

Para traçar o gráfico de $Q(t) = B - Ae^{-kt}$ para $t \geq 0$, observe que

$$Q'(t) = -Ae^{-kt}(-k) = Ake^{-kt}$$

e

$$Q''(t) = Ake^{-kt}(-k) = -Ak^2e^{-kt}$$

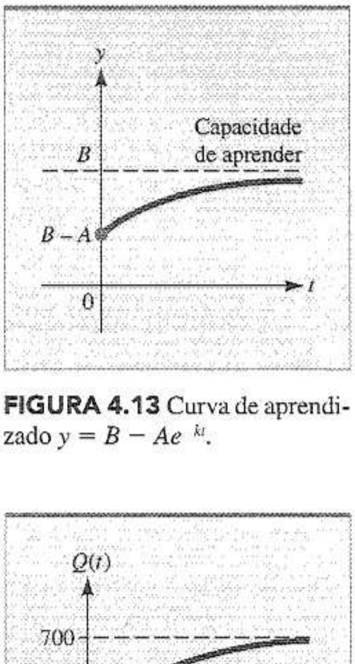


FIGURA 4.13 Curva de aprendizado $y = B - Ae^{-kt}$.

Como as constantes A e k são positivas, $Q'(t) > 0$ e $Q''(t) < 0$ para qualquer valor de t. Isto significa que a curva de $Q(t)$ é monotonicamente crescente e sua concavidade é sempre para baixo. Além disso, a curva intercepta o eixo vertical (eixo Q) no ponto $Q(0) = B - A$ e a reta $Q = B$ é uma assíntota horizontal, já que

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = \lim_{t \to +\infty} (B - Ae^{-kt}) = B - 0 = B$$

A Figura 4.13 mostra o gráfico de uma função com estas características. O comportamento da curva de aprendizado quando $t \to +\infty$ reflete o fato de que, depois de decorrido um tempo "suficientemente longo", todo indivíduo chega ao seu "limite" e os ganhos adquiridos com um tempo adicional de treinamento se tornam insignificantes.

EXEMPLO 4.4.4

A rapidez com que um funcionário do correio separa a correspondência é função de sua experiência. O chefe de uma agência dos correios estima que após t meses de trabalho um funcionário consegue separar $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$ cartas por hora.

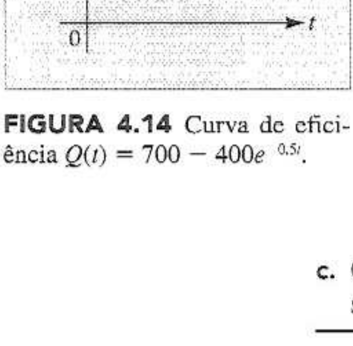


FIGURA 4.14 Curva de eficiência $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$.

a. Quantas cartas um funcionário inexperiente é capaz de separar por hora?
b. Quantas cartas um funcionário com 6 meses de experiência é capaz de separar por hora?
c. Quantas cartas um funcionário muito experiente é capaz de separar por hora?

Solução

a. O número de cartas que um funcionário inexperiente é capaz de separar por hora é

$$Q(0) = 700 - 400e^0 = 300$$

b. Com 6 meses de experiência, um funcionário é capaz de separar

$$Q(6) = 700 - 400e^{-0,5(6)} = 700 - 400e^{-3} \approx 680 \qquad \text{cartas por hora}$$

c. Quando t tende a infinito, $Q(t)$ tende a 700. Assim, um funcionário muito experiente é capaz de separar 700 cartas por hora. O gráfico da função $Q(t)$ aparece na Figura 4.14.

Curvas Logísticas

O gráfico de uma função da forma $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$, onde A, B e k são constantes positivas, é chamado de **curva logística**. A Figura 4.15 mostra uma curva logística típica. Observe que, para pequenos valores de x, a curva cresce rapidamente, como a curva exponencial, mas para grandes valores x passa a crescer lentamente, aproximando-se de uma assíntota horizontal, como a curva de aprendizado. A assíntota representa um "nível de saturação" da grandeza representada pela curva logística e é chamada de **capacidade de suporte** da grandeza. Assim, por exemplo, nos modelos de população, a capacidade de suporte representa o número máximo de indivíduos que o ambiente é capaz de sustentar, enquanto em um modelo logístico da disseminação de uma epidemia a capacidade de suporte é o número de indivíduos suscetíveis à doença, que, dependendo do caso, pode ser o número de pessoas que não foram vacinadas ou, na pior das hipóteses, o número total de habitantes.

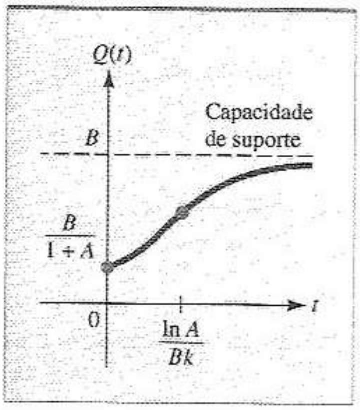


FIGURA 4.15 Curva logística $Q(t) = \dfrac{B}{1+ Ae^{-Bkt}}$.

Para traçar a curva de $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$ para $t \geq 0$, observe que

$$Q'(t) = \frac{AB^2ke^{-Bkt}}{(1 + Ae^{-Bkt})^2}$$

e

$$Q''(t) = \frac{AB^3k^2e^{-Bkt}(-1 + Ae^{-Bkt})}{(1 + Ae^{-Bkt})^3}$$

Verifique estas expressões e também o fato de que $Q'(t) > 0$ para qualquer valor de t, o que significa que a função $Q(t)$ é monotonicamente crescente. A equação $Q''(t) = 0$ tem apenas uma raiz, que pode ser calculada da seguinte forma:

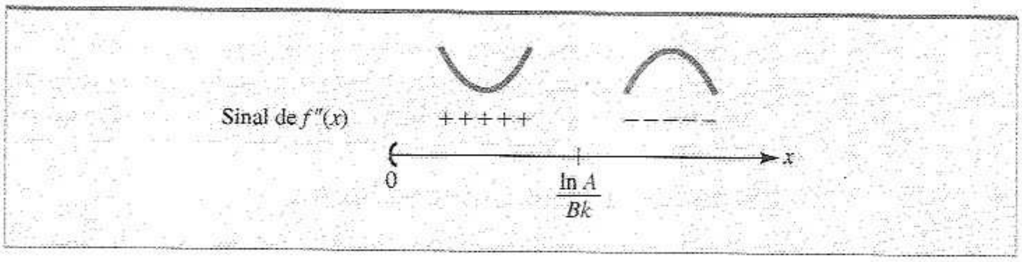
$$-1 + Ae^{-Bkt} = 0$$

$$e^{-Bkt} = \frac{1}{A} \qquad \textit{somando 1 a ambos os membros e dividindo por A}$$

$$-Bkt = \ln\left(\frac{1}{A}\right) = -\ln A \qquad \textit{tomando o logaritmo de ambos os membros}$$

$$t = \frac{\ln A}{Bk} \qquad \textit{dividindo ambos os membros por } -Bk$$

Como se pode ver no diagrama de concavidades, este valor de $t = \dfrac{\ln A}{Bk}$ corresponde a um ponto de inflexão (de "para cima" para "para baixo").



O ponto em que a curva logística intercepta o eixo vertical é

$$Q(0) = \frac{B}{1 + Ae^0} = \frac{B}{1 + A}$$

Como a função $Q(t)$ existe para qualquer valor de $t \geq 0$, a curva logística não possui nenhuma assíntota vertical, mas a reta $y = B$ é uma assíntota horizontal, já que

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}} = \frac{B}{1 + A(0)} = B$$

Resumindo, como mostra a Figura 4.15, a curva logística começa no ponto $Q(0) = \dfrac{B}{1+A}$, cresce rapidamente (concavidade para cima) até chegar ao ponto de inflexão $t = \dfrac{\ln A}{Bk}$ e continua a crescer, agora mais lentamente (concavidade para baixo), aproximando-se assintoticamente da reta $y = B$. Assim, B é a capacidade de suporte da grandeza representada pela curva logística e o ponto de inflexão em $t = \frac{\ln A}{Bk}$ é o ponto em que a *taxa de crescimento começa a diminuir*.

As curvas logísticas podem ser usadas para representar o aumento das populações no caso em que o número de indivíduos é limitado por fatores ambientais. Também descrevem corretamente a disseminação de epidemias e de boatos em uma comunidade. A seguir apresentamos um exemplo no qual uma curva logística é usada para modelar a disseminação de uma doença contagiosa.

20 EXPLORE!

Plote a função do Exemplo 4.4.5 usando uma janela [0, 10]1 por [0, 25]5. Como se comporta a função para grandes valores de x? O que você observa? Determine graficamente quanto tempo após o primeiro surto 90% das pessoas foram infectadas.

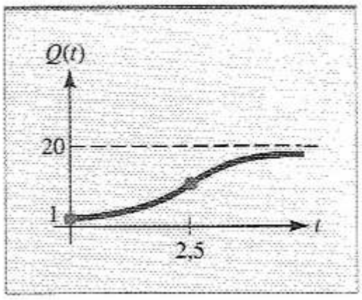


FIGURA 4.16 Curva de disseminação de uma epidemia $Q(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-1,2t}}$.

EXEMPLO 4.4.5

Os registros revelam que t semanas após o primeiro surto de um certo tipo de gripe aproximadamente $Q(t) = \frac{20}{1 + 19e^{\ 1,2t}}$ milhares de indivíduos contraíram a doença.

a. Quantas pessoas estavam doentes quando o surto foi detectado? Quantas pessoas estavam doentes duas semanas depois?

b. Quanto tempo após o surto ser detectado a taxa de aumento do número de pessoas infectadas começou a diminuir?

c. Se a tendência continuar, qual será o número total de pessoas infectadas?

Solução

a. Como $Q(0) = \frac{20}{1 + 19} = 1$, havia 1.000 pessoas doentes quando o surto foi detectado. Para $t = 2$,

$$Q(2) = \frac{20}{1 + 19e^{-1,2(2)}} \approx 7,343$$

e, portanto, 7.343 pessoas estavam doentes duas semanas após o surto ser detectado.

b. A taxa de aumento do número de pessoas infectadas começa a diminuir no ponto de inflexão da curva de $Q(t)$. Comparando a expressão do enunciado com a fórmula logística $Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$, vemos que $B = 20$, $A = 19$ e $Bk = 1,2$. Assim, o ponto de inflexão ocorre para

$$t = \frac{\ln A}{Bk} = \frac{\ln 19}{1,2} \approx 2,454$$

e, portanto, o número de novos casos começou a diminuir 2,5 semanas após o surto ser detectado.

c. Como $Q(t)$ tende a 20 quando t tende a infinito, o número total de pessoas infectadas será de aproximadamente 20.000. O gráfico de $Q(t)$ é mostrado, apenas a título de ilustração, na Figura 4.16.

Idade Ideal para a Reprodução

Os seres vivos que se reproduzem apenas uma vez na vida, como o salmão do Pacífico e o bambu, são chamados de *semélparas*. Os biólogos modelam a taxa de reprodução *per capita* destas espécies usando a função*

$$R(x) = \frac{\ln [p(x)f(x)]}{x}$$

onde $p(x)$ é a probabilidade de que um espécime sobreviva até a idade x e $f(x)$ é o número de fêmeas geradas por um espécime que se reproduz com x anos de idade. Quanto maior o valor de $R(x)$, maior o número de descendentes. Assim, a idade em que $R(x)$ é máxima é considerada a idade ideal para a reprodução.

*Adaptado de Claudia Neuhauser, *Calculus for Biology and Medicine*, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2000, p. 199 (Problem 22).

EXEMPLO 4.4.6

Suponha que no caso de um certo organismo semélpara a probabilidade de que um espécime sobreviva até x anos de idade seja dada por $p(x) = e^{-0{,}15x}$ e que o número de fêmeas geradas por um espécime com x anos de idade é $f(x) = 3x^{0{,}85}$. Qual é a idade ideal para a reprodução?

Solução

De acordo com este modelo, a taxa de reprodução *per capita* é

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\ln[e^{-0{,}15x}(3x^{0{,}85})]}{x} \\ &= x^{-1}(\ln e^{-0{,}15x} + \ln 3 + \ln x^{0{,}85}) && \textit{regra do produto para logaritmos} \\ &= x^{-1}(-0{,}15x + \ln 3 + 0{,}85 \ln x) && \textit{regra da potência para logaritmos} \\ &= -0{,}15 + (\ln 3 + 0{,}85 \ln x)x^{-1} \end{aligned}$$

Usando a regra do produto para derivar $R(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} R'(x) &= 0 + (\ln 3 + 0{,}85 \ln x)(-x^{-2}) + \left[0{,}85\left(\frac{1}{x}\right)\right]x^{-1} \\ &= \frac{-\ln 3 - 0{,}85 \ln x + 0{,}85}{x^2} \end{aligned}$$

Assim, $R'(x) = 0$ para

$$\begin{aligned} -\ln 3 - 0{,}85 \ln x + 0{,}85 &= 0 \\ \ln x &= \frac{0{,}85 - \ln 3}{0{,}85} \approx -0{,}2925 \\ x &= e^{-0{,}2925} \approx 0{,}7464 \end{aligned}$$

Para verificar se este número crítico corresponde realmente a um máximo, podemos usar o teste da derivada segunda. Temos

$$R''(x) = \frac{1{,}7 \ln x + 2 \ln 3 - 2{,}55}{x^3}$$

(os detalhes foram omitidos) e como

$$R''(0{,}7464) \approx -2{,}0440 < 0$$

sabemos que $R(x)$ passa por um máximo em $x = \approx 0{,}7464$. Assim, a idade ideal para este organismo se reproduzir é 0,7464 ano (ou seja, aproximadamente 9 meses).

PROBLEMAS 4.4

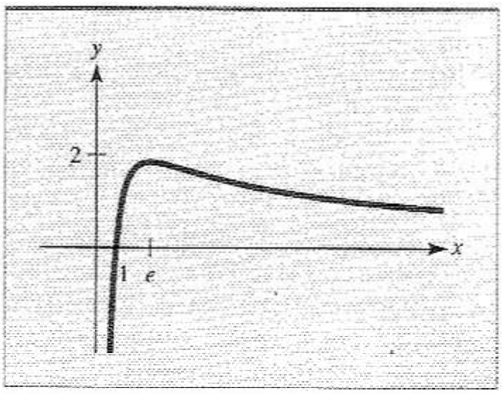
Cada uma das curvas dos Problemas 1 a 4 é o gráfico de uma das seis funções a seguir. Em cada caso, associe a curva dada à função correta.

$f_1(x) = 2 - e^{-2x}$ $\qquad$ $f_2(x) = x \ln x^5$

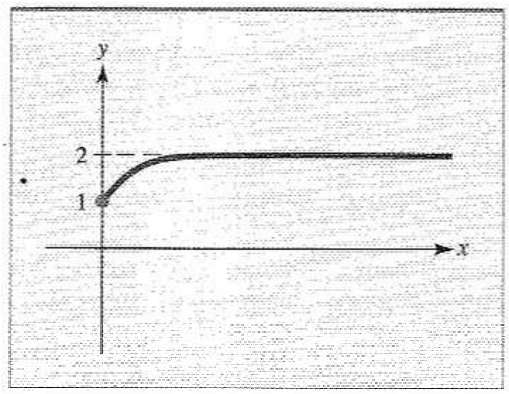
$f_3(x) = \dfrac{2}{1 - e^{-x}}$ $\qquad$ $f_4(x) = \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$

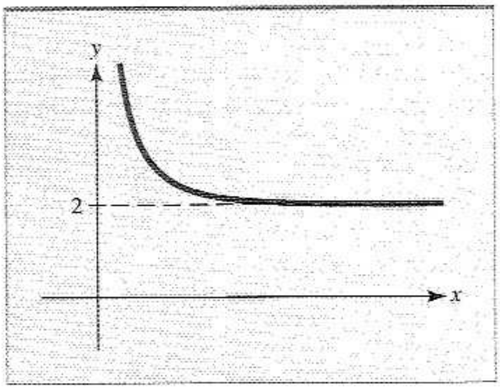
$f_5(x) = \dfrac{\ln x^5}{x}$ $\qquad$ $f_6(x) = (x - 1)e^{-2x}$

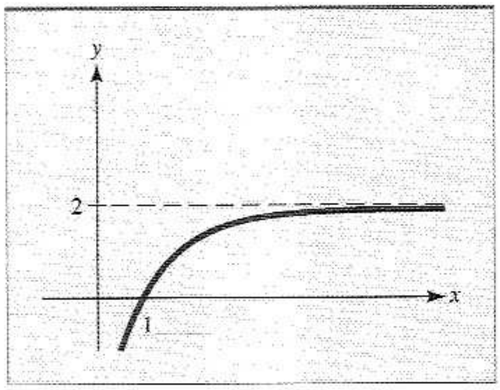
1.



2.



3. 

4. 

Nos Problemas 5 a 20, determine os intervalos em que a função é crescente e decrescente e os intervalos em que a concavidade da curva da função é para cima e para baixo. Determine também o maior número possível de características da curva, como máximos e mínimos, pontos de inflexão, assíntotas verticais e horizontais, pontos de interseção com os eixos x e y, cúspides e tangentes verticais.

5. $f(t) = 2 + e^t$

6. $g(x) = 3 + e^{-x}$

7. $g(x) = 2 - 3e^x$

8. $f(t) = 3 - 2e^t$

9. $f(x) = \dfrac{2}{1 + 3e^{-2x}}$

10. $h(t) = \dfrac{2}{1 + 3e^{2t}}$

11. $f(x) = xe^x$

12. $f(x) = xe^{-x}$

13. $f(x) = xe^{2-x}$

14. $f(x) = e^{-x^2}$

15. $f(x) = x^2e^{-x}$

16. $f(x) = e^x + e^{-x}$

17. $f(x) = \dfrac{6}{1 + e^{-x}}$

18. $f(x) = x - \ln x$ (para $x > 0$)

19. $f(x) = (\ln x)^2$ (para $x > 0$)

20. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (para $x > 0$)

21. CONFIABILIDADE DE UM PRODUTO Um fabricante de brinquedos observou que a fração de petroleiros de plástico movidos a pilha que afundam em menos de t dias é dada aproximadamente por $f(t) = 1 - e^{-0{,}03t}$.

a. Plote esta função de confiabilidade. O que acontece com a curva para grandes valores de t?

b. Que fração dos petroleiros continua flutuando durante pelo menos 10 dias?

c. Que fração dos petroleiros deve afundar entre o 15º e o 20º dia?

22. DEPRECIAÇÃO Quando uma certa máquina industrial tem t anos de idade, seu valor de revenda é $V(t) = 4.800e^{-t/5} + 400$ reais.

a. Faça o gráfico de $V(t)$. O que acontece com o valor da máquina a longo prazo?

b. Qual era o valor da máquina quando nova?

c. Qual será o valor da máquina após 10 anos?

23. RESFRIAMENTO Em um dia frio de inverno, uma bebida quente é levada para fora de casa, onde a temperatura do ar é de $-5°C$. De acordo com uma lei da física, a temperatura T da bebida (em graus Celsius) t minutos mais tarde é dada por uma função da forma

$$T(t) = -5 + Ae^{-kt}$$

onde A e k são constantes. Suponha que a temperatura da bebida seja de 80°C ao ser levada para fora de casa e 20 minutos depois é 25°C.

a. Use estas informações para determinar A e k.

b. Faça um esboço da curva da função de temperatura $T(t)$. O que acontece quando a temperatura t aumenta indefinidamente ($t \to +\infty$)?

c. Qual é a temperatura após 30 minutos?

d. Em que instante a temperatura chega a 0°C?

24. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t anos a população de um certo país será $P(t) = \dfrac{20}{2 + 3e^{-0{,}06t}}$ milhões de habitantes.

a. Faça um gráfico de $P(t)$.

b. Qual é a população atual?

c. Qual será a população daqui a 50 anos?

d. Qual será a população a longo prazo?

25. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA Os registros revelam que t semanas após o início de um surto de um certo tipo de gripe aproximadamente $f(t) = \dfrac{2}{1 + 3e^{-0{,}8t}}$ milhares de indivíduos contraíram a doença.

a. Faça um gráfico de $f(t)$.

b. Quantas pessoas estavam doentes quando o surto foi detectado?

c. Quantas pessoas estavam doentes 3 semanas depois?

d. Se a tendência continuar, qual será o número total de pessoas infectadas?

26. MEMÓRIA Os psicólogos acreditam que quando uma pessoa tenta se lembrar de uma série de fatos, o número de fatos lembrados após t minutos é dado por uma função da forma $Q(t) = A(1 - e^{-kt})$, onde k é uma constante positiva e A o número total de fatos relevantes na memória da pessoa.

a. Faça um gráfico de $Q(t)$.
b. O que acontece a longo prazo? Explique o significado desta tendência.

27. **EFICIÊNCIA** A produção diária de um operário que foi admitido há t semanas é dada por uma função da forma $Q(t) = 40 - Ae^{-kt}$. Inicialmente, o operário é capaz de produzir 20 unidades por dia; após 1 semana, o operário está produzindo 30 unidades por dia. Quantas unidades o operário estará produzindo após 3 semanas?

28. **PUBLICIDADE** Quando os professores escolhem livros-texto para seus cursos, geralmente optam por livros que já possuem. Por este motivo, a maioria das editoras envia exemplares gratuitos de livros novos para os professores que lecionam matérias correlatas. O responsável pelos livros de matemática de uma grande editora estima que, se x mil exemplares de um novo livro-texto forem distribuídos gratuitamente, as vendas do livro no primeiro ano serão de aproximadamente $f(x) = 20 - 15e^{-0,2x}$ mil exemplares.
a. Faça um gráfico desta função.
b. Quantos exemplares a editora venderá no primeiro ano se não distribuir exemplares gratuitos?
c. Quantos exemplares a editora venderá no primeiro ano se distribuir 10.000 exemplares gratuitos?
d. Quantos exemplares a editora venderá no primeiro ano na melhor das hipóteses?

29. **ANÁLISE MARGINAL** O responsável pelos livros de economia de uma grande editora estima que se x mil exemplares de um novo livro-texto forem distribuídos gratuitamente a professores, as vendas do livro no primeiro ano serão de aproximadamente $f(x) = 15 - 20e^{-0,3x}$ mil exemplares. No momento, a intenção é distribuir 9.000 exemplares gratuitos.
a. Use os métodos de análise marginal para estimar o aumento nas vendas se a editora decidir distribuir mais 1.000 exemplares gratuitos.
b. Calcule qual será o aumento real nas vendas se a editora distribuir mais 1.000 exemplares gratuitos. A estimativa do item (a) é boa?

30. **ANÁLISE MARGINAL** Uma empresa estima que se x mil empregados forem contratados, o lucro será $P(x)$ milhões de reais, onde

$$P(x) = 10 + \ln\left(\frac{x}{25}\right) - 12x^2$$

para $x > 0$. Qual é o número de empregados que maximiza o lucro da empresa? Qual é o valor do lucro máximo?

31. **APRENDIZADO INFANTIL** Um psicólogo modela a capacidade de aprender de uma criança usando a função

$$L(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}$$

onde t é a idade da criança em anos, para $0 \le t \le 5$. Responda às perguntas a seguir a respeito deste modelo.
a. Com que idade a capacidade de aprender de uma criança é máxima?
b. Com que idade a capacidade de aprender de uma criança está aumentando mais depressa?

32. **CAPACIDADE AERÓBICA** A capacidade aeróbica de uma pessoa com x anos de idade pode ser modelada pela função

$$A(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x} \quad \text{para } x \ge 10$$

a. Com que idade a capacidade aeróbica é máxima?
b. Com que idade a capacidade aeróbica está diminuindo mais depressa?

33. **ESPECULAÇÃO COM AÇÕES** Em um artigo clássico a respeito da teoria dos conflitos,* L. F. Richardson sugeriu que a porcentagem p de uma população que defende a guerra ou outros atos agressivos em um instante t obedece à equação

$$p(t) = \frac{Ce^{kt}}{1 + Ce^{kt}}$$

onde k e C são constantes positivas. A negociação especulativa de ações na bolsa de valores pode ser considerada um "ato agressivo". Suponha que inicialmente 1/200 das ações negociadas diariamente na bolsa de valores estejam envolvidas em negócios especulativos e que 4 semanas depois a fração baixou para 1/100. Em que dia a fração está variando mais depressa? Qual é a fração neste dia?

34. **POPULAÇÃO MUNDIAL** De acordo com um certo modelo logístico, a população mundial (em bilhões de habitantes) t anos após 1960 será aproximadamente

$$P(t) = \frac{40}{1 + 12e^{-0,08t}}$$

a. Segundo este modelo, com que rapidez estava aumentando a população no ano 2000? Qual era a taxa de aumento *percentual* da população naquele ano?
b. Em que ano a população estava aumentando mais depressa?
c. Faça o gráfico de $P(t)$. A que ponto especial do gráfico corresponde a solução do item (b)? O que acontece com $P(t)$ "a longo prazo"?
d. Você acha que este modelo de população é razoável? Justifique sua resposta.

35. **ANÁLISE MARGINAL** Um fabricante pode produzir tocadores de CD a um custo de R$ 125,00 a unidade e estima que, se o preço for de x reais a unidade, serão vendidos aproximadamente $1.000e^{-0,02x}$ aparelhos por semana.
a. Expresse o lucro P em função de x. Faça o gráfico de $P(x)$.
b. Por que preço devem ser vendidos os aparelhos para que o lucro seja máximo?

36. **DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA** Uma epidemia se dissemina de tal forma em uma comunidade que t semanas após o início do surto o número de pessoas infectadas é dado por uma função da forma $f(t) = \dfrac{B}{1 + Ce^{-kt}}$, onde B é o número de pessoas suscetíveis à doença. Se um quinto das pessoas suscetíveis foram infectadas inicialmente e metade dessas pessoas estavam infectadas no final da quarta semana, que fração das pessoas suscetíveis terá sido infectada no final da oitava semana?

37. **MELHOR OCASIÃO PARA VENDER** Um homem possui um terreno cujo valor daqui a t anos será $V(t) = 8.000e^{\sqrt{t}}$ reais. Se a taxa de juros permanecer constante em 6% ao ano capitalizados continuamente, qual será o momento mais adequado para vender o terreno?

*O trabalho original de Richardson apareceu em *Generalized Foreign Politics*, Monograph Supplement 23 do British Journal of Psychology (1939). Seu trabalho também é apresentado no livro de T. L. Saaty *Mathematical Models of Arms Control and Disarmament*, New York: John Wiley & Sons, 1968.

38. MELHOR OCASIÃO PARA VENDER Uma família possui um livro raro cujo valor daqui a t anos será $V(t) = 200e^{\sqrt{2t}}$ reais. Se a taxa de juros permanecer constante em 6% ao ano capitalizados continuamente, qual será o momento mais adequado para a família vender o livro?

39. IDADE IDEAL PARA A REPRODUÇÃO Suponha que no caso de um certo animal semélpara, a probabilidade de um espécime sobreviver até x anos de idade é $p(x) = e^{-0,2x}$ e o número de fêmeas geradas por um espécime de x anos de idade é $f(x) = 5x^{0,9}$. Qual é a idade ideal para reprodução de um indivíduo desta espécie? (Veja Exemplo 4.4.6.)

40. IDADE IDEAL PARA A REPRODUÇÃO Suponha que uma mudança no ambiente afete a espécie do Problema 39 de tal forma que a probabilidade de um indivíduo sobreviver até x anos de idade seja reduzida à metade. Se o número $f(x)$ de fêmeas geradas permanecer o mesmo, qual será o efeito da mudança sobre a idade ideal para a reprodução?

41. RESPOSTA A UM ESTÍMULO De acordo com a **lei de Hoorweg**, quando um nervo é estimulado pelas descargas de um capacitor de capacitância C, a energia elétrica necessária para provocar uma resposta mínima (uma contração muscular) é dada por

$$E(C) = C\left(aR + \frac{b}{C}\right)^2$$

onde a, b e R são constantes positivas.

a. Para que valor de C a energia $E(C)$ é mínima? Como é possível ter certeza de que se trata do valor mínimo? (A resposta deve ser dada em termos de a, b e R.)

b. Outro modelo para E é da forma

$$E(C) = mCe^{k/C}$$

onde m e k são constantes. Quais devem ser os valores de m e k para que os dois modelos levem à mesma energia mínima para o mesmo valor de C?

42. PISCICULTURA O gerente de uma criação de peixes determina que t semanas depois que 3.000 peixes de uma certa espécie são desovados o peso médio dos peixes é $w(t) = 0,8te^{-0,05t}$ quilogramas, para $0 \leq t \leq 20$. Além disso, a fração de peixes que ainda estão vivos após t semanas é dada por

$$p(t) = \frac{10}{10 + t}$$

a. A produção esperada $E(t)$ após t semanas é o peso total dos peixes que ainda estão vivos. Expresse $E(t)$ em termos de $w(t)$ e $p(t)$.

b. Para que valor de t a produção esperada $E(t)$ é máxima? Qual é a produção máxima?

c. Plote a curva de produção $y = E(t)$ para $0 \leq t \leq 20$.

43. PISCICULTURA O gerente de uma criação de peixes determina que t dias depois que 1.000 peixes de uma certa espécie são introduzidos em um viveiro o peso médio dos peixes é $w(t)$ quilogramas e a fração de peixes ainda vivos após t dias é $p(t)$, onde

$$w(t) = \frac{10}{1 + 15e^{-0,05t}} \quad \text{e} \quad p(t) = e^{-0,01t}$$

a. A produção esperada $E(t)$ após t dias é o peso total dos peixes que ainda estão vivos. Expresse $E(t)$ em termos de $w(t)$ e $p(t)$.

b. Para que valor de t a produção esperada $E(t)$ é máxima? Qual é a produção máxima?

c. Plote a curva de produção $y = E(t)$.

44. MELHOR OCASIÃO PARA VENDER Um filatelista possui uma coleção de selos que vale atualmente R$ 1.200,00 e cujo valor aumenta linearmente à razão de R$ 200,00 por ano. Se a taxa de juros permanecer constante em 8% ao ano capitalizados continuamente, qual será a melhor ocasião para vender os selos?

45. DISSEMINAÇÃO DE UMA NOTÍCIA Um acidente de trânsito foi testemunhado por 10% dos residentes de uma pequena cidade e 25% dos residentes tinham ouvido falar do acidente 2 horas depois. Suponha que o número de residentes que tinham ouvido falar do acidente t horas depois é dado por uma função da forma

$$N(t) = \frac{B}{1 + Ce^{-kt}}$$

onde B é a população da cidade.

a. Use estas informações para determinar os valores de C e k.

b. Quanto tempo após o acidente metade dos residentes da cidade ficou sabendo da notícia?

c. Em que ocasião a notícia do acidente estava se disseminando com maior rapidez? [*Sugestão:* veja Exemplo 4.4.5(b).]

46. EFEITO DE UMA TOXINA Um pesquisador estima que t horas após uma toxina ser introduzida, a população de uma colônia de bactérias será

$$P(t) = 10.000(7 + 15e^{-0,05t} + te^{-0,05t})$$

a. Qual é a população no instante em que a toxina é introduzida?

b. Em que instante a população é máxima? Qual é a população máxima?

c. O que acontece com a população de bactérias quando $t \to +\infty$?

47. NÚMERO DE EMPREGADOS A **curva de Gompertz** é um gráfico de uma função da forma

$$N(t) = CA^{B^t}$$

onde A, B e C são constantes. Este tipo de curva é usado para descrever fenômenos como o aprendizado e o número de empregados de uma organização.*

a. Suponha que o chefe do departamento de pessoal de uma grande empresa chegue à conclusão, depois de um estudo estatístico, de que, após t anos, a empresa terá

$$N(t) = 500(0,03)^{(0,4)^t}$$

empregados. Quantos empregados a empresa possuía inicialmente (no instante $t = 0$)? Quantos empregados possuía após

*Uma discussão das curvas de Gompertz e outros modelos de crescimento diferencial pode ser encontrada em um artigo de Roger V. Jean intitulado "Differential Growth, Huxley's Allometric Formula, and Sigmoid Growth", *UMAP Modules 1983: Tools for Teaching*, Lexington, MA: Consortium for Mathematics and Applications, Inc., 1984.

5 anos? Em que ocasião a empresa terá 300 empregados? Quantos empregados terá a empresa "a longo prazo"?

b. Plote no mesmo gráfico $N(t)$ e a função de Gompertz

$$F(t) = 500(0{,}03)^{-(0{,}4)^{t}}$$

Qual é a relação entre as duas curvas?

48. TEORIA DO APRENDIZADO Em um modelo de aprendizado proposto por C. L. Hull, a força do hábito H em um indivíduo está relacionada ao número de reforços r através da equação

$$H(r) = M(1 - e^{-kr})$$

a. Plote $H(r)$. O que acontece com $H(r)$ quando $r \to +\infty$?

b. Mostre que, se o número de reforços é duplicado de r para $2r$, a força do hábito é multiplicada por $1 + e^{-kr}$.

49. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO Uma função da forma $C(t) = Ate^{-kt}$, onde A e k são constantes positivas, recebe o nome de **função de surto** e, às vezes, é usada para modelar a concentração de um medicamento no sangue de um paciente t horas após sua administração. Suponha que $t \geq 0$.

a. Calcule $C'(t)$ e determine os intervalos de tempo nos quais a concentração do medicamento está aumentando e diminuindo. Para que valor de t a concentração é máxima? Qual é a concentração máxima? (As respostas devem ser dadas em termos de A e k.)

b. Calcule $C''(t)$ e determine os intervalos de tempo nos quais a concavidade da curva de $C(t)$ é para cima e para baixo. Determine todos os pontos de inflexão e explique o que acontece com a taxa de variação da concentração do medicamento nos instantes que correspondem aos pontos de inflexão.

c. Plote a função $C(t) = te^{-kt}$ para $k = 0{,}2$, $k = 0{,}5$, $k = 1{,}0$ e $k = 2{,}0$. Descreva o que acontece com a forma da curva quando k aumenta.

50. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO A concentração de um certo medicamento no sangue de um paciente t horas após ter sido administrado oralmente é dada pela função de surto $C(t) = Ate^{-kt}$, onde C é expressa em microgramas do medicamento por mililitro de sangue. Os exames mostram que a concentração máxima de 5 μg/mL ocorre 20 minutos depois de o medicamento ser administrado.

a. Use estas informações para determinar os valores de A e k.

b. Qual é a concentração do medicamento no sangue do paciente 1 hora após a administração?

c. Em que instante após atingir o valor máximo a concentração atingirá um valor igual a metade do valor máximo?

d. Se o tempo calculado no item (c) for multiplicado por dois, a concentração correspondente será igual a 1/4 do valor máximo? Justifique sua resposta.

51. AUMENTO DA BUROCRACIA De acordo com a **lei de Parkinson,*** qualquer departamento administrativo que não esteja envolvido ativamente em atividades de guerra, o número de funcionários aumenta à taxa de 6% ao ano, independentemente das necessidades do trabalho.

a. Parkinson aplicou esta lei ao Escritório Colonial Britânico. Segundo Parkinson, o Escritório Colonial Britânico tinha 1.139 funcionários em 1947. Qual o número de funcionários do Escritório Colonial Britânico previsto pela lei de Parkinson para 1954? (O número real foi 1.661.)

b. De acordo com a lei de Parkinson, quantos anos são necessários para que o número de funcionários se torne duas vezes maior?

c. Leia a respeito da lei de Parkinson e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito da validade da lei nos dias de hoje. Um bom lugar para começar a pesquisa é o livro citado no enunciado do problema.

52. MELHOR OCASIÃO PARA VENDER Seja $V(t)$ o valor de um bem daqui a t anos. Suponha que a taxa anual de juros (expressa com um número decimal) permaneça constante com o valor r e os juros sejam capitalizados continuamente.

a. Mostre que o valor atual do bem $P(t) = V(t)e^{-rt}$ possui um número crítico para $V'(t) = V(t)r$. (Usando argumentos econômicos, é possível mostrar que este ponto crítico corresponde a um máximo).

b. Explique por que o valor atual de $V(t)$ é máximo para o valor de t tal que a taxa de variação percentual (expressa em forma decimal) é igual a r.

53. ONCOLOGIA No Problema 64 da Seção 2.3 foi mostrada uma função para modelar a produção das células do sangue. Modelos como este são úteis no estudo da leucemia e outras *doenças dinâmicas* nas quais certos sistemas fisiológicos começam a se comportar de forma errática. Um modelo alternativo* para a produção de células do sangue, proposto por A. Lasota em 1977, se baseia na função exponencial

$$p(x) = Ax^{s}e^{-sx/r}$$

onde A, s e r são constantes, A e r são positivos e x é o número de granulócitos (um tipo de leucócito) presentes.

a. Determine o número de células do sangue para o qual a produção $p(x)$ é máxima. Como é possível saber que o nível ótimo corresponde a um máximo?

b. Mostre que a curva de $p(x)$ possui dois pontos de inflexão para $s > 1$. Faça um esboço da curva e apresente uma interpretação física para os pontos de inflexão.

c. Faça um esboço de $p(x)$ para $0 \leq s \leq 1$. Qual é a diferença entre este caso e o do item (b)?

d. Leia a respeito do uso de métodos matemáticos para o estudo de doenças dinâmicas e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre estes métodos. Um bom lugar para começar é o artigo citado no enunciado.

54. ÍNDICE DE MORTALIDADE Um atuário calcula a probabilidade de que um indivíduo de uma certa população morra com x anos de idade usando a expressão

$$P(x) = \lambda^{2}xe^{-\lambda x}$$

onde λ é um parâmetro tal que $0 < \lambda < e$.

a. Determine o valor máximo de $P(x)$ em função de λ.

b. Faça um esboço de $P(x)$.

*C. N. Parkinson, *Parkinson's Law*, Boston, MA:Houghton-Miffin, 1957.

*W. B. Gearhart and M. Martelli, "A Blood Cell Population Model, Dynamic Diseases, and Chaos", *UMAP Modules 1990: Tools for Teaching*, Arlington, MA: Consortium for Mathematics and Applications, Inc., 1991.

c. Leia a respeito das expressões matemáticas usadas pelos atuários para cálculos deste tipo. Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do significado do parâmetro λ neste contexto.

55. EPIDEMIOLOGIA Uma doença contagiosa se dissemina em uma comunidade de tal forma que t semanas após o primeiro surto o número de pessoas infectadas é dado por uma função da forma $f(t) = \dfrac{A}{1 + Ce^{-kt}}$, onde A é o número de pessoas suscetíveis. Mostre que a taxa de disseminação da doença é máxima quando metade das pessoas suscetíveis está infectada.

56. Use uma calculadora gráfica para plotar a função $f(x) = x(e^{-x} + e^{-2x})$. Use **ZOOM** e **TRACE** para determinar a posição do máximo de $f(x)$. O que acontece com $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$?

57. PESQUISA DE MERCADO Uma empresa está tentando usar anúncios de televisão para divulgar um novo produto ao maior número possível de pessoas em uma grande área metropolitana com 2 milhões de telespectadores em potencial. O número N de pessoas (em milhões) que conhecem o produto após t dias pode ser determinado através da expressão

$$N = 2(1 - e^{-0{,}037t})$$

Use uma calculadora gráfica para plotar esta função. O que acontece quando $t \to +\infty$? (*Sugestão:* use uma janela [0, 200]10 por [0, 3]1.)

58. MELHOR OCASIÃO PARA VENDER Uma pessoa recebe de herança um terreno cujo valor daqui a t anos é estimado em $V(t) = 20.000te^{\sqrt{0{,}4t}}$ reais. Se a taxa de juros permanecer constante em 7% capitalizados continuamente, qual será o momento mais adequado para vender o terreno? (Use uma calculadora gráfica e as opções **ZOOM** e **TRACE** para resolver o problema.)

59. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO Em um artigo clássico,* E. Heinz mostrou que a concentração $y(t)$ de um remédio administrado por injeção intramuscular é dada por

$$y(t) = \frac{c}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt}) \quad t \geq 0$$

onde t é o número de horas após a injeção e a, b e c são constantes positivas, com $b > a$.

a. Em que instante a concentração é máxima? O que acontece com a concentração "a longo prazo"?

b. Faça um gráfico de $y(t)$.

c. Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre a confiabilidade do modelo de Heinz. Em particular, o modelo é mais confiável para grandes ou pequenos valores de t? Um bom lugar para começar a pesquisa é a referência citada no enunciado.

60. ENGENHARIA CIVIL Quando uma corda de roupa, um cabo telefônico ou uma linha de transmissão é pendurada entre dois apoios, a curva formada é conhecida como **catenária**. A equação de uma catenária típica é

$$y = 0{,}125(e^{4x} + e^{-4x})$$

a. Plote a catenária.

b. As curvas catenárias são importantes na arquitetura. Leia a respeito do "Gateway Arch to the West", em St. Louis, Missouri, e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do uso da curva catenária para projetar o arco.*

61. CONTABILIDADE A expressão do **montante duplamente decrescente**, uma grandeza usada em contabilidade, é

$$V(t) = V_0\left(1 - \frac{2}{L}\right)^t$$

onde $V(t)$ é o valor após t anos de um artigo que originalmente custou V_0 reais e L é uma constante conhecida como "vida útil" do artigo.

a. Uma geladeira custou R$ 875,00 e tem uma vida útil de 8 anos. Qual é o seu valor após 5 anos? Qual é a taxa anual de depreciação?

b. No caso geral, qual é a taxa de variação percentual de $V(t)$?

62. DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA Na seção Para Pensar do Capítulo 3, foram apresentados vários modelos para a epidemia de AIDS. Usando um programa de análise de dados, obtemos a função

$$C(t) = 456 + 1.234te^{-0{,}137t}$$

como modelo para o número de casos conhecidos de AIDS t anos após o ano-base de 1990.

a. De acordo com este modelo, em que ano o número de casos conhecidos de AIDS será máximo?

b. Em que ano o número de casos conhecidos será igual ao de 1990?

*E. Heinz, "Probleme bei der Diffusion kleiner Substanzmengen innerhalb des menschlichen Köpers", *Biochem. Z.*, Vol. 319, 1949, pp. 482-492.

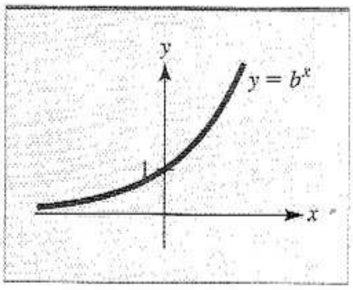
*Um bom lugar para começar é o artigo de William V. Thayer "The St. Louis Arch Problem", *UMAP Modules 1983: Tools for Teaching*, Lexington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1984.

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

Função exponencial: (Seção 4.1)

$$f(x) = b^x \quad b > 0,\ b \neq 1$$

Curva de $y = b^x$ para $b > 1$: (Seção 4.1)



Propriedades das funções exponenciais: (Seção 4.1)

$$b^x = b^y \text{ se e apenas se } x = y$$
$$b^x b^y = b^{x+y}$$
$$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$
$$(b^x)^y = b^{xy}$$
$$b^0 = 1$$

O número e: (Seção 4.1)

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

Juros capitalizados k vezes por ano durante t anos a uma taxa anual r:

O valor futuro de P reais é $B = P\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{kt}$ (Seção 4.1)

O valor atual de B reais é $P = B\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{-kt}$ (Seção 4.1)

Juros capitalizados continuamente durante t anos a uma taxa anual r:

O valor futuro de P reais é $B = Pe^{rt}$ (Seção 4.1)
O valor atual de B reais é $P = Be^{-rt}$ (Seção 4.1)

Função logarítmica: (Seção 4.2)

$y = \log_b x$ se e apenas se $b^y = x$

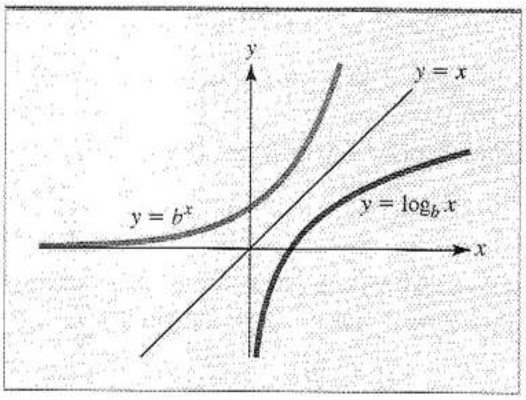
Propriedades dos logaritmos: (Seção 4.2)

$\log_b u = \log_b v$ se e apenas se $u = v$
$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$
$\log_b\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$
$\log_b u^r = r \log_b u$
$\log_b 1 = 0$ e $\log_b b = 1$
$\log_b b^u = u$

Comparação das Propriedades das Funções Exponenciais e Logarítmicas (Seção 4.2)

Funções Exponenciais	**Funções Logarítmicas**
$b^x b^y = b^{x+y}$	$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
$\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$	$\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
$b^{xp} = (b^x)^p$	$\log_b x^p = p \log_b x$

Curva de $y = \log_b x$ para $b > 1$: (Seção 4.2)



O logaritmo natural: (Seção 4.2)

$$y = \ln x \quad \text{se e apenas se} \quad e^y = x$$

Fórmulas de inversão: (Seção 4.2)

$$e^{\ln x} = x \quad \text{para } x > 0$$

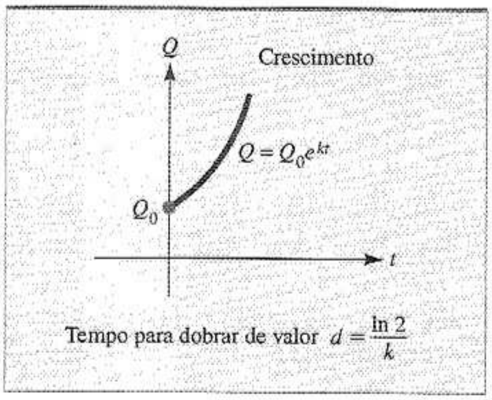
e

$$\ln e^x = x \qquad \text{para qualquer valor de } x$$

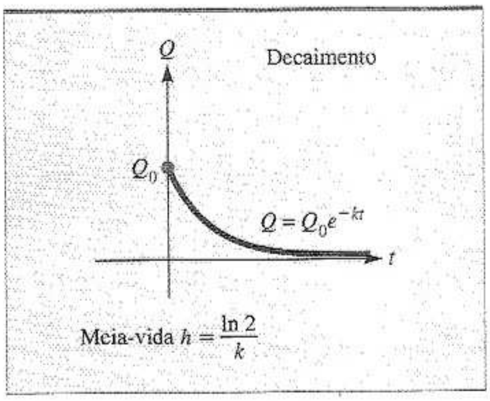
Fórmula de conversão para logaritmos (Seção 4.2)

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Crescimento exponencial: (Seção 4.2)



Decaimento exponencial: (Seção 4.2)



Datação por carbono (Seção 4.2)

Derivadas de funções exponenciais: (Seção 4.3)

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$$

Derivadas de funções logarítmicas: (Seção 4.3)

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx}$$

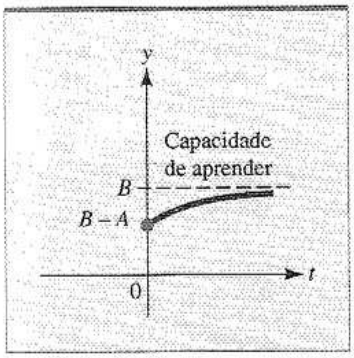
Derivação logarítmica: (Seção 4.3)

Taxa de variação relativa de $Q(x)$: (Seção 4.3)

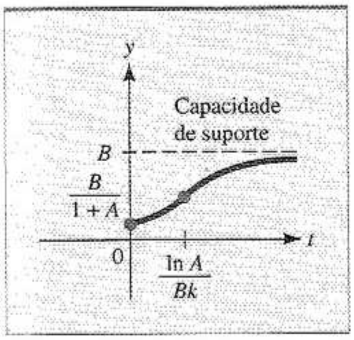
$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}(\ln Q)$$

Melhor ocasião para vender (Seção 4.4)

Curva de aprendizado $y = B - Ae^{-kt}$ (Seção 4.4)



Curva logística $y = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$ (Seção 4.4)



Verificação do Capítulo 4

1. Calcule o valor das seguintes expressões:

a. $\dfrac{(3^{-2})(9^2)}{(27)^{2/3}}$

b. $\sqrt[3]{(25)^{1,5}\left(\dfrac{8}{27}\right)}$

c. $\log_2 4 + \log_4 16^{-1}$

d. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3}\left(\dfrac{16}{81}\right)^{3/2}$

2. Simplifique as seguintes expressões:

a. $(9x^4y^2)^{3/2}$

b. $(3x^2y^{4/3})^{-1/2}$

c. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{3/2}\left(\dfrac{x^{2/3}}{y^{1/6}}\right)^2$

d. $\left(\dfrac{x^{0,2}y^{-1,2}}{x^{1,5}y^{0,4}}\right)^5$

3. Determine todos os números reais x que satisfazem as seguintes equações:

a. $4^{2x-x^2} = \dfrac{1}{64}$

b. $e^{1/x} = 4$

c. $\log_4 x^2 = 2$

d. $\dfrac{25}{1 + 2e^{-0,5t}} = 3$

4. Calcule a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ das funções a seguir. (Em alguns casos, o uso da derivação logarítmica pode facilitar a solução.)

a. $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3x}$

b. $y = \ln(x^3 + 2x^2 - 3x)$

c. $y = x^3 \ln x$

d. $y = \dfrac{e^{-2x}(2x-1)^3}{1 - x^2}$

5. Para as funções a seguir, determine os intervalos em que a função é crescente e decrescente e os intervalos em que a concavidade da curva da função é para cima e para baixo. Determine também o maior número possível de características da curva, como máximos e mínimos, pontos de inflexão, assíntotas verticais e horizontais, pontos de interseção com os eixos x e y, cúspides e tangentes verticais.

a. $y = x^2e^{-x}$

b. $y = \dfrac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$

c. $y = \ln(\sqrt{x} - x)^2$

d. $y = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$

6. Se você investir R$ 2.000,00 a juros de 5% ao ano capitalizados continuamente, qual será o montante após 3 anos? Quanto tempo você levará para acumular R$ 3.000,00 em sua conta?

7. **ANÁLISE DE PREÇOS** Um produto é lançado no mercado e t meses depois seu preço unitário é $p(t)$ centenas de reais, onde

$$p = \frac{\ln(t+1)}{t+1} + 5$$

a. Em que período de tempo o preço está aumentando? Em que período o preço está diminuindo?

b. Em que instante o preço está diminuindo mais depressa?

c. O que acontece com o preço a longo prazo (quando $t \to +\infty$)?

8. **MAXIMIZAÇÃO DA RECEITA** O dono de uma empresa determina que q unidades de uma mercadoria podem ser vendidas quando o preço unitário é p centenas de reais, onde

$$q(p) = 1.000(p+2)e^{-p}$$

a. Mostre que a função de demanda $q(p)$ diminui quando p aumenta para $p \geq 0$.

b. Para que preço p a receita $R = pq$ é máxima? Qual é a receita máxima?

9. **DATAÇÃO POR CARBONO** Observa-se que em um artefato arqueológico existem 45% dos átomos de ^{14}C originais. Qual é a idade do artefato? (Use 5.730 anos como a meia-vida do ^{14}C.)

10. **COLÔNIA DE BACTÉRIAS** Uma toxina é introduzida em uma colônia de bactérias; t horas mais tarde, a população é dada por

$$N(t) = 10.000(8 + t)e^{-0,1t}$$

a. Qual era a população no instante em que a toxina foi introduzida?

b. Em que instante a população passa por um máximo? Qual é o valor deste máximo?

c. O que acontece com a população a longo prazo (para $t \to +\infty$)?

RESUMO DO CAPÍTULO

Problemas de Revisão

Nos Problemas 1 a 4, faça um esboço da curva da função exponencial ou logarítmica dada sem usar os métodos do cálculo.

1. $f(x) = 5^x$

2. $f(x) = -2e^{-x}$

3. $f(x) = \ln x^2$

4. $f(x) = \log_3 x$

5. a. Determine $f(4)$ sabendo que $f(x) = Ae^{kx}$, $f(0) = 10$ e $f(1) = 25$.

b. Determine $f(3)$ sabendo que $f(x) = Ae^{kx}$, $f(1) = 3$ e $f(2) = 10$.

c. Determine $f(9)$ sabendo que $f(x) = 30 + Ae^{kx}$, $f(0) = 50$ e $f(3) = 40$.

d. Determine $f(10)$ sabendo que $f(t) = \dfrac{6}{1 + Ae^{-kt}}$, $f(0) = 3$ e $f(5) = 2$.

6. Calcule as seguintes expressões sem usar tabelas ou calculadora.

a. $\ln e^5$

b. $e^{\ln 2}$

c. $e^{3\ln 4 - \ln 2}$

d. $\ln 9e^2 + \ln 3e^{-2}$

Nos Problemas 7 a 13, determine todos os números x reais que satisfazem a equação dada.

7. $8 = 2e^{0,04x}$

8. $5 = 1 + 4e^{-6x}$

9. $4 \ln x = 8$

10. $5^x = e^3$

11. $\log_9 (4x - 1) = 2$

12. $\ln(x-2) + 3 = \ln(x+1)$

13. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ [*Sugestão:* Seja $u = e^x$.]

Nos Problemas 14 a 29, determine a derivada $\dfrac{dy}{dx}$. Em alguns casos, o uso da derivação implícita ou da derivação logarítmica pode facilitar a solução.

14. $y = 2e^{3x+5}$

15. $y = x^2e^{-x}$

16. $y = \ln\sqrt{x^2 + 4x + 1}$

17. $y = x\ln x^2$

18. $y = \dfrac{x}{\ln 2x}$

19. $y = \log_3 (x^2)$

20. $y = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x} + 2}$

21. $y = \dfrac{e^{-x} + e^x}{1 + e^{-2x}}$

22. $y = (1 + e^{-x})^{4/5}$

23. $y = \ln(e^{-2x} + e^{-}$

24. $y = \ln\left(\dfrac{e^{3x}}{1 + x}\right)$

25. $y = \dfrac{e^{-x}}{x + \ln x}$

26. $xe^{-y} + ye^{-x} = 3$

27. $ye^{x-x^2} = x + y$

28. $y = \dfrac{e^{-2x}(2 - x^3)^{3/2}}{\sqrt{1 + x^2}}$

29. $y = \dfrac{(x^2 + e^{2x})^3 e^{-2x}}{(1 + x - x^2)^{2/3}}$

Nos Problemas 30 a 37, determine os intervalos em que a função dada é crescente e decrescente e os intervalos em que a concavidade da curva da função é para cima e para baixo. Plote a função e assinale o maior número possível de características da curva, como máximos e mínimos, pontos de inflexão, assíntotas verticais e horizontais, pontos de interseção com os eixos x e y, cúspides e tangentes verticais.

30. $f(x) = xe^{-2x}$

31. $f(x) = e^{x} - e^{-x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$

33. $f(t) = t + e^{-t}$

34. $g(t) = \dfrac{\ln(t + 1)}{t + 1}$

35. $F(u) = u^2 + 2\ln(u + 2)$

36. $f(u) = e^{2u} + e^{-u}$

37. $G(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-x})$

Nos Problemas 38 a 41, determine o maior e o menor valor da função dada no intervalo especificado.

38. $f(x) = \dfrac{e^{-x/2}}{x^2}$ para $-5 \le x \le -1$

39. $f(x) = \ln(4x - x^2)$ para $1 \le x \le 3$

40. $g(t) = \dfrac{\ln(\sqrt{t})}{t^2}$ para $1 \le t \le 2$

41. $h(t) = (e^{-t} + e^{t})^5$ para $-1 \le t \le 1$

Nos Problemas 42 a 45, escreva a equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

42. $y = (x^2 - x)e^{-x}$ onde $x = 0$

43. $y = x\ln x^2$ onde $x = 1$

44. $y = (x + \ln x)^3$ onde $x = 1$

45. $y = x^3e^{2-x}$ onde $x = 2$

46. CRESCIMENTO EXPONENCIAL O valor de uma certa máquina industrial está diminuindo exponencialmente. Se a máquina valia inicialmente R$ 50.000,00 e R$ 20.000,00 após 5 anos de uso, quanto valerá após 10 anos de uso?

47. PUBLICIDADE Uma empresa estima que, se investir x milhares de reais em publicidade, poderá vender aproximadamente $Q(x) = 50 - 40e^{-0,1x}$ mil unidades de um certo produto.

a. Plote a curva de vendas para $x \ge 0$.

b. Quantas unidades serão vendidas se a empresa não investir em publicidade?

c. Quantas unidades serão vendidas se a empresa investir R$ 8.000,00 em publicidade?

d. Quanto a empresa deve investir em publicidade para vender 35.000 unidades do produto?

e. De acordo com este modelo, qual é a projeção de vendas mais otimista?

48. PRODUTIVIDADE Um empresário determina que a produção diária de um operário após t semanas no emprego é $Q(t) = 120 - Ae^{-kt}$ unidades. Inicialmente, um operário consegue produzir 30 unidades por dia, mas após 8 semanas está produzindo 80 unidades por dia. Quantas unidades um operário é capaz de produzir por dia após 4 semanas?

49. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t anos a população de um certo país será P milhões de habitantes, onde

$$P(t) = \frac{30}{1 + 2e^{-0,05t}}$$

a. Plote a função $P(t)$.

b. Qual é a população atual?

c. Qual será a população daqui a 20 anos?

d. O que acontece com a população "a longo prazo"?

50. JUROS COMPOSTOS Determine o tempo que um investimento de R$ 2.000,00 levará para se transformar em R$ 5.000,00 a uma taxa anual de juros de 8% se os juros forem capitalizados

a. Trimestralmente

b. Continuamente

51. TAXA DE JUROS EFETIVA Qual o investimento que rende juros efetivos maiores: 8,25% ao ano capitalizados trimestralmente ou 8,20% ao ano capitalizados continuamente? (*Sugestão:* Veja Problema 54 da Seção 4.1.)

52. JUROS COMPOSTOS Determine a quantia que deve ser investida a uma taxa anual de juros de 6,25% para que o montante daqui a 10 anos seja R$ 2.000,00 se os juros forem capitalizados

a. Mensalmente

b. Continuamente

53. VALOR ATUAL Determine o valor atual de R$ 8.000,00 a serem pagos daqui a 10 anos se a taxa anual de juros é de 6,25% e os juros são capitalizados

a. Semestralmente

b. Continuamente

54. JUROS COMPOSTOS Um banco capitaliza continuamente os juros. Qual é a taxa de juros (nominal) se uma aplicação de R$ 1.000,00 resulta em um montante de R$ 2.054,44 em 12 anos?

55. JUROS COMPOSTOS Um certo banco oferece uma taxa de juros de 6% ao ano capitalizados anualmente. Um concorrente capitaliza os juros continuamente. Qual deve ser a taxa de juros (nominal) oferecida pelo concorrente para que as taxas de juros efetivas dos dois bancos sejam iguais?

56. POPULAÇÃO DE BACTÉRIAS O número de bactérias em um certo meio de cultura cresce exponencialmente. Se havia inicialmente 5.000 bactérias e 8.000 bactérias 10 minutos depois, quanto tempo será necessário para que o número de bactérias se torne duas vezes maior que o número inicial?

57. POLUIÇÃO DO AR Um estudo realizado em um bairro de uma grande cidade revela que daqui a t anos a concentração média de monóxido de carbono no ar será $Q(t) = 4e^{0,03t}$ partes por milhão.

a. Qual será a taxa de variação da concentração de monóxido de carbono daqui a 2 anos?

b. Qual será a taxa de variação percentual da concentração de monóxido de carbono daqui a t anos? Esta taxa depende de t ou é constante?

58. LUCRO Um fabricante pode produzir câmaras fotográficas por um custo unitário de R$ 40,00 e estima que se forem vendidas por p reais os consumidores comprarão aproximadamente $D(p) = 800e^{-0,01p}$ câmaras por semana. Por que preço o fabricante deve vender as câmaras para maximizar o lucro?

59. MELHOR OCASIÃO PARA VENDER Suponha que você possua um bem cujo valor daqui a t anos será $V(t) = 2.000e^{\sqrt{2t}}$ reais. Se a taxa de juros permanecer constante em 5% ao ano capitalizados continuamente, qual é o melhor ano para vender o bem e investir a quantia recebida?

60. REGRA DO 70 Os investidores muitas vezes querem saber quanto tempo será necessário para duplicar a quantia investida. Um método simples para calcular este tempo é a chamada "regra do 70", segundo a qual o tempo para duplicar um investimento com uma taxa anual de juros r (expressa como um número decimal) capitalizados continuamente é dado pela expressão $d = \dfrac{70}{r}$.

a. Chamando de r a taxa anual de juros, use a expressão $B = Pe^{rt}$ para calcular o tempo para duplicar o investimento para $r = 4, 6, 9, 10$ e 12. Compare os valores calculados com os valores obtidos usando a regra do 70.

b. Algumas pessoas preferem usar a "regra do 72" e outras utilizam a "regra do 69". Teste estas regras alternativas usando o mesmo método do item (a) e escreva um ensaio de pelo menos 10 linhas explicando qual é a regra que você considera mais adequada.

61. DECAIMENTO RADIOATIVO Uma substância radioativa decai exponencialmente com uma meia-vida λ. Suponha que a massa da substância inicialmente presente (no instante $t = 0$) é Q_0.

a. Mostre que a massa da substância após t anos é dada por $Q(t) = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$.

b. Determine um número k tal que a massa do item (a) possa ser expressa na forma $Q(t) = Q_0(0,5)^{kt}$.

62. DEMOGRAFIA ANIMAL Um naturalista em uma reserva ecológica verificou que a função

$$f(x) = \frac{4e^{-(\ln x)^2}}{\sqrt{\pi}\, x}$$

fornece uma boa estimativa do número de animais com x anos de idade. Faça um gráfico de $f(x)$ para $x > 0$ e determine a idade mais "provável" dos animais [ou seja, a idade que maximiza $f(x)$].

63. DATAÇÃO POR CARBONO "Homem do Gelo" é o nome atribuído a um homem pré-histórico, do período neolítico, cujo corpo congelado foi encontrado em uma geleira dos Alpes em 1991. A princípio, pensou-se que se tratava de um indivíduo da Idade do Bronze, por causa da machadinha que estava carregando. Entretanto, a machadinha era feita de cobre e não de bronze. Leia a respeito da Idade do Bronze e determine a menor idade que o Homem do Gelo poderia ter se fosse de uma época anterior à Idade do Bronze. Nesse caso, qual a *maior* porcentagem do ^{14}C original que poderia estar presente em uma amostra retirada do seu corpo?[2]

64. LEI DE FICK De acordo com a lei de Fick,* $f(t) = C(1 - e^{-kt})$, onde $f(t)$ é a concentração de soluto no interior de uma célula no instante t, C é a concentração (constante) de soluto do lado de fora da célula e k é uma constante positiva. Suponha que, no caso de uma certa célula, a concentração no interior da célula após 2 horas é 0,8% da concentração do lado de fora.

a. Qual é o valor de k?

b. Qual é a taxa de variação percentual de $f(t)$ no instante t?

c. Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre a importância da lei de Fick para a ecologia.

65. RESFRIAMENTO Uma criança cai acidentalmente em um lago no qual a temperatura da água é $-3°C$. A temperatura do corpo depois de passar t minutos na água é $T(t) = 35e^{-0,32t}$. A criança perderá os sentidos se a temperatura do corpo cair abaixo de 27°C. De quanto tempo dispõe a equipe de resgate para salvar a criança? Qual a taxa de resfriamento do corpo da criança no momento em que atinge a temperatura de 27°C?

66. CIÊNCIA FORENSE A temperatura T do corpo de uma vítima de assassinato encontrada em um quarto cuja temperatura é de 20°C é dada por

$$T(t) = 20 + 17e^{-0,07t} \quad °C$$

onde t é o número de horas após a morte da vítima.

a. Faça um gráfico da temperatura do corpo $T(t)$ para $t \geq 0$. Qual é a assíntota horizontal do gráfico? O que representa?

b. Qual é a temperatura do corpo da vítima 10 horas após a morte? Quanto tempo a temperatura do corpo leva para chegar a 25°C?

c. João Ning Hen trabalha na firma de advogados Fraud, Tranbeek & Suborn. Chega ao trabalho certa manhã e encontra o corpo do chefe, Jafiz Tranbeek, tombado sobre a mesa de trabalho. Chama a polícia e às 8 h o médico-legista verifica que a temperatura do corpo é de 33°C. Como a última anotação encontrada na agenda da vítima é "Despedir o idiota do Ning Hen", João é considerado o principal suspeito. Entretanto, João não é nenhum idiota, e andou lendo este livro nas horas de folga. Depois de

[2]Na verdade, a datação por carbono revelou que o Homem de Gelo tem aproximadamente 5.200 anos de idade. (N.T.)

*A lei de Fick desempenha um papel importante na ecologia. Veja, por exemplo, M. D. LaGrega, P. L. Buckingham and J. C. Evans, *Hazardous Waste Management*, New York: McGraw-Hill, 1994, pp. 95, 464 e especialmente 813, onde os autores discutem a difusão de poluentes em aterros sanitários.

consultar o termostato e verificar que a temperatura da sala é de 20°C, sabe exatamente para que instante necessita de um álibi de modo a comprovar sua inocência. Que instante é esse?

67. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO Suponha que t horas após a administração oral de um antibiótico sua concentração no sangue de um paciente seja dada por uma função de surto da forma $C(t) = Ate^{-kt}$, onde A e k são constantes positivas e C é medida em microgramas por mililitro de sangue. Amostras de sangue são coletadas periodicamente e os pesquisadores verificam que a concentração máxima do medicamento ocorre 2 horas após sua administração e é de 10 microgramas por mililitro.

a. Use estas informações para determinar os valores de A e k.

b. Uma nova dose deve ser administrada quando a concentração atinge o valor de 1 micrograma por mililitro. Em que momento isto acontece?

68. VELOCIDADE DE UMA REAÇÃO QUÍMICA O efeito da temperatura sobre a velocidade de uma reação química é expresso pela **equação de Arrhenius**

$$k = Ae^{-E_0/RT}$$

onde k é a velocidade da reação, T é a temperatura absoluta e R é a constante dos gases perfeitos. Os parâmetros A e E_0 dependem da reação considerada, mas não da temperatura. Sejam k_1 e k_2 as velocidades da reação nas temperaturas T_1 e T_2. Escreva uma expressão para $\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$ em função de E_0, R, T_1 e T_2.

69. CAMADA DE OZÔNIO Sabe-se que os fluorcarbonetos reduzem a concentração de ozônio na atmosfera superior. Suponha que os cientistas cheguem à conclusão de que a concentração de ozônio na atmosfera é reduzida de 0,15% a cada ano, de modo que após t anos a concentração é dada por

$$Q = Q_0e^{-0{,}0015t}$$

onde Q_0 é a concentração inicial.

a. Qual é a taxa de decaimento percentual da concentração de ozônio no ano t?

b. Quantos anos são necessários para que a quantidade de ozônio se reduza a 10% do valor inicial? Qual é a taxa de decaimento percentual da concentração de ozônio nesta ocasião?

70. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA Os registros mostram que t semanas após o início de um surto de uma certa forma de gripe, aproximadamente

$$Q(t) = \frac{80}{4 + 76e^{-1{,}2t}}$$

mil pessoas foram infectadas. Com que rapidez a doença estava se espalhando no final da segunda semana? Em que ocasião a doença está se espalhando mais rapidamente?

71. ACIDEZ (pH) DE UMA SOLUÇÃO Na química, a acidez de uma solução é medida pelo valor do pH, definido através da equação $\text{pH} = -\log_{10}[H_3O^+]$, onde $[H_3O^+]$ é a concentração do íon hidrônio na solução em mols/litro. O pH do suco de laranja é duas vezes maior que o pH do suco de limão. Se o pH do suco de laranja é 3,2, qual é a concentração de hidrônio no suco de limão?

72. DATAÇÃO POR CARBONO Uma pintura rupestre encontrada em uma caverna em Lascaux, França, e atribuída ao homem de Cro Magnon, tem aproximadamente 15.000 anos de idade. Qual seria a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C em um fóssil encontrado na mesma caverna?

73. TAXAS DE MORTALIDADE Os atuários têm interesse em estimar a taxa de mortalidade para diferentes populações. Uma expressão usada para calcular a taxa de mortalidade $D(t)$ para mulheres na faixa etária dos 25 aos 29 anos é a seguinte:

$$D(t) = (D_0 - 0{,}00046)e^{-0{,}162t} + 0{,}00046$$

onde t é o número de anos após um determinado ano tomado como referência, e D_0 é a taxa de mortalidade para $t = 0$.

a. Suponha que a taxa de mortalidade inicial em uma certa população seja 0,008 (8 mortes por 1.000 mulheres). Qual será a taxa de mortalidade 10 anos depois? Qual será a taxa de mortalidade 25 anos depois?

b. Faça um gráfico de $D(t)$ para $0 \leq t \leq 25$, usando o valor de D_0 do item (a).

74. PRODUTO DOMÉSTICO BRUTO O Produto Doméstico Bruto (PDB) de um certo país foi de 100 bilhões de dólares em 1990 e 165 bilhões de dólares em 2000. Supondo que o PDB esteja crescendo exponencialmente, qual será o seu valor no ano de 2010?

75. ARQUEOLOGIA Os cientistas acreditam que "Lucy", a famosa pré-humana cujo esqueleto foi descoberto na África, viveu há aproximadamente 3,8 milhões de anos.

a. Que porcentagem do ^{14}C original você deveria encontrar se aplicasse o método de datação por carbono ao caso de Lucy? Por que isto seria um problema se você estivesse tentando descobrir a idade de Lucy por este método?

b. Na prática, a datação por carbono funciona bem apenas para amostras "recentes", isto é, com menos de 50.000 anos de idade. No caso de amostras mais antigas, como Lucy, é possível usar métodos de datação baseados no decaimento radioativo de outros elementos, como o método do potássio–argônio e o método do rubídio–estrôncio. Leia a respeito destes outros métodos de datação e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito de suas aplicações.*

76. RADIOLOGIA O isótopo radioativo gálio 67 (^{67}Ga), usado para diagnosticar tumores malignos, tem uma meia-vida de 46,5 horas. Se começamos com 100 miligramas do isótopo, quantos miligramas restam após 24 horas? Em que instante restam apenas 25 miligramas? Responda a estas perguntas plotando uma função exponencial apropriada em uma calculadora e usando **TRACE** e **ZOOM**.

77. Um modelo de população que já foi usado pelo governo norte-americano utiliza a expressão

$$P(t) = \frac{202{,}31}{1 + e^{3{,}938 - 0{,}314t}}$$

para estimar a população dos Estados Unidos (em milhões de habitantes) a cada dez anos a partir do ano-base de 1790.

---

*Um bom lugar para começar a pesquisa é o artigo de Paul J. Campbell "How Old Is the Earth?", *UMAP Modules 1992: Tools for Teaching*, Arlington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, 1993.

Por exemplo: $t = 0$ corresponde a 1790, $t = 1$ a 1800, $t = 10$ a 1890, e assim por diante. Os números não incluem as populações do Alasca e do Havaí.

a. Use esta expressão para calcular a população dos Estados Unidos nos anos de 1790, 1800, 1830, 1860, 1880, 1900, 1920, 1940, 1960, 1980, 1990 e 2000.

b. Faça um gráfico de $P(t)$. De acordo com este modelo, em que ano a população dos Estados Unidos estava aumentando com maior rapidez?

c. Use a Internet ou qualquer outra fonte para descobrir os resultados dos recenseamentos para os anos mencionados no item (a). A equação que aparece no enunciado do problema parece adequada? Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas discutindo as possíveis razões para as discrepâncias entre os números previstos e os observados.

78. Use uma calculadora para plotar no mesmo gráfico as funções $y = 2^{-x}$, $y = 3^{-x}$, $y = 5^{-x}$ e $y = (0{,}5)^{-x}$. Qual é a relação entre as funções $y = 2^{-x}$ e $y = (0{,}5)^{-x}$? (*Sugestão:* Use uma janela $[-3, 3]1$ por $[-3, 3]1$.)

79. Use uma calculadora para plotar no mesmo gráfico as funções $y = \sqrt{3^x}$, $y = \sqrt{3^{-x}}$ e $y = 3^{-x}$. Qual é a relação entre as funções $y = \sqrt{3^x}$ e $y = \sqrt{3^{-x}}$? (*Sugestão:* Use uma janela $[-3, 3]1$ por $[-3, 3]1$.)

80. Use uma calculadora para plotar no mesmo gráfico as funções $y = 3^x$ e $y = 4 - \ln \sqrt{x}$. Em seguida, use **TRACE** e **ZOOM** para determinar todos os pontos de interseção dos dois gráficos.

81. Resolva a seguinte equação com precisão de três casas decimais:

$$\log_5 (x + 5) - \log_2 x = 2 \log_{10} (x^2 + 2x)$$

82. Use uma calculadora para plotar no mesmo gráfico as curvas das funções

$$y = \ln (1 + x^2) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{x}$$

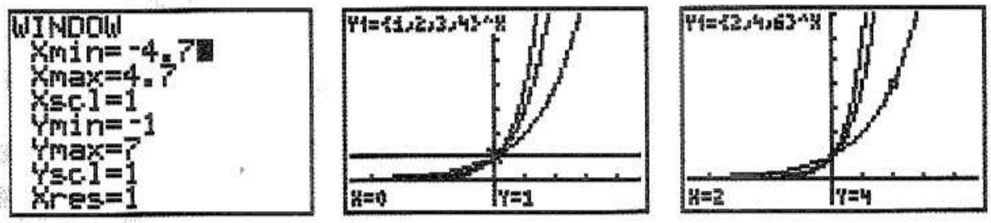
As duas curvas se interceptam?

83. Faça uma tabela com os valores de $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ e $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ para $n = 8, 9, 12, 20, 25, 31, 37, 38, 43, 50, 100$ e 1.000. Qual das duas expressões é maior? Esta desigualdade se mantém para qualquer valor de $n \geq 8$?

ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

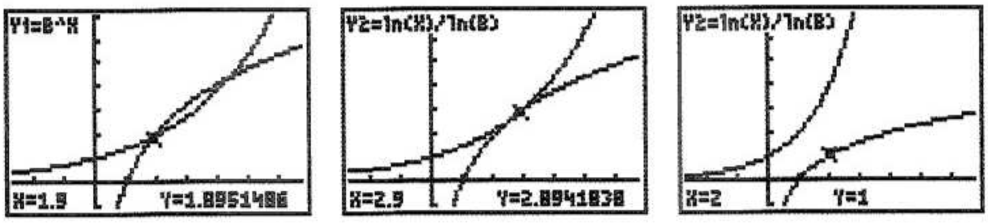
Solução do Exercício EXPLORE! 2

Uma forma de mostrar todas as curvas pedidas é entrar com Y1 = {1, 2, 3, 4}^X no editor de equações da calculadora. Observe que, como $b > 1$, as curvas crescem rapidamente; quanto maior o valor de b, mais rápido é o crescimento. Observe também que todas as curvas passam pelo ponto (0, 1). Por quê? Agora experimente entrar com Y1 = {2, 4, 6}^X. Observe que a curva de $y = 4^x$ está entre a curva de $y = 2^x$ e a curva de $y = 6^x$. Da mesma forma, a curva de $y = e^x$ está entre a curva de $y = 2^x$ e a curva de $y = 3^x$.



Solução do Exercício EXPLORE! 11

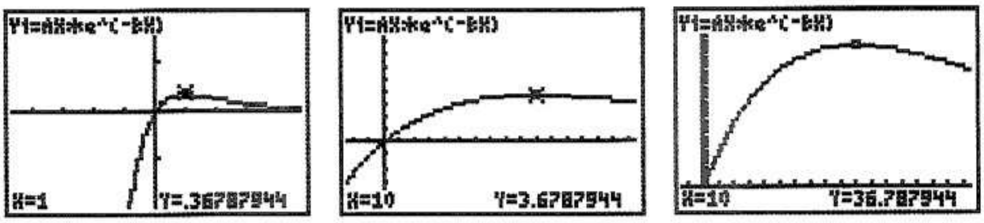
Entre com $f(x) = B^x$ em Y1 e $g(x) = \log_B x$ em Y2 como ln(x)/ln(B). Experimentando vários valores de B, descobrimos o seguinte: para $B < e^{1/e} \approx 1{,}444668$, as duas curvas se interceptam em dois pontos (quais, em termos de B?), para $B = e^{1/e}$ existe apenas um ponto de interseção e para $B > e^{1/e}$ não existe interseção. (Veja Classroom Capsules, "An Overlooked Calculus Question", *The College Mathematics Journal*, Vol. 33, No. 5, November 2002.)



Solução do Exercício EXPLORE! 16

Para examinar o caso geral do Exemplo 4.3.11, entre com a função $y = Axe^{-Bx}$ em Y1 do editor de equações e determine a posição do máximo de y para diferentes valores de A e B. Por exemplo: faça $A = 1$ e varie o valor de B (fazendo $B = 1$, 0,5 e 0,1, digamos) para verificar como varia a posição do máximo. Em seguida, conserve B constante (fazendo $B = 0{,}1$, por exemplo) e varie o valor de A (fazendo $A =$ 1, 10 e 100). Tente encontrar uma correlação entre estes resultados.

Por exemplo: para $A = 1$ e $B = 1$, o máximo de y acontece para $x = 1$ (figura da esquerda). Para $A =$ 1 e $B = 0{,}1$, o máximo está em $x = 10$ (figura do meio). Para $A = 10$ e $B = 0{,}1$, o máximo permanece em $x = 10$ (figura da direita). Neste caso, a coordenada y do máximo é multiplicada por 10.

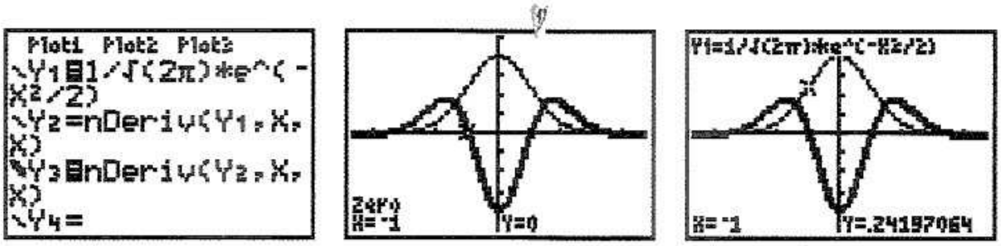


Na verdade, é possível demonstrar que a coordenada x do ponto de máximo é igual a $1/B$. O valor de A não afeta a coordenada x do ponto de máximo, mas quando o valor de A é multiplicado por um certo fator, a coordenada y do ponto de máximo é multiplicada pelo mesmo fator. Para confirmar estas observações, iguale a zero a derivada da função $y = Axe^{-Bx}$ e resolva esta equação para determinar a posição do máximo.

Solução do Exercício EXPLORE! 18

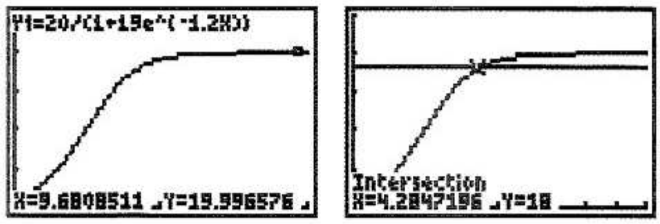
Entre com a função $f(x)$ do Exemplo 4.4.2 em Y1, entre com $f'(x)$ em Y2 (mas sem ativar a opção) e entre com $f''(x)$ em Y3 em negrito, usando uma janela [−4.7, 4.7]1 por [−0.5, 0.5]1. Usando **TRACE** ou a rotina para calcular raízes, é possível determinar que os dois pontos de interseção de $f''(x)$ com o eixo x estão situados em $x = -1$ e $x = 1$. Como o sinal da derivada segunda $f''(x)$ indica a concavidade de $f(x)$, sabemos que para estes valores de x a função $f(x)$ muda de concavidade. No ponto de inflexão (−1;

0,242), a concavidade de $f(x)$ muda de "para cima" [sinal positivo de $f''(x)$] para "para baixo" [sinal negativo de $f(x)$.] No ponto de inflexão (1; 0,242), a concavidade muda de "para baixo" para "para cima".



Solução do Exercício EXPLORE! 20

Entre em Y1 com a função do Exemplo 4.4.5, $Q(t) = 20/(1 + 19e^{-1,2t})$, e plote a curva correspondente usando uma janela [0, 10]1 por [0, 25]5. Observe o comportamento da função para grandes valores da variável independente, o tempo. Quando x se aproxima de 10 (semanas), o valor da função se aproxima do valor máximo de 20 mil pessoas infectadas ($Y > 19{,}996$ mil). Fazendo Y2 = 18 (mil) e localizando o ponto de interseção desta reta com a curva da função, é possível determinar que a epidemia atinge 90% da população após 4,28 semanas (cerca de 30 dias).



PARA PENSAR

MODELANDO COM A LEI DE ARRHENIUS*

É uma noite quente de verão, mas que temperatura está fazendo? Será possível conhecer a temperatura ambiente sem a ajuda de um termômetro? Faz muito tempo que as pessoas usam a freqüência do "cricri" dos grilos para estimar a temperatura. É importante saber que tipo de grilo estamos escutando, já que existem mais de 1.000 espécies diferentes de grilos e o modo como cricrilam depende da espécie. O grilo de Fulton (*Oecanthus fultoni*) é uma boa espécie para estimar a temperatura. É comum nos Estados Unidos e em boa parte do Canadá, sendo encontrado em todos os estados norte-americanos com a exceção da Flórida, Montana, Havaí e Alasca. Além disso, o intervalo entre os "cricris" é suficientemente longo para permitir a contagem. Os grilos cricrilam em sincronismo e a freqüência não é muito afetada por outros fatores além da temperatura.

Várias regras de bolso são usadas para estimar a temperatura a partir da freqüência dos "cricris" deste grilo. De acordo com uma das mais precisas, o número de "cricris" em 13 segundos mais 40 é uma boa estimativa de T_F, a temperatura em graus Fahrenheit. Para expressar esta regra através de uma equação, observe que se c é o número de "cricris" por minuto, o número de cricris em um intervalo de 13 segundos é $\frac{13c}{60}$ e, portanto, a temperatura T_F é dada pela equação

$$T_F = \left(\frac{13}{60}\right)c + 40$$

Por outro lado, podemos expressar o número de "cricris" por minuto em função da temperatura explicitando c na equação para obter

$$c = \left(\frac{60}{13}\right)(T_F - 40)$$

A Figura 4.17 mostra esta reta e vários pontos experimentais da forma (T_F, c), onde c é o número de "cricris" por minuto que é observado quando a temperatura é T_F.

FIGURA 4.17 O número de "cricris" de um grilo por minuto, c, varia de forma aproximadamente linear com a temperatura ambiente T_F.

*Parte deste ensaio foi adaptada de um capítulo do site do Dartmouth College sobre Química Geral, disponível em http://www.dartmouth.edu/~genchem/0102/spring/6winn/cricket.html.

Embora a Figura 4.17 mostre que a equação linear $c = \left(\frac{60}{13}\right)(T_F - 40)$ se ajusta relativamente bem aos dados, parece que o número de "cricris" se afasta da reta em altas temperaturas. Será possível encontrar uma curva que se ajuste melhor aos dados que a linha reta? Uma possível abordagem para conseguir um ajuste melhor é formular um modelo baseado na velocidade das reações químicas. Isto faz sentido, já que a velocidade das reações químicas aumenta com a temperatura, o que também acontece com os processos que se baseiam em reações químicas, incluindo muitos fenômenos biológicos, entre eles o "cricri" dos grilos. Vamos usar uma relação conhecida como **lei de Arrhenius**, segundo a qual a velocidade k de uma reação química é dada pela função

$$k = Ae^{-E_a/RT}$$

onde A é uma constante chamada de *fator de freqüência*, E_a é a *energia de ativação*, R é a *constante universal dos gases* e T é a *temperatura* em kelvins, que está relacionada à temperatura em graus Fahrenheit através da equação

$$T = \frac{1}{9}(5T_F + 2.297)$$

Se considerarmos o número c de "cricris" por minuto como sendo igual à velocidade da reação, a função que melhor se ajusta aos dados da Figura 4.17 é

$$c = 25{,}98 \cdot 10^{10}e^{-6.290/T}$$

que pode ser obtida usando as técnicas de regressão (mínimos quadrados) discutidas na Seção 7.4. Quando esta curva é plotada juntamente com os dados, obtemos o gráfico da Figura 4.18, segundo o qual o modelo baseado na lei de Arrhenius se ajusta melhor aos dados experimentais que o modelo linear, especialmente em altas temperaturas.

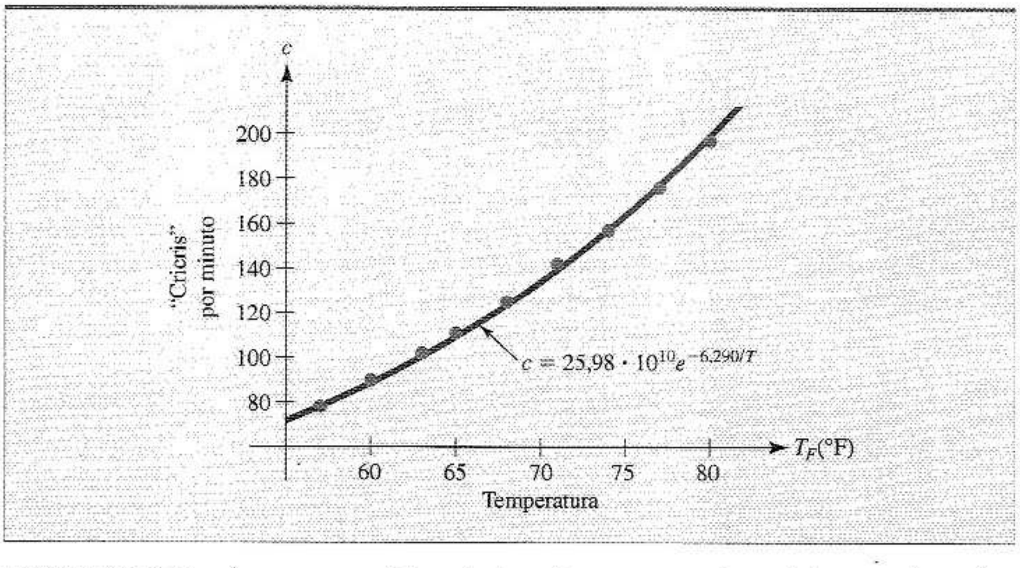


FIGURA 4.18 Uma curva exponencial se ajusta melhor que uma reta aos dados experimentais.

Embora o "cricri" dos grilos seja mais complicado que uma reação química, vimos que o modelo exponencial baseado na lei de Arrhenius permite estimar com mais precisão a freqüência dos "cricris" em função da temperatura que um modelo linear. Pode ser possível encontrar modelos ainda mais precisos, mas eles seriam provavelmente muito maior complicados.

Além do "cricri" dos grilos, outros fenômenos biológicos têm sido modelados com sucesso usando a lei de Arrhenius, como a velocidade com a qual as formigas se movem, a freqüência da luz dos vaga-lumes, a freqüência dos batimentos cardíacos das tartarugas, a freqüência das ondas alfa do cérebro e a rapidez com a qual as pessoas esquecem os fatos. Uma discussão destas aplicações pode ser encontrada em Keith J. Laidler, *Unconventional Applications of the Arrhenius Law*, *Journal of Chemical Education*, Vol. 49, No. 5, May 1972, pp. 343-344.

Exercícios

1. Determine a temperatura na qual um grilo de Fulton cricrila 100 vezes por minuto
   a. usando o modelo linear.
   b. usando o modelo baseado na lei de Arrhenius.
2. Determine a freqüência dos "cricris" de um grilo de Fulton quando a temperatura é de 75 graus Fahrenheit
   a. usando o modelo linear.
   b. usando o modelo baseado na lei de Arrhenius.
3. Mostre que o logaritmo da velocidade de reação k da lei de Arrhenius é uma função linear do inverso da temperatura T. Qual é a inclinação desta reta?
4. Determine a taxa com a qual a freqüência de "cricris" de um grilo de Fulton varia quando a temperatura é de 80 graus Fahrenheit
   a. usando o modelo linear.
   b. usando o modelo baseado na lei de Arrhenius.
5. Suponha que a velocidade com a qual um certo inseto se move, em centímetros por segundo (cm/s), é dada aproximadamente por uma equação baseada na lei de Arrhenius da forma

$$s = Ae^{-E_0/RT}$$

   onde $A = 685$ cm/s, $E_0 = 10{,}1$ kcal/mol e $R = 0{,}008314$ kJ/mol·K.
   a. Com que velocidade o inseto se move, de acordo com este modelo, quando a temperatura ambiente é de 60 graus Fahrenheit? (Não se esqueça de converter a temperatura para kelvins antes de aplicar o modelo.)
   b. Qual é a temperatura em graus Fahrenheit, de acordo com este modelo, quando os insetos estão se movendo com uma velocidade de 10 cm/s?
6. Determine a taxa de variação da velocidade dos insetos do Exercício 5 quando a temperatura ambiente é de 70 graus Fahrenheit.

CAPÍTULO | 5

INTEGRAÇÃO

SEÇÃO 5.1 | Antiderivação: a Integral Indefinida

Como podemos usar a taxa de inflação para prever os futuros preços? Qual será a velocidade de um corpo que se move em linha reta com aceleração conhecida? Como usar o conhecimento da taxa de crescimento de uma população para estimar o número futuro de habitantes? Em todas estas situações, a derivada (taxa de variação) de uma grandeza é conhecida e estamos interessados em determinar o valor da própria grandeza. Este processo é chamado de antiderivação.

Antiderivação ■ Uma função $F(x)$ é chamada de *antiderivada* de $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x)$$

para qualquer x no domínio de $f(x)$. O processo de obter antiderivadas é chamado de *antiderivação* ou *integração indefinida*.

NOTA Às vezes a equação

$$F'(x) = f(x)$$

é escrita na forma

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \quad ■$$

Daqui a pouco vamos discutir as técnicas usadas para determinar as antiderivadas. Depois de obtida uma antiderivada, é muito fácil verificar se está correta; basta derivá-la e verificar se o resultado é igual à função original. Segue um exemplo.

EXEMPLO 5.5.1

Verifique que $F(x) = x^3/3 + 5x + 2$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2 + 5$.

Solução

$F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ se e apenas se $F'(x) = f(x)$. Derivando F, temos:

$$F'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) + 5$$
$$= x^2 + 5 = f(x)$$

como queríamos demonstrar.

Antiderivada Geral de uma Função

Uma função tem mais de uma antiderivada. Por exemplo: uma das antiderivadas de $f(x) = 3x^2$ é $F(x) = x^3$, já que

$$F'(x) = 3x^2 = f(x)$$

mas o mesmo se pode dizer de $x^3 + 12$, $x^3 - 5$ e $x^3 + \pi$, pois

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 12) = 3x^2 \qquad \frac{d}{dx}(x^3 - 5) = 3x^2 \qquad \frac{d}{dx}(x^3 + \pi) = 3x^2$$

Se F é uma das antiderivadas de f, qualquer função G da forma $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante, também é uma antiderivada de f, já que

$$\begin{aligned} G'(x) &= [F(x) + C]' \\ &= F'(x) + C' && \textit{regra da soma para derivadas} \\ &= F'(x) + 0 && \textit{a derivada de uma constante é 0} \\ &= f(x) && \textit{pois F é uma antiderivada de f} \end{aligned}$$

É possível demonstrar (Problema 62) que a recíproca é verdadeira: se F e G são antiderivadas de f, $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante. Resumindo:

Propriedade Fundamental das Antiderivadas ■ Se $F(x)$ é uma antiderivada de uma função contínua $f(x)$, qualquer outra antiderivada de $f(x)$ tem a forma $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante.

Existe uma interpretação geométrica simples para a propriedade fundamental das antiderivadas. Se F e G são antiderivadas de f,

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

Isto significa que a inclinação $F'(x)$ da reta tangente à curva $y = F(x)$ no ponto $(x, F(x))$ é igual à inclinação $G'(x)$ da curva $y = G(x)$ no ponto $(x, G(x))$. Como as inclinações são iguais, as duas retas tangentes são paralelas, como mostra a Figura 5.1a. Como isto é verdade para qualquer valor de x, a curva $y = G(x)$ é paralela à curva $y = F(x)$ e, portanto,

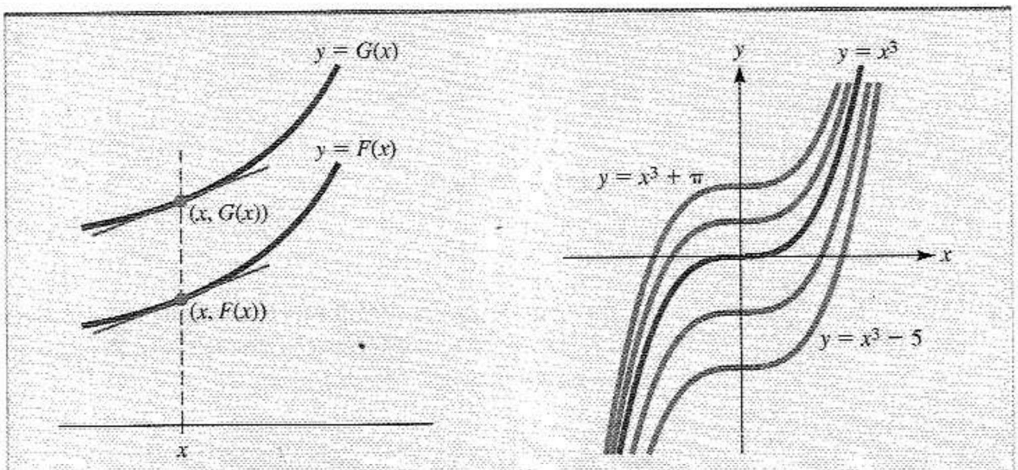
$$y = G(x) = F(x) + C$$

Lembrete

Duas retas são paralelas se e apenas se possuem a mesma inclinação.

1 EXPLORE!

Entre com a função $F(x) = x^3$ em Y1 do editor de equações em estilo negrito. Gere uma família de transformações verticais Y2 = Y1 + L1, onde L1 é uma lista de constantes, $\{-4, -2, 2, 4\}$. Use uma janela $[-4.7, 4.7]1$ por $[-6, 6]1$. O que você observa a respeito da inclinação de todas estas curvas em $x = 1$?



(a) Se $F'(x) = G'(x)$, as retas tangentes em $(x, F(x))$ e $(x, G(x))$ são paralelas

(b) Curvas de alguns membros da família das antiderivadas de $f(x) = 3x^2$

FIGURA 5.1 Os gráficos das antiderivadas de uma função f formam uma família de curvas paralelas.

Assim, o conjunto das curvas de todas as antiderivadas de uma função f é uma família de curvas paralelas que diferem entre si apenas por uma translação vertical, como mostra a Figura 5.1b para a função $f(x) = 3x^2$.

A Integral Indefinida

Como vimos, se $F(x)$ é uma antiderivada da função contínua $f(x)$, todas as antiderivadas de $f(x)$ têm a forma $F(x) + C$, onde C é uma constante. Vamos representar a família de todas as antiderivadas de $f(x)$ usando o símbolo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

que é chamado de **integral indefinida** de $f(x)$. A integral é "indefinida" porque envolve uma constante C que pode assumir qualquer valor. Na Seção 5.3 discutiremos uma **integral definida** que possui um valor numérico específico e é usada para representar várias grandezas, como área, valor médio, valor atual de um fluxo de receita e débito cardíaco, para citar apenas alguns exemplos. A ligação entre integral definida e indefinida será estabelecida na Seção 5.3 através de um resultado tão importante que é chamado de **teorema fundamental do cálculo.**

Lembrete

As diferenciais foram definidas na Seção 2.5.

No contexto da integral indefinida $\int f(x)dx = F(x) + C$, o símbolo $\int$ é chamado de **sinal de integração**, a função $f(x)$ é chamada de **integrando**, C é a **constante de integração** e dx é uma diferencial usada para indicar que x é a **variável de integração**. Estes elementos estão assinalados no diagrama a seguir para a integral indefinida da função $f(x) = 3x^2$.

$$\overset{\textit{símbolo de integral}}{\int} \underbrace{3x^2}_{\textit{integrando}} \overset{\textit{variável de integração}}{dx} = x^3 + \underbrace{C}_{\textit{constante de integração}}$$

Para qualquer função derivável F,

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

já que, por definição, $F(x)$ é uma antiderivada de $F'(x)$. Esta igualdade também pode ser escrita na forma

$$\int \frac{dF}{dx}\,dx = F(x) + C$$

Esta propriedade das integrais indefinidas é especialmente útil em problemas aplicados nos quais é conhecida uma taxa de variação $F'(x)$ e estamos interessados em determinar $F(x)$. Alguns desses problemas serão examinados mais adiante, nos Exemplos 5.1.4 a 5.1.8.

Convém lembrar que se executamos uma integração indefinida que nos leva a acreditar que $\int f(x)dx = G(x) + C$, podemos verificar se o cálculo está correto derivando $G(x)$:

Se $G'(x) = f(x)$, a integração $\int f(x)dx = G(x) + C$ está correta; se $G'(x) \neq f(x)$, existe algum erro nos cálculos.

A ligação que existe entre derivação e antiderivação permite obter regras de antiderivação a partir de regras de derivação já conhecidas.

2 EXPLORE!

A maioria das calculadoras gráficas permite calcular uma antiderivada usando a opção de integração numérica **fnInt**(expressão, variável, limite inferior, limite superior) do menu **MATH**. Entre no editor de equações com

Y1 = **fnInt(2X, X, {0, 1, 2}, X)**

e plote usando uma janela decimal expandida [−4,7, 4,7]1 por [−5, 5]1. O que você observa? Qual é a forma geral desta família de antiderivadas?

Regras para Integrar Funções Comuns

Regra da constante: $\int k\,dx = kx + C$ para k constante

Regra da potência: $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para qualquer $n \neq -1$

Regra do logaritmo: $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ para qualquer $x \neq 0$

Regra da exponencial: $\int e^{kx}\,dx = \dfrac{1}{k}e^{kx} + C$ para k constante $\neq 0$

Para demonstrar a regra da potência, basta mostrar que a derivada de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ é igual a x^n:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}[(n+1)x^n] = x^n$$

No caso da regra do logaritmo, se $x > 0$, $|x| = x$ e

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Se $x < 0$, $-x > 0$, $\ln |x| = \ln(-x)$ e, portanto, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

Assim, para qualquer valor de $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

e, portanto,

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln |x| + C$$

Fica a cargo do leitor (Problema 64) demonstrar a regra da constante e a regra da exponencial.

3 EXPLORE!

Plote $y = F(x)$, onde

$F(x) = \ln |x| = \ln(\text{abs}(x))$

em negrito e $f(x) = 1/x$ em estilo normal usando uma janela decimal. Mostre que em qualquer ponto $x \neq 0$ a derivada de $F(x)$ é igual ao valor de $f(x)$, confirmando assim que $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$.

NOTA Observe que a regra do logaritmo completa a "lacuna" que existe na regra da potência, ou seja, permite calcular a antiderivada de x^n no caso em que $n = -1$. As duas regras podem ser expressas na seguinte forma combinada:

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{se } n \neq -1 \\ \ln |x| + C & \text{se } n = -1 \end{cases}$$ ■

EXEMPLO 5.1.2

Determine as seguintes integrais:

a. $\int 3\,dx$ **b.** $\int x^{17}\,dx$ **c.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ **d.** $\int e^{-3x}\,dx$

Solução

a. Use a regra da constante com $k = 3$: $\int 3\,dx = 3x + C$

b. Use a regra da potência com $n = 17$: $\int x^{17}\,dx = x^{18}/18 + C$

c. Use a regra da potência com $n = -\frac{1}{2}$: como $n + 1 = \frac{1}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

d. Use a regra da exponencial com $k = -3$:

$$\int e^{-3x}\,dx = \frac{1}{-3}e^{-3x} + C$$

O Exemplo 5.1.2 mostra como algumas funções simples podem ser integradas, mas o que fazer no caso de combinações de funções, como o polinômio $x^5 + 2x^3 + 7$ ou uma expressão como $5e^{-x} + \sqrt{x}$? As regras algébricas a seguir permitem lidar facilmente com estas expressões.

Para demonstrar a regra da potência, basta mostrar que a derivada de $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ é igual a x^n:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}[(n+1)x^n] = x^n$$

No caso da regra do logaritmo, se $x > 0$, $|x| = x$ e

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Se $x < 0$, $-x > 0$, $\ln |x| = \ln(-x)$ e, portanto, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

Assim, para qualquer valor de $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

e, portanto,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Fica a cargo do leitor (Problema 64) demonstrar a regra da constante e a regra da exponencial.

3 EXPLORE!

Plote $y = F(x)$, onde

$F(x) = \ln |x| = \ln(\text{abs}(x))$

em negrito e $f(x) = 1/x$ em estilo normal usando uma janela decimal. Mostre que em qualquer ponto $x \neq 0$ a derivada de $F(x)$ é igual ao valor de $f(x)$, confirmando assim que $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$.

NOTA Observe que a regra do logaritmo completa a "lacuna" que existe na regra da potência, ou seja, permite calcular a antiderivada de x^n no caso em que $n = -1$. As duas regras podem ser expressas na seguinte forma combinada:

$$\int x^n\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{se } n \neq -1 \\ \ln |x| + C & \text{se } n = -1 \end{cases}$$ ■

EXEMPLO 5.1.2

Determine as seguintes integrais:

a. $\int 3\, dx$ **b.** $\int x^{17}\, dx$ **c.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ **d.** $\int e^{-3x}\, dx$

Solução

a. Use a regra da constante com $k = 3$: $\int 3\, dx = 3x + C$

b. Use a regra da potência com $n = 17$: $\int x^{17}\, dx = x^{18}/18 + C$

c. Use a regra da potência com $n = -\frac{1}{2}$: como $n + 1 = \frac{1}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

d. Use a regra da exponencial com $k = -3$:

$$\int e^{-3x}\, dx = \frac{1}{-3}e^{-3x} + C$$

O Exemplo 5.1.2 mostra como algumas funções simples podem ser integradas, mas o que fazer no caso de combinações de funções, como o polinômio $x^5 + 2x^3 + 7$ ou uma expressão como $5e^{-x} + \sqrt{x}$? As regras algébricas a seguir permitem lidar facilmente com estas expressões.

Regras Algébricas para Integração Indefinida

Regra da multiplicação por uma constante: $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ para k constante

Regra da soma: $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Regra da diferença: $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Para demonstrar a regra da multiplicação por uma constante, basta observar que, se $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$, temos

$$\frac{d}{dx}[kF(x)] = k\frac{dF}{dx} = kf(x)$$

e, portanto,

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

As regra da soma e da diferença podem ser demonstradas de forma análoga.

EXEMPLO 5.1.3

Calcule as seguintes integrais:

a. $\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5)\,dx$

b. $\int \left(\dfrac{x^3 + 2x - 7}{x}\right) dx$

c. $\int (3e^{-5t} + \sqrt{t})\,dt$

Solução

a. Usando a regra da soma, a regra da diferença, a regra da multiplicação por uma constante e a regra da potência, temos:

$$\begin{aligned}\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5)\,dx &= 2\int x^5\,dx + 8\int x^3\,dx - 3\int x^2\,dx + \int 5\,dx \\ &= 2\left(\frac{x^6}{6}\right) + 8\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5x + C \\ &= \frac{1}{3}x^6 + 2x^4 - x^3 + 5x + C\end{aligned}$$

b. Não existe uma "regra do quociente" para integração, mas podemos dividir o numerador pelo denominador e integrar o resultado usando o método do item (a):

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x}\right) dx &= \int \left(x^2 + 2 - \frac{7}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2x - 7\ln|x| + C\end{aligned}$$

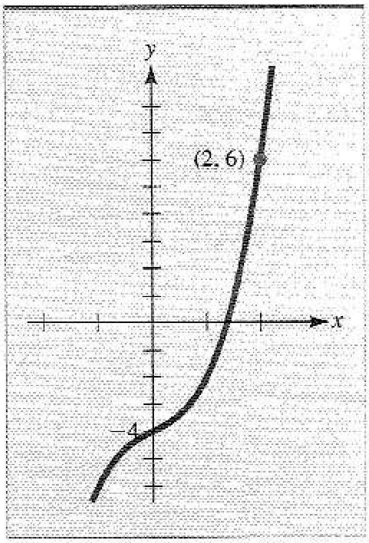
c.
$$\begin{aligned}\int (3e^{-5t} + \sqrt{t})\,dt &= \int (3e^{-5t} + t^{1/2})\,dt \\ &= 3\left(\frac{1}{-5}e^{-5t}\right) + \frac{1}{3/2}t^{3/2} + C = \frac{-3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C\end{aligned}$$

4 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.1.4. Entre com a função $f(x) = 3x^2 + 1$ em Y1. Plote usando o estilo negrito e uma janela [0, 2.35]0.5 por [−2, 12]1. Entre em Y2 com a família de antiderivadas

$$F(x) = x^3 + x + L1$$

onde L1 é a lista de números inteiros de −5 a 5. Qual destas antiderivadas passa pelo ponto (2, 6)? Repita este exercício para $f(x) = 3x^2 - 2$.



Curva $y = x^3 + x - 4$.

EXEMPLO 5.1.4

Determine a função $f(x)$ cuja tangente tem uma inclinação $3x^2 + 1$ para qualquer valor de x e cuja curva passa pelo ponto (2, 6).

Solução

A inclinação da tangente a uma curva no ponto $(x, f(x))$ é a derivada $f'(x)$. Assim,

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

e, portanto, $f(x)$ é a antiderivada

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x^2 + 1)\,dx = x^3 + x + C$$

Para determinar o valor de C, usamos o fato de que a curva de f passa pelo ponto (2, 6), ou seja, fazemos $x = 2$ e $f(x) = f(2) = 6$ na equação de $f(x)$ e explicitamos C para obter

$$6 = (2)^3 + 2 + C \qquad \text{ou} \qquad C = -4$$

Assim, a função pedida é $f(x) = x^3 + x - 4$. A curva desta função aparece na figura ao lado.

Problemas Práticos de Valor Inicial

Equação diferencial é qualquer equação que envolve uma ou mais derivadas. As equações diferenciais são muito usadas em modelagem e aparecem em uma grande variedade de aplicações práticas do cálculo. **Problema de valor inicial** é um problema que envolve a solução de uma equação diferencial sujeita a uma condição inicial específica. Assim, por exemplo, no Exemplo 5.1.4 estávamos interessados em determinar uma função $y = f(x)$ tal que

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \quad \text{com a condição de que } y = 6 \text{ para } x = 2$$

Resolvemos este problema de valor inicial encontrando a antiderivada

$$y = \int (3x^2 + 1)\,dx = x^3 + x + C$$

e usando a condição inicial para determinar o valor de C. A mesma abordagem é usada nos Exemplos 5.1.5 a 5.1.8 para resolver uma série de problemas práticos de valor inicial extraídos da economia, biologia e física. Outros problemas de valor especial aparecem em exemplos e exercícios deste capítulo.

EXEMPLO 5.1.5

Um fabricante constatou que o custo marginal é de $3q^2 - 60q + 400$ reais por unidade, onde q é o número de unidades produzidas. O custo total para produzir as primeiras duas unidades é de R$ 900,00. Qual é o custo total para produzir as primeiras cinco unidades?

Solução

O custo marginal é a derivada da função de custo total $C(q)$. Assim,

$$\frac{dC}{dq} = 3q^2 - 60q + 400$$

e, portanto, $C(q)$ é a antiderivada

$$C(q) = \int \frac{dC}{dq}\,dq = \int (3q^2 - 60q + 400)\,dq = q^3 - 30q^2 + 400q + K$$

onde K é uma constante. (A constante foi representada pela letra K para evitar confusão com a função de custo C.)

O valor de K é determinado pelo fato de que $C(2) = 900$. Temos:

$$900 = (2)^3 - 30(2)^2 + 400(2) + K \qquad \text{ou} \qquad K = 212$$

Assim,
$$C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 212$$

e o custo para produzir as primeiras cinco unidades é

$$C(5) = (5)^3 - 30(5)^2 + 400(5) + 212 = \text{R\$ } 1.587{,}00$$

EXEMPLO 5.1.6

A população $P(t)$ de uma colônia de bactérias t horas depois de iniciada uma observação está variando a uma taxa dada por

$$\frac{dP}{dt} = 200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$$

Se a população era de 200.000 bactérias quando a observação começou, qual será a população 12 horas mais tarde?

5 EXPLORE!

Plote a função $P(t)$ do Exemplo 5.1.6 usando uma janela [0, 23.5]5 por [175 000, 225 000]25 000. Assinale a população daqui a 9 horas. Em que instante a população chega a 300.000?

Solução

Para determinar a população $P(t)$, basta calcular a antiderivada de $\frac{dP}{dt}$:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int \frac{dP}{dt}\,dt = \int (200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t})\,dt \\ &= \frac{200e^{0,1t}}{0,1} + \frac{150e^{-0,03t}}{-0,03} + C \qquad \textit{regras da exponencial e da soma} \\ &= 2.000e^{0,1t} - 5.000e^{-0,03t} + C \end{aligned}$$

Como a população é de 200.000 bactérias para $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned} P(0) = 200.000 &= 2.000e^{0} - 5.000e^{0} + C \\ &= -3.000 + C \end{aligned}$$

e, portanto, $C = 230.000$ e

$$P(t) = 2.000e^{0,1t} - 5.000e^{-0,03t} + 203.000$$

Assim, após 12 horas, a população é

$$\begin{aligned} P(12) &= 2.000e^{0,1(12)} - 5.000e^{-0,03(12)} + 203.000 \\ &\approx 206.152 \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.1.7

Um varejista recebe um suprimento de 10.000 quilogramas de arroz que serão vendidos durante um período de 5 meses à taxa constante de 2.000 quilogramas por mês. Se o custo de armazenamento é de 1 centavo por quilograma por mês, qual será o custo total de armazenamento durante os próximos 5 meses?

Solução

Seja $S(t)$ o custo total de armazenamento (em reais) durante t meses. Como o arroz é vendido a uma taxa constante de 2.000 quilogramas por mês, o número de quilogramas de arroz armazenados depois de t meses é $10.000 - 2.000t$. Assim, como o custo de armazenamento é de 1 centavo por quilograma por mês, a taxa de variação do custo de armazenamento com o tempo é

$$\frac{dS}{dt} = \left(\begin{matrix}\text{custo mensal}\\ \text{por quilograma}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{número de}\\ \text{quilogramas}\end{matrix}\right) = 0,01(10.000 - 2.000t)$$

Assim, $S(t)$ é a antiderivada de

$$0,01(10.000 - 2.000t) = 100 - 20t$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int \frac{dS}{dt}\,dt = \int (100 - 20t)\,dt \\ &= 100t - 10t^2 + C \end{aligned}$$

onde C é uma constante. Para determinar o valor de C, fazemos uso do fato de que no instante em que o carregamento chega (isto é, em $t = 0$) o custo é nulo e, portanto,

$$0 = 100(0) - 10(0)^2 + C \qquad \text{ou} \qquad C = 0$$

Assim,

$$S(t) = 100t - 10t^2$$

e o custo total durante os cinco meses será

$$S(5) = 100(5) - 10(5)^2 = \text{R\$ } 250$$

Movimento em Linha Reta

Como vimos na Seção 2.2 do Capítulo 2, quando um corpo está se movendo em linha reta e sua posição é dada por $s(t)$ no tempo t, a velocidade é dada por $v = \frac{ds}{dt}$ e a aceleração por $a = \frac{dv}{dt}$. Se a aceleração do corpo é dada, a velocidade e a posição podem ser determinadas por integração. Segue um exemplo.

6 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.1.8. Entre com a função posição $s(t)$ na calculadora como Y1 = $-3x^2 + 18x$, usando uma janela [0, 9.4]1 por [0, 40]5. Assinale o instante em que o carro pára e a posição correspondente na curva. Repita o problema para um carro que esteja inicialmente a 90 km/h (25 m/s). Neste caso, o que estará acontecendo 3 segundos após o motorista pisar no freio?

EXEMPLO 5.1.8

Depois que os freios são acionados, um carro perde velocidade à taxa constante de 6 metros por segundo por segundo. Se o carro está a 65 quilômetros por hora (18 metros por segundo) quando o motorista pisa no freio, que distância o carro percorre até parar?

Solução

Seja $s(t)$ a posição do carro t segundos depois que o motorista pisa no freio. Se o carro perde velocidade à razão de 6 metros por segundo por segundo, isto significa que $a(t) = -6$ (o sinal negativo indica que a velocidade está diminuindo) e, portanto,

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = -6$$

Integrando, descobrimos que a velocidade no instante t é dada por

$$v(t) = \int -6\, dt = -6t + C_1$$

Para determinar o valor de C_1, observamos que $v = 18$ para $t = 0$ e, portanto,

$$18 = v(0) = -6(0) + C_1$$

e $C_1 = 18$. Assim, a velocidade no instante t é $v(t) = -6t + 18$.

Para determinar a posição $s(t)$, começamos com o fato de que

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = -6t + 18$$

Integrando, obtemos

$$s(t) = \int (-6t + 18)dt = -3t^2 + 18t + C_2$$

Como $s(0) = 0$ (o leitor sabe explicar por quê?), $C_2 = 0$ e

$$s(t) = -3t^2 + 18t$$

Finalmente, para determinar a distância percorrida pelo carro, observamos que, como a velocidade é nula no instante em que o carro pára, temos:

$$v(t) = -6t + 18 = 0$$

Resolvendo esta equação, descobrimos que o carro leva 3 segundos para parar e que a distância percorrida é de

$$s(3) = -3(3)^2 + 18(3) = 27 \text{ metros}$$

PROBLEMAS | 5.1

Nos Problemas 1 a 30, calcule a integral dada. Verifique se o cálculo está correto derivando o resultado.

1. $\displaystyle\int -3\,dx$

2. $\displaystyle\int dx$

3. $\displaystyle\int x^5\,dx$

4. $\displaystyle\int \sqrt{t}\,dt$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$

6. $\displaystyle\int 3e^x\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt$

8. $\displaystyle\int x^{-0,3}\,dx$

9. $\displaystyle\int u^{-2/5}\,du$

10. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$

11. $\displaystyle\int (3t^2 - \sqrt{5t} + 2)\,dt$

12. $\displaystyle\int (x^{1/3} - 3x^{-2/3} + 6)\,dx$

13. $\displaystyle\int (3\sqrt{y} - 2y^{-3})\,dy$

14. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{2}{y^2} + \frac{3}{\sqrt{y}}\right)dy$

15. $\displaystyle\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x}\right)dx$

16. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{2}\right)dx$

17. $\displaystyle\int u^{1.1}\left(\frac{1}{3u} - 1\right)du$

18. $\displaystyle\int \left(2e^u + \frac{6}{u} + \ln 2\right)du$

19. $\displaystyle\int \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right)dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}\,dx$

21. $\displaystyle\int (x^3 - 2x^2)\left(\frac{1}{x} - 5\right)dx$

22. $\displaystyle\int y^3\left(2y + \frac{1}{y}\right)dy$

23. $\displaystyle\int \sqrt{t}(t^2 - 1)\,dt$

24. $\displaystyle\int x(2x + 1)^2\,dx$

25. $\displaystyle\int (e^t + 1)^2\,dt$

26. $\displaystyle\int e^{-0,02t}(e^{-0.13t} + 4)\,dt$

$x(4x^2 + 4x + 1)$

$\int (4x^3 + 4x^2 + x)\,dx$

27. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3y} - \frac{5}{\sqrt{y}} + e^{-y/2}\right)dy$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{x}(x + 1)^2\,dx$

29. $\displaystyle\int t^{-1/2}(t^2 - t + 2)\,dt$

30. $\displaystyle\int \ln(e^{-x^2})\,dx$

Nos Problemas 31 a 34, resolva o problema de valor inicial para $y = f(x)$.

31. $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 2$ onde $y = 2$ para $x = -1$

32. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}$ onde $y = 3$ para $x = 0$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ onde $y = -1$ para $x = 1$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$ onde $y = 5$ para $x = 4$

Nos Problemas 35 a 40, é dada a inclinação $f'(x)$ em cada ponto (x, y) de uma curva $y = f(x)$, juntamente com um ponto particular (a, b) da curva. Use estas informações para determinar $f(x)$.

35. $f'(x) = 4x + 1$; $(1, 2)$

36. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$; $(0, 6)$

37. $f'(x) = x^3 - \dfrac{2}{x^2} + 2$; $(1, 3)$

38. $f'(x) = x^{-1/2} + x$; $(1, 2)$

39. $f'(x) = e^{-x} + x^2$; $(0, 4)$

40. $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 4$; $(1, 0)$

41. CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO Estima-se que daqui a t meses a população de uma certa cidade estará aumentando à razão de $4 + 5t^{2/3}$ habitantes por mês. Se a população atual é de 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

42. LUCRO MARGINAL Um fabricante estima que a receita marginal seja $100q^{-1/2}$ reais quando o nível de produção é q unidades. O custo marginal correspondente é $0{,}4q$ reais por unidade. O lucro do fabricante é de R$ 520,00 para um nível de produção de 16 unidades. Qual é o lucro do fabricante quando o nível de produção chega a 25 unidades?

43. VARIAÇÃO DE BIOMASSA Uma biomassa está variando a uma taxa $M'(t) = 0{,}5e^{0{,}2t}$ g/h. Qual é a variação da biomassa durante a segunda hora?

44. CRESCIMENTO DE UMA ÁRVORE Um botânico descobre que um certo tipo de árvore cresce de tal forma que sua altura $h(t)$ após t anos está variando a uma taxa

$$h'(t) = 0{,}06t^{2/3} + 0{,}3t^{1/2} \text{ metros/ano}$$

Se a árvore tinha 60 cm de altura quando foi plantada, que altura terá após 27 anos?

45. CUSTO MARGINAL Um fabricante estima que o custo marginal para produzir q unidades de um certo produto é $C'(q) = 3q^2 - 24q + 48$ reais por unidade. Se o custo para produzir 10 unidades é de R$ 5.000,00, qual é o custo para produzir 30 unidades?

46. RECEITA MARGINAL A receita marginal obtida com a produção de q unidades de uma certa mercadoria é $R'(q) = 4q - 1{,}2q^2$ reais por unidade. Se a receita obtida com a produção de 20 unidades é de R$ 30.000,00, qual é a receita obtida com a produção de 40 unidades?

47. APRENDIZADO Jorge está fazendo um teste de aprendizado no qual o tempo necessário para memorizar os elementos de uma lista é registrado. Seja $M(t)$ o número de elementos que ele é capaz de memorizar em t minutos. A sua taxa de aprendizado é

$$M'(t) = 0{,}4t - 0{,}005t^2$$

a. Quantos elementos Jorge é capaz de memorizar nos primeiros 10 minutos?

b. Quantos elementos a mais ele é capaz de memorizar durante os 10 minutos seguintes (de $t = 10$ a $t = 20$)?

48. VENDAS O movimento mensal de vendas de uma importadora é atualmente de R$ 10.000,00, mas deverá estar diminuindo a uma taxa de

$$S'(t) = -10t^{2/5} \quad \text{reais por mês}$$

daqui a t meses. O negócio deixará de ser lucrativo se o movimento mensal cair abaixo de R$ 8.000,00.

a. Escreva uma expressão para o movimento de vendas esperado para daqui a t meses.

b. Qual deverá ser o movimento de vendas daqui a 2 anos?

c. Durante quantos meses o negócio continuará a ser lucrativo?

49. PUBLICIDADE Depois de lançar uma campanha publicitária, um provedor da Internet estima que o número de novos assinantes aumentará a uma taxa dada por

$$N'(t) = 154t^{2/3} + 37 \quad \text{assinantes por mês}$$

onde t é o número de meses após o início da campanha. Quantos novos assinantes são esperados para 8 meses após o início da campanha?

50. ESPÉCIES AMEAÇADAS DE EXTINÇÃO Um conservacionista observa que a população $P(t)$ de uma certa espécie ameaçada de extinção está aumentando a uma taxa dada por $P'(t) = 0{,}51e^{-0{,}03t}$, onde t é o número de anos após a data em que foram iniciados os registros.

a. Se a população é $P_0 = 500$ em $t = 0$ (momento em que foram iniciados os registros), qual será a população 10 anos depois?

b. Leia a respeito das espécies ameaçadas de extinção e escreva um ensaio de pelo menos 10 linhas a respeito do uso de modelos matemáticos para estudar essas espécies.*

51. DESCONGELAMENTO Um assado é retirado do *freezer* e deixado em cima da pia da cozinha para descongelar. A temperatura do assado era de -4°C quando foi retirado do freezer e t horas depois estava aumentando à taxa de

$$T'(t) = 7e^{-0{,}35t} \quad °\text{C/h}$$

a. Escreva uma expressão para a temperatura do assado após t horas.

b. Qual é a temperatura após 2 horas?

c. Suponha que o assado fique totalmente descongelado quando a temperatura atinge 10°C. Quanto tempo o assado leva para descongelar?

52. RECEITA MARGINAL A receita marginal associada à fabricação de x unidades por dia de um certo produto é $R'(x) = 240 - 4x$ reais por unidade por dia. Qual é a função de receita $R(x)$? Suponha que $R(0) = 0$. Qual é o preço cobrado por unidade quando estão sendo produzidas 5 unidades por dia?

53. LUCRO MARGINAL O lucro marginal com a venda de uma certa mercadoria é $100 - 2q$ reais por unidade quando q unidades são produzidas. Quando 10 unidades são produzidas, o lucro é de R$ 700,00.

a. Determine a função de lucro $P(q)$.

b. Qual é o nível de produção q para o qual o lucro é máximo? Qual é este lucro máximo?

54. PRODUÇÃO Em uma certa fábrica, quando K mil reais são investidos, a produção varia a uma taxa dada por

$$Q'(K) = 200K^{-2/3}$$

unidades por mil reais investidos. Quando R$ 8.000,00 são investidos, o nível de produção é de 5.500 unidades.

a. Escreva uma expressão para o nível de produção Q esperado quando K mil reais são investidos.

b. Quantas unidades são produzidas quando R$ 27.000,00 são investidos?

c. Que investimento K é necessário para produzir 7.000 unidades?

55. TENDÊNCIA MARGINAL PARA O CONSUMO A função de consumo para um certo país é $c(x)$, onde x é a poupança nacional. Nesse caso, a **tendência marginal para o consumo** é $c'(x)$. Suponha que x e c sejam medidos em bilhões de dólares e que

$$c'(x) = 0{,}9 + 0{,}3\sqrt{x}$$

*Um bom lugar para começar é a revista *Ecology*.

Se o consumo é de 10 bilhões de dólares para $x = 0$, determine $c(x)$.

56. **ESPIONAGEM** Nosso espião, disposto a vingar a morte de Xande Dentro (Problema 63 da Seção 4.2), está ao volante de um carro esporte, aproximando-se do esconderijo do assassino do amigo. Para não chamar a atenção, mantém a velocidade em 96 km/h (27 m/s), dentro do limite de 100 km/s. De repente, vê um camelo na estrada, 60 metros à frente. Leva 0,7 segundo para reagir, pisando no freio, o que faz o carro desacelerar à taxa constante de 8 m/s². Será que consegue parar antes de atingir o camelo?

57. Seja $f(x)$ o número total de elementos que um paciente é capaz de memorizar x minutos após ser apresentado a uma longa lista de elementos. Os psicólogos chamam a função $y = f(x)$ de **curva de aprendizado** e a função $y' = f'(x)$ de **taxa de aprendizado**. O instante de **máxima eficiência** é aquele para o qual a taxa de aprendizado é máxima. Suponha que a curva de aprendizado seja dada pela expressão

$$f'(x) = 0{,}1(10 + 12x - 0{,}6x^2) \text{ para } 0 \le x \le 25$$

a. Qual é a taxa de aprendizado no instante de máxima eficiência?
b. Qual é a função $f(x)$?
c. Qual é o maior número de elementos que o paciente consegue memorizar?

58. **ONCOLOGIA** Um novo tratamento é aplicado a um tumor canceroso com um volume de 30 cm³; t dias depois, observa-se que o tumor está variando a uma taxa dada por

$$V'(t) = 0{,}15 - 0{,}09e^{0{,}006t} \text{ cm}^3/\text{dia}$$

a. Escreva uma expressão para o volume do tumor após t dias.
b. Qual é o volume após 60 dias? E após 120 dias?
c. Para que o tratamento seja considerado um sucesso, é preciso que o tumor não leve mais de 90 dias para começar a diminuir. Com base neste critério, o tratamento é bem-sucedido?

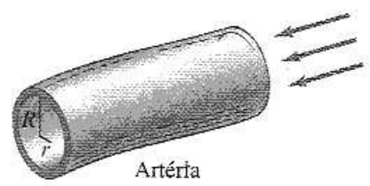
59. **ANÁLISE MARGINAL** Um fabricante estima a receita marginal em $200q^{-1/2}$ reais para um nível de produção de q unidades. O custo marginal correspondente é $0{,}4q$ real por unidade. Se o lucro do fabricante é de R$ 2.000,00 para um nível de produção de 25 unidades, qual é o lucro para um nível de produção de 36 unidades?

60. **SISTEMA PENITENCIÁRIO** Estatísticas levantadas pelas autoridades indicam que daqui a x anos o número de presidiários em um certo município estará aumentando à razão de $280e^{0{,}2x}$ por ano. No momento, os presídios do município abrigam 2.000 detentos. Quantos presidiários o município deve esperar para daqui a 10 anos?

61. **HEMODINÂMICA** De acordo com uma das leis de Poiseuille para o fluxo sangüíneo em uma artéria, se $v(r)$ é a velocidade do sangue a r cm do eixo central da artéria, a taxa de variação da velocidade com r é inversamente proporcional a r, ou seja,

$$v'(r) = -ar$$

onde a é uma constante positiva.* Escreva uma expressão para $v(r)$ supondo que $v(R) = 0$, onde R é o raio da artéria.



PROBLEMA 61

62. Se $H'(x) = 0$ para qualquer valor de x, que propriedade deve ter a função $H(x)$? Explique de que forma esta observação pode ser usada para demonstrar que, se $G'(x) = F'(x)$ para qualquer valor de x, $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante.

63. **DISTÂNCIA E VELOCIDADE** Um corpo está se movendo de tal forma que sua velocidade após t minutos é $v(t) = 3 + 2t + 6t^2$ metros por minuto. Que a distância o corpo percorre no segundo minuto?

64. **a.** Demonstre a regra da constante: $\int k\,dx = kx + C$.
b. Demonstre a regra da exponencial: $\int e^{kx}\,dx = e^{kx}/k + C$.

65. Qual é o valor de $\int b^x\,dx$ $(b > 0, b \neq 1)$? [*Sugestão:* lembre-se de que $b^x = e^{x \ln b}$.]

66. Estima-se que daqui a x meses a população de uma certa cidade estará aumentando à razão de $P'(x) = 2 + 1{,}5\sqrt{x}$ habitantes por mês. A população atual é de 5.000 habitantes.
a. Determine a função $P(x)$ que satisfaz estas condições. Use uma calculadora gráfica para plotar esta função.
b. Use **TRACE** e **ZOOM** para determinar qual será a população daqui a 9 meses. Daqui a quanto tempo a cidade terá uma população de 7.590 habitantes?
c. Suponha que a população atual seja de 2.000 habitantes (e não 5.000). Plote a nova função $P(x)$. Plote também as funções obtidas supondo que a população atual seja de 4.000 e de 6.000 habitantes. Qual é a diferença entre as curvas?

67. Um carro viajando a 20 m/s desacelera à taxa constante de 7 m/s² quando os freios são aplicados.
a. Determine a velocidade $v(t)$ do carro t segundos após os freios serem aplicados e a distância $s(t)$ percorrida a partir do ponto em que os freios foram aplicados.
b. Use uma calculadora gráfica para plotar $v(t)$ e $s(t)$ no mesmo gráfico (use uma janela [0, 5]1 por [0, 200]10.)
c. Use **TRACE** e **ZOOM** para determinar o instante em que o carro pára e a distância percorrida neste instante. A que velocidade estava o carro depois de percorrer 14 metros?

*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, pp. 101-103.

SEÇÃO 5.2 Integração por Substituição

A maioria das funções que aparecem em aplicações práticas pode ser derivada usando regras e fórmulas como as que foram discutidas no Capítulo 2. A integração, por outro lado, é mais uma arte que uma ciência e muitas integrais aparentemente simples podem exigir o uso de métodos especiais ou artifícios apropriados.

Assim, por exemplo, podemos facilmente determinar que

$$\int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + C$$

aplicando a regra da potência, mas suponha que estejamos interessados em calcular

$$\int (3x+5)^7\,dx$$

Poderíamos expandir o integrando, $(3x+5)^7$, e integrar termo a termo, mas o trabalho seria enorme. Em vez disso, fazemos a mudança de variável

$$u = 3x + 5 \quad \text{e portanto} \quad du = 3\,dx \quad \text{ou} \quad dx = \frac{1}{3}\,du$$

Lembrete

A diferencial de $y = f(x)$ é $dy = f'(x)dx$.

Substituindo estes resultados na integral dada, obtemos:

$$\begin{aligned}\int (3x+5)^7\,dx &= \int u^7\left(\frac{1}{3}\,du\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}u^8\right) + C = \frac{1}{24}u^8 + C && \textit{regra da potência}\\ &= \frac{1}{24}(3x+5)^8 + C && \textit{pois } u = 3x+5\end{aligned}$$

Podemos verificar que o cálculo está correto derivando esta expressão com o auxílio da regra da cadeia (Seção 2.4):

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{24}(3x+5)^8\right] = \frac{1}{24}[8(3x+5)^7(3)] = (3x+5)^7$$

o que mostra que $\dfrac{(3x+5)^8}{24}$ é realmente a antiderivada de $(3x+5)^7$.

O método de mudança de variável que acabamos de mostrar é chamado de **integração por substituição** e pode ser encarado como o inverso da regra da cadeia para derivação. Para demonstrar este ponto, considere uma integral que possa ser escrita na forma

$$\int f(x)\,dx = \int g(u(x))\,u'(x)\,dx$$

Suponha que G seja uma antiderivada de g, caso em que $G' = g$. Nesse caso, de acordo com a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[G(u(x))] &= G'(u(x))\,u'(x)\\ &= g(u(x))\,u'(x) && \textit{pois } G' = g\end{aligned}$$

Assim, integrando ambos os membros desta equação em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int g(u(x))\,u'(x)\,dx\\ &= \int\left(\frac{d}{dx}[G(u(x))]\right)dx\\ &= G(u(x)) + C && \textit{pois } \textstyle\int G' = G\end{aligned}$$

Em outras palavras, se conhecemos a antiderivada de $g(u)$, conhecemos também a antiderivada de $f(x)$.

Um artifício para memorizar o método de substituição é pensar em $u = u(x)$ como uma variável cuja diferencial du é igual a $u'(x)dx$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= \int g(u(x))\,u'(x)\,dx \\ &= \int g(u)\,du && \textit{substituindo } u'(x)\,dx \textit{ por } du \\ &= G(u) + C && \textit{onde } G \textit{ é uma antiderivada de } g \\ &= G(u(x)) + C && \textit{substituindo } u \textit{ por } u(x) \end{aligned}$$

Segue um método passo a passo para integrar por substituição.

Uso da Substituição para Integrar $\int f(x)dx$

1° passo: Escolha uma substituição $u = u(x)$ que "simplifique" o integrando $f(x)$.

2° passo: Expresse toda a integral em termos de u e $du = u'(x)dx$. Isto significa que *todos* os termos que envolvem x e dx devem ser transformados em termos que envolvem u e du.

3° passo: Depois de executado o 2º passo, a integral deve estar na forma

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du$$

Se possível, calcule o valor desta integral transformada determinando uma antiderivada $G(u)$ de $g(u)$.

4º passo: Substitua u por $u(x)$ em $G(u)$ para obter uma antiderivada $G(u(x))$ para $f(x)$, de modo que

$$\int f(x)\,dx = G(u(x)) + C$$

Como diz o velho ditado: "O primeiro passo para fazer ensopado de coelho é arranjar um coelho." O primeiro passo para integrar por substituição é descobrir uma mudança de variável $u = u(x)$ que simplifique o integrando da integral dada, $\int f(x)$, sem complicá-lo excessivamente quando dx é substituído por $du = u'(x)dx$. Aqui estão algumas regras de bolso para escolher $u(x)$:

1. Se possível, escolha u de tal forma que $u'(x)$ seja parte do integrando $f(x)$.
2. Procure escolher u como a parte do integrando que torna a função $f(x)$ difícil de integrar diretamente, como um radicando, um denominador ou um expoente.
3. Não exagere nas substituições. Em nosso exemplo introdutório, $\int(3x + 5)^7\,dx$, um erro compreensível consiste em fazer $u = (3x + 5)^7$. Isto certamente simplifica o integrando, mas, nesse caso, $du = 7(3x + 5)^6(3)dx$ e ficaríamos com uma integral transformada que é mais difícil de resolver que a original.
4. Não desista. Se a substituição que você experimentou não resultar em uma integral fácil de resolver, use uma substituição diferente.

Os Exemplos 5.2.1 a 5.2.6 ilustram o uso de substituições em vários tipos de integrais.

EXEMPLO 5.2.1

Determine $\int \sqrt{2x + 7}dx$.

Solução

Fazendo $u = 2x + 7$, temos:

$$du = 2\,dx \quad \text{e portanto} \quad dx = \frac{1}{2}du$$

Nesse caso, a integral se torna

$$\int \sqrt{2x+7}\,dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{1}{2}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \qquad \textit{pois } \sqrt{u} = u^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C \qquad \textit{regra da potência}$$

$$= \frac{1}{3}(2x+7)^{3/2} + C \qquad \textit{substituindo } u \textit{ por } 2x+7$$

EXEMPLO 5.2.2

Determine $\int 8x(4x^2-3)^5\,dx$.

Solução

Em primeiro lugar, observe que o integrando $8x(4x^2-3)^5$ é um produto no qual um dos fatores, $8x$, é a derivada de uma expressão, $4x^2-3$, que aparece no outro fator. Isto sugere que é conveniente usar a substituição

$$u = 4x^2 - 3 \qquad \text{e} \qquad du = 4(2x\,dx) = 8x\,dx$$

para obter

$$\int 8x(4x^2-3)^5\,dx = \int (4x^2-3)^5(8x\,dx)$$

$$= \int u^5\,du$$

$$= \frac{1}{6}u^6 + C \qquad \textit{regra da potência}$$

$$= \frac{1}{6}(4x^2-3)^6 + C \qquad \textit{substituindo } u \textit{ por } 4x^2-3$$

EXEMPLO 5.2.3

Determine $\int x^3 e^{x^4+2}\,dx$.

Solução

Se o integrando contém uma função exponencial, muitas vezes é aconselhável substituir todo o expoente. Neste caso, fazemos

$$u = x^4 + 2 \qquad \text{e portanto} \qquad du = 4x^3\,dx$$

donde

$$\int x^3 e^{x^4+2}\,dx = \int e^{x^4+2}(x^3\,dx)$$

$$= \int e^u\left(\frac{1}{4}\,du\right) \qquad \textit{pois } du = 4x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{4}e^u + C \qquad \textit{regra da exponencial}$$

$$= \frac{1}{4}e^{x^4+2} + C \qquad \textit{substituindo } u \textit{ por } x^4+2$$

EXEMPLO 5.2.4

Determine $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\,dx$.

Solução

De acordo com as regras de bolso, substituímos o denominador do integrando, fazendo $u = x - 1$ e $du = dx$. Como $u = x - 1$, também temos $x = u + 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x-1}\,dx &= \int \frac{u+1}{u}\,du \\ &= \int \left[1 + \frac{1}{u}\right] du && \textit{dividindo por } u \\ &= u + \ln|u| + C && \textit{regras da constante e do logaritmo} \\ &= x - 1 + \ln|x-1| + C && \textit{substituindo } u \textit{ por } x-1\end{aligned}$$

EXEMPLO 5.2.5

Determine $\displaystyle\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}\,dx$.

Solução

Desta vez, nossas regras de bolso sugerem a substituição do radicando do denominador:

$$u = 2x^2 + 8x + 3 \qquad du = (4x+8)\,dx$$

À primeira vista, o leitor pode ter a impressão de que esta substituição não leva a nada, já que $du = (4x + 8)dx$ parece muito diferente do termo $(3x + 6)dx$ que aparece na integral. Entretanto, note que

$$\begin{aligned}(3x+6)\,dx = 3(x+2)\,dx &= \frac{3}{4}(4)[(x+2)\,dx] \\ &= \frac{3}{4}[(4x+8)\,dx] = \frac{3}{4}\,du\end{aligned}$$

Substituindo, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+3}}[(3x+6)\,dx] \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{3}{4}\,du\right) = \frac{3}{4}\int u^{-1/2}\,du \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C = \frac{3}{2}\sqrt{u} + C \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+8x+3} + C && \textit{substituindo } u \textit{ por } 2x^2+8x+3\end{aligned}$$

EXEMPLO 5.2.6

Determine $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$.

Solução

Como

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

o integrando

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = (\ln x)^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

é um produto no qual um dos fatores, $\frac{1}{x}$, é a derivada de uma expressão, $\ln x$, que aparece no outro fator. Isto sugere a substituição $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$, o que nos dá

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int (\ln x)^2\left(\frac{1}{x}\,dx\right)$$
$$= \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$$
$$= \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C \qquad \textit{substituindo u por ln x}$$

Às vezes, uma substituição pode "parecer" necessária mas existe uma forma mais simples de resolver o problema. Considere o Exemplo 5.2.7.

EXEMPLO 5.2.7

Determine $\int e^{5x+2}\,dx$.

Solução

É possível resolver a integral fazendo a substituição

$$u = 5x + 2 \qquad du = 5\,dx$$

mas isto não é necessário, já que $e^{5x+2} = e^{5x}e^2$ e e^2 é uma constante. Assim,

$$\int e^{5x+2}\,dx = \int e^{5x}e^2\,dx$$
$$= e^2\int e^{5x}\,dx \qquad \textit{colocando a constante } e^2 \textit{ fora da integral}$$
$$= e^2\left[\frac{e^{5x}}{5}\right] + C \qquad \textit{regra da exponencial}$$
$$= \frac{1}{5}e^{5x+2} + C \qquad \textit{pois } e^2e^{5x} = e^{5x+2}$$

No Exemplo 5.2.7, usamos a álgebra para colocar o integrando em uma forma na qual não é necessário fazer uma substituição. Nos Exemplos 5.2.8 e 5.2.9, usamos a álgebra como um passo preliminar antes de fazer a substituição.

EXEMPLO 5.2.8

Determine $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}\,dx$.

Solução

Não existe uma forma simples de calcular a integral da forma como foi proposta (lembre-se de que não existe uma "regra do quociente" para integrais). Entretanto, podemos dividir o numerador pelo denominador:

$$\begin{array}{r|l} & \quad x + 2 \\ \hline x + 1 & \quad x^2 + 3x + 5 \\ & \underline{-x(x + 1)} \\ & \qquad 2x + 5 \\ & \quad \underline{-2(x + 1)} \\ & \qquad\qquad 3 \end{array}$$

o que nos dá

$$\frac{x^2+3x+5}{x+1} = x + 2 + \frac{3}{x+1}$$

Podemos integrar $x + 2$ diretamente usando a regra da potência. Para integrar o termo $\dfrac{3}{x+1}$, usamos a substituição $u = x + 1$, $du = dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}\,dx &= \int \left[x + 2 + \frac{3}{x+1}\right] dx \\ &= \int x\,dx + \int 2\,dx + \int \frac{3}{u}\,du \qquad \begin{matrix} u = x+1 \\ du = dx \end{matrix} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln|x+1| + C \qquad \textit{substituindo } u \textit{ por } x+1\end{aligned}$$

EXEMPLO 5.2.9

Determine $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx.$

Solução

A primeira idéia é fazer $w = 1 + e^{-x}$. Entretanto, isto não daria certo, já que $dw = -e^{-x}\,dx$ e não existe um termo e^{-x} no numerador do integrando. Por outro lado, é possível usar a seguinte transformação:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \frac{1}{\dfrac{e^x+1}{e^x}} \\ &= \frac{e^x}{e^x+1}\end{aligned}$$

Fazendo agora $u = e^x + 1$, $du = e^x\,dx$, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx &= \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{e^x+1}(e^x\,dx) \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|e^x+1| + C \qquad \textit{substituindo } u \textit{ por } e^x+1\end{aligned}$$

A Substituição nem Sempre Funciona

O método de substituição não é infalível. No Exemplo 5.2.10, apresentamos uma integral que é muito parecida com a do Exemplo 5.2.3 mas não pode ser calculada pelo método de substituição.

Lembrete

Observe que, se $u = x^4 + 2$, $x^4 = u - 2$, então

$$x = (u-2)^{1/4} = \sqrt[4]{u-2}$$

EXEMPLO 5.2.10

Determine $\displaystyle\int x^4 e^{x^4+2}\,dx.$

Solução

A substituição natural a fazer é $u = x^4 + 2$, como no Exemplo 5.2.3. Nesse caso, $du = 4x^3dx$ e, portanto, $x^3dx = du/4$. Entretanto, o fator que aparece no integrando é x^4 e não x^3. Em função de u, este x "a mais" deve ser escrito como $\sqrt[4]{u-2}$ e, portanto, ao fazer a substituição, obtemos:

$$\int x^4 e^{x^4+2}\,dx = \int x e^{x^4+2}(x^3\,dx) = \int \sqrt[4]{u-2}\,e^u\,du$$

que é uma integral tão difícil de resolver quanto a integral inicial! Experimente fazer outras substituições aparentemente promissoras ($u = x^2$, digamos, ou $u = x^3$) até se convencer de que nenhuma delas funciona.

Um Problema Aplicado que Pode Ser Resolvido por Substituição

EXEMPLO 5.2.11

A taxa de variação do preço unitário p (em reais) de um certo produto é dada por

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-135x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

onde x é a demanda do produto (número de unidades vendidas) em centenas de unidades. Suponha que a demanda seja de 400 unidades ($x = 4$) para um preço de R$ 30,00 a unidade.

a. Determine a função de demanda $p(x)$.
b. Para que preço a demanda é de 300 unidades? Para que preço a demanda é zero?
c. Qual é a demanda para um preço unitário de R$ 20,00?

Solução

a. Para determinar a função de demanda $p(x)$, é preciso integrar $p'(x) = dp/dx$ em relação a x. Isto pode ser feito, por exemplo, usando a substituição

$$u = 9 + x^2, \qquad du = 2x\,dx, \qquad x\,dx = \frac{1}{2}\,du$$

para obter

$$\begin{aligned} p(x) &= \int \frac{-135x}{\sqrt{9 + x^2}}\,dx = \int \frac{-135}{u^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\right)du \\ &= \frac{-135}{2}\int u^{-1/2}\,du \\ &= \frac{-135}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C \\ &= -135\sqrt{9 + x^2} + C \qquad \textit{substituindo u por } 9 + x^2 \end{aligned}$$

Como $p = 30$ para $x = 4$, temos:

$$\begin{aligned} 30 &= -135\sqrt{9 + 4^2} + C \\ C &= 30 + 135\sqrt{25} = 705 \end{aligned}$$

e portanto

$$p(x) = -135\sqrt{9 + x^2} + 705$$

b. Se a demanda é de 300 unidades, $x = 3$ e o preço correspondente é

$$p(3) = -135\sqrt{9 + 3^2} + 705 = \text{R\$}132{,}24 \text{ por unidade}$$

Se a demanda é zero, $x = 0$ e o preço correspondente é

$$p(0) = -135\sqrt{9 + 0} + 705 = \text{R\$}300 \text{ por unidade}$$

c. Para determinar qual é a demanda para um preço unitário de R$ 20,00, resolvemos a equação

$$\begin{aligned} -135\sqrt{9 + x^2} + 705 &= 20 \\ 135\sqrt{9 + x^2} &= 685 \\ \sqrt{9 + x^2} &= \frac{685}{135} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 + x^2 &\approx 25{,}75 \qquad \textit{elevando ambos os membros ao quadrado} \\ x^2 &\approx 16{,}75 \\ x &\approx 4{,}09 \end{aligned}$$

Isto significa que a demanda será de aproximadamente 409 unidades quando o preço unitário for de R$ 20,00.

PROBLEMAS | 5.2

Nos Problemas 1 e 2, complete a tabela especificando a substituição mais indicada para resolver cada uma das integrais dadas.

1.

Integral	Substituição u
a. $\int (3x+4)^{5/2}\,dx$	
b. $\int \frac{4}{3-x}\,dx$	
c. $\int te^{2-t^2}\,dt$	
d. $\int t(2+t^2)^3\,dt$	

2.

Integral	Substituição u
a. $\int \frac{3}{(2x-5)^4}\,dx$	
b. $\int x^2e^{-x^3}\,dx$	
c. $\int \frac{e^t}{e^t+1}\,dt$	
d. $\int \frac{t+3}{\sqrt[3]{t^2+6t+5}}\,dt$	

Nos Problemas 3 a 36, determine a integral indicada e verifique se os cálculos estão corretos derivando o resultado.

3. $\int (2x+6)^5\,dx$

4. $\int e^{5x}\,dx$

5. $\int \sqrt{4x-1}\,dx$

6. $\int \frac{1}{3x+5}\,dx$

7. $\int e^{1-x}\,dx$

8. $\int [(x-1)^5+3(x-1)^2+5]\,dx$

9. $\int xe^{x^2}\,dx$

10. $\int 2xe^{x^2-1}\,dx$

11. $\int t(t^2+1)^5\,dt$

12. $\int 3t\sqrt{t^2+8}\,dt$

13. $\int x^2(x^3+1)^{3/4}\,dx$

14. $\int x^5e^{1-x^6}\,dx$

15. $\int \frac{2y^4}{y^5+1}\,dy$

16. $\int \frac{y^2}{(y^3+5)^2}\,dy$

17. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^{12}\,dx$

18. $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}\,dx$

19. $\int \frac{3x^4+12x^3+6}{x^5+5x^4+10x+12}\,dx$

20. $\int \frac{10x^3-5x}{\sqrt{x^4-x^2+6}}\,dx$

21. $\int \frac{3u-3}{(u^2-2u+6)^2}\,du$

22. $\int \frac{6u-3}{4u^2-4u+1}\,du$

23. $\int \frac{\ln 5x}{x}\,dx$

24. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

25. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

26. $\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx$

27. $\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$

28. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

30. $\int e^{-x}(1+e^{2x})\,dx$

31. $\int \frac{x}{2x+1}\,dx$

32. $\int \frac{t-1}{t+1}\,dt$

33. $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$

34. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,dx$

[*Sugestão*: Faça $u = \sqrt{x} + 1$.]

36. $\int \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2/3} dx$

$\left[\textit{Sugestão}: \text{Faça } u = \frac{1}{x} - 1.\right]$

Nos Problemas 37 a 40, resolva o problema de valor inicial para obter a função $y = f(x)$.

37. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}$ onde $y = 1$ para $x = 0$

38. $\frac{dy}{dx} = e^{2-x}$ onde $y = 0$ para $x = 2$

39. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2}{x^2+4x+5}$ onde $y = 3$ para $x = -1$

40. $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln\sqrt{x}}{x}$ onde $y = 2$ para $x = 1$

Nos Problemas 41 a 44, a inclinação $f'(x)$ em cada ponto (x, y) de uma curva $y = f(x)$ é dada, juntamente com um ponto (a, b) sobre a curva. Use estas informações para determinar $f(x)$.

41. $f'(x) = (1 - 2x)^{3/2}$; $(0, 0)$

42. $f'(x) = x\sqrt{x^2+5}$; $(2, 10)$

43. $f'(x) = xe^{4-x^2}$; $(-2, 1)$

44. $f'(x) = \frac{2x}{1+3x^2}$; $(0, 5)$

Nos Problemas 45 a 48, a velocidade $v(t) = x'(t)$ no instante t de um corpo que está se movendo ao longo do eixo x é dada, juntamente com a posição inicial $x(0)$ do corpo. Em cada caso, determine:

(a) A posição do corpo $x(t)$ no instante t.
(b) A posição do corpo no instante $t = 4$.
(c) O instante em que o corpo passa pelo ponto $x = 3$.

45. $x'(t) = -2(3t + 1)^{1/2}$; $x(0) = 4$

46. $x'(t) = \frac{-1}{1 + 0{,}5t}$; $x(0) = 5$

47. $x'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; $x(0) = 0$

48. $x'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$; $x(0) = 4$

49. **CUSTO MARGINAL** Em uma certa fábrica, o custo marginal é $3(q - 4)^2$ reais por unidade quando o nível de produção é q unidades.
a. Expresse o custo total de produção em termos do custo fixo (custo para produzir 0 unidade) e do número de unidades produzidas.
b. Qual é o custo para produzir 14 unidades se o custo fixo for de R$ 436,00?

50. **DEPRECIAÇÃO** O valor de revenda de uma certa máquina industrial diminui a uma taxa que varia com o tempo. Quando a máquina tem t anos de idade, a taxa com que o valor está mudando é $-960e^{-t/5}$ reais por ano.
a. Expresse o valor da máquina em termos da idade e do valor inicial.
b. Se a máquina valia inicialmente R$ 5.200,00, quanto valerá 10 anos depois?

51. **CRESCIMENTO DE UMA ÁRVORE** Uma árvore foi transplantada e x anos depois está crescendo à razão de $1 + \frac{1}{(x+1)^2}$ metros por ano. Após 2 anos, atingiu uma altura de 5 metros. Qual era a altura da árvore quando foi transplantada?

52. **PREÇOS NO VAREJO** Em uma certa região do país, estima-se que daqui a x semanas o preço do frango estará aumentando à taxa de $p'(t) = 3\sqrt{t+1}$ centavos por semana. Quanto custará o quilo de galinha daqui a 8 semanas? Se o frango custa atualmente R$ 3,00 o quilo, quanto custará daqui a 8 semanas?

53. **RECEITA** A receita marginal com a venda de x unidades de uma certa mercadoria é $R'(x) = 50 + 3{,}5xe^{-0{,}01x^2}$ reais por unidade, onde $R(x)$ é a receita unitária em reais.
a. Determine $R(x)$, supondo que $R(0) = 0$.
b. Qual é a receita esperada com a venda de 1.000 unidades?

54. **POLUIÇÃO DA ÁGUA** Um vazamento de petróleo no oceano produz uma mancha de forma aproximadamente circular de raio $R(t)$ metros, onde t é o tempo em minutos após o início do vazamento. O raio está aumentando a uma taxa de

$$R'(t) = \frac{21}{0{,}07t + 5} \quad \text{m/min}$$

a. Escreva uma expressão para o raio $R(t)$, supondo que $R = 0$ para $t = 0$.
b. Qual é a área $A = \pi R^2$ da mancha após 1 hora?

55. **CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO** A concentração $C(t)$ em miligramas por centímetro cúbico (mg/cm³) de um medicamento no sangue de um paciente é de 0,5 mg/cm³ imediatamente após uma injeção e t minutos depois está diminuindo a uma taxa

$$C'(t) = \frac{-0{,}01e^{0{,}01t}}{(e^{0{,}01t} + 1)^2} \quad \text{mg/cm}^3 \cdot \text{min}$$

Uma nova injeção é administrada quando a concentração cai abaixo de 0,05 mg/cm³.
a. Escreva uma expressão para $C(t)$.

b. Qual é a concentração após 1 hora? E após 3 horas?

c. Use uma calculadora gráfica com **TRACE** e **ZOOM** para determinar o tempo transcorrido até que se torne necessário administrar uma nova injeção.

56. VALOR DA TERRA Estima-se que daqui a x anos o valor $V(x)$ de um hectare de terra na zona rural estará aumentando à razão de

$$V'(x) = \frac{0{,}4x^3}{\sqrt{0{,}2x^4 + 8.000}}$$

reais por ano. O valor atual da terra é de R$ 500,00 o hectare.

a. Determine $V(x)$.

b. Quanto valerá a terra após 10 anos?

c. Use uma calculadora gráfica com **TRACE** e **ZOOM** para determinar o tempo necessário para que a terra chegue a valer R$ 1.000,00 o hectare.

57. POLUIÇÃO DO AR Em um certo subúrbio de Los Angeles, a concentração de ozônio no ar, $L(t)$, é de 0,25 parte por milhão (ppm) às 7 h. De acordo com o serviço de meteorologia, a concentração de ozônio t horas mais tarde estará variando à razão de

$$L'(t) = \frac{0{,}24 - 0{,}03t}{\sqrt{36 + 16t - t^2}}$$

partes por milhão por hora (ppm/h).

a. Expresse a concentração de ozônio $L(t)$ em função de t. Em que instante a concentração de ozônio é máxima? Qual é a concentração máxima de ozônio?

b. Plote $L(t)$ em uma calculadora gráfica. Use **TRACE** e **ZOOM** para responder às perguntas do item (a). Determine em que instante a concentração de ozônio será a mesma que às 11 h.

58. OFERTA O dono de uma cadeia de lanchonetes determina que se x mil unidades de um novo sanduíche forem vendidas por dia, o preço marginal para este nível de oferta será

$$p'(x) = \frac{x}{(x+3)^2} \quad \text{reais por sanduíche}$$

onde $p(x)$ é o preço do sanduíche em reais. No momento, 5.000 sanduíches estão sendo vendidos por dia a um preço de R$ 2,20 cada.

a. Determine a função de oferta (preço) $p(x)$.

b. Se 10.000 sanduíches forem fornecidos diariamente às lanchonetes da cadeia, que preço deverá ser cobrado para que todos os sanduíches sejam vendidos?

59. DEMANDA O gerente de uma sapataria determina que o preço p (em reais) de um par de sapatos de uma marca popular está variando a uma taxa

$$p'(x) = \frac{-300x}{(x^2 + 9)^{3/2}}$$

quando x centenas de pares são demandados (comprados) pelos consumidores. Quando o preço é de R$ 75,00, 400 pares ($x = 4$) são demandados pelos consumidores.

a. Determine a função demanda (preço) $p(x)$.

b. Qual é o preço para o qual a demanda é de 500 pares? Qual é o preço acima do qual a demanda é zero?

c. Qual é a demanda se o preço do par de sapatos é de R$ 90,00?

60. LUCRO MARGINAL Uma empresa determina que a receita marginal com a venda de x unidades de um certo produto é $R'(x) = 7 - 3x - 4x^2$ centenas de reais por unidade e que o custo marginal correspondente é $C'(x) = 5 + 2x$ centenas de reais por unidade. Qual é a variação do lucro quando o nível de produção aumenta de 5 para 9 unidades?

61. LUCRO MARGINAL Repita o Problema 60 para uma receita marginal $R'(x) = \dfrac{11 - x}{\sqrt{14 - x}}$ e um custo marginal $C'(x) = 2 + x + x^2$.

62. Determine $\int x^3(4 - x^2)^{-1/2}\, dx$. [*Sugestão:* Faça $u = 4 - x^2$.]

63. Determine $\int x^{1/3}(x^{2/3} + 1)^{3/2}\, dx$. [Sugestão: Faça $u = x^{2/3} + 1$.]

64. Determine $\int e^{-x}(1 + e^x)^2\, dx$. [*Sugestão:* É melhor fazer $u = 1 + e^x$ ou $u = e^x$? Ou é melhor não usar o método de substituição?]

65. Determine $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\, dx$. [*Sugestão:* Faça $u = 1 + e^x$.]

SEÇÃO 5.3 A Integral Definida e o Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que um corretor de imóveis esteja interessado em avaliar um terreno com 100 metros de largura, limitado por ruas em três lados e por um rio no quarto lado. O corretor determina que para um sistema de coordenadas como o da Figura 5.2, o rio pode ser descrito pela curva $y = x^3 + 1$, onde x e y são medidos em centenas de metros. Se a área do terreno é A metros quadrados e o corretor calcula que o metro quadrado da terra vale R$ 12,00, o valor do terreno é $12A$ reais. Se o terreno fosse retangular, triangular ou mesmo trapezoidal, seria possível calcular a área A usando uma fórmula da geometria, mas o limite superior do terreno é curvo. O que o corretor deve fazer para calcular a área do terreno e assim saber quanto vale no mercado?

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que a área sob uma curva, como a área A neste exemplo, pode ser expressa como o limite de uma soma de termos que recebe o nome de **integral definida**. Em seguida, vamos apresentar um resultado, conhecido como **teorema fundamental do cálculo**, que permite calcular

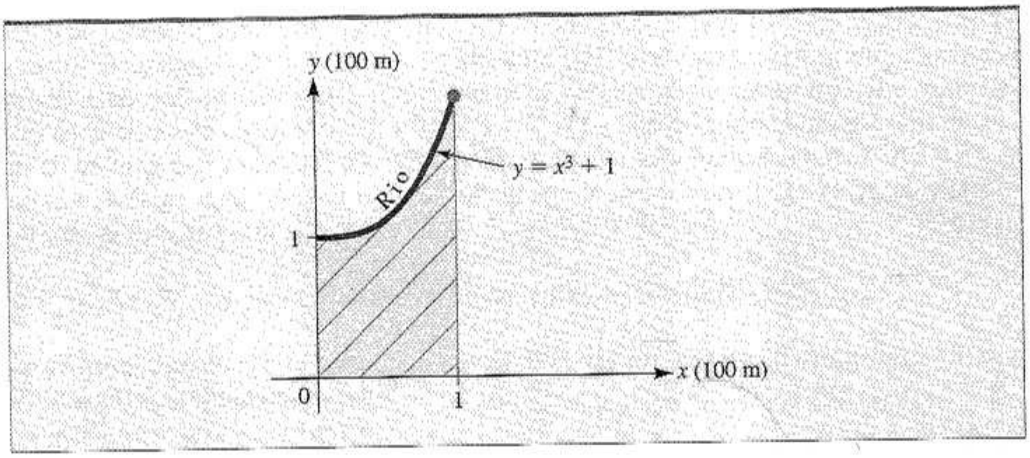


FIGURA 5.2 Determinação do valor de um terreno através do cálculo da área sob uma curva.

integrais *definidas*, como áreas e outras grandezas, a partir de integrais *indefinidas* (antiderivadas) como as que foram discutidas nos Seções 5.1 e 5.2. No Exemplo 5.3.3, vamos ilustrar este método expressando a área A de nosso exemplo na forma de uma integral definida e calculando seu valor com o auxílio do teorema fundamental do cálculo.

A Área como Limite de uma Soma

Considere a área da região sob a curva $y = f(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$, onde $f(x) \geq 0$ e f é contínua, como mostra a Figura 5.3. Para determinar a área, usamos o seguinte princípio geral:

Quando estiver diante de um problema desconhecido, procure relacioná-lo a um problema conhecido.

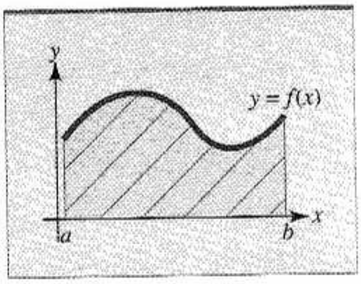


FIGURA 5.3 A região sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$.

Neste caso em particular, podemos não saber como calcular a área sob a curva dada, mas sabemos como calcular a área de um retângulo. Assim, dividimos a região dada em uma série de regiões retangulares e calculamos o valor aproximado da área A sob a curva $y = f(x)$ somando as áreas dessas regiões retangulares.

Para começar, dividimos o intervalo $a \leq x \leq b$ em n subintervalos iguais de largura $\Delta x = (b - a)/n$, e chamamos de x_j a extremidade esquerda do intervalo de ordem j, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Em seguida, traçamos n retângulos tais que o retângulo de ordem j tenha uma largura igual a Δx e uma altura igual a $f(x_j)$ (Figura 5.4).

A área do retângulo de ordem j, $f(x_j)\Delta x$, é aproximadamente igual à área sob a curva dada no intervalo $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. A soma das áreas dos n retângulos é

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\ &= [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x \end{aligned}$$

que é aproximadamente igual à área total A sob a curva dada.

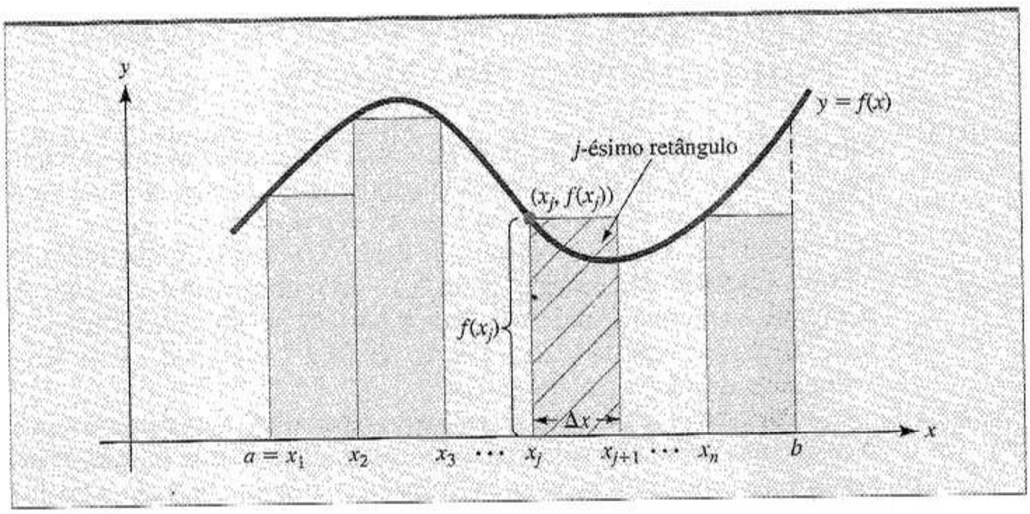


FIGURA 5.4 Aproximação da área sob uma curva por retângulos.

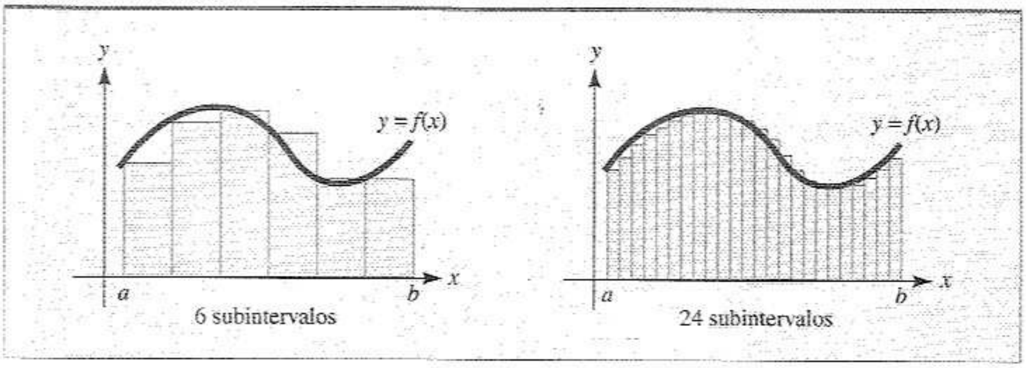


FIGURA 5.5 A aproximação melhora quando o número de subintervalos aumenta.

Quanto maior o número n de subintervalos, mais a soma aproximada S_n se aproxima do que consideramos intuitivamente como a área sob a curva dada (veja Figura 5.5). É razoável, portanto, definir a área real sob a curva, A, como o limite da soma aproximada quando o número de subintervalos tende a infinito. Resumindo:

Área sob uma Curva ■ Seja $f(x)$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ no intervalo $a \leq x \leq b$. A área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é dada por

$$A = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

onde x_j é a extremidade esquerda do subintervalo de ordem j se o intervalo $a \leq x \leq b$ for dividido em n partes iguais de comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

NOTA A esta altura, talvez o leitor esteja se perguntando: "Por que usar a extremidade esquerda de cada intervalo em vez da extremidade direita ou mesmo do ponto central?" A resposta é que estes pontos poderiam perfeitamente ter sido usados nos cálculos. Na verdade, mesmo que a posição do ponto no interior de cada subintervalo seja escolhida arbitrariamente, o resultado final será o mesmo, já que quando $n \to \infty$, $\Delta x \to 0$ e todos os pontos no interior do subintervalo tendem para um único ponto. ■

No exemplo a seguir, a área sob uma curva é calculada de duas formas: como o limite de uma soma e usando uma expressão da geometria. Os resultados são idênticos.

EXEMPLO 5.3.1

Seja R a região sob a curva da função $f(x) = 2x + 1$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$, como mostra a Figura 5.6a. Calcule a área da região R como o limite de uma soma.

Solução

Na Figura 5.6, a região R foi substituída por seis retângulos de largura $\Delta x = \dfrac{3-1}{6} = \dfrac{1}{3}$. As extremidades esquerdas dos seis subintervalos são $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$, $x_3 = \dfrac{5}{3}$, $x_4 = 6/3 = 2$, $x_5 = \dfrac{7}{3}$ e $x_6 = \dfrac{8}{3}$. Os valores correspondentes de $f(x) = 2x + 1$ aparecem na tabela a seguir.

x_j	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
$f(x_j) = 2x_j + 1$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	5	$\frac{17}{3}$	$\frac{19}{3}$

Assim, a área A da região R é dada aproximadamente pela soma

$$S = \left(3 + \frac{11}{3} + \frac{13}{3} + 5 + \frac{17}{3} + \frac{19}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} \approx 9{,}333$$

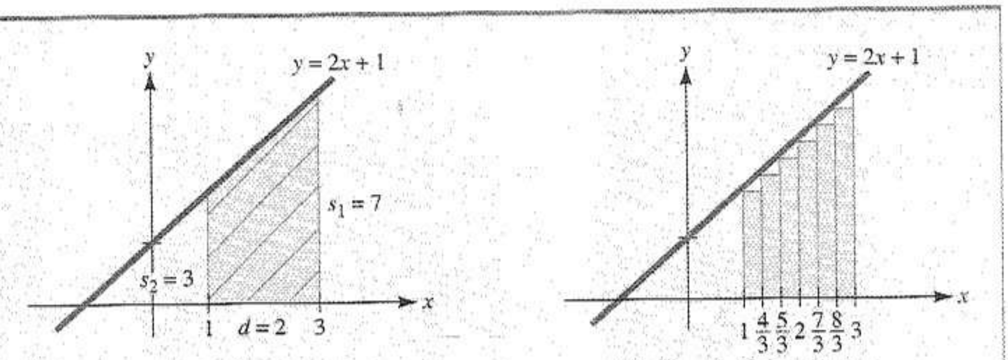
Se continuarmos a subdividir a região R usando um número cada vez maior de retângulos, as somas correspondentes, S_n, se aproximam cada vez mais da área exata A da região. A soma já calculada para $n = 6$ aparece na tabela a seguir, juntamente com as somas para $n = 10, 20, 50, 100$ e 500. (Se o leitor

Lembrete

O trapézio é um polígono de quatro lados com dois lados paralelos. Sua área é dada por

$$A = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)h$$

onde s_1 e s_2 são os comprimentos dos lados paralelos e h é a distância entre eles.



(a) A região R sob a reta $y = 2x + 1$ no intervalo $1 \le x \le 3$ (um trapézio)

(b) A região R aproximada por seis retângulos

FIGURA 5.6 Aproximação da área sob uma reta por retângulos.

tem acesso a um computador ou a uma calculadora programável, pode escrever um programa para gerar a soma para qualquer valor de n.)

Número de retângulos, n	6	10	20	50	100	500
Soma aproximada, S_n	9,333	9,600	9,800	9,920	9,960	9,992

Os números da segunda linha desta tabela parecem se aproximar de 10 para grandes valores de n; assim, é razoável supor que a área exata da região R é dada por

$$A = \lim_{n \to +\infty} S_n = 10$$

Observe na Figura 5.6a que a região R é um trapézio de largura $d = 3 - 1 = 2$ com lados paralelos cujos comprimentos são

$$s_1 = 2(3) + 1 = 7 \qquad \text{e} \qquad s_2 = 2(1) + 1 = 3$$

A área deste trapézio é

$$A = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)d = \frac{1}{2}(7 + 3)(2) = 10$$

o mesmo resultado obtido como limite da soma de retângulos.

A Integral Definida

A área é apenas uma das muitas grandezas que podem ser expressas como o limite de uma soma. Para lidar com todos os casos, incluindo aqueles nos quais a condição $f(x) \le 0$ não é satisfeita, usamos a terminologia e a notação apresentadas a seguir.

7 EXPLORE!

Entre em Y1 com a função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ e plote o gráfico usando uma janela [0, 4.7]1 por [−0.5, 1.5]0.5. Estime visualmente a área sob a curva de $x = 2$ a $x = 3$, usando triângulos ou retângulos. Determine a mesma área usando a rotina de integração numérica da calculadora (tecla **CALC**, opção 7). Qual foi a diferença entre os dois resultados? Por que os resultados foram diferentes?

Integral Definida ■ Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $a \le x \le b$. Suponha que este intervalo tenha sido dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e seja x_j um número pertencente ao intervalo de ordem j, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Forme a soma

$$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

conhecida como **soma de Riemann**.

Nesse caso, a **integral definida** de $f(x)$ no intervalo $a \le x \le b$, representada pelo símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$, é dada pelo limite da soma de Riemann quando $n \to +\infty$, ou seja,

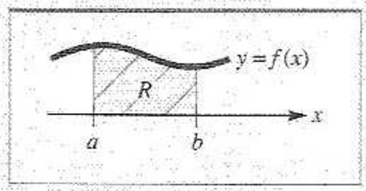
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

A função $f(x)$ recebe o nome de **integrando** e os números a e b são chamados de **limite inferior de integração** e **limite superior de integração**, respectivamente. O processo de calcular uma integral definida é chamado de **integração definida**.

Surpreendentemente, o fato de que $f(x)$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$ é suficiente para garantir que o limite usado para definir a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe e é o mesmo qualquer que seja a forma de escolher os subintervalos x_j.

O símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ usado para representar a integral definida é igual ao símbolo $\int f(x)\,dx$ usado para representar a integral indefinida, embora a integral definida seja um número, enquanto a integral indefinida é uma família de funções, as antiderivadas de f. Logo veremos que estes dois conceitos aparentemente muito diversos estão intimamente relacionados. Segue uma definição compacta da área sob uma curva usando a notação de integral.

Área como uma Integral Definida ■ Se $f(x)$ é uma função contínua e $f(x) \geq 0$ no intervalo $a \leq x \leq b$, a área A da região R sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é dada pela integral definida $A = \int_a^b f(x)\,dx$.



O Teorema Fundamental do Cálculo

Se calcular o limite de uma soma fosse a única forma de obter o valor de uma integral definida, o processo de integração provavelmente não passaria de uma curiosidade matemática. Felizmente, existe um meio mais simples de executar o cálculo, graças a um importante teorema que relaciona a integral definida à antiderivação.

Teorema Fundamental do Cálculo ■ Se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$.

O teorema fundamental do cálculo será demonstrado, para um caso particular, no final desta seção. Nas aplicações do teorema fundamental, usaremos a notação

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

NOTA O leitor pode estar se perguntando como o teorema fundamental do cálculo pode garantir que se $F(x)$ é qualquer antiderivada de $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Para verificar que isto é verdade, suponha que $G(x)$ seja outra antiderivada da mesma função. Nesse caso, $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante, então $F(x) = G(x) - C$, e

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a) \\ &= [G(b) - C] - [G(a) - C] \\ &= G(b) - G(a)\end{aligned}$$

já que as constantes se cancelam. Assim, o valor é o mesmo, qualquer que seja a antiderivada escolhida. ■

No Exemplo 5.3.2, usamos o teorema fundamental do cálculo para calcular a mesma área que foi estimada como o limite de uma soma no Exemplo 5.3.1.

EXEMPLO 5.3.2

Use o teorema fundamental do cálculo para determinar a área da região sob a reta $y = 2x + 1$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$.

Solução

Como $f(x) = 2x + 1$ satisfaz a condição $f(x) \geq 0$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$, a área é dada pela integral definida $A = \int_1^3 (2x + 1)\,dx$. Como uma das antiderivadas de $f(x) = 2x + 1$ é $F(x) = x^2 + x$, o teorema fundamental do cálculo nos diz que

$$A = \int_1^3 (2x + 1)\,dx = x^2 + x\Big|_1^3$$
$$= [(3)^2 + (3)] - [(1)^2 + (1)] = 10$$

o mesmo resultado que obtivemos no Exemplo 5.3.1.

8 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.3.3. Use a rotina de integração numérica da calculadora para confirmar que

$$\int_0^1 (x^3 + 1)dx = 1{,}25$$

EXEMPLO 5.3.3

Determine a área do terreno descrito na introdução desta seção, isto é, a área sob a curva $y = x^3 + 1$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$, onde x e y estão em centenas de metros. Se o preço da terra é de R$ 12,00 o metro quadrado, qual é o valor do terreno?

Solução

A área do terreno é dada pela integral definida

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\,dx$$

Como uma das antiderivadas de $f(x) = x^3 + 1$ é $F(x) = x^4/4 + x$, o teorema fundamental do cálculo nos diz que

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x\Big|_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{4}(1)^4 + 1\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^4 + 0\right] = \frac{5}{4}$$

Como x e y estão em centenas de metros, a área total é

$$\frac{5}{4} \times 100 \times 100 = 12.500 \text{ m}^2$$

e como preço da terra é R$ 12,00 o metro quadrado, o valor do terreno é

$$V = (\text{R\$ } 12{,}00/\text{m}^2)(12.500 \text{ m}^2) = \text{R\$ } 150.000{,}00$$

Lembrete

Quando o teorema fundamental do cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

é usado para calcular uma integral definida, não se esqueça de calcular *tanto* $F(b)$ *como* $F(a)$, mesmo que $a = 0$.

EXEMPLO 5.3.4

Calcule a integral definida $\int_0^1 (e^{-x} + \sqrt{x})\,dx$.

Solução

Como uma das antiderivadas de $f(x) = e^{-x} + \sqrt{x}$ é $F(x) = -e^{-x} + 2x^{3/2}/3$, a integral definida é

$$\int_0^1 (e^{-x} + \sqrt{x})\,dx = \left(-e^{-x} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^1$$
$$= \left[-e^{-1} + \frac{2}{3}(1)^{3/2}\right] - \left[-e^0 + \frac{2}{3}(0)\right]$$
$$= \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \approx 1{,}299$$

Nossa definição de integral definida foi motivada pelo cálculo de uma área, que é uma grandeza não-negativa. Entretanto, como a definição não exige que $f(x) \geq 0$, é perfeitamente possível que uma integral definida seja negativa, como ilustra o Exemplo 5.3.5.

EXEMPLO 5.3.5

Determine $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx.$

Solução

Como uma das antiderivadas de $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^2$ é $F(x) = \ln|x| - x^3/3$, temos:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx &= \left(\ln|x| - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^4 \\ &= \left[\ln 4 - \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[\ln 1 - \frac{1}{3}(1)^3\right] \\ &= \ln 4 - 21 \approx -19{,}6137\end{aligned}$$

Regras de Integração

Essas regras a seguir relacionadas podem ser usadas para simplificar o cálculo das integrais definidas.

Regras para Integrais Definidas

Sejam f e g funções contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$. Nesse caso,

1. **Regra da multiplicação por uma constante:** $\displaystyle\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx = k$ onde k é uma constante
2. **Regra da soma:** $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
3. **Regra da diferença:** $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$
4. $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$
5. $\displaystyle\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$
6. **Regra da subdivisão:** $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

As regras 4 e 5 são, na verdade, casos especiais da definição de integral definida. As primeiras três regras podem ser demonstradas usando o teorema fundamental do cálculo e uma regra análoga para integrais indefinidas. Assim, por exemplo, para demonstrar a regra da multiplicação por uma constante, suponha que $F(x)$ seja uma das antiderivadas de $f(x)$. Nesse caso, de acordo com a regra da multiplicação por uma constante para integrais indefinidas, $kF(x)$ é uma das antiderivadas de $kf(x)$ e o teorema fundamental do cálculo nos diz que

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\, dx &= kF(x)\Big|_a^b \\ &= kF(b) - kF(a) = k[F(b) - F(a)] \\ &= k\int_a^b f(x)\, dx\end{aligned}$$

A demonstração da regra da soma usando um raciocínio semelhante fica por conta do leitor (Problema 64).

No caso em que $f(x) \geq 0$ no intervalo $a \leq x \leq b$, a regra da subdivisão pode ser interpretada geometricamente como o fato de que a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é a soma das áreas sob a curva $y = f(x)$ nos subintervalos $a \leq x \leq c$ e $c \leq x \leq b$, como mostra a Figura 5.7. Entretanto, é importante lembrar que a regra da subdivisão é válida mesmo que $f(x)$ *não satisfaça* a desigualdade $f(x) \geq 0$ em todo o intervalo $a \leq x \leq b$.

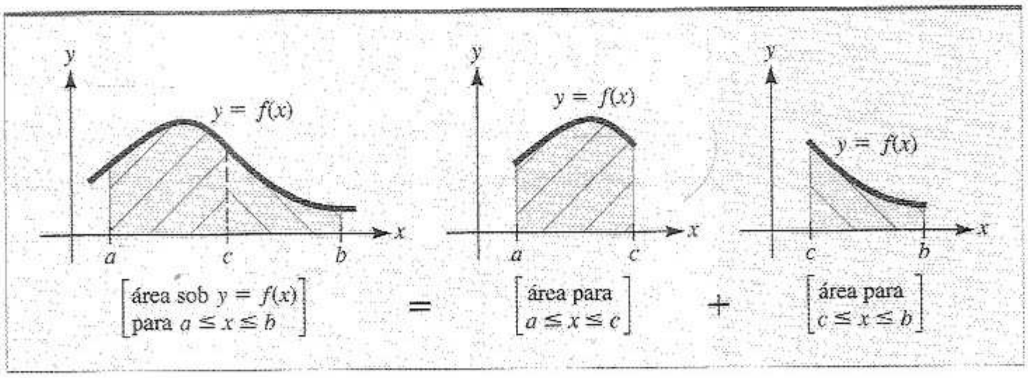


FIGURA 5.7 Regra da subdivisão para integrais definidas (caso em que $f(x) \geq 0$).

EXEMPLO 5.3.6

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas no intervalo $-2 \leq x \leq 5$ que satisfazem as equações

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 3 \qquad \int_{-2}^{5} g(x)\,dx = -4 \qquad \int_{3}^{5} f(x)\,dx = 7$$

Use estas informações para calcular as seguintes integrais definidas:

a. $\displaystyle\int_{-2}^{5} [2f(x) - 3g(x)]\,dx$ **b.** $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

Solução

a. Aplicando a regra da diferença e a regra da multiplicação por uma constante, obtemos:

$$\int_{-2}^{5} [2f(x) - 3g(x)]\,dx = \int_{-2}^{5} 2f(x)\,dx - \int_{-2}^{5} 3g(x)\,dx \quad \textit{regra da diferença}$$

$$= 2\int_{-2}^{5} f(x)\,dx - 3\int_{-2}^{5} g(x)\,dx \quad \textit{regra da multiplicação por uma constante}$$

$$= 2(3) - 3(-4) = 18 \quad \textit{substituindo por valores numéricos}$$

b. De acordo com a regra da subdivisão,

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$

Explicitando a integral pedida, temos:

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx - \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$
$$= 3 - 7 = -4$$

Uso da Substituição em Integrais Definidas

Quando usamos uma substituição $u = g(x)$ para calcular uma integral definida da forma $\int_a^b f(x)\,dx$, podemos proceder de duas formas diferentes:

1. Usar a substituição para obter uma antiderivada $F(x)$ de $f(x)$ e em seguida calcular a integral definida usando o teorema fundamental do cálculo.

2. Usar a substituição para expressar o integrando e dx em termos de u e du e substituir os limites originais de integração, a e b, por limites transformados $c = g(a)$ e $d = g(b)$. A integral original pode ser, então, calculada aplicando o teorema fundamental do cálculo à integral definida transformada.

Estes procedimentos estão ilustrados nos Exemplos 5.3.7 e 5.3.8.

Lembrete

Apenas um membro da família de antiderivadas de $f(x)$ é necessário para calcular $\int_a^b f(x)dx$ usando o teorema fundamental do cálculo. Assim, o "$+ C$" pode ser deixado de fora dos cálculos intermediários.

EXEMPLO 5.3.7

Determine $\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3\, dx$.

Solução

O integrando é um produto no qual um dos fatores, $8x$, é um múltiplo da derivada de uma expressão, $x^2 + 1$, que aparece no outro fator. Isto sugere que seja usada a substituição $u = x^2 + 1$. Nesse caso, $du = 2x\, dx$ e

$$\int 8x(x^2 + 1)^3\, dx = \int 4u^3\, du = u^4$$

Os limites de integração, 0 e 1, se aplicam à variável x e não a u. Para continuar a resolver o problema, podemos proceder de duas formas: escrever a antiderivada em termos de x ou determinar os valores de u que correspondem a $x = 0$ e $x = 1$.

Se escolhermos a primeira alternativa, escrevemos

$$\int 8x(x^2 + 1)^3\, dx = u^4 = (x^2 + 1)^4$$

e portanto

$$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3\, dx = (x^2 + 1)^4 \Big|_0^1 = 16 - 1 = 15$$

Se escolhermos a segunda alternativa, usamos o fato de que $u = x^2 + 1$ para concluir que $u = 1$ para $x = 0$ e $u = 2$ para $x = 1$. Assim,

$$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3\, dx = \int_1^2 4u^3\, du = u^4 \Big|_1^2 = 16 - 1 = 15$$

9 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.3.8. Use uma janela [0, 3]1 por [−4, 1]1 para plotar a curva de $f(x) = \ln x/x$. Explique em termos de área por que a integral de $f(x)$ no intervalo $\frac{1}{4} \le x \le 2$ é negativa.

EXEMPLO 5.3.8

Determine $\int_{1/4}^2 \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$.

Solução

Fazendo $u = \ln x$, $du = dx/x$, temos:

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \ln x\left(\frac{1}{x}\, dx\right) = \int u\, du$$
$$= \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Assim,

$$\int_{1/4}^2 \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]\Bigg|_{1/4}^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{4}\right)^2$$
$$= \frac{-3}{2}(\ln 2)^2 \approx -0{,}721$$

Outra possibilidade é usarmos a substituição $u = \ln x$ para transformar os limites de integração:

$$\text{para } x = \frac{1}{4}, \text{ temos } u = \ln \frac{1}{4}$$
$$\text{para } x = 2, \text{ temos } u = \ln 2$$

Substituindo os limites de integração, obtemos:

$$\int_{1/4}^{2} \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_{\ln 1/4}^{\ln 2} u\, du = \frac{1}{2}u^2 \Big|_{\ln 1/4}^{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{4}\right)^2 \approx -0{,}721$$

Variação Total

Em certas aplicações práticas, conhecemos a taxa de variação $Q'(x)$ de uma grandeza $Q(x)$ e estamos interessados em calcular a **variação total** $Q(b) - Q(a)$ de $Q(x)$ quando x varia de $x = a$ até $x = b$. Fizemos isto na Seção 5.1 resolvendo problemas de valor inicial (Exemplos 5.1.5 a 5.1.8). Entretanto, como $Q(x)$ é uma antiderivada de $Q'(x)$, o teorema fundamental do cálculo permite calcular a variação total usando a seguinte fórmula de integração definida:

Variação Total ■ Se $Q'(x)$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$, a **variação total** de $Q(x)$ quando x varia de $x = a$ até $x = b$ é dada por

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(x)\, dx$$

Seguem dois exemplos que envolvem a variação total.

EXEMPLO 5.3.9

Em uma certa fábrica, o custo marginal é $3(q - 4)^2$ reais por unidade quando o nível de produção é q unidades. Qual é o aumento do custo de fabricação quando o nível de produção aumenta de 6 para 10 unidades?

Solução

Seja $C(q)$ o custo para produzir q unidades. Nesse caso, o custo marginal é a derivada $\dfrac{dC}{dq} = 3(q - 4)^2$ e o aumento do custo se a produção aumenta de 6 para 10 unidades é dado pela integral definida

$$C(10) - C(6) = \int_6^{10} \frac{dC}{dq}\, dq$$

$$= \int_6^{10} 3(q - 4)^2\, dq = (q - 4)^3 \Big|_6^{10}$$

$$= (10 - 4)^3 - (6 - 4)^3$$

$$= \text{R\$}208{,}00$$

EXEMPLO 5.3.10

Uma amostra de proteína de massa m (em gramas) se decompõe em aminoácidos a uma taxa dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{-30}{(t + 3)^2} \quad \text{g/h}$$

Qual é a variação da massa da amostra de proteína durante as primeiras 2 horas?

Solução

A variação de massa é dada pela integral definida

$$m(2) - m(0) = \int_0^2 \frac{dm}{dt}\, dt = \int_0^2 \frac{-30}{(t + 3)^2}\, dt$$

Fazendo a substituição $u = t + 3$, $du = dt$ e substituindo os limites de integração ($t = 0$ se torna $u = 3$ e $t = 2$ se torna $u = 5$), obtemos:

$$\begin{aligned} m(2) - m(0) &= \int_0^2 \frac{-30}{(t+3)^2}\,dt = \int_3^5 -30u^{-2}\,du \\ &= -30\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_3^5 = 30\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] \\ &= -4 \end{aligned}$$

Assim, a massa de proteína diminui de 4 gramas nas primeiras 2 horas.

Demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo para um Caso Particular

Vamos encerrar esta seção com uma demonstração do teorema fundamental do cálculo para o caso em que $f(x) \geq 0$. Neste caso, a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Para um valor de x qualquer entre a e b, seja $A(x)$ a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a, x]$. Nesse caso, o quociente diferença de $A(x)$ é

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

onde, por definição, a expressão $A(x + h) - A(x)$ no numerador é a área sob a curva $y = f(x)$ entre x e $x + h$. Para pequenos valores de h, esta área é aproximadamente igual à área de um retângulo de altura $f(x)$ e largura h, como mostra a Fig. 5.8. Assim,

$$A(x+h) - A(x) \approx f(x)h$$

ou

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$$

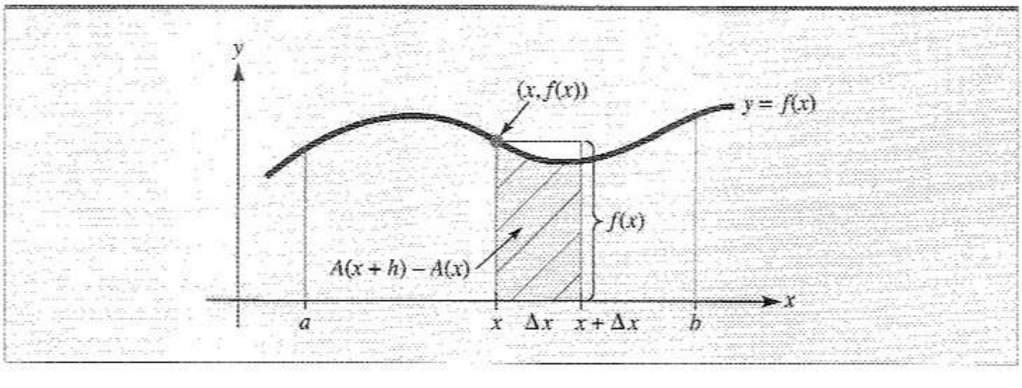


FIGURA 5.8 A área $A(x + h) - A(x)$.

Quando h tende a 0, o erro envolvido na aproximação tende a 0 e, portanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

De acordo com a definição de derivada,

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x)$$

e, portanto,

$$A'(x) = f(x)$$

Em outras palavras, $A(x)$ é a antiderivada de $f(x)$.

Suponha que $F(x)$ seja outra antiderivada de $f(x)$. Nesse caso, de acordo com a propriedade fundamental das antiderivadas (Seção 5.1), temos:

$$A(x) = F(x) + C$$

onde C é uma constante e x pode ter qualquer valor no intervalo $a \leq x \leq b$. Como $A(x)$ é a área sob a curva $y = f(x)$ entre a e x, e $A(a)$, a área entre a e a, é 0, então

$$A(a) = 0 = F(a) + C$$

e $C = -F(a)$. A área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é $A(b)$, que satisfaz a relação

$$A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

Finalmente, como a área sob a curva $y = f(x)$ na região $a \le x \le b$ também é dada pela integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = F(b) - F(a)$$

como estabelece o teorema fundamental do cálculo.

PROBLEMAS | 5.3

Nos Problemas 1 a 30, calcule a integral definida dada usando o teorema fundamental do cálculo.

1. $\int_{-1}^{2} 5\,dx$

2. $\int_{-2}^{1} \pi\,dx$

3. $\int_{0}^{5} (3x + 2)\,dx$

4. $\int_{1}^{4} (5 - 2t)\,dt$

5. $\int_{-1}^{1} 3t^4\,dt$

6. $\int_{1}^{4} 2\sqrt{u}\,du$

7. $\int_{-1}^{1} (2u^{1/3} - u^{2/3})\,du$

8. $\int_{4}^{9} x^{-3/2}\,dx$

9. $\int_{0}^{1} e^{-x}(4 - e^{x})\,dx$

10. $\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{-x}}\right) dx$

11. $\int_{0}^{1} (x^4 + 3x^3 + 1)\,dx$

12. $\int_{-1}^{0} (-3x^5 - 3x^2 + 2x + 5)\,dx$

13. $\int_{2}^{5} (2 + 2t + 3t^2)\,dt$

14. $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{t} - \frac{4}{\sqrt{t}}\right) dt$

15. $\int_{1}^{3} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

16. $\int_{0}^{\ln 2} (e^t - e^{-t})\,dt$

17. $\int_{-3}^{-1} \frac{t + 1}{t^3}\,dt$

18. $\int_{1}^{6} x^2(x - 1)\,dx$

19. $\int_{1}^{2} (2x - 4)^4\,dx$

20. $\int_{-3}^{0} (2x + 6)^4\,dx$

21. $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{6t + 1}}\,dt$

22. $\int_{1}^{2} \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2}\,dx$

23. $\int_{0}^{1} (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx$

24. $\int_{0}^{1} \frac{6t}{t^2 + 1}\,dt$

25. $\int_{2}^{e+1} \frac{x}{x - 1}\,dx$

26. $\int_{1}^{2} (t + 1)(t - 2)^6\,dt$

27. $\int_{1}^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

28. $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,dx$

29. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

30. $\int_{1}^{4} \frac{(\sqrt{x} - 1)^{3/2}}{\sqrt{x}}\,dx$

Nos Problemas 31 a 36, $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas no intervalo $-3 \leq x \leq 2$ e satisfazem as equações

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 5 \qquad \int_{-3}^{2} g(x)\,dx = -2 \qquad \int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 0 \qquad \int_{-3}^{1} g(x)\,dx = 4$$

Em cada caso, use estas informações e as regras das integrais definidas para calcular a integral indicada.

31. $\int_{-3}^{2} [-2f(x) + 5g(x)]\,dx$

32. $\int_{1}^{2} g(x)\,dx$

33. $\int_{4}^{4} g(x)\,dx$

34. $\int_{2}^{-3} f(x)\,dx$

35. $\int_{1}^{2} [3f(x) + 2g(x)]\,dx$

36. $\int_{-3}^{1} [2f(x) + 3g(x)]\,dx$

Nos Problemas 37 a 42, determine a área sob a região R da curva dada $y = f(x)$ no intervalo indicado.

37. $y = x^4$ no intervalo $-1 \leq x \leq 2$

38. $y = \sqrt{x}\,(x + 1)$ no intervalo $0 \leq x \leq 4$

39. $y = e^{2x}$ no intervalo $0 \leq x \leq \ln 3$

40. $y = \dfrac{3}{x}$ no intervalo $1 \leq x \leq e^2$

41. $y = (3x + 4)^{1/2}$ no intervalo $0 \leq x \leq 4$

42. $y = xe^{-x^2}$ no intervalo $0 \leq x \leq 3$

43. VALOR DE UM TERRENO Estima-se que daqui a t anos o valor de um certo terreno estará aumentando à razão de $V'(t)$ reais por ano. Escreva uma expressão para o aumento total do valor do terreno durante os próximos 5 anos.

44. PREÇO DE INGRESSOS Os organizadores de uma exposição estimam que, t horas após os portões serem abertos às 9 h, os visitantes estarão chegando à razão de $N'(t)$ pessoas por hora. Escreva uma expressão para o número de pessoas que entrarão na exposição entre 11 e 13 h.

45. CUSTO DE ARMAZENAMENTO Um revendedor recebe uma remessa de 12.000 quilogramas de soja que serão distribuídos a uma taxa constante de 300 quilogramas por semana. Se o custo de armazenamento da soja é de 0,2 centavos por quilo por semana, quanto o revendedor terá que pagar de armazenamento durante as próximas 40 semanas?

46. POLUIÇÃO DA ÁGUA Estima-se que daqui a t anos a população de uma certa cidade à beira de um lago estará variando à razão de $0{,}6t^2 + 0{,}2t + 0{,}5$ milhares de pessoas por ano. Os ambientalistas observaram que o nível de poluição do lago aumenta à taxa de aproximadamente 5 unidades por 1.000 pessoas. Qual será o aumento da poluição do lago nos próximos 2 anos?

47. POLUIÇÃO DO AR A análise do ar em uma certa região indica que daqui a t anos a concentração $L(t)$ de monóxido de carbono no ar estará variando à taxa de $L'(t) = 0{,}1t + 0{,}1$ parte por milhão (ppm) por ano. Qual será a variação da concentração de monóxido de carbono durante os próximos 3 anos?

48. CUSTO MARGINAL O custo marginal para fabricar um certo produto é $C'(q) = 6q + 1$ reais por unidade quando q unidades são produzidas.

a. Qual é o custo total para fabricar as primeiras 10 unidades?

b. Qual é o custo para produzir as 10 unidades *seguintes*?

49. CRESCIMENTO DEMOGRÁFICO Um estudo indica que daqui a t meses a população de uma certa cidade estará crescendo a uma taxa de $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$ habitantes por mês. Qual será o aumento da população da cidade nos próximos 8 meses?

50. PRODUÇÃO DE PETRÓLEO Um certo poço de petróleo, que produz 400 barris de petróleo bruto por mês, deverá secar em 2 anos. O preço atual do petróleo bruto é de 25 dólares o barril e deverá aumentar a uma taxa constante de 3 cents por barril por mês. Se o petróleo é vendido no momento em que é extraído, qual será a receita futura total com o petróleo extraído do poço?

51. AGRICULTURA Estima-se que após t dias a quantidade de feijão colhida por um fazendeiro estará aumentando à razão de $0{,}3t^2 + 0{,}6t + 1$ saco por dia. Qual será o aumento do valor da colheita nos próximos 5 dias se o preço do saco de feijão permanecer constante em R$ 3,00?

52. VENDAS Estima-se que a demanda de um produto esteja aumentando exponencialmente à taxa de 2% ao ano. Se a demanda atual é de 5.000 unidades por ano e o preço permanecer fixo em R$ 400,00 a unidade, qual será a receita auferida pelo fabricante com a venda do produto durante os próximos 2 anos?

53. PRODUÇÃO Uma empresa criou uma linha de montagem para fabricar um novo modelo de telefone celular. A taxa de produção dos telefones é

$$\frac{dP}{dt} = 1.500\left(2 - \frac{t}{2t + 5}\right) \quad \text{unidades por mês}$$

Quantos telefones serão produzidos durante o terceiro mês?

54. PUBLICIDADE Uma agência de publicidade começa uma campanha para promover um novo produto e determina que t dias mais tarde o número $N(t)$ de pessoas que ouviram falar do produto estará variando a uma taxa dada por

$$N'(t) = 5t^2 - \frac{0{,}04t}{t^2 + 3} \quad \text{pessoas por dia}$$

Quantas pessoas ouviram falar do produto durante a primeira semana? E durante a segunda semana?

55. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO A concentração de um medicamento no sangue de um paciente t horas após receber uma injeção está diminuindo a uma taxa

$$C'(t) = \frac{-0{,}33t}{\sqrt{0{,}02t^2 + 10}} \quad \text{mg/cm}^3 \cdot \text{h}$$

Qual é a variação da concentração do medicamento nas primeiras 4 horas após a injeção?

56. ESPÉCIE AMEAÇADA DE EXTINÇÃO Um estudo realizado por uma ONG no ano 2000 determinou que t anos mais tarde a população de uma certa espécie de ave ameaçada de extinção estará diminuindo a uma taxa $P'(t) = -0{,}75t\sqrt{10 - 0{,}2t}$ espécimes por ano. Qual será a variação da população na década de 2000-2010?

57. DEPRECIAÇÃO O valor de revenda de uma certa máquina industrial diminui durante um período de 10 anos a uma taxa que varia com o tempo. Quando a máquina tem x anos de idade, a taxa com a qual seu valor está diminuindo é $220(x - 10)$ reais por ano. Qual é a depreciação da máquina durante o segundo ano?

58. CONSUMO DE ÁGUA A prefeitura de uma cidade estima que a água está sendo consumida pelos moradores a uma taxa $C'(t) = 10 + 0{,}3e^{0{,}03t}$ bilhões de litros por ano, onde $C(t)$ é o consumo de água t anos após o ano 2000. Qual será o consumo total de água no período de 2000-2010?

59. VARIAÇÃO DE BIOMASSA Uma amostra de proteína de massa m (em gramas) se converte em aminoácidos a uma taxa dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{-2}{t+1} \quad \text{g/h}$$

Qual é a diferença entre as massas de proteína após 2 horas e após 5 horas?

60. VARIAÇÃO DE BIOMASSA Resolva o Problema 59 para uma taxa de conversão dada por

$$\frac{dm}{dt} = -(0{,}1t + e^{0{,}1t})$$

61. APRENDIZADO Em um experimento de aprendizado, os participantes têm que memorizar uma série de fatos e observa-se que t minutos após o experimento os participantes estão aprendendo, em média, a uma taxa dada por

$$L'(t) = \frac{4}{\sqrt{t+1}} \quad \text{fatos por minuto}$$

onde $L(t)$ é o número total de fatos memorizados no instante t. Quantos fatos um participante típico aprende entre 5 e 10 minutos após o início do experimento?

62. DISTÂNCIA E VELOCIDADE Um motorista, dirigindo a uma velocidade constante de 45 km/h, acelera o carro de tal forma que sua velocidade t horas mais tarde é $v(t) = 45 + 12t$ km/h. Qual é a distância percorrida pelo carro nas primeiras 2 horas?

63. MOVIMENTO DE UMA BOLA Uma bola é arremessada para cima do alto de um edifício e t segundos mais tarde sua velocidade é $v(t) = -9{,}8t + 24$ m/s. Qual é a posição da bola em relação ao alto do edifício após 3 segundos?

64. Demonstre a regra da soma para integrais definidas, ou seja, mostre que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

65. Vimos que a integral definida pode ser usada para calcular a área sob uma curva, mas o conceito da área como uma integral funciona nos dois sentidos, ou seja, podemos calcular uma integral de uma função se conhecermos a área sob a curva que descreve a função.

a. Determine $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$. [*Sugestão:* Observe que a integral é parte da área sob a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.]

b. Determine $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx$. [Sugestão: Identifique a curva de $y = \sqrt{2x - x^2}$ e procure uma solução geométrica, como no item (a).]

66. Dada a função $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x+1}$, determine o valor aproximado da integral $\int_0^2 f(x)\,dx$ da seguinte forma:

a. Calcule os números x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 que subdividem o intervalo $0 \leq x \leq 2$ em quatro intervalos iguais. Use estes números para formar quatro retângulos que representam aproximadamente a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 2$.

b. Estime o valor da integral pedida calculando a soma das áreas dos quatro retângulos do item (a).

c. Repita os itens (a) e (b) usando oito subintervalos em vez de quatro.

SEÇÃO 5.4 Aplicações da Integração Definida: Área entre Curvas e Valor Médio

Como vimos, uma área pode ser expressa como um tipo especial de limite de uma soma conhecida como integral definida e calculada com o auxílio do teorema fundamental do cálculo. Este processo, que recebe o nome de **integração definida**, foi apresentado a partir do cálculo de áreas porque as áreas são fáceis de visualizar, mas existem muitos outros problemas práticos, além do cálculo de áreas, que podem ser resolvidos com o auxílio da integração definida.

Nesta seção, vamos expandir as idéias apresentadas na Seção 5.3 para calcular a área entre duas curvas e o valor médio de uma função. Como parte de nosso estudo da área entre curvas, vamos discutir um conceito socioeconômico muito importante conhecido como curva de Lorentz, que é usado para medir a distribuição de riqueza em uma sociedade.

Aplicações da Integral Definida

Intuitivamente, a integração definida pode ser imaginada como o processo de "acumular" um número infinito de pequenos pedaços de uma grandeza para obter o valor total da grandeza. Segue uma descrição passo a passo do uso deste processo em problemas práticos.

Processo para Usar a Integração Definida em Problemas Práticos

Para "acumular" uma grandeza Q em um intervalo $a \leq x \leq b$ através da integração definida, faça o seguinte:

1º passo: Divida o intervalo $a \leq x \leq b$ em n subintervalos iguais de largura $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Escolha um número x_j no subintervalo j para $j = 1, 2, \ldots, n$.

2º passo: Aproxime a contribuição do intervalo j para o valor total da grandeza Q pelo produto $f(x_j)\Delta x$, onde $f(x)$ é uma função apropriada que seja contínua no intervalo $a \leq x \leq b$.

3º passo: Some todos os produtos para estimar o valor total da grandeza Q através da soma de Riemann

$$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

4º passo: Torne exata a aproximação do 3º passo calculando o limite da soma de Riemann quando $n \to +\infty$ para expressar Q na forma de uma integral definida:

$$Q = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

5º passo: Use o teorema fundamental do cálculo para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ e assim obter o valor desejado de Q.

Lembrete

Não há nada de especial no uso do "j" como índice dos somatórios. Os índices mais usados são i, j e k.

NOTA ***A Notação de Somatório*** Podemos usar a *notação de somatório* para representar as somas de Riemann que aparecem na discussão das integrais definidas. Nesse caso, para descrever a soma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

basta especificar o termo genérico a_j da soma e indicar que n termos da mesma forma devem ser somados, começando pelo termo com $j = 1$ e terminando com o termo com $j = n$. Para este fim, costuma-se usar a letra grega sigma maiúsculo (Σ) e escrever a soma como $\sum_{j=1}^{n} a_j$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Em particular, a soma de Riemann

$$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

pode ser escrita na forma compacta

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x$$

Assim, a relação

$$\lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

usada para definir a integral definida pode ser escrita na forma

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Uma revisão da notação de somatório, com exemplos, é apresentada no Apêndice A. ■

Área entre Duas Curvas

Em certos problemas práticos, pode ser interessante representar uma grandeza de interesse na forma da área entre duas curvas. Inicialmente, vamos supor que f e g seajm funções contínuas, não-negativas [ou seja, que $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$] e satisfazem a desigualdade $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$, como mostra a Figura 5.9a.

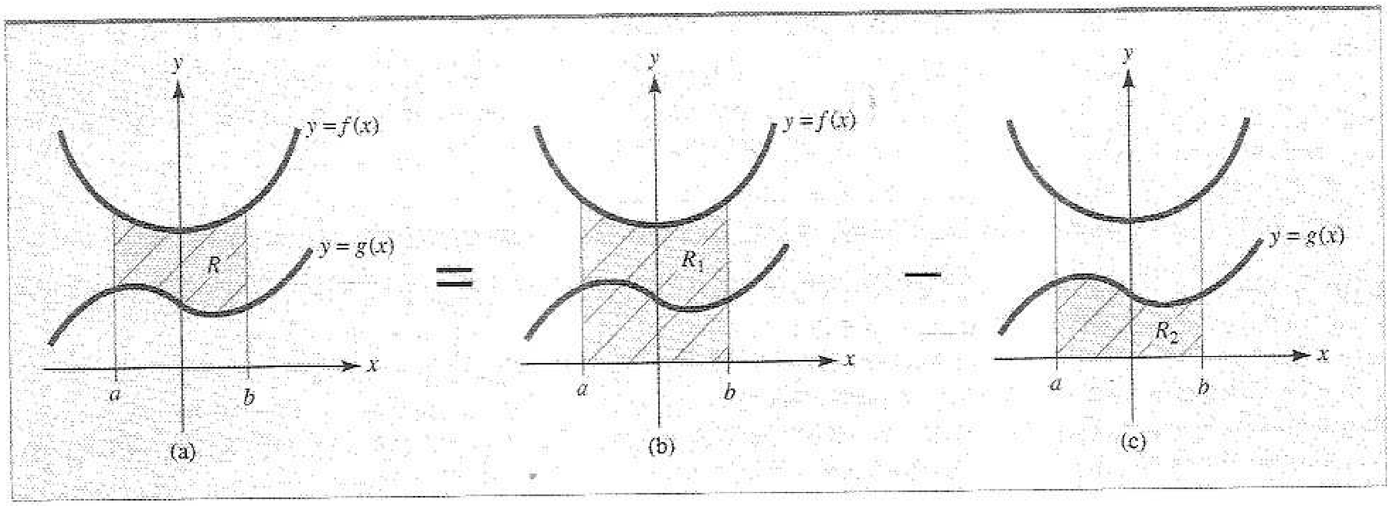


FIGURA 5.9 Área de R = área de R_1 − área de R_2.

Nesse caso, para determinar a área da região R entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$, simplesmente subtraímos a área sob a curva de baixo $y = g(x)$ (Figura 5.9c) da área sob a curva de cima $y = f(x)$ (Figura 5.9b):

$$\text{Área de } R = [\text{área sob } y = f(x)] - [\text{área sob } y = g(x)]$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Esta expressão é válida se $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$, mesmo que as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ não estejam acima do eixo dos x para todos os valores de x. Vamos provar que isto é verdade usando o método para usar a integral definida que foi descrito no início desta seção.

1º passo: Divida o intervalo $a \leq x \leq b$ em n subintervalos iguais de largura $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Para $j = 1, 2, \ldots, n$, seja x_j o ponto correspondente à extremidade esquerda do subintervalo de ordem j.

2º passo: Construa retângulos de largura Δx e altura $f(x_j) - g(x_j)$. Isto é sempre possível, já que $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$, o que garante que a altura é não-negativa, ou seja, que $f(x_j) - g(x_j) \geq 0$. Para $j = 1, 2, \ldots, n$, a área $[f(x_j) - g(x_j)]\Delta x$ do retângulo de ordem j é aproximadamente igual à área entre as duas curvas no subintervalo de ordem j, como mostra a Figura 5.10a.

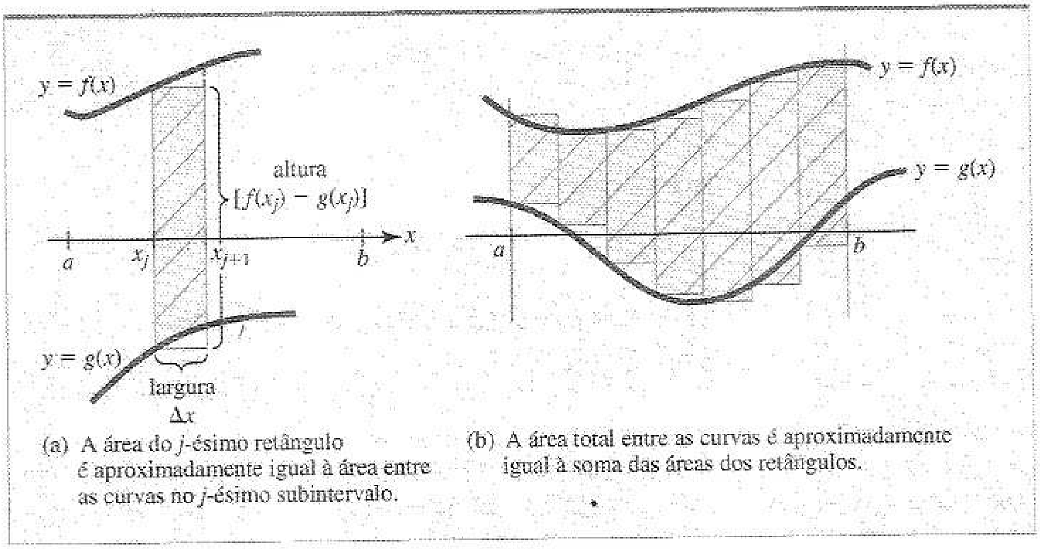


FIGURA 5.10 Cálculo da área entre curvas através de integrais definidas.

3º passo: Some todos os produtos $[f(x_j) - g(x_j)]\Delta x$ para estimar o valor da área total A entre as duas curvas no intervalo $a \leq x \leq b$ através da soma de Riemann

$$A \approx [f(x_1) - g(x_1)]\Delta x + [f(x_2) - g(x_2)]\Delta x + \cdots + [f(x_n) - g(x_n)]\Delta x$$
$$= \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - g(x_j)]\Delta x$$

(Veja Figura 5.10b.)

4º passo: Torne exata a aproximação do 3º passo calculando o limite da soma de Riemann quando $n \to +\infty$ para expressar a área total A entre as duas curvas na forma de uma integral definida:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - g(x_j)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Resumindo:

Área entre Duas Curvas ■ Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas, com $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$, a área A entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ no intervalo é dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

EXEMPLO 5.4.1

Determine a área da região R limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

Solução

Para obter os pontos de interseção, basta igualar as equações das duas curvas:

$$x^3 = x^2$$
$$x^3 - x^2 = 0 \qquad \textit{subtraindo } x^2 \textit{ de ambos os membros}$$
$$x^2(x-1) = 0 \qquad \textit{colocando } x^2 \textit{ em evidência}$$
$$x = 0,\ 1 \qquad uv = 0 \textit{ se e apenas se } u = 0 \textit{ ou } v = 0$$

Lembrete

Note que $x^2 \geq x^3$ para $0 \leq x \leq 1$. Assim, por exemplo,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Os pontos de interseção são, portanto, os pontos (0, 0) e (1, 1).

No intervalo $0 \leq x \leq 1$, a região R situada entre as duas curvas é limitada acima por $y = x^2$ e abaixo por $y = x^3$ (veja Figura 5.11). A área da região é dada pela integral

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4\right] = \frac{1}{12}$$

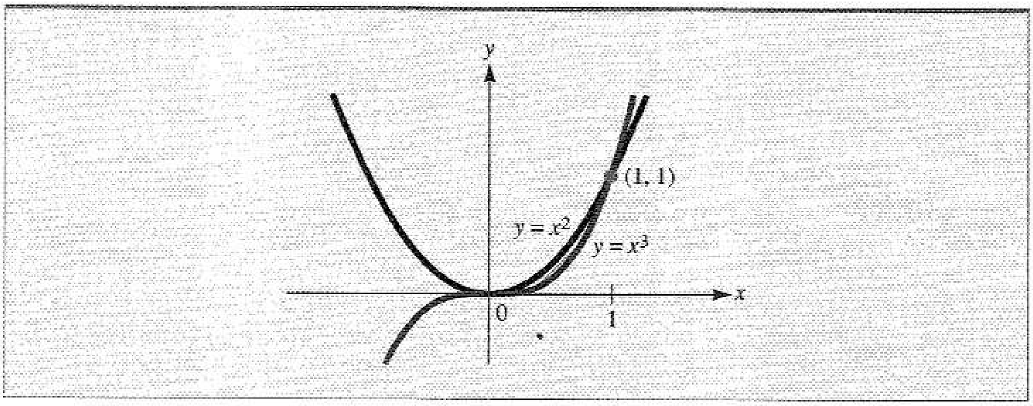


FIGURA 5.11 Região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

Em certos problemas práticos, é preciso determinar a área A entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$ no qual $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq c$ e $g(x) \geq f(x)$ para $c \leq x \leq b$. Neste caso, temos:

$$A = \underbrace{\int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx}_{f(x) \geq g(x) \text{ para } a \leq x \leq c} + \underbrace{\int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx}_{g(x) \geq f(x) \text{ para } c \leq x \leq b}$$

Considere o Exemplo 5.4.2.

10 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.4.2. Faça Y1 = 4X e Y2 = X^3 + $3X^2$ no editor de equações da calculadora. Plote usando uma janela [−6, 2]1 por [−25, 10]5. Determine os pontos de interseção das duas curvas. Para outra visão da área entre as duas curvas, faça Y3 = Y2 − Y1, desative Y1 e Y2 e plote usando uma janela [−4.5, 1.5]0.5 por [−5, 15]5. A rotina de integração numérica também pode ser aplicada a esta função diferença.

EXEMPLO 5.4.2

Determine a área da região limitada pela reta $y = 4x$ e pela curva $y = x^3 + 3x^2$.

Solução

Para obter os pontos de interseção da reta com a curva, basta igualar as duas equações:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 &= 4x \\ x^3 + 3x^2 - 4x &= 0 && \textit{subtraindo } 4x \textit{ de ambos os membros} \\ x(x^2 + 3x - 4) &= 0 && \textit{colocando } x \textit{ em evidência} \\ x(x-1)(x+4) &= 0 && \textit{fatorando } x^2 + 3x - 4 \\ x &= 0, 1, -4 && uv = 0 \textit{ se e apenas se } u = 0 \textit{ ou } v = 0 \end{aligned}$$

Os pontos de interseção são, portanto, os pontos (0, 0), (1, 4) e (−4, 16). A reta e a curva aparecem na Figura 5.12.

No intervalo $-4 \leq x \leq 0$, a curva está acima da reta, ou seja, $x^3 + 3x^2 \geq 4x$, e a área é

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-4}^{0} [(x^3 + 3x^2) - 4x]\,dx = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x^2 \Big|_{-4}^{0} \\ &= \left[\frac{1}{4}(0)^4 + (0)^3 - 2(0)^2\right] - \left[\frac{1}{4}(-4)^4 + (-4)^3 - 2(-4)^2\right] = 32 \end{aligned}$$

No intervalo $0 \leq x \leq 1$, a reta está acima da curva e, portanto, a área é

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^1 [4x - (x^3 + 3x^2)]\,dx = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 \Big|_0^1 \\ &= \left[2(1)^2 - \frac{1}{4}(1)^4 - (1)^3\right] - \left[2(0)^2 - \frac{1}{4}(0)^4 - (0)^3\right] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

A área total limitada pela reta e a curva é, portanto,

$$A = A_1 + A_2 = 32 + \frac{3}{4} = 32{,}75$$

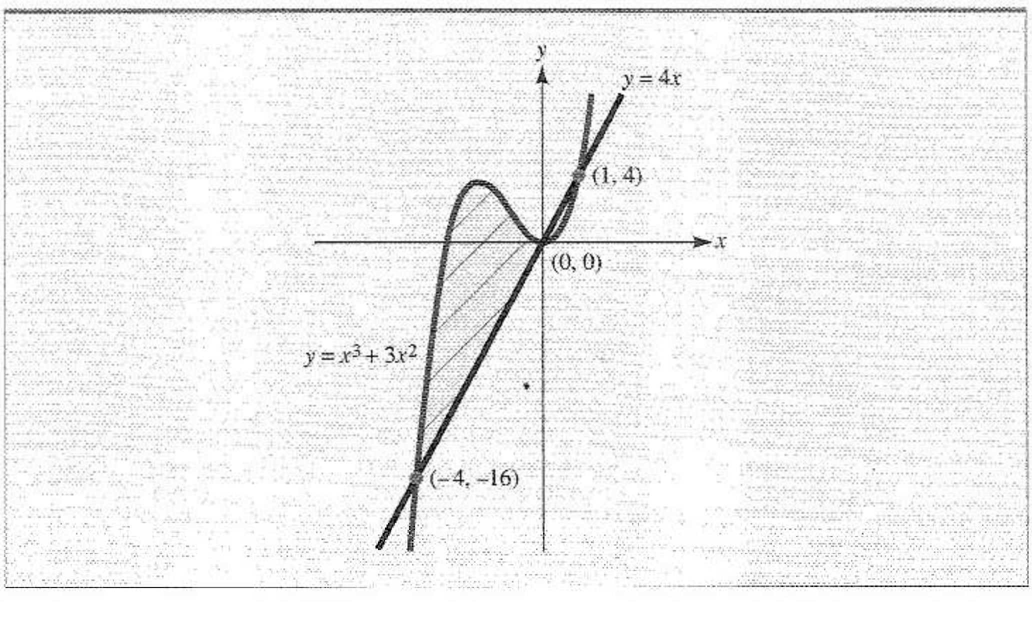


FIGURA 5.12 Região limitada pela reta $y = 4x$ e pela curva $y = x^3 + 3x^2$.

Excesso Líquido de Lucro

A área entre duas curvas pode ser usada para medir a quantidade de uma grandeza que se acumulou durante um certo período. Suponha que daqui a t anos dois planos de investimentos estejam apresentando lucros $P_1(t)$ e $P_2(t)$, respectivamente, e que seus índices de rentabilidade previstos, $P_1'(t)$ e $P_2'(t)$, satisfaçam a desigualdade $P_2'(t) \geq P_2'(t)$ nos próximos N anos, ou seja, no período $0 \leq t \leq N$. Nesse caso, $E(t) = P_2(t) - P_1(t)$ representa o **excesso de lucro** do plano 2 em relação ao plano 1 no instante t e o **excesso líquido de lucro** $\text{EL} = E(N) - E(0)$ no intervalo $0 \leq t \leq N$ é dado pela integral definida

$$\text{EL} = E(N) - E(0) = \int_0^N E'(t)\,dt$$

$$= \int_0^N [P_2'(t) - P_1'(t)]\,dt \qquad \textit{pois } E'(t) = [P_2(t) - P_1(t)]' = P_2'(t) - P_1'(t)$$

Esta integral pode ser interpretada geometricamente como a área entre as curvas de rentabilidade $y = P_2'(t)$ e $y = P_2'(t)$, como mostra a Figura 5.13. O Exemplo 5.4.3 ilustra o cálculo do excesso líquido de lucro.

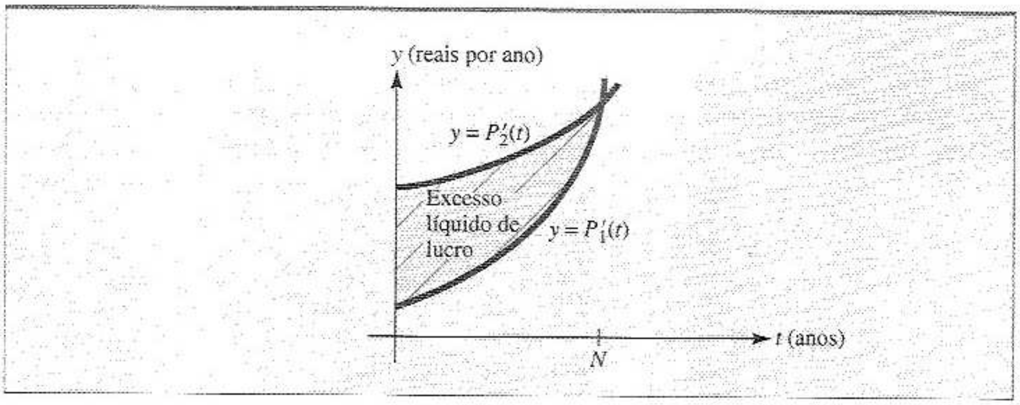


FIGURA 5.13 Excesso líquido de lucro como a área entre duas curvas de rentabilidade.

EXEMPLO 5.4.3

Suponha que daqui a t anos um investimento esteja gerando lucro a uma taxa $P_1'(t) = 50 + t^2$ centenas de reais por ano e um segundo investimento esteja gerando lucro a uma taxa $P_2'(t) = 200 + 5t$ centenas de reais por ano.

a. Durante quantos anos o índice de rentabilidade do segundo investimento permanece maior que o do primeiro?

b. Determine o excesso líquido de lucro para o período calculado no item (a). Interprete o excesso líquido de lucro como uma área.

Solução

a. O índice de rentabilidade do segundo investimento é maior que o do primeiro até que

$$P_1'(t) = P_2'(t)$$

$$50 + t^2 = 200 + 5t$$

$$t^2 - 5t - 150 = 0 \qquad \textit{subtraindo } 200 = 5t \textit{ de ambos os membros}$$

$$(t - 15)(t + 10) = 0 \qquad \textit{fatorando}$$

$$t = 15, -10 \qquad \textit{pois } uv = 0 \textit{ se e apenas se } u = 0 \textit{ ou } v = 0$$

$$t = 15 \text{ anos} \qquad \textit{desprezando o tempo negativo } t = -10$$

b. O excesso de lucro do plano 2 em relação ao plano 1 é $E(t) = P_2(t) - P_1(t)$, e o excesso líquido de lucro EL no período $0 \leq t \leq 15$ calculado no item (a) é dado pela integral definida

$$\text{EL} = E(15) - E(0) = \int_0^{15} E'(t)\,dt \qquad \textit{teorema fundamental do cálculo}$$

$$= \int_0^{15} [P_2'(t) - P_1'(t)]\,dt \qquad \textit{pois } E(t) = P_2(t) - P_1(t)$$

$$= \int_0^{15} [(200 + 5t) - (50 + t^2)]\, dt$$

$$= \int_0^{15} [150 + 5t - t^2]\, dt \qquad \textit{combinando termos}$$

$$= \left[150t + 5\left(\frac{1}{2}t^2\right) - \left(\frac{1}{3}t^3\right)\right]\Bigg|_0^{15}$$

$$= \left[150(15) + \frac{5}{2}(15)^2 - \frac{1}{3}(15)^3\right] - \left[150(0) + \frac{5}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right]$$

$$= 1.687{,}50 \text{ centenas de reais}$$

Assim, o excesso líquido de lucro é de R$ 168.750,00.

A Figura 5.14 mostra as curvas de rentabilidade $P_1'(t)$ e $P_2'(t)$ dos dois investimentos. O excesso líquido de lucro

$$\text{EL} = \int_0^{15} [P_2'(t) - P_1'(t)]\, dt$$

é a região entre as duas curvas, que aparece sombreada na figura.

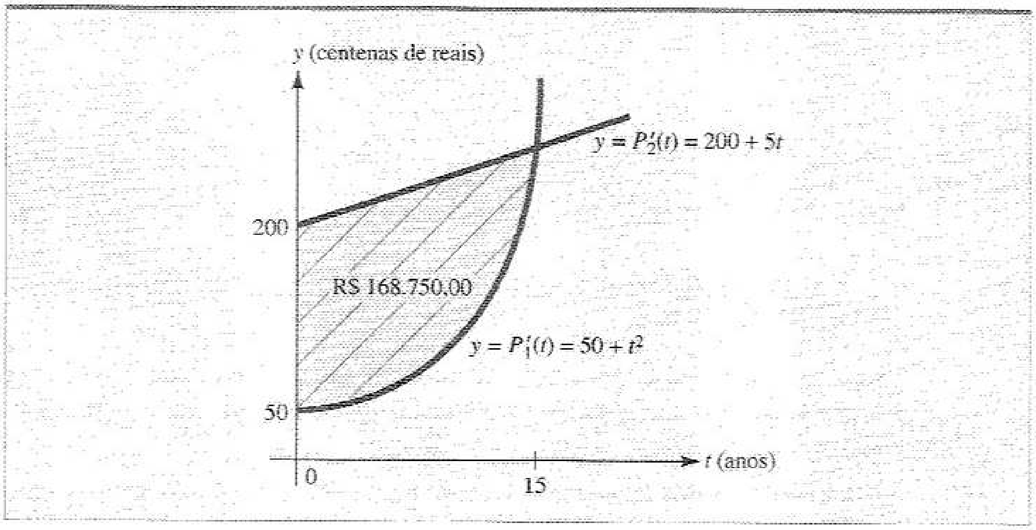


FIGURA 5.14 Excesso líquido de lucro de um investimento em relação a outro.

Curva de Lorentz

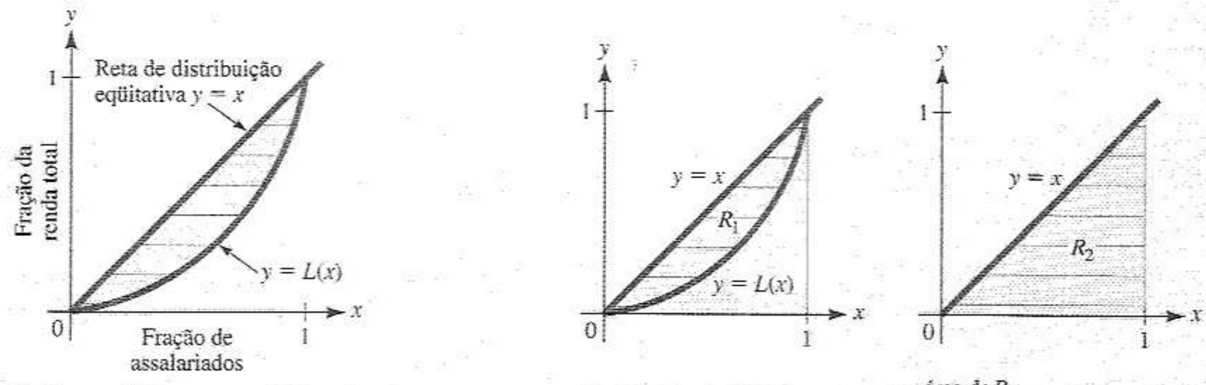
A área também desempenha um papel importante no estudo da **curva de Lorentz**, usada por economistas e sociólogos para medir a distribuição de riqueza em uma sociedade. Mais especificamente, a curva de Lorentz de um país é o gráfico da função $L(x)$, que representa a fração da renda total anual recebida pelos $100x\%$ menos bem-remunerados assalariados do país, para $0 \leq x \leq 1$. Assim, por exemplo, se os 30% menos bem-remunerados assalariados do país recebem 23% da renda nacional, $L(0{,}3) = 0{,}23$.

Observe que $L(x)$ é uma função crescente no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e apresenta as seguintes propriedades:

1. $0 \leq L(x) \leq 1$	porque $L(x)$ é uma fração
2. $L(0) = 0$	porque não há renda quando não há assalariados
3. $L(1) = 1$	porque 100% da receita é recebida por 100% dos assalariados
4. $L(x) \leq x$	porque os $100x\%$ menos bem pagos assalariados não podem receber mais de $100x\%$ da receita total

Uma curva de Lorentz típica aparece na Figura 5.15a.

A reta $y = x$ representa o caso ideal em que a distribuição de renda é uniforme (os $100x\%$ menos bem pagos assalariados recebem $100x\%$ da riqueza da sociedade). Quanto mais próxima desta reta está uma curva de Lorentz, mais justa é a distribuição de renda do país. O desvio da distribuição de riqueza da sociedade em relação à distribuição ideal é representado pela área da região R_1 entre a curva de



(a) A curva de Lorentz $y = L(x)$ está sempre abaixo da reta de distribuição eqüitativa $y = x$

(b) O índice de Gini é a razão $\text{IG} = \dfrac{\text{área de } R_1}{\text{área de } R_2}$

FIGURA 5.15 Uma curva de Lorentz $y = L(x)$ e seu índice de Gini.

Lorentz $y = L(x)$ e a reta $y = x$. A razão entre esta área e a área da região R_2 sob a reta $y = x$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$ é usada como uma medida da desigualdade da distribuição de riqueza de um país. Esta razão, conhecida como **índice de Gini** (também chamado de **índice de desigualdade de renda**), é dada pela expressão

$$\text{IG} = \frac{\text{área de } R_1}{\text{área de } R_2} = \frac{\text{área entre } y = L(x) \text{ e } y = x}{\text{área sob } y = x \text{ para } 0 \leq x \leq 1}$$

$$= \frac{\int_0^1 [x - L(x)]\, dx}{\int_0^1 x\, dx} = \frac{\int_0^1 [x - L(x)]\, dx}{1/2}$$

$$= 2\int_0^1 [x - L(x)]\, dx$$

(veja Figura 5.15b). Resumindo:

Índice de Gini ■ Se $y = L(x)$ é a equação da curva de Lorentz, a desigualdade da distribuição de riqueza correspondente é medida pelo *índice de Gini*, dado pela expressão

$$\text{Índice de Gini} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\, dx$$

Os valores do índice de Gini estão sempre entre 0 e 1. Um índice 0 corresponde a uma igualdade total da distribuição de renda e um índice 1 corresponde a uma desigualdade total (toda a renda pertence a 0% da população). Quanto menor o índice, mais justa é a distribuição de renda; quanto maior o índice, mais a riqueza está concentrada em uns poucos indivíduos. O Exemplo 5.4.4 ilustra o modo como as curvas de Lorentz e o índice de Gini são usados para comparar as distribuições de renda de duas classes profissionais.

EXEMPLO 5.4.4

Um órgão do governo de um certo país verifica que as curvas de Lorentz para as distribuições de renda dos dentistas e médicos em um certo estado são dadas pelas funções

$$L_1(x) = x^{1.7} \qquad \text{e} \qquad L_2(x) = 0{,}8x^2 + 0{,}2x$$

respectivamente. Para que profissão a distribuição de renda é mais homogênea?

Solução

Os dois respectivos índices de Gini são

$$G_1 = 2\int_0^1 (x - x^{1,7})\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2,7}}{2,7}\right)\Bigg|_0^1 = 0,2593$$

e

$$G_2 = 2\int_0^1 [x - (0,8x^2 + 0,2x)]\,dx$$

$$= 2\left[-0,8\left(\frac{x^3}{3}\right) + 0,8\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 0,2667$$

Assim, nesse país, a distribuição de renda dos dentistas é mais homogênea.

Podemos usar o índice de Gini para comparar a distribuição de renda nos diferentes países do mundo. A Tabela 5.1 mostra o índice de Gini para alguns países escolhidos. Como se pode ver na tabela, a distribuição tende a ser mais justa em países desenvolvidos como a Alemanha e o Japão, mas existem exceções, como, por exemplo, o índice de Gini dos Estados Unidos ser praticamente igual ao da Tailândia. (Existe alguma correlação entre a desigualdade de renda e a estrutura sociopolítica das nações?)

TABELA 5.1 Índices de Gini de Alguns Países

País	Índice de Gini
Estados Unidos	0,460
Brasil	0,601
Canadá	0,315
Dinamarca	0,247
Alemanha	0,281
Japão	0,350
África do Sul	0,584
Panamá	0,568
Tailândia	0,462
Inglaterra	0,326

FONTE: David C. Colander, *Economics*, 4th ed., Boston: McGraw-Hill, 2001, p. 435.

Valor Médio de uma Função

Como segunda ilustração do modo como a integral definida pode ser usada em problemas práticos, vamos calcular o **valor médio de uma função**, que é de interesse em várias situações. Antes, porém, vamos esclarecer o que queremos dizer quando falamos em "valor médio". Um professor interessado em calcular a nota média de uma prova simplesmente soma as notas de todos os alunos e divide o resultado pelo número de alunos, mas como podemos calcular, por exemplo, o índice médio de poluição do ar de uma cidade durante o dia? O problema está no fato de que como o tempo é uma variável contínua, o número de resultados é "grande demais" para que a média seja calculada da forma usual.

Considere o caso geral no qual estamos interessados em calcular o valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $a \le x \le b$ no qual f é contínua. Começamos por subdividir o intervalo $a \le x \le b$ em n partes iguais, cada uma de largura $\Delta x = (b - a)/n$. Se x_j é um número pertencente ao intervalo de ordem j para $j = 1, 2, \ldots, n$, a média dos valores correspondentes da função, $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ é dada por

11 EXPLORE!

Suponha que você esteja interessado em calcular o valor médio de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 1$ no intervalo [1, 4]. Entre com $f(x)$ em Y1 e plote usando uma janela [0, 4.7]1 por [−2, 8]1. Sombreie a região sob a curva no intervalo [1, 4] e calcule a área A. Faça Y2 igual à função constante $\frac{A}{b-a} = \frac{A}{3}$. Este é o valor médio. Plote Y2 e Y1 no mesmo gráfico. Para que número(s) entre 1 e 4 $f(x)$ é igual ao valor médio?

$$V_n = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

$$= \frac{b-a}{b-a}\left[\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}\right] \qquad \textit{multiplicando e dividindo por } (b-a)$$

$$= \frac{1}{b-a}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\left(\frac{b-a}{n}\right) \qquad \textit{colocando } \frac{b-a}{n} \textit{ em evidência}$$

$$= \frac{1}{b-a}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x \qquad \textit{pois } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x$$

que reconhecemos como uma soma de Riemann.

Quando aumentamos o número de subdivisões do intervalo $a \leq x \leq b$, V_n se aproxima do que consideramos intuitivamente o valor médio V de $f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$. Assim, é razoável *definir* o valor médio V como o limite da soma de Riemann V_n quando $n \to +\infty$, ou seja, como uma integral definida

$$V = \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x$$
$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Resumindo:

Valor Médio de uma Função ■ Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $a \leq x \leq b$. O *valor médio* V de $f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ é dado pela integral definida

$$V = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

EXEMPLO 5.4.5

Um fabricante estima que t meses após lançar um novo produto no mercado, a receita da empresa com a venda do produto será de $S(t)$ milhares de reais, onde

$$S(t) = \frac{750t}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

Qual será a receita média da empresa com a venda do produto nos primeiros 6 meses?

Solução

A receita média V no período $0 \leq t \leq 6$ é dada pela integral

$$V = \frac{1}{6-0} \int_0^6 \frac{750t}{\sqrt{4t^2 + 25}}\,dt$$

Para calcular esta integral, fazemos a substituição

$$\begin{aligned} u &= 4t^2 + 25 & &\text{limites de integração:} \\ du &= 4(2t\,dt) & &\text{para } t = 0, \text{ temos } u = 4(0)^2 + 25 = 25 \\ t\,dt &= \frac{1}{8}\,du & &\text{para } t = 6, \text{ temos } u = 4(6)^2 + 25 = 169 \end{aligned}$$

O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \int_0^6 \frac{750}{\sqrt{4t^2 + 25}}(t\,dt) \\ &= \frac{1}{6} \int_{25}^{169} \frac{750}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{8}\,du\right) = \frac{750}{6(8)} \int_{25}^{169} u^{-1/2}\,du \\ &= \frac{750}{6(8)} \left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_{25}^{169} = \frac{750(2)}{6(8)} [(169)^{1/2} - (25)^{1/2}] \\ &= 250 \end{aligned}$$

Assim, no período de 6 meses após o lançamento do novo produto, a empresa obtém uma receita média de R$ 250.000,00 por mês.

EXEMPLO 5.4.6

Um pesquisador modela a temperatura T (em °C) em uma certa cidade canadense entre 6 e 18 h usando a função

$$T(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-4)^2 \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 12$$

onde t é o número de horas após 6 h.

a. Qual é a temperatura média da cidade durante o horário de trabalho, das 8 às 17 h?

b. Em que instante (ou instantes) durante o horário de trabalho a temperatura é igual à temperatura média calculada no item (a)?

Solução

a. Como 8 h e 17 h correspondem, respectivamente, a $t = 2$ e $t = 11$ horas após 6 h, estamos interessados em calcular a média da temperatura $T(t)$ no período $2 \leq t \leq 11$, que é dada pela integral definida

Lembrete

A temperatura F em graus Fahrenheit está relacionada à temperatura C em graus Celsius através da expressão

$F = \frac{9}{5}C + 32.$

$$\begin{aligned}
T_{\text{méd}} &= \frac{1}{11-2}\int_2^{11}\left[3 - \frac{1}{3}(t-4)^2\right]dt \\
&= \frac{1}{9}\left[3t - \frac{1}{3}\frac{1}{3}(t-4)^3\right]\Bigg|_2^{11} \\
&= \frac{1}{9}\left[3(11) - \frac{1}{9}(11-4)^3\right] - \frac{1}{9}\left[3(2) - \frac{1}{9}(2-4)^3\right] \\
&= -\frac{4}{3} \approx -1{,}33
\end{aligned}$$

Assim, a temperatura média durante o horário de trabalho é de aproximadamente $-1{,}33$°C.

b. Precisamos determinar o instante $t = t_m$ no intervalo $2 \leq t_m \leq 11$ no qual $T(t_m) = -\frac{4}{3}$. Resolvendo esta equação, obtemos

$$\begin{aligned}
3 - \frac{1}{3}(t_a-4)^2 &= -\frac{4}{3} \\
-\frac{1}{3}(t_a-4)^2 &= -\frac{4}{3} - 3 = -\frac{13}{3} && \textit{subtraindo 3 de ambos os membros} \\
(t_a-4)^2 &= (-3)\left(-\frac{13}{3}\right) = 13 && \textit{multiplicando ambos os membros por } -3 \\
t_a - 4 &= \pm\sqrt{13} && \textit{extraindo a raiz quadrada de ambos os membros} \\
t_a &= 4 \pm \sqrt{13} \\
&\approx 0{,}39 \quad \text{ou} \quad 7{,}61
\end{aligned}$$

Lembrete

Como uma hora tem 60 minutos, 0,61 hora é o mesmo que 0,61(60) ≈ 37 minutos. Assim, 7,61 horas após as 6 horas é o mesmo que 37 minutos após as 13horas ou 13h37min.

Como $t = 0{,}39$ não pertence ao intervalo $2 \leq t_m \leq 11$ (das 8 às 17 h), a temperatura instantânea é igual à temperatura média apenas para $t = 7{,}61$, ou seja, aproximadamente às 13h37min.

Duas Interpretações do Valor Médio

O valor médio de uma função tem várias interpretações úteis. Observe, em primeiro lugar, que se $f(x)$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$ e $F(x)$ é qualquer antiderivada de $f(x)$ no mesmo intervalo, o valor médio V de $f(x)$ no intervalo satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}[F(b) - F(a)] && \textit{teorema fundamental do cálculo} \\
&= \frac{F(b) - F(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

Reconhecemos este quociente diferença como a taxa média de variação de $F(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ (veja Seção 2.1). Assim, temos a seguinte interpretação:

Interpretação do Valor Médio como uma Taxa ■ O valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$ no qual $f(x)$ é contínua é igual à taxa média de variação de qualquer antiderivada $F(x)$ de $f(x)$ no mesmo intervalo.

Assim, por exemplo, como o custo total $C(x)$ para fabricar x unidades de um produto é uma antiderivada do custo marginal $C'(x)$, *a taxa média de variação do custo na faixa de produção* $a \leq x \leq b$ *é igual ao valor médio do custo marginal na mesma faixa.*

O valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$, no qual $f(x) \geq 0$, também pode ser interpretado geometricamente escrevendo a expressão do valor médio

$$V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

na forma

$$(b-a)V = \int_a^b f(x)\,dx$$

No caso em que $f(x) \geq 0$ no intervalo $a \leq x \leq b$, a integral do lado direito pode ser interpretada como a área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ e o produto do lado direito como a área de um retângulo de altura V e largura $b - a$ igual à largura do intervalo. Em outras palavras:

Interpretação Geométrica do Valor Médio ■ O valor médio V de $f(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$, no qual $f(x)$ é contínua e satisfaz à desigualdade $f(x) \geq 0$, é igual à altura de um retângulo cuja base é o intervalo e cuja área é igual à área sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$.

Esta interpretação geométrica está ilustrada na Figura 5.16.

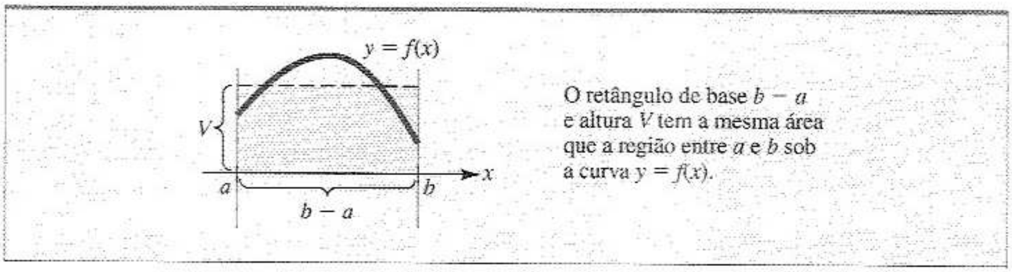
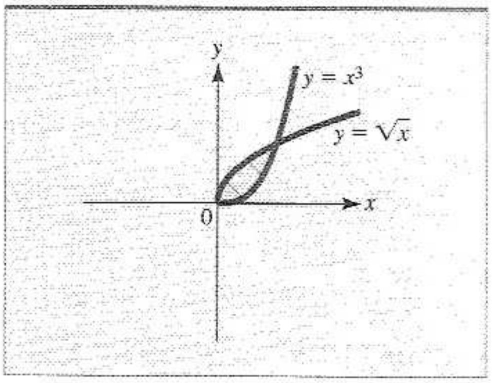


FIGURA 5.16 Interpretação geométrica do valor médio V.

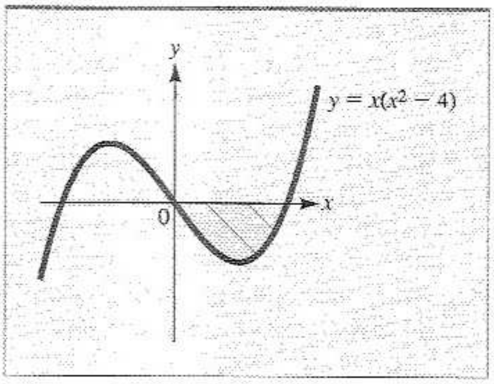
PROBLEMAS | 5.4

Nos Problemas 1 a 4, determine a área da região sombreada.

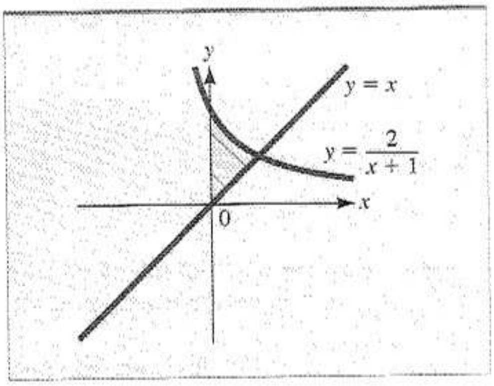
1.



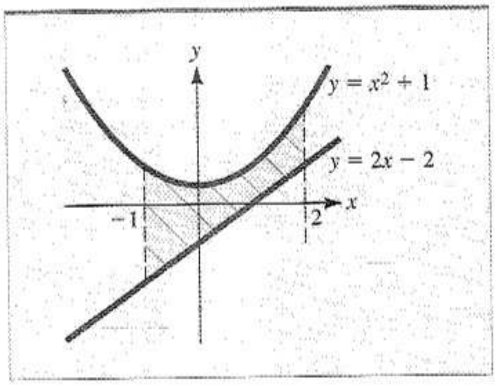
2.



3.



4.



Nos Problemas 5 a 17, indique a região R dada e determine sua área.

5. R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = -x$ e $x = 1$.

6. R é a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2$ e pela reta $x = 1$.

7. R é a região limitada pelo eixo x e a curva $y = -x^2 + 4x - 3$.

8. R é a região limitada pelas curvas $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ e pela reta $x = \ln 2$.

9. R é a região limitada pela curva $y = x^2 - 2x$ e pelo eixo x. [*Sugestão:* Observe que a região está abaixo do eixo x.]

10. R é a região limitada pela curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ e pelas retas $y = x$ e $y = \dfrac{x}{8}$.

11. R é a região limitada pelas curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4$.

12. R é a região entre a curva $y = x^3$ e a reta $y = 9x$, para $x \geq 0$.

13. R é a região entre as curvas $y = x^3 - 3x^2$ e $y = x^2 + 5x$.

14. R é o triângulo limitado pela reta $y = 4 - 3x$ e pelos eixos x e y.

15. R é o triângulo cujos vértices são os pontos $(-4, 0)$, $(2, 0)$ e $(2, 6)$.

16. R é o retângulo cujos vértices são os pontos $(1, 0)$, $(-2, 0)$, $(-2, 5)$ e $(1, 5)$.

17. R é o trapézio limitado pelas retas $y = x + 6$ e $x = 2$ e pelos eixos x e y.

Nos Problemas 18 a 23, determine o valor médio da função dada no intervalo especificado.

18. $f(x) = x^2 - 3x + 5$ para $-1 \leq x \leq 2$

19. $f(x) = 1 - x^2$ para $-3 \leq x \leq 3$

20. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$ para $0 \leq x \leq \ln 2$

21. $f(x) = e^{-x}(4 - e^{2x})$ para $-1 \leq x \leq 1$

22. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 6}$ para $-1 \leq x \leq 1$

23. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ para $0 \leq x \leq \ln 3$

Nos Problemas 24 a 27, determine o valor médio V da função dada no intervalo especificado. Em cada caso, plote no mesmo gráfico a função e um retângulo cuja base é o intervalo dado e cuja altura é o valor médio V.

24. $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq 4$

25. $f(x) = 2x - x^2$ para $0 \leq x \leq 2$

26. $g(t) = e^{-2t}$ para $-1 \leq t \leq 2$

27. $h(u) = \dfrac{1}{u}$ para $2 \leq u \leq 4$

CURVA DE LORENTZ *Nos Problemas 28 a 33, determine o índice de Gini para a curva de Lorentz dada.*

28. $L(x) = x^2$

29. $L(x) = x^3$

30. $L(x) = 0{,}7x^2 + 0{,}3x$

31. $L(x) = 0{,}55x^2 + 0{,}45x$

32. $L(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$

33. $L(x) = \dfrac{2}{3}x^{3,7} + \dfrac{1}{3}x$

34. TEMPERATURA Os registros mostram que t horas após a meia-noite, a temperatura em um certo aeroporto foi $f(t) = -0{,}3t^2 + 4t + 10$°C. Qual foi a temperatura média no aeroporto entre as 9 h e meio-dia?

35. PREÇOS DE ALIMENTOS Os registros mostram que t meses após o início do ano, o preço da carne moída nos supermercados foi

$$P(t) = 0{,}09t^2 - 0{,}2t + 1{,}6$$

reais o quilo. Qual foi o preço médio da carne moída durante os 3 primeiros meses do ano?

36. EFICIÊNCIA Com t meses de experiência, um funcionário dos correios é capaz de separar $Q(t) = 700 - 400e^{-0{,}5t}$ cartas por hora. Qual é a velocidade média com que um funcionário dos correios consegue separar a correspondência durante os 3 primeiros meses de trabalho?

37. COLÔNIAS DE BACTÉRIAS Em um experimento, o número de bactérias presentes em uma cultura após t minutos foi $Q(t) = 2.000e^{0{,}05t}$. Qual foi o número médio de bactérias presentes na cultura durante os primeiros 5 minutos do experimento?

38. VALOR MÉDIO DE UM INVESTIMENTO João investe R$ 5.000,00 em uma aplicação que rende 6% de juros capitalizados continuamente. Qual é o valor médio do investimento durante 10 anos?

39. ESTOQUE Um estoque de 60.000 quilogramas de um certo produto foi usado a uma taxa constante e se esgotou após 1 ano. Qual foi o estoque médio durante o ano?

40. **INVESTIMENTOS** Suponha que daqui a t anos um fundo de investimento estará produzindo lucros a uma taxa $P_1'(t) = 100 + t^2$ centenas de reais por ano, enquanto um segundo fundo estará produzindo lucros a uma taxa $P_2'(t) = 220 + 2t$ centenas de reais por ano.

a. Durante quantos anos a rentabilidade do segundo fundo permanecerá maior que a do primeiro?

b. Determine o excesso líquido de lucro supondo que você tenha investido no segundo fundo durante o período calculado no item (a).

c. Plote as curvas de rentabilidade $y = P_1'(t)$ e $y = P_2'(t)$ e sombreie a região cuja área representa o excesso líquido de lucro determinado no item (b).

41. **INVESTIMENTOS** Resolva o Problema 40 para dois investimentos de rentabilidades $P_1'(t) = 130 + t^2$ centenas de reais por ano e $P_2'(t) = 306 + 5t$ centenas de reais por ano.

42. **INVESTIMENTOS** Resolva o Problema 40 para dois investimentos de rentabilidades $P_1'(t) = 60e^{0{,}12t}$ centenas de reais por ano e $P_2'(t) = 160e^{0{,}08t}$ centenas de reais por ano.

43. **INVESTIMENTOS** Resolva o Problema 40 para dois investimentos de rentabilidades $P_1'(t) = 90e^{0{,}1t}$ centenas de reais por ano e $P_2'(t) = 140e^{0{,}07t}$ centenas de reais por ano.

44. **EFICIÊNCIA** Após passar t horas no emprego, um operário está produzindo $Q_1'(t) = 60 - 2(t-1)^2$ unidades por ano, enquanto um segundo operário está produzindo $Q_2'(t) = 50 - 5t$ unidades por hora.

a. Se os dois operários chegaram ao trabalho às 8 h, quantas unidades a mais o segundo operário terá produzido até meio-dia?

b. Interprete a resposta do item (a) como a área entre duas curvas.

45. **POPULAÇÃO MÉDIA** A população de uma certa cidade t anos após 1990 é dada por

$$P(t) = \frac{e^{0{,}2t}}{4 + e^{0{,}2t}} \quad \text{milhões de habitantes}$$

Qual foi a população média da cidade entre 1990 e 2000?

46. **CUSTO MÉDIO** O custo de produção de x unidades de um novo produto é $C(x) = 3x\sqrt{x} + 10$ centenas de reais. Qual é o custo médio para produzir 81 unidades?

47. **CONCENTRAÇÃO MÉDIA DE UM MEDICAMENTO** Um paciente recebe uma injeção e t horas mais tarde a concentração do medicamento no sangue do paciente é dada por

$$C(t) = \frac{3t}{(t^2 + 36)^{3/2}} \quad \text{mg/cm}^3$$

Qual é a concentração média do medicamento durante as primeiras 8 horas após a injeção?

48. **PRODUÇÃO MÉDIA** Uma empresa determina que quando L homens-horas são empregados, Q unidades de um certo produto são fabricados, onde

$$Q(L) = 500L^{2/3}$$

a. Qual é a produção média quando a mão-de-obra varia de 1.000 até 2.000 homens-horas?

b. Que nível de mão-de-obra entre 1.000 e 2.000 homens-horas resulta em uma produção igual ao valor calculado no item (a)?

49. **TEMPERATURA** Um pesquisador modela a temperatura T (em °C) entre as 6 e 18 h em uma certa cidade do norte dos Estados Unidos usando a função

$$T(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2 \quad \text{para } 0 \le t \le 12$$

onde t é o número de horas após as 6 h.

a. Qual é a temperatura média na cidade durante o horário de trabalho, das 8 às 17 h?

b. Em que instante (ou instantes) durante o horário de trabalho a temperatura na cidade é igual ao valor calculado no item (a)?

50. **PUBLICIDADE** Uma empresa de propaganda é contratada para promover um novo programa de televisão durante 3 semanas antes da estréia e 2 semanas após a estréia. Após t semanas de campanha, $P(t)$ por cento do público já ouviu falar do programa, onde

$$P(t) = \frac{59t}{0{,}7t^2 + 16} + 6$$

a. Qual é a porcentagem média do público que ouviu falar do programa durante as 5 semanas da campanha publicitária?

b. Em que instante das 5 semanas da campanha a porcentagem do público que ouviu falar do programa é igual ao valor calculado no item (a)?

51. **ENGENHARIA DE TRÂNSITO** Durante várias semanas, o departamento de estradas de rodagem vem registrando a velocidade dos veículos em uma via expressa de uma grande cidade. Os dados mostram que, entre as 13 e 18 h de um dia de semana, a velocidade dos veículos é dada por $S(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20$ quilômetros por hora, onde t é o número de horas após o meio-dia.

a. Determine a velocidade média dos veículos entre as 13 e 18 h.

b. Em que instante, entre 13 e 18 h, a velocidade dos veículos é igual ao valor calculado no item (a)?

52. **CAPACIDADE AERÓBICA MÉDIA** A capacidade aeróbica de uma pessoa com x anos de idade é dada por

$$A(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x} \quad \text{para } x \ge 10$$

Qual é a capacidade aeróbica média de uma pessoa entre 15 e 25 anos? E entre 60 e 70 anos?

53. **EFEITO TÉRMICO DO ALIMENTO** O metabolismo de um ser vivo em repouso ocorre a uma taxa praticamente constante, conhecida como *taxa de metabolismo basal*. Entretanto, qualquer tipo de atividade física acelera o metabolismo. Em particular, depois de ingerir alimentos, os organismos freqüentemente experimentam uma aceleração brusca do metabolismo, que leva algumas horas para retornar ao nível basal.

Juliana acaba de comer uma feijoada e sua taxa de metabolismo está acima do nível basal M_0. Suponha que t horas após a refeição, a taxa de metabolismo da jovem seja dada pela função

$$M(t) = M_0 + 50te^{-0{,}1t^2} \qquad 0 \le t \le 12$$

quilojoules por hora (kJ/h).

a. Qual é a taxa média de metabolismo de Juliana durante as primeiras 12 horas após comer a feijoada?

b. Plote a função $M(t)$. Qual é o valor máximo da taxa de metabolismo? Em que instante a taxa de metabolismo é máxima? [*Nota:* Todos os resultados devem ser expressos em termos de M_0.]

54. DISTRIBUIÇÃO DE RENDA Em um certo estado, observa-se que a distribuição de renda dos advogados é dada pela curva de Lorentz $y = L_1(x)$, onde

$$L_1(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$$

enquanto a dos médicos é dada por $y = L_2(x)$, onde

$$L_2(x) = \frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{8}x$$

Calcule o índice de Gini para as duas curvas de Lorentz. Em qual das profissões a distribuição de renda é mais justa?

55. DISTRIBUIÇÃO DE RENDA Em um certo país, um estudo indica que a distribuição de renda dos jogadores de voleibol é dada pela curva de Lorentz $y = L_1(x)$, onde

$$L_1(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x$$

enquanto a dos jogadores de basquete e a dos jogadores de futebol é dada por $y = L_2(x)$ e $y = L_3(x)$, respectivamente, onde

$$L_2(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x$$

e

$$L_3(x) = \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{5}x$$

Determine o índice de Gini para cada esporte profissional e determine em qual deles a distribuição de renda é mais justa. Em qual dos esportes a distribuição de renda é menos justa?

56. CRESCIMENTO COMPARATIVO A população de um país do terceiro mundo cresce exponencialmente a uma taxa insustentável de

$$P_1'(t) = 10e^{0.02t} \text{ milhares de habitantes por ano}$$

onde t é o número de anos após o ano 2000. Um estudo indica que se certas mudanças socioeconômicas forem introduzidas no país a população passará a crescer a uma taxa mais modesta dada por

$$P_2'(t) = 10 + 0{,}02t + 0{,}002t^2$$

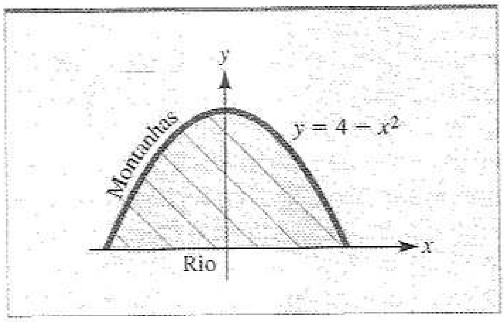
milhares de habitantes por ano. Qual será a redução de população no ano de 2010 se as mudanças forem executadas?

57. CRESCIMENTO COMPARATIVO Um segundo estudo realizado no país do Problema 56 indica a existência de limitações naturais que tendem a tornar a taxa de crescimento igual a

$$P_3'(t) = \frac{20e^{0.02t}}{1 + e^{0.02t}}$$

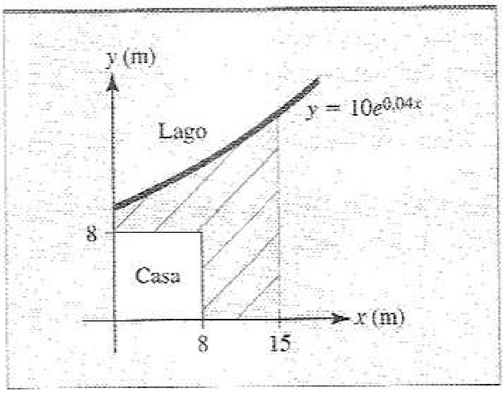
em vez da taxa exponencial $P_1'(t) = 10e^{0{,}02t}$. Se este novo estudo estiver correto, qual será a redução de população no ano de 2010 em relação ao modelo anterior?

58. ÁREA DE UMA REGIÃO As terras ocupadas por um vilarejo estão limitadas em um lado por um rio e nos outros lados por montanhas, formando a região sombreada que aparece na figura. Quando um sistema de coordenadas é traçado da forma indicada, as montanhas podem ser representadas aproximadamente pela curva $y = 4 - x^2$, onde x e y estão em quilômetros. Qual é a área ocupada pelo vilarejo?



PROBLEMA 58

59. VALOR DE UMA PROPRIEDADE A figura mostra uma casa de campo situada à beira de um lago. Quando um sistema de coordenadas é traçado da forma indicada, a margem do lago pode ser descrita aproximadamente por um arco da curva $y = 10e^{0{,}04x}$. Supondo que a casa custe R$ 2.000,00 o metro quadrado e o terreno do lado de fora da casa (a região sombreada da figura) custe R$ 800,00 o metro quadrado, qual é o valor total da propriedade?



PROBLEMA 59

60. HEMODINÂMICA Um modelo* do sistema cardiovascular relaciona o volume de sangue $V(t)$ na aorta no instante t durante a sístole (fase de contração) à pressão $P(t)$ na aorta no mesmo instante através da equação

$$V(t) = [C_1 + C_2P(t)]\left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right)$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas e T é o período da fase sistólica (um tempo fixo). Suponha que a pressão aórtica $P(t)$ aumente a uma taxa constante a partir de P_0 (quando $t = 0$) até P_1 (quando $t = T$).

a. Mostre que

$$P(t) = \left(\frac{P_1 - P_0}{T}\right)t + P_0$$

*J.G. Defares, J.J. Osborn and H.H. Hura, *Acta Physiol. Pharm. Neerl.*, Vol. 12, 1963, pp. 189-265.

b. Determine o volume médio de sangue na aorta durante a fase sistólica ($0 \leq t \leq T$). [*Nota:* a resposta deve ser dada em termos de C_1, C_2, P_0, P_1 e T.]

61. REAÇÃO A UM MEDICAMENTO Em certos modelos biológicos, a reação do corpo humano a um certo medicamento é medida por uma função da forma

$$F(M) = \frac{1}{3}(kM^2 - M^3) \qquad 0 \leq M \leq k$$

onde k é uma constante positiva e M é a quantidade de medicamento absorvida pelo corpo. A sensibilidade do corpo ao medicamento é medida através da derivada $S = F'(M)$.

a. Mostre que a sensibilidade do corpo ao medicamento é máxima para $M = \dfrac{k}{3}$.

b. Qual é a reação média ao medicamento para $0 \leq M \leq \dfrac{k}{3}$?

62. Use uma calculadora para plotar as curvas $y = x^2e^{-x}$ e $y = \dfrac{1}{x}$ no mesmo gráfico. Use **ZOOM** e **TRACE** ou outro recurso da calculadora para determinar os pontos de interseção das duas curvas. Em seguida, calcule a área da região limitada pelas curvas usando a rotina de integração numérica da calculadora.

63. Repita o Problema 62 para as curvas

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{e} \quad y = x^3 - 8{,}9x^2 + 26{,}7x - 27$$

64. Mostre que o valor médio V de uma função contínua $f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ pode ser calculado como a inclinação da reta que liga os pontos $(a, F(a))$ e $(b, F(b))$ na curva $y = F(x)$, onde $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$.

65. Considere um corpo que esteja se movendo em linha reta. Explique por que a velocidade vetorial média do corpo em qualquer intervalo de tempo é igual ao valor médio da velocidade vetorial no mesmo intervalo.

SEÇÃO 5.5 Aplicações em Economia e Finanças

Nesta seção vamos discutir algumas aplicações importantes da integração definida em economia e finanças, como os valores futuro e atual de um fluxo de receita, a disposição do consumidor para gastar e os excedentes do consumidor e do produtor. Começamos por mostrar que a integração pode ser usada para determinar o valor de um bem.

Vida Útil de uma Máquina

Suponha que t anos após entrar em uso uma máquina tenha gerado uma receita total $R(t)$ e o custo total de operação e manutenção da máquina seja $C(t)$. Nesse caso, o lucro total gerado pela máquina até o instante t é $P(t) = R(t) - C(t)$. O lucro diminui quando os custos aumentam mais depressa que a receita, ou seja, quando $C'(T) > R'(T)$. Isto significa que, do ponto de vista econômico, a máquina deve ser descartada no instante T no qual $C'(T) = R'(T)$; por esta razão, o período de tempo $0 \leq t \leq T$ é chamado de **vida útil** da máquina. O lucro gerado pela máquina durante sua vida útil é uma medida do seu valor para a empresa.

12 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.5.1. Suponha que a taxa de aumento dos custos de uma nova máquina seja $C'_{nova}(t) = 2.000 + 6t^2$. Compare a vida útil e o lucro gerado pela nova máquina com os resultados para a máquina antiga. Use uma janela [0, 20]5 por [−2 000, 8 000]1 000.

EXEMPLO 5.5.1

Quando tem t anos de serviço, uma certa máquina industrial gera receita a uma taxa $R'(t) = 5.000 - 20t^2$ reais por ano e os custos de operação e manutenção da máquina aumentam a uma taxa $C'(t) = 2.000 + 10t^2$ reais por mês.

a. Qual é a vida útil da máquina?

b. Calcule o lucro gerado pela máquina durante sua vida útil.

Solução

a. Para determinar a vida útil da máquina, basta igualar a taxa de variação da receita à taxa de variação do custo:

$$\begin{aligned} C'(t) &= R'(t) \\ 2.000 + 10t^2 &= 5.000 - 20t^2 \\ 30t^2 &= 3.000 \\ t^2 &= 100 \\ t &= 10 \end{aligned}$$

Assim, a máquina tem uma vida útil de 10 anos.

b. Como o lucro $P(t)$ é igual a $R(t) - C(t)$, temos $P'(t) = R'(t) - C'(t)$ e, portanto, o lucro gerado pela máquina durante sua vida útil é

$$\begin{aligned} L = P(10) - P(0) &= \int_0^{10} P'(t)\,dt \\ &= \int_0^{10} [R'(t) - C'(t)]\,dt \\ &= \int_0^{10} [(5.000 - 20t^2) - (2.000 + 10t^2)]\,dt \\ &= \int_0^{10} [3.000 - 30t^2]\,dt \\ &= 3.000t - 10t^3 \Big|_0^{10} = \text{R\$ } 20.000{,}00 \end{aligned}$$

As curvas das taxas de variação da receita e do custo aparecem na Figura 5.17. O lucro gerado pela máquina durante sua vida útil é representado pela região sombreada entre as duas curvas.

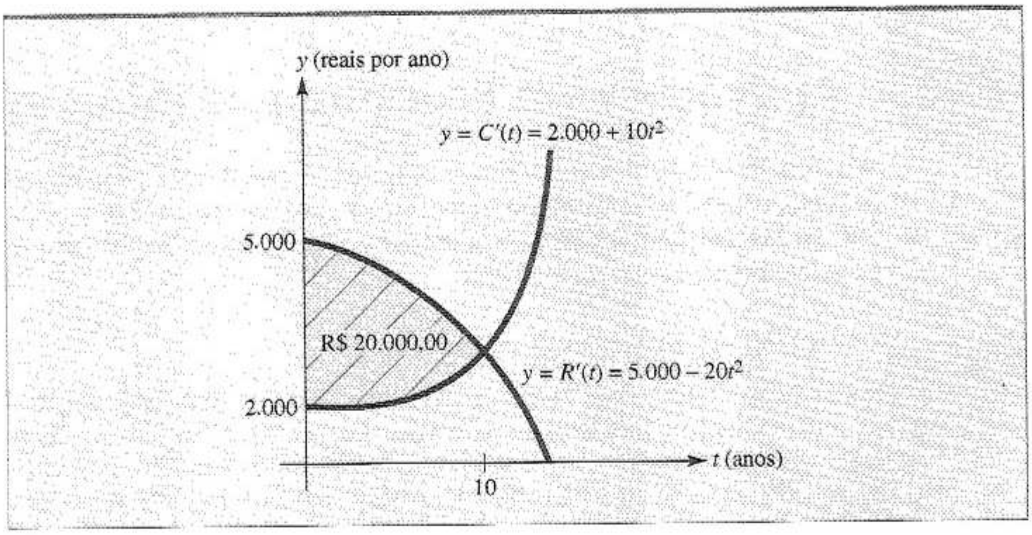


FIGURA 5.17 Lucro gerado por uma máquina durante sua vida útil.

Valor Futuro e Valor Atual de um Fluxo de Receita

Em nossa aplicação seguinte, consideramos uma transferência contínua de numerário para uma aplicação que rende juros durante um certo período de tempo (o **termo**). O **valor futuro do fluxo de receita** é o montante (dinheiro aplicado mais juros) acumulado durante o termo.

O cálculo do montante de um fluxo de receita é ilustrado no Exemplo 5.5.2. A estratégia usada para resolver o problema consiste em aproximar o fluxo contínuo de receita por uma seqüência de depósitos discretos que recebe o nome de **anuidade**. O montante associado à anuidade é uma certa soma cujo limite (uma integral definida) é o valor futuro do fluxo de receita.

EXEMPLO 5.5.2

Uma conta recebe depósitos a uma taxa constante de R$ 1.200,00 por ano. A conta rende juros anuais de 8%, capitalizados continuamente. Qual é o saldo da conta após 2 anos?

Solução

Como vimos na Seção 4.1, P reais investidos a 8% de juros capitalizados continuamente resultam em $Pe^{0,08t}$ reais t anos depois.

Para determinar o valor futuro do fluxo de receita, o primeiro passo é dividir o intervalo de 2 anos, $0 \leq t \leq 2$, em n subintervalos iguais de largura Δt anos. Seja t_j o início do subintervalo de ordem j. Durante este subintervalo,

$$\text{Dinheiro depositado} = (\text{reais por ano})(\text{número de anos}) = 1.200\,\Delta t$$

Se todo o dinheiro é depositado no início do subintervalo (ou seja, no instante t_j), permanece na conta $2 - t_j$ anos e, portanto, resulta em $(1.200\Delta t)e^{0,08(2-t_j)}$ reais. Assim,

$$\begin{matrix}\text{Valor futuro do dinheiro depositado} \\ \text{durante o subintervalo de ordem } j\end{matrix} \approx 1.200e^{0,08(2-t_j)}\Delta t$$

Esta situação está ilustrada na Figura 5.18.

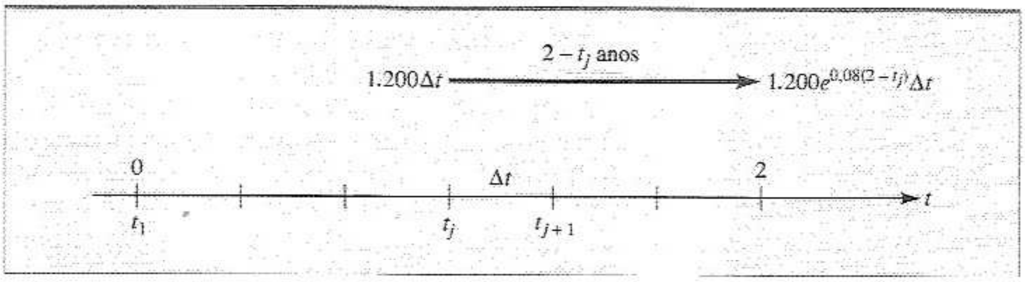


FIGURA 5.18 Valor futuro (aproximado) do dinheiro depositado durante o subintervalo de ordem j.

O valor futuro de todo o fluxo de receita é a soma dos valores futuros das quantias depositadas nos n subintervalos. Assim,

$$\text{Valor futuro do fluxo de receita} \approx \sum_{j=1}^{n} 1.200e^{0,08(2-t_j)}\Delta t$$

(Observe que este valor é apenas de uma aproximação, já que se baseia na premissa de que $1.200\Delta t$ reais são depositados no início de cada intervalo e não continuamente ao longo do intervalo.)

Quando n aumenta indefinidamente, a largura dos intervalos tende a zero e a aproximação tende para o valor futuro real do fluxo de receita. Assim,

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\text{Valor futuro do} \\ \text{fluxo de receita}\end{matrix} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} 1.200e^{0,08(2-t_j)}\Delta t \\ &= \int_0^2 1.200e^{0,08(2-t)}\,dt = 1.200e^{0,16}\int_0^2 e^{-0,08t}\,dt \\ &= -\frac{1.200}{0,08}e^{0,16}(e^{-0,08t})\Big|_0^2 = -15.000e^{0,16}(e^{-0,16} - 1) \\ &= -15.000 + 15.000e^{0,16} \approx \text{R\$}2.602,66\end{aligned}$$

Generalizando o raciocínio ilustrado no Exemplo 5.5.2, chegamos à seguinte fórmula de integração para o valor futuro de um fluxo de receita $f(t)$ com um termo de T anos:

$$\begin{aligned}\text{VF} &= \int_0^T f(t)\, e^{r(T-t)}\,dt \\ &= \int_0^T f(t)\, e^{rT}\, e^{-rt}\,dt \\ &= e^{rT}\int_0^T f(t)\, e^{-rt}\,dt \qquad \textit{tirando a constante } e^{rT} \textit{ da integral}\end{aligned}$$

A aplicação desta fórmula aos instantes final e inicial do processo é apresentada a seguir.

Valor Futuro de um Fluxo de Receita ■ Suponha que sejam realizados depósitos continuamente em uma conta durante um período de tempo $0 \le t \le T$ a uma taxa dada pela função $f(t)$ e a conta renda uma taxa anual de juros r, capitalizados continuamente. Nesse caso, o valor futuro VF do fluxo de receita durante o termo T é dado pela integral definida

$$\text{VF} = \int_0^T f(t)\, e^{r(T-t)}\,dt = e^{rT}\int_0^T f(t)\, e^{-rt}\,dt$$

No Exemplo 5.5.2, tínhamos $f(t) = 1.200$, $r = 0{,}08$, $T = 2$ e, portanto,

$$\text{VF} = e^{0,08(2)} \int_0^2 1.200e^{-0,08t}\,dt$$

O **valor atual** de um fluxo de receita contínuo $f(t)$ durante um termo de T anos é a quantia A que deve ser aplicada no momento presente, de uma única vez, à taxa de juros vigente, para gerar a mesma receita que o fluxo de receita durante o mesmo período de T anos. Como A reais investidos a uma taxa anual r de juros capitalizados continuamente resultam em Ae^{rT} reais após T anos, devemos ter

$$Ae^{rT} = e^{rT} \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\,dt$$

$$A = \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\,dt \qquad \textit{dividindo ambos os membros por } e^{rT}$$

Resumindo:

Valor Atual de um Fluxo de Receita ■ O **valor atual** VA de um fluxo de receita contínuo $f(t)$ em uma aplicação por um termo de T anos que rende uma taxa anual r de juros capitalizados continuamente é dado por

$$\text{VA} = \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\,dt$$

O Exemplo 5.5.3 ilustra o uso do valor atual para tomar decisões financeiras.

EXEMPLO 5.5.3

Jane está tentando decidir entre dois investimentos. O primeiro é de R$ 1.000,00 e deverá gerar um fluxo de receita contínuo $f_1(t) = 3.000e^{0,03t}$ reais por ano. O segundo é de R$ 4.000,00 e deverá gerar um fluxo de receita constante $f_2(t) = 4.000$ reais por ano. Se a taxa de juros permanece constante em 5% ao ano capitalizados continuamente por 5 anos, qual é o melhor investimento durante este período de tempo?

Solução

O valor líquido de cada investimento para o período de 5 anos é o valor atual do investimento menos o custo inicial. Para os dois investimentos, $r = 0{,}05$ e $T = 5$.

No caso do primeiro investimento,

$$\begin{aligned}
\text{VA} - \text{custo} &= \int_0^5 (3.000e^{0,03t})e^{-0,05t}\,dt - 1.000 \\
&= 3.000 \int_0^5 e^{0,03t - 0,05t}\,dt - 1.000 \\
&= 3.000 \int_0^5 e^{-0,02t}\,dt - 1.000 \\
&= 3.000\left(\frac{e^{-0,02t}}{-0,02}\right)\Bigg|_0^5 - 1.000 \\
&= -150.000[e^{-0,02(5)} - e^0] - 1.000 \\
&= 13.274,39
\end{aligned}$$

No caso do segundo investimento,

$$\begin{aligned}
\text{VA} - \text{custo} &= \int_0^5 (4.000)e^{-0,05t}\,dt - 4.000 \\
&= 4.000\left(\frac{e^{-0,05t}}{-0,05}\right)\Bigg|_0^5 - 4.000 \\
&= -80.000[e^{-0,05(5)} - e^0] - 4.000 \\
&= 13.695,94
\end{aligned}$$

Assim, o valor líquido do primeiro investimento é de R$ 13.274,39 e o do segundo é de R$ 13.695,04, o que significa que o segundo investimento é ligeiramente melhor.

Curva de Demanda e a Disposição do Consumidor para Gastar

Quando estudam o comportamento dos consumidores, os economistas muitas vezes supõem que o preço que um consumidor ou grupo de consumidores está disposto a pagar para comprar uma unidade a mais de uma mercadoria é função do número de unidades da mercadoria que o consumidor ou grupo já comprou.

Assim, por exemplo, uma família pode estar disposta a gastar até R$ 1.000,00 para ter um aparelho de televisão. Pela conveniência de ter dois aparelhos (para eliminar o conflito entre uma novela e um jogo de futebol, por exemplo), a família poderia estar disposta a gastar mais R$ 500,00 para ter um segundo aparelho. Como não haveria muita utilidade para um terceiro aparelho, a família talvez não estivesse disposta a gastar mais de R$ 200,00 para comprar um terceiro aparelho.

A função $p = D(q)$ que expressa o preço que os consumidores estão dispostos a pagar pela q-ésima unidade de uma mercadoria é chamada pelos economistas de **função de demanda do consumidor** para a mercadoria. Como mostra a Figura 5.19, a função de demanda do consumidor é, em geral, uma função decrescente de q. Em outras palavras, o preço que os consumidores estão dispostos a pagar para adquirir uma unidade a mais normalmente diminui quando o número de unidades já adquiridas aumenta.

A função de demanda do consumidor $p = D(q)$ também pode ser interpretada como a taxa de variação com q da quantia total $A(q)$ que os consumidores estão dispostos a gastar para adquirir q unidades, ou seja, dA/dq. Integrando esta equação, verificamos que a quantia total que os consumidores estão dispostos a pagar por q_0 unidades de um produto é dada por

$$A(q_0) - A(0) = \int_0^{q_0} \frac{dA}{dq}\, dq = \int_0^{q_0} D(q)\, dq$$

Neste contexto, os economistas chamam $A(q)$ de **disposição total para gastar** e $D(q) = A'(q)$ de **disposição marginal para gastar**. Em termos geométricos, a disposição total para gastar com q_0 unidades é a área sob a curva de demanda $p = D(q)$ entre $q = 0$ e $q = q_0$ (Figura 5.19).

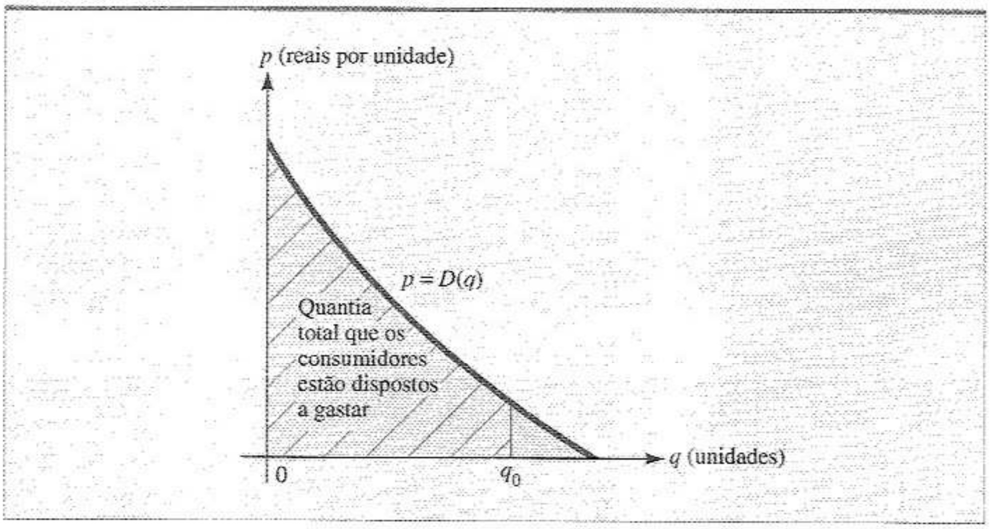


FIGURA 5.19 A quantia que os consumidores estão dispostos a gastar é a área sob a curva de demanda.

EXEMPLO 5.5.4

A função de demanda do consumidor de um certo produto é $D(q) = 4(25 - q^2)$ reais por unidade.

a. Determine a quantia total que os consumidores estão dispostos a gastar para adquirir 3 unidades do produto.

b. Trace a curva de demanda e interprete a resposta do item (a) como uma área.

> **13 EXPLORE!**
>
> No Exemplo 5.5.4, mude $D(q)$ para $D_{nova}(q) = 4(23 - q^2)$. A quantia que os consumidores estão dispostos a gastar para obter 3 unidades do produto aumenta ou diminui? Plote $D_{nova}(q)$ em negrito para comparar com a curva de $D(q)$, usando uma janela [0, 5]1 por [0, 150]10.

Solução

a. Como a função de demanda $D(q) = 4(25 - q^2)$, medida em reais por unidade, é a taxa de variação com q da disposição do consumidor para gastar, a quantia total que o consumidor está disposto a gastar para comprar 3 unidades do produto é dada pela integral definida

$$A(3) = \int_0^3 D(q)\, dq = 4\int_0^3 (25 - q^2)\, dq$$

$$= 4\left(25q - \frac{1}{3}q^3\right)\Bigg|_0^3 = \text{R\$ } 264{,}00$$

b. A curva da demanda do consumidor aparece na Figura 5.20. Em termos geométricos, a quantia total, R\$ 264,00, que os consumidores estão dispostos a gastar para comprar 3 unidades do produto é a área sob a curva de demanda entre $q = 0$ e $q = 3$.

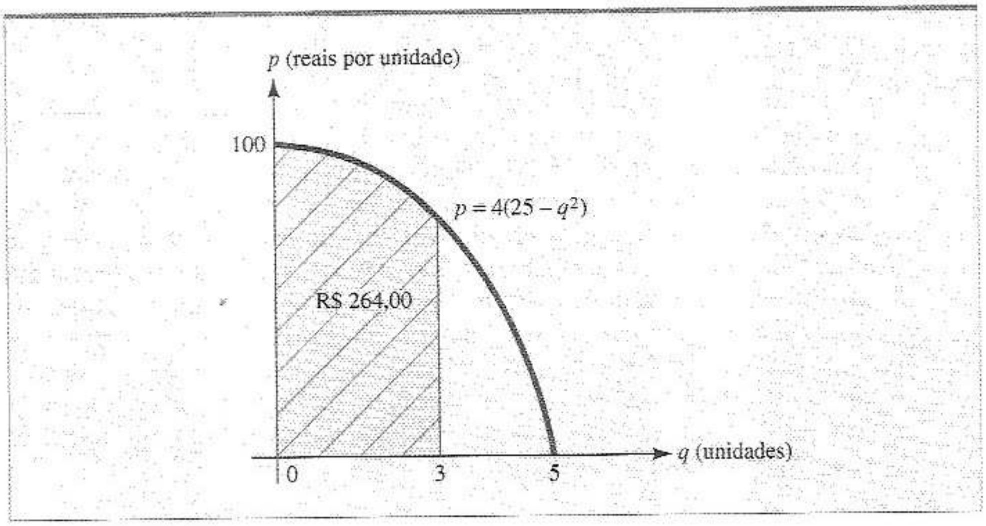


FIGURA 5.20 A disposição do consumidor para adquirir 3 unidades quando a demanda é dada por $D(q) = 4(25 - q^2)$.

Excedentes do Consumidor e do Produtor

Em uma economia competitiva, a quantia total que os consumidores gastam com um produto geralmente é menor que a que estariam dispostos a gastar. A diferença entre as duas quantias pode ser considerada como uma poupança do consumidor e é conhecida na economia como **excedente do consumidor**. Assim,

$$\begin{bmatrix}\text{Excedente}\\ \text{do consumidor}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\text{quantia que os consumidores}\\ \text{estão dispostos a pagar}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{quantia gasta}\\ \text{pelos consumidores}\end{pmatrix}$$

O preço de venda de um produto é determinado pelo mercado. Uma vez conhecido o preço p_0 de um produto, o número de unidades q_0 adquiridas pelos consumidores é dado pela equação de demanda $p = D(q)$. A quantia gasta pelos consumidores para adquirir q_0 unidades do produto ao preço de p_0 reais a unidade é p_0q_0 reais. O excedente do consumidor é calculado subtraindo esta quantia da quantia total que o consumidor estaria disposto a gastar para adquirir q_0 unidades do produto.

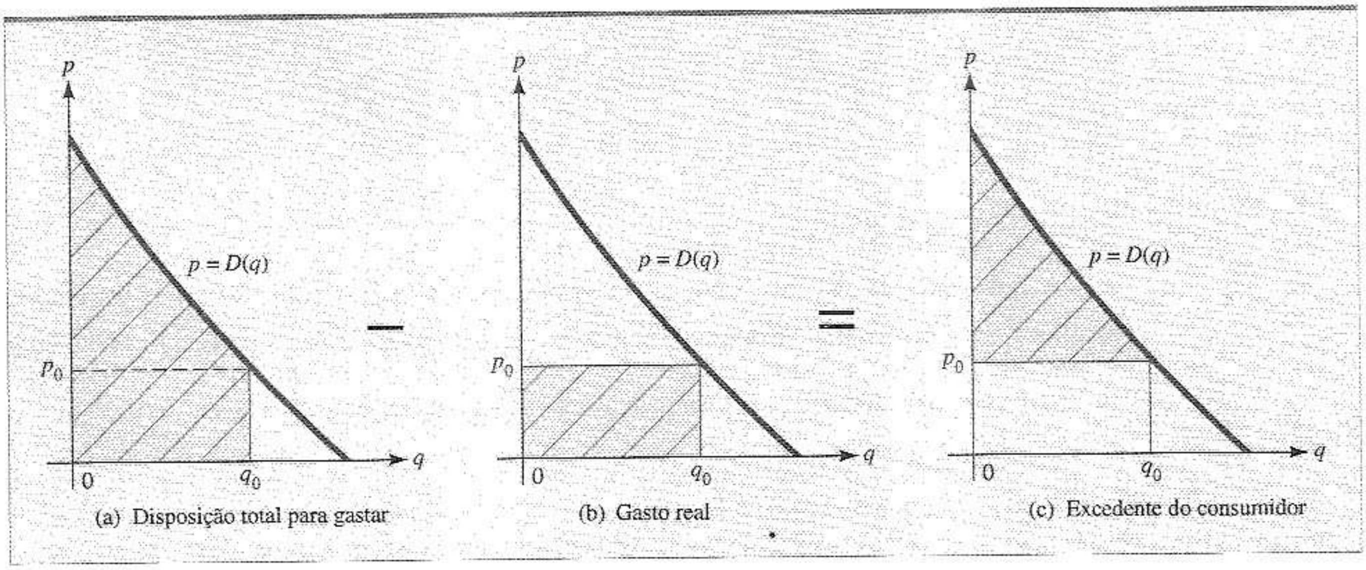
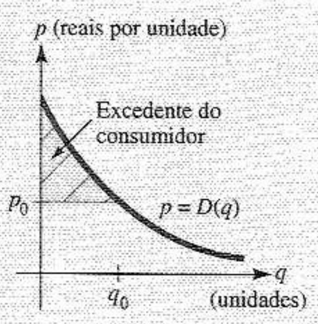


FIGURA 5.21 Interpretação geométrica do excedente do consumidor.

Para ter uma idéia melhor do conceito de excedente do consumidor, considere mais uma vez o exemplo da família que estava disposta a gastar R\$ 1.000,00 com o primeiro aparelho de televisão, R$ 500,00 com o segundo e R$ 200,00 com o terceiro. Suponha que o preço de mercado dos aparelhos de televisão seja de R$ 500,00. Nesse caso, o casal compraria dois aparelhos e gastaria um total de 2×500 = R$ 1.000,00. Esta quantia é menor que os 1.000 + 500 = R$ 1.500,00 que a família estaria disposta a gastar para comprar os dois aparelhos. A economia de 1.500 − 1.000 = R$ 500,00 é o excedente do consumidor da família.

O excedente do consumidor tem uma interpretação geométrica simples, que está ilustrada na Figura 5.21. Os símbolos p_0 e q_0 representam, respectivamente, o preço de mercado e a demanda correspondente de um produto. A Figura 5.21a mostra a região sob a curva de demanda entre $q = 0$ e $q = q_0$. Esta área, como vimos, representa a quantia total que os consumidores estão dispostos a gastar para obter q_0 unidades do produto. O retângulo da Figura 5.21b tem uma área igual a p_0q_0 e, portanto, representa a quantia gasta pelo consumidor para adquirir q_0 unidades a um preço unitário p_0. A diferença entre estas duas áreas (Figura 5.21c) representa o excedente do consumidor. Em outras palavras, o excedente do consumidor, EC, é a área da região entre a curva de demanda $p = D(q)$ e a reta horizontal $p = p_0$ e, portanto, é igual à integral definida

$$\begin{aligned} EC = \int_0^{q_0} [D(q) - p_0]\, dq &= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - \int_0^{q_0} p_0\, dq \\ &= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 q \Big|_0^{q_0} \\ &= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 q_0 \end{aligned}$$

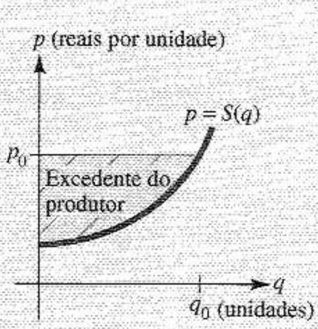


Excedente do Consumidor ■ Se q_0 unidades de um produto são vendidas por um preço unitário p_0 e se $p = D(q)$ é a função de demanda do consumidor do produto,

$$\begin{bmatrix}\text{Excedente} \\ \text{do consumidor}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{quantia que os consumidores} \\ \text{estão dispostos a gastar} \\ \text{com } q_0 \text{ unidades}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{quantia gasta pelos} \\ \text{consumidores} \\ \text{com } q_0 \text{ unidades}\end{bmatrix}$$

$$EC = \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 q_0$$

O **excedente do produtor** é o equivalente para o produtor do excedente do consumidor. A **função de oferta** $p = S(q)$ representa o preço unitário que os produtores estão dispostos a aceitar para fornecer q_0 unidades de um produto. Os produtores que estavam dispostos a aceitar um preço unitário menor que $p_0 = S(q_0)$ reais pelo produto se beneficiam do fato de que o preço é p_0. O excedente do produtor é a diferença entre a quantia que os produtores estariam dispostos a aceitar para fornecer q_0 unidades e a quantia recebida. Raciocinando como no caso do excedente do consumidor, obtemos a seguinte expressão para o excedente do produtor:



Excedente do Produtor ■ Se q_0 unidades de um produto são vendidas a um preço de p_0 reais a unidade e $p = S(q)$ é a função de oferta do produtor,

$$\begin{bmatrix}\text{Excedente} \\ \text{do produtor}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{despesa dos} \\ \text{consumidores com} \\ q_0 \text{ unidades}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{quantia que os produtores} \\ \text{aceitam receber por} \\ q_0 \text{ unidades}\end{bmatrix}$$

$$EP = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\, dq$$

EXEMPLO 5.5.5

Estima-se que q (mil) pneus radiais serão comprados (demandados) pelos atacadistas quando o preço for

$$p = D(q) = -0{,}1q^2 + 90$$

reais por pneu e q (mil) pneus serão produzidos (oferecidos) pelos fabricantes quando o preço for

$$p = S(q) = 0{,}2q^2 + q + 50$$

reais por pneu.

a. Determine o preço de equilíbrio (o preço para o qual a oferta é igual à demanda) e o número de pneus vendidos por este preço.

b. Determine os excedentes do consumidor e do produtor quando o preço for igual ao preço de equilíbrio.

Solução

a. As curvas de oferta e demanda aparecem na Figura 5.22. Para que a oferta seja igual à demanda, devemos ter

$$\begin{aligned} -0{,}1q^2 + 90 &= 0{,}2q^2 + q + 50 \\ 0{,}3q^2 + q - 40 &= 0 \\ q &= 10 \quad \text{(desprezando } q \approx -13{,}33\text{)} \end{aligned}$$

E, portanto, $p = -0{,}1(10)^2 + 90 = 80$ reais por pneu. Assim, o equilíbrio é atingido para um preço de R$ 80,00 por pneu, caso em que 10.000 pneus são fabricados e vendidos.

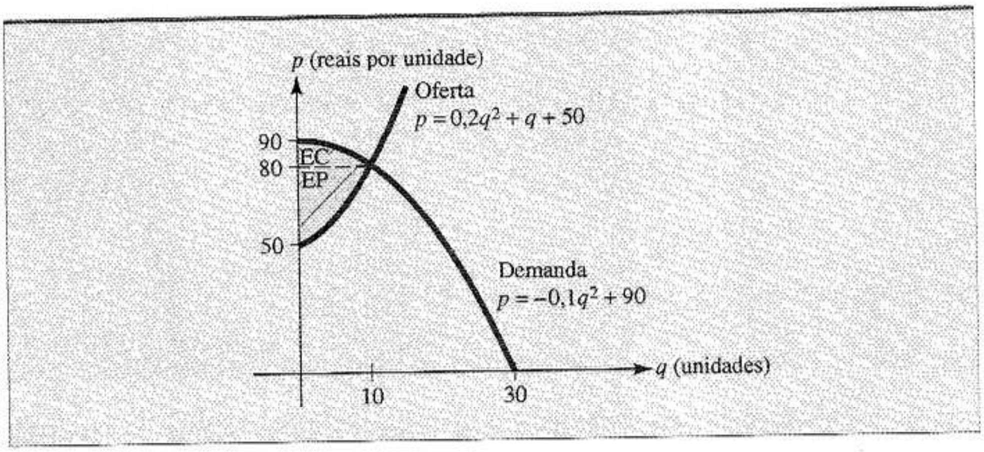


FIGURA 5.22 Excedentes do produtor e do consumidor para as funções de demanda e de oferta do Exemplo 5.5.5.

b. Fazendo $p_0 = 80$ e $q_0 = 10$, verificamos que o excedente do consumidor é

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{10} (-0{,}1q^2 + 90)\,dq - (80)(10) \\ &= \left[-0{,}1\left(\frac{q^3}{3}\right) + 90q\right]\Bigg|_0^{10} - (80)(10) \\ &\approx 866{,}67 - 800 = 66{,}67 \end{aligned}$$

ou R$ 66.670,00 (já que $q_0 = 10$ corresponde a 10.000 pneus). O excedente do consumidor é a região sombreada EC da Figura 5.22.

O excedente do produtor é

$$\begin{aligned} \text{EP} &= (80)(10) - \int_0^{10} (0{,}2q^2 + q + 50)\,dq \\ &= (80)(10) - \left[0{,}2\left(\frac{q^3}{3}\right) + \left(\frac{q^2}{2}\right) + 50q\right]\Bigg|_0^{10} \\ &\approx 800 - 616{,}67 = 183{,}33 \end{aligned}$$

ou R$ 183.330,00. O excedente do produtor é a região sombreada EP da Figura 5.22.

PROBLEMAS 5.5

DISPOSIÇÃO DO CONSUMIDOR PARA GASTAR *Para as funções de demanda do consumidor D(q) dos Problemas 1 a 6:*

(a) Determine a quantia total que os consumidores estão dispostos a gastar para adquirir q_0 unidades do produto.

(b) Trace a curva de demanda e interprete a disposição do consumidor para gastar do item (a) como uma área.

1. $D(q) = 2(64 - q^2)$ reais por unidade; $q_0 = 6$ unidades

2. $D(q) = \dfrac{300}{(0{,}1q + 1)^2}$ reais por unidade; $q_0 = 5$ unidades

3. $D(q) = \dfrac{400}{0{,}5q + 2}$ reais por unidade; $q_0 = 12$ unidades

4. $D(q) = \dfrac{300}{4q + 3}$ reais por unidade; $q_0 = 10$ unidades

5. $D(q) = 40e^{-0{,}05q}$ reais por unidade; $q_0 = 10$ unidades

6. $D(q) = 50e^{-0{,}04q}$ reais por unidade; $q_0 = 15$ unidades

EXCEDENTE DO CONSUMIDOR *Nos Problemas 7 a 10, $p = D(q)$ é o preço unitário em reais pelo qual q unidades de um certo produto são demandadas pelo mercado (ou seja, todas as q unidades são vendidas se forem oferecidas por este preço) e q_0 é um certo nível de produção. Em cada caso, determine o preço $p_0 = D(q_0)$ para o qual q_0 unidades são demandadas e calcule o excedente do consumidor correspondente, EC. Trace a curva de demanda $y = D(q)$ e sombreie a região cuja área representa o excedente do consumidor.*

7. $D(q) = 2(64 - q^2)$; $q_0 = 3$ unidades

8. $D(q) = 150 - 2q - 3q^2$; $q_0 = 6$ unidades

9. $D(q) = 40e^{-0{,}05q}$; $q_0 = 5$ unidades

10. $D(q) = 75e^{-0{,}04q}$; $q_0 = 3$ unidades

EXCEDENTE DO PRODUTOR *Nos Problemas 11 a 14, $p = S(q)$ é o preço unitário em reais pelo qual q unidades de um certo produto serão produzidas e q_0 é um certo nível de produção. Em cada caso, determine o preço $p_0 = S(q_0)$ para o qual q_0 unidades são oferecidas e calcule o excedente do produtor correspondente, EP. Trace a curva de oferta $y = S(q)$ e sombreie a região cuja área representa o excedente do produtor.*

11. $S(q) = 0{,}3q^2 + 30$; $q_0 = 4$ unidades

12. $S(q) = 0{,}5q + 15$; $q_0 = 5$ unidades

13. $S(q) = 10 + 15e^{0{,}03q}$; $q_0 = 3$ unidades

14. $S(q) = 17 + 11e^{0{,}01q}$; $q_0 = 7$ unidades

EXCEDENTES DO CONSUMIDOR E DO PRODUTOR NO EQUILÍBRIO *Nos Problemas 15 a 19, são dadas as funções demanda e oferta, D(q) e S(q), para um certo produto. Isto significa que q mil unidades do produto serão demandadas (vendidas) se o preço unitário for $p = D(q)$ reais e q mil unidades serão oferecidas (fabricadas) se o preço unitário for $p = S(q)$ reais. Em cada caso:*

(a) Determine o preço de equilíbrio p_e (para o qual a oferta é igual à demanda).

(b) Determine o excedente do consumidor e o excedente do produtor no equilíbrio.

15. $D(q) = 131 - \dfrac{1}{3}q^2$; $S(q) = 50 + \dfrac{2}{3}q^2$

16. $D(q) = 65 - q^2$; $S(q) = \dfrac{1}{3}q^2 + 2q + 5$

17. $D(q) = -0{,}3q^2 + 70$; $S(q) = 0.1q^2 + q + 20$

18. $D(q) = \sqrt{245 - 2q}$; $S(q) = 5 + q$

19. $D(q) = \dfrac{16}{q + 2} - 3$; $S(q) = \dfrac{1}{3}(q + 1)$

20. LUCRO DURANTE A VIDA ÚTIL DE UMA MÁQUINA Suponha que após t anos de uso uma certa máquina industrial gere uma receita à taxa de $R'(t) = 6.025 - 8t^2$ reais por ano e que os custos de operação e manutenção se acumulem à taxa de $C'(t) = 4.681 + 13t^2$ reais por ano.

a. Após quantos anos de uso a máquina deixa de ser rentável?

b. Calcule a receita líquida gerada pela máquina durante sua vida útil.

c. Plote a curva da taxa de variação da receita $y = R'(t)$ e a curva da taxa de variação de custo $C'(t)$ e sombreie a região cuja área representa a receita líquida calculada no item (b).

21. LUCRO DURANTE A VIDA ÚTIL DE UMA MÁQUINA Responda às perguntas do Problema 20 para uma máquina que gere receita à taxa de $R'(t) = 7.250 - 18t^2$ reais por ano e para a qual os custos de operação e manutenção se acumulem à taxa de $C'(t) = 3.620 + 12t^2$ reais por ano.

22. CAMPANHA BENEFICENTE Estima-se que daqui a t semanas as contribuições para uma campanha beneficente estarão chegando a uma taxa $R'(t) = 5.000e^{-0{,}2t}$ reais por semana, enquanto as despesas com a campanha estarão se acumulando à taxa constante de R$ 676,00 por semana.

a. Durante quanto tempo valerá a pena prosseguir com a campanha?

b. Qual a receita líquida gerada pela campanha durante o período calculado no item (a)?

c. Interprete o resultado do item (b) como a área entre duas curvas.

23. CAMPANHA BENEFICENTE Responda às perguntas do Problema 22 para o caso de uma campanha beneficente em que as contribuições chegam a uma taxa $R'(t) = 6.537e^{-0{,}3t}$ reais por semana e as despesas se acumulam a uma taxa constante de R$ 593,00 por semana.

24. MONTANTE DE UM FLUXO DE RECEITA Depósitos são feitos continuamente em uma conta bancária à taxa constante de R$ 2.400,00 por ano. A conta rende juros de 6% ao ano capitalizados continuamente. Qual é o saldo da conta após 5 anos?

25. MONTANTE DE UM FLUXO DE RECEITA Depósitos são feitos continuamente em uma conta bancária à taxa constante de R$ 1.000,00 por ano. A conta rende juros de 10% ao ano capitalizados continuamente. Qual é o saldo da conta após 10 anos?

26. DECISÃO SOBRE UMA REFORMA Magda pretende ampliar sua loja de produtos importados e recebeu duas propostas para a reforma. A primeira custará R$ 40.000,00 e a segunda, mais modesta, apenas R$ 25.000,00. Entretanto, ela espera que os melhoramentos introduzidos com a primeira reforma lhe permitam obter uma receita contínua de R$ 10.000,00 por ano, enquanto a receita obtida com a segunda seria apenas de R$ 8.000,00 por ano. Qual dos dois planos é mais vantajoso para os próximos 3 anos se a taxa de juros prevista é de 5% ao ano, capitalizados continuamente?

27. **APOSENTADORIA** Com 25 anos, Rubem começa a fazer depósitos anuais de R$ 2.500,00 em um fundo de aposentadoria que rende juros de 5% ao ano capitalizados continuamente. Considerando os depósitos como um fluxo de receita contínuo, qual será o saldo do fundo quando tiver 60 anos? E quando tiver 65 anos?

28. **APOSENTADORIA** Aos 30 anos, Luzia começa a fazer depósitos anuais de R$ 2.000,00 em um fundo de aposentadoria que rende juros de 8% ao ano capitalizados continuamente. Considerando os depósitos como um fluxo de receita contínuo, qual será o saldo do fundo quando tiver 55 anos?

29. **VALOR ATUAL DE UM INVESTIMENTO** Um investimento gera receita continuamente a uma taxa constante de R$ 1.200,00 por ano durante 5 anos. Se a taxa de juros permanece constante em 5% ao ano capitalizados continuamente, qual é o valor atual do investimento?

30. **VALOR ATUAL DE UMA FRANQUIA** A administração de uma cadeia nacional de pizzarias está oferecendo uma franquia de 10 anos para uma filial em Fortaleza. A experiência em locais semelhantes sugere que daqui a t anos a loja estará gerando lucro à taxa de $f(t) = 10.000$ reais por ano. A taxa de juros deverá permanecer fixa durante os próximos 6 anos em 4% capitalizados continuamente. Qual é o valor atual da franquia?

31. **ANÁLISE DE INVESTIMENTOS** Almir recebeu duas propostas de investimento. A primeira é uma aplicação de R$ 50.000,00 que lhe proporcionará um fluxo de receita contínuo de R$ 15.000,00 ao ano; a segunda é uma aplicação de R$ 30.000,00 que lhe proporcionará um fluxo de receita contínuo de R$ 9.000,00. Se a taxa de juros permanecer constante em 6% ao ano capitalizados continuamente, qual é a proposta mais vantajosa para os próximos 5 anos?

32. **ANÁLISE DE INVESTIMENTOS** Sérgio aplica R$ 4.000,00 em um investimento que proporciona um fluxo de receita contínuo a uma taxa de $f_1(t) = 3.000$ reais por ano. A esposa, Juliana, faz um outro investimento que proporciona um fluxo de receita contínuo a uma taxa de $f_2(t) = 2.000e^{0{,}04t}$ reais por ano. O casal descobre que os dois investimentos têm exatamente o mesmo valor em um período de 4 anos. Se a taxa de juros permanece constante em 5% ao ano capitalizados continuamente, qual foi a aplicação inicial de Juliana?

33. **EXCEDENTE DO CONSUMIDOR** Um fabricante de peças de máquinas determina que q unidades de uma certa peça serão vendidas se o preço unitário for $p = 110 - q$ reais. O custo total para produzir estas q unidades é $C(q)$ reais, onde

$$C(q) = q^3 - 25q^2 + 2q + 3.000$$

   a. Qual é o lucro obtido com a venda de q unidades a um preço unitário de p reais? [*Sugestão*: Determine primeiro a receita $R = pq$; o lucro é igual à diferença entre a receita e o custo.]
   b. Para que valor de q o lucro é máximo?
   c. Determine o excedente do consumidor para o nível de produção q_0 correspondente ao lucro máximo.

34. **EXCEDENTE DO CONSUMIDOR** Repita o Problema 33 para

$$p = 124 - 2q \quad \text{e} \quad C(q) = 2q^3 - 59q^2 + 4q + 7.600.$$

35. **ESGOTAMENTO DE RECURSOS NATURAIS** O petróleo está sendo retirado de um campo petrolífero t anos após a sua abertura a uma taxa de $P'(t) = 1{,}3e^{0{,}04t}$ bilhões de barris por ano. O campo tem uma reserva de 20 bilhões de barris e o preço do petróleo se mantém constante em 56 dólares o barril.
   a. Determine $P(t)$, a quantidade de petróleo retirada do campo até o instante t. Qual foi a quantidade de petróleo retirada do campo durante os primeiros 3 anos de operação? E durante os 3 anos seguintes?
   b. Qual o número total T de anos de funcionamento do campo até o seu esgotamento completo?
   c. Se a taxa anual de juros permanece fixa em 5% capitalizados continuamente, qual é o valor atual do fluxo de receita contínuo $V = 56P'(t)$ durante o período de operação do campo $0 \le t \le T$?
   d. Se o proprietário do campo decide vendê-lo no primeiro dia de operação, você acha que o valor atual determinado no item (c) é um preço justo? Justifique sua resposta.

36. **ESGOTAMENTO DOS RECURSOS NATURAIS** Responda às perguntas do Problema 35 para um campo petrolífero do qual o petróleo esteja sendo retirado a uma taxa $P'(t) = 1{,}5e^{0{,}03t}$ e com uma reserva de 16 bilhões de barris. Suponha que o preço do petróleo se mantenha constante em 56 dólares o barril e a taxa de juros em 5% ao ano capitalizados continuamente.

37. **ESGOTAMENTO DOS RECURSOS NATURAIS** Responda às perguntas do Problema 35 para um campo petrolífero do qual o petróleo esteja sendo retirado a uma taxa $P'(t) = 1{,}2e^{0{,}02t}$ e com uma reserva de 12 bilhões de barris. Suponha que a taxa de juros se mantenha constante em 5% ao ano capitalizados continuamente e o preço do petróleo após t anos seja dado por $A(t) = 56e^{0{,}015t}$.

38. **LOTERIA** Uma loteria estadual paga ao ganhador de um prêmio de 2 milhões de reais em 10 prestações anuais de 200 mil reais. Qual é o valor atual deste fluxo de receita se a taxa anual de juros se mantém constante em 5% ao ano capitalizados continuamente?

39. **LOTERIA** O ganhador de uma loteria estadual pode escolher entre receber 10 milhões de reais de uma só vez ou receber A reais por ano durante os próximos 6 anos como um fluxo de receita contínuo. Se a taxa anual de juros é 5% ao ano capitalizados continuamente e as duas escolhas têm o mesmo valor, quanto é A?

40. **CONTRATOS ESPORTIVOS** Um astro do futebol está sendo disputado por dois clubes rivais. O primeiro clube oferece 3 milhões de reais de luvas e um contrato de 5 anos que lhe garante 8 milhões de reais este ano e um aumento de 3% por ano pelo resto do contrato. O segundo clube oferece 9 milhões de reais por ano por 5 anos e nada mais. Se a taxa anual de juros permanece constante em 4% ao ano capita-

lizados continuamente, qual é a melhor oferta? [*Sugestão:* Suponha que nos dois casos o salário é pago na forma de um fluxo de receita contínuo.]

41. VALOR ATUAL DE UM INVESTIMENTO Um investimento produz um fluxo de receita contínuo à taxa de $A(t)$ mil reais por ano no instante t, onde

$$A(t) = 10_e^{1-0,05t}$$

A taxa de juros é 5% ao ano capitalizados continuamente.

a. Qual é o valor futuro do investimento para um termo de 5 anos ($0 \leq t \leq 5$)?

b. Qual é o valor atual do investimento para o período de tempo $1 \leq t \leq 3$?

42. LUCRO COM UMA INVENÇÃO Uma pesquisa de mercado revela que t meses depois que um novo tipo de purificador de ar computadorizado for lançado no mercado as vendas do produto estarão gerando lucro à taxa de $P'(t)$ reais por mês, onde

$$P'(t) = \frac{500[1,4 - \ln(0,5t + 1)]}{t + 2}$$

a. Em que intervalo de tempo a taxa de rentabilidade é positiva e em que intervalo é negativa? Em que intervalo a taxa é crescente e em que intervalo é decrescente?

b. Em que instante $t = t_m$ o lucro mensal é máximo? Determine a variação do lucro no período de tempo $0 \leq t \leq t_m$.

c. Como o fabricante teve que gastar R$ 100.000,00 para desenvolver o produto, $P(0) = -100$. Use esta informação e os métodos de integração para determinar $P(t)$.

d. Plote a função $P(t)$ para $t \geq 0$. Um "produto da moda" é um produto cuja popularidade cresce rapidamente e, algum tempo depois, decresce com a mesma rapidez. Com base no gráfico de $P(t)$, você chamaria o purificador de ar de "produto da moda"? Justifique sua resposta.

43. RECEITA TOTAL Considere o seguinte problema: "Um certo poço de petróleo que produz 300 barris de petróleo bruto por mês se esgotará em 3 anos. Estima-se que daqui a t meses o preço do petróleo bruto será $P(t) = 18 + 0,3\sqrt{t}$ dólares por barril. Se o óleo é vendido imediatamente após ser extraído do solo, qual será a receita futura total do poço?"

a. Resolva o problema usando integração definida. [*Sugestão:* Divida o intervalo de 3 anos (36 meses) $0 \leq t \leq 36$ em n subintervalos iguais de duração Δt e chame de t_j o início do intervalo de ordem j. Encontre uma expressão aproximada para a receita $R(t_j)$ obtida durante o subintervalo de ordem j e expresse a receita total como o limite de uma soma.]

b. Leia a respeito da indústria petrolífera e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre os métodos matemáticos usados para modelar a produção de petróleo.*

44. CUSTO DE ARMAZENAMENTO Um fabricante recebe N unidades de uma certa matéria-prima que são inicialmente armazenadas e em seguida retiradas e usadas a uma taxa constante até que o estoque acabe, 1 ano depois. Os custos de armazenamento permanecem fixos em p reais por unidade por ano. Use a integração definida para obter uma expressão para o custo total de armazenamento que o fabricante terá que pagar durante o ano. [*Sugestão:* Chame de $Q(t)$ o número de unidades armazenadas após t meses (expressos como fração de um ano) e encontre uma expressão para $Q(t)$. Em seguida, subdivida o intervalo $0 \leq t \leq 1$ em n subintervalos iguais e expresse o custo total de armazenamento como o limite de uma soma.]

*Um bom lugar para começar é o artigo de J. A. Weyland and D. W. Ballew, "A Relevant Calculus Problem: Estimation of U.S. Oil Reserves", *The Mathematics Teacher*, Vol. 69, 1976, pp. 125-126.

SEÇÃO 5.6 Aplicações em Biologia e Ciências Sociais

Já vimos que a integração definida pode ser usada para calcular grandezas de interesse para as ciências sociais e biológicas, como variação total, valor médio e o índice de Gini de uma curva de Lorentz. Nesta seção, vamos discutir outras aplicações, como sobrevivência e renovação dentro de um grupo, vazão de sangue em uma artéria e débito cardíaco. Vamos também mostrar como é possível calcular volumes usando integração para aplicações como a medida do tamanho de um lago ou de um tumor.

Sobrevivência e Renovação

No Exemplo 5.6.1, uma **função de sobrevivência** fornece a fração de indivíduos em um grupo ou população que deverão permanecer no grupo por um certo período de tempo. Uma **função de renovação,** que fornece a taxa com que novos membros chegam ao grupo, também é conhecida e o objetivo é calcular o tamanho de um grupo em um certo instante no futuro. Problemas deste tipo surgem em muitos campos, como a sociologia, a ecologia, a demografia e mesmo a economia, caso em que a "população" é o número de reais em uma conta bancária e "renovação" é o resultado de uma estratégia de investimento.

EXEMPLO 5.6.1

Uma clínica psiquiátrica acabou de ser inaugurada. A experiência com estabelecimentos semelhantes sugere que a fração de pacientes que ainda estarão recebendo tratamento na clínica t meses após a consulta inicial é dada pela função $f(t) = e^{-t/20}$. A clínica inicialmente aceita 300 pessoas para tratamento e pretende aceitar novos pacientes à taxa constante de $g(t) = 10$ pacientes por mês. Quantas pessoas deverão estar recebendo tratamento na clínica daqui a 15 meses?

Solução

Como $f(15)$ é a fração de pacientes cujo tratamento terá uma duração igual ou maior que 15 meses, dos 300 pacientes iniciais, apenas $300f(15)$ estarão ainda recebendo tratamento daqui a 15 meses.

Para determinar o número de *novos* pacientes que estarão recebendo tratamento daqui a 15 meses, dividimos o intervalo de 15 meses $0 \leq t \leq 15$ em n subintervalos de duração Δt e chamamos de t_j o início do subintervalo de ordem j. Como os novos pacientes são aceitos à razão de 10 por mês, o número de novos pacientes admitidos durante o intervalo de ordem j é $10\Delta_n t$. Daqui a quinze meses, aproximadamente $15 - t_j$ meses terão se passado desde que estes $10\Delta_n t$ novos pacientes fizeram a primeira consulta e, portanto, aproximadamente $(10\Delta_n t)f(15 - t_j)$ ainda estarão recebendo tratamento (veja Figura 5.23).

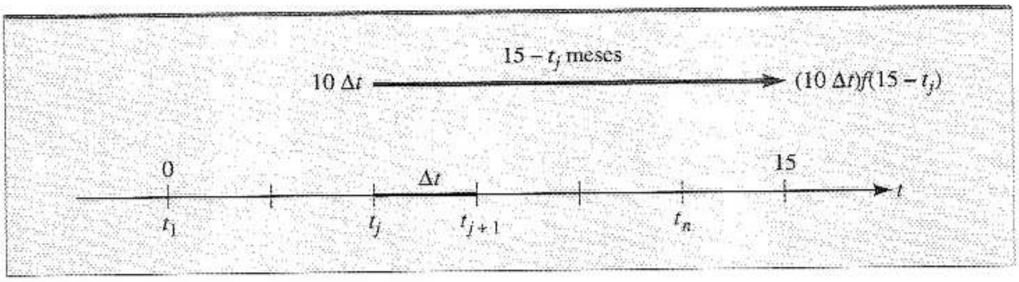


FIGURA 5.23 Número de pacientes que ainda estão recebendo tratamento durante o subintervalo de ordem j.

Assim, o número total de novos pacientes que ainda estarão recebendo tratamento daqui a 15 meses pode ser aproximado pelo somatório

$$\sum_{j=1}^{n} 10f(15 - t_j)\Delta t$$

Somando este valor ao número de pacientes iniciais que ainda estarão recebendo tratamento daqui a 15 meses, temos:

$$P \approx 300f(15) + \sum_{j=1}^{n} 10f(15 - t_j)\Delta t$$

onde P é o número *total* de pacientes (novos e antigos) que estarão recebendo tratamento daqui a 15 meses.

Quando fazemos n tender a infinito, a aproximação tende para o verdadeiro valor de P. Assim,

$$\begin{aligned} P &= 300f(15) + \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} 10f(15 - t_j)\Delta t \\ &= 300f(15) + \int_0^{15} 10f(15 - t)\, dt \end{aligned}$$

Como $f(t) = e^{-t/20}$, temos $f(15) = e^{-3/4}$, $f(15 - t) = e^{-(15-t)/20} = e^{-3/4}e^{t/20}$ e

$$\begin{aligned} P &= 300e^{-3/4} + 10e^{-3/4}\int_0^{15} e^{t/20}\, dt \\ &= 300e^{-3/4} + 10e^{-3/4}\left(\frac{e^{t/20}}{1/20}\right)\Bigg|_0^{15} \\ &= 300e^{-3/4} + 200(1 - e^{-3/4}) \\ &\approx 247{,}24 \end{aligned}$$

Assim, daqui a 15 meses, a clínica estará tratando aproximadamente 247 pacientes.

No Exemplo 5.6.1 a função sobrevivência $f(t)$ é variável e a função taxa de renovação $g(t)$ é constante. Uma análise semelhante pode ser usada quando a taxa de renovação também varia com o tempo; o resultado é apresentado a seguir. Note que o tempo aparece em anos, mas a mesma expressão pode ser usada, como no Exemplo 5.6.1, com outras unidades de tempo como minutos, semanas ou meses.

Sobrevivência e Renovação ■ Suponha que uma população possua inicialmente P_0 membros e que novos membros são acrescentados à taxa de $R(t)$ indivíduos por ano (taxa de renovação). Suponha ainda que a fração da população que permanece durante pelo menos t anos depois de sua chegada seja dada pela função $S(t)$ (função de sobrevivência). Nesse caso, após um termo de T anos, a população é dada por

$$P(T) = P_0S(T) + \int_0^T R(t)\,S(T-t)\,dt$$

No Exemplo 5.6.1, cada período de tempo é 1 mês, a "população" inicial (número de pacientes) é $P_0 = 300$, a taxa de renovação é $R = 10$, a função de sobrevivência é $f(t) = e^{-t/20}$ e o termo é $T = 15$ meses. Segue outro exemplo de sobrevivência e renovação, desta vez retirado da biologia.

EXEMPLO 5.6.2

Uma toxina branda é introduzida em uma colônia de bactérias cuja população inicial é de 600.000 espécimes. As observações indicam que $R(t) = 200\,e^{0,01t}$ bactérias por hora nascem na colônia no instante t e que a fração da população que sobrevive por t horas após o nascimento é $S(t) = e^{-0,015t}$. Qual é a população da colônia após 10 horas?

Solução

Fazendo $P_0 = 600.000$, $R(t) = 200\,e^{0,01t}$ e $S(t) = e^{-0,015t}$ na fórmula de sobrevivência e renovação, descobrimos que a população ao final do termo $T = 10$ horas é

$$P(10) = \underbrace{600.000}_{P_0}\underbrace{e^{-0.015(10)}}_{S(10)} + \int_0^{10} \underbrace{200\,e^{0.01t}}_{R(t)}\,\underbrace{e^{-0.015(10-t)}}_{S(T-t)}\,dt$$

$$\approx 516.425 + \int_0^{10} 200e^{0.01t}\,[e^{-0.015(10)}\,e^{0.015t}]\,dt \qquad \textit{pois } e^{a-b} = e^a\,e^{-b}$$

$$\approx 516.425 + 200\,e^{-0.015(10)}\int_0^{10} [e^{0.01t}\,e^{0.015t}]\,dt \qquad \textit{tirando } 200\,e^{-0.015(10)} \textit{ da integral}$$

$$\approx 516.425 + 172{,}14\int_0^{10} e^{0.025t}\,dt \qquad \textit{pois } e^{a+b} = e^a\,e^b \textit{ e } 200\,e^{-0.015(10)} = 172{,}14$$

$$\approx 516.425 + 172{,}14\left[\frac{e^{0.025t}}{0{,}025}\right]\Bigg|_0^{10} \qquad \textit{regra da exponencial para integrais}$$

$$\approx 516.425 + \frac{172{,}14}{0{,}025}\,[e^{0.025(10)} - e^0]$$

$$\approx 518.381$$

Assim, a população da colônia diminui de 600.000 para 518.381 espécimes durante as primeiras 10 horas após a introdução da toxina.

Vazão do Sangue em uma Artéria

Os biólogos descobriram que a velocidade do sangue em um certo ponto de uma artéria é função da distância entre este ponto e o eixo central da artéria. De acordo com a lei de Poiseuille, a velocidade (em centímetros por segundo) do sangue em um ponto que está a r centímetros do eixo central da artéria é dada por $S(r) = k(R^2 - r^2)$, onde R é o raio da artéria e k é uma constante. No Exemplo 5.6.3, veremos como esta informação pode ser usada para calcular a vazão do sangue (em centímetros cúbicos por segundo) em uma artéria.

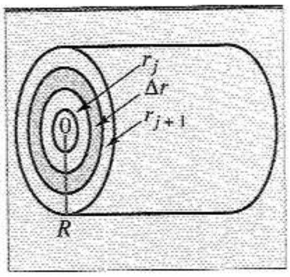


FIGURA 5.24 Subdivisão da seção reta de uma artéria em anéis concêntricos.

EXEMPLO 5.6.3

Determine uma expressão para a vazão do sangue (em centímetros por segundo) em uma artéria de raio R se a velocidade do sangue em um ponto a r centímetros do eixo central é dada por $S(r) = k(R^2 - r^2)$, onde k é uma constante.

Solução

Para calcular o valor aproximado do volume de sangue que atravessa uma seção reta da artéria por segundo, dividimos o intervalo $0 \le r \le R$ em n subintervalos de largura Δr e chamamos de r_j o início do subintervalo de ordem j. Estes subintervalos definem n anéis concêntricos, como mostra a Figura 5.24.

Se Δr é pequeno, a área do anel de ordem j é aproximadamente a área de um retângulo cujo comprimento é a circunferência do limite interno do anel e cuja largura é Δr. Assim,

$$\text{Área do anel} \approx 2\pi r_j \Delta r$$

Multiplicando a área do anel de ordem j (em centímetros quadrados) pela velocidade do sangue que atravessa este anel (em centímetros por segundo), obtemos a vazão do sangue neste anel (em centímetros cúbicos por segundo). Como a velocidade do sangue no anel de ordem j é aproximadamente $S(r_j)$ centímetros por segundo, temos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\text{Vazão do sangue}\\ \text{no } j\text{-ésimo anel}\end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix}\text{área do}\\ j\text{-ésimo anel}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{velocidade do sangue}\\ \text{no } j\text{-ésimo anel}\end{pmatrix}\\ &\approx (2\pi r_j \Delta r)S(r_j)\\ &\approx (2\pi r_j \Delta r)[k(R^2 - r_j^2)]\\ &\approx 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r\end{aligned}$$

A vazão de sangue em toda a seção reta é a soma de n termos como este, um para cada um dos n anéis concêntricos. Assim,

$$\text{Vazão} \approx \sum_{j=1}^{n} 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r$$

Quando n tende a infinito, este somatório tende para o valor exato da vazão. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Vazão} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\Delta r\\ &= \int_0^R 2\pi k(R^2 r - r^3)\,dr\\ &= 2\pi k\left(\frac{R^2}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^R\\ &= \frac{\pi k R^4}{2}\end{aligned}$$

Assim, a vazão do sangue é $\dfrac{\pi k R^4}{2}$ centímetros cúbicos por segundo.

Débito Cardíaco

Quando estudam o sistema cardiovascular, os médicos estão freqüentemente interessados em conhecer o **débito cardíaco** de um paciente, ou seja, o volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo. O débito cardíaco pode ser medido usando uma técnica conhecida como **método da diluição**.* Uma quantidade conhecida de corante é injetada em uma veia nas proximidades do coração. O sangue com corante passa pelo lado direito do coração, pelos pulmões e pelo lado esquerdo do coração antes de finalmente aparecer no sistema arterial. Uma sonda é introduzida na aorta e amostras de sangue são coletadas a intervalos regulares para medir a concentração de corante no sangue que deixa o coração até que todo o corante tenha passado pelo ponto de observação. Um gráfico de concentração típico aparece na Figura 5.25.

*Veja o módulo "Measuring Cardiac Output" de B. Horelick and S. Koont, *UMAP Modules 1977: Tools for Teaching*, Lexington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc.,1978. Veja também *Calculus and Its Applications*, de S. Farlow and G. Haggard, Boston: McGraw-Hill, 1990, pp. 332-334.

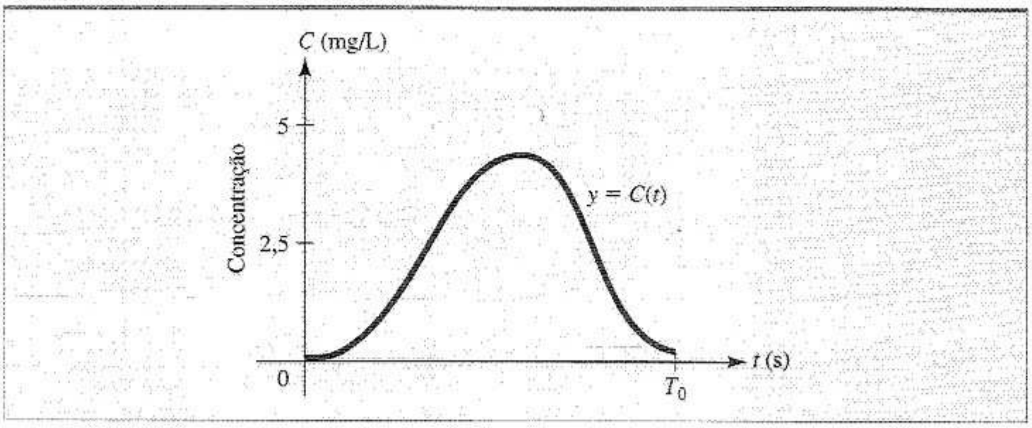


FIGURA 5.25 Curva típica da concentração de corante na aorta de um paciente em função do tempo.

Suponha que a quantidade de corante injetada seja D mg e que a concentração de corante no instante t seja $C(t)$ mg/L. Seja T_0 o tempo total necessário para que todo o corante passe pelo ponto de observação. Vamos dividir o intervalo de tempo $0 \le t \le T_0$ em n subintervalos iguais de largura $\Delta t = (T_0 - 0)/n$. Se R é o débito cardíaco em litros por minuto (L/min), aproximadamente $R\Delta t$ litros de sangue passam pela sonda durante o k-ésimo intervalo de tempo $t_{k-1} \le t \le t_k$, transportando $C(t_k)R\Delta t$ mg de corante. Somando as quantidades de corante que passam pela sonda nos n subintervalos, obtemos o somatório

$$\sum_{k=1}^{n} C(t_k)R\,\Delta t$$

como uma aproximação para a quantidade total de corante. Tomando o limite quando $n \to +\infty$, obtemos a quantidade total de corante na forma de uma integral definida:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C(t_k)R\,\Delta t = \int_0^{T_0} C(t)R\,dt = R\int_0^{T_0} C(t)\,dt$$

Como D miligramas de corante foram injetadas, devemos ter

$$D = R\int_0^{T_0} C(t)\,dt$$

e, portanto, o débito cardíaco é dado por

$$R = \frac{D}{\displaystyle\int_0^{T_0} C(t)\,dt}$$

EXEMPLO | 5.6.4

Um médico injeta 4 mg de corante em uma veia perto do coração de um paciente e uma sonda é usada para medir a concentração do corante no sangue a intervalos regulares durante um período de 23 segundos. Determina-se que a concentração no instante t ($0 \le t \le 23$) pode ser modelada fielmente pela função

$$C(t) = 0{,}09t^2e^{-0{,}0007t^3} \quad \text{mg/L}$$

Com base nestas informações, qual é o débito cardíaco do paciente?

14 EXPLORE!

Leia o Exemplo 5.6.4. Plote a função de concentração do corante $C(t) = 0{,}09t^2e^{-0{,}0007t^3}$ usando uma janela [0, 23.5]5 por [−1, 6]1. Calcule o débito cardíaco do paciente supondo um período de observação de apenas 20 segundos e compare com os resultados obtidos no exemplo (para um período de 23 segundos).

Solução

Integrando $C(t)$ no intervalo de tempo $0 \le t \le 23$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{23} C(t)\,dt &= \int_0^{23} 0{,}09t^2e^{-0{,}0007t^3}\,dt \\
&= 0{,}09\int_0^{23} e^{-0{,}0007t^3}(t^2\,dt) && \textit{fazendo } u = t^3,\ du = 3t^2\,dt \\
&= 0{,}09\int_0^{12.167} e^{-0{,}0007u}\left(\frac{1}{3}\,du\right) && \textit{para } x = 0,\ u = 0;\ \textit{para } x = 23,\ u = (23)^3 = 12.167 \\
&= \frac{0{,}09}{3}\left(\frac{e^{-0{,}0007u}}{-0{,}0007}\right)\Bigg|_0^{12.167} \\
&\approx -42{,}86\,[e^{-0.0007(12.167)} - e^0] \\
&\approx 42{,}85
\end{aligned}$$

Assim, o débito cardíaco é

$$R = \frac{4}{\int_0^{23} C(t)\,dt}$$

$$\approx \frac{4}{42{,}85} \approx 0{,}093 \quad \text{L/s}$$

ou

$$R \approx (0{,}093 \text{ L/s})(60 \text{ s/min}) \approx 5{,}6 \text{ L/min}$$

Densidade Populacional

A **densidade populacional** de uma região urbana é o número $p(r)$ de pessoas por quilômetro quadrado que moram a r quilômetros do centro da cidade. Para determinar a população total P da parte da cidade que está a menos de R quilômetros do centro, podemos usar o método de integração.

Nossa abordagem é semelhante à que foi usada anteriormente para determinar a vazão de sangue em uma artéria. Dividimos o intervalo $0 \le r \le R$ em n subintervalos de largura $\Delta r = R/n$ e chamamos de r_k o início (extremidade esquerda) do subintervalo de ordem k, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Estes subintervalos determinam n anéis concêntricos, como mostra a Figura 5.26.

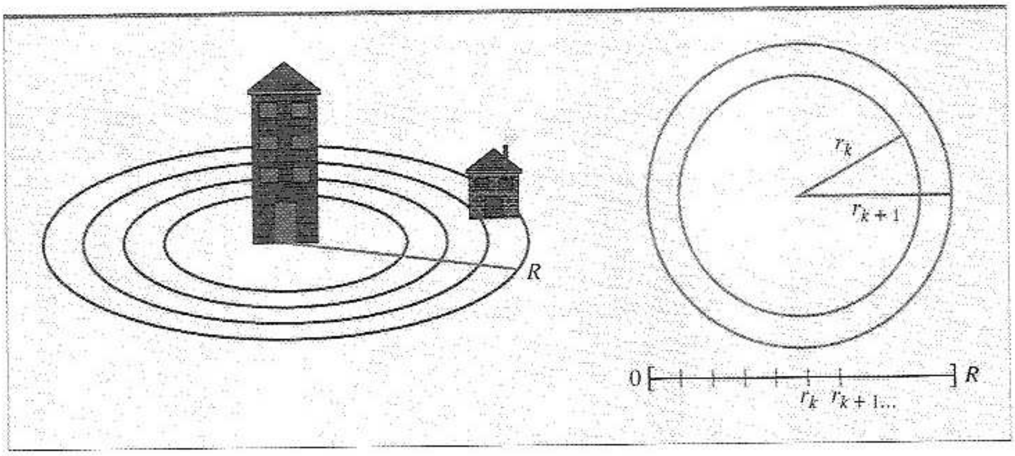


FIGURA 5.26 Subdivisão de uma região urbana em anéis concêntricos.

A área do k-ésimo anel é aproximadamente a área de um retângulo cujo comprimento é a circunferência do perímetro interno no anel e cuja largura é Δr:

$$\text{Área do } k\text{-ésimo anel} \approx 2\pi r_k \Delta r$$

Como a densidade populacional é $p(r)$ habitantes por quilômetro quadrado, temos:

$$\text{População do } k\text{-ésimo anel} \approx \underbrace{p(r_k)}_{\substack{\textit{população por}\\ \textit{unidade de área}}} \cdot \underbrace{[2\pi r_k \Delta r]}_{\substack{\textit{área}\\ \textit{do anel}}} = 2\pi r_k\, p(r_k)\, \Delta r$$

Podemos estimar a população que vive na região limitada por uma circunferência de raio R somando as populações de todos os anéis, isto é, calculando a soma de Riemann

$$\begin{bmatrix} \text{População total} \\ \text{dentro do raio } R \end{bmatrix} = P(R) \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi r_k\, p(r_k)\, \Delta r$$

Quando $n \to \infty$, a estimativa tende para o valor exato da população P; como o limite de uma soma de Riemann é uma integral definida, temos:

$$P(R) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi\, r_k\, p(r_k)\, \Delta r = \int_0^R 2\pi r p(r)\, dr$$

Resumindo:

> **Cálculo da População Total a partir da Densidade Populacional** ■ Se em uma região a densidade populacional é $p(r)$ indivíduos por quilômetro quadrado a uma distância de r quilômetros do centro da região, a população total $P(r)$ a uma distância menor que R do centro é dada por
>
> $$P(R) = \int_0^R 2\pi r p(r)\, dr$$

NOTA Consideramos mais conveniente deduzir a fórmula da densidade populacional considerando a população de uma cidade; entretanto, a fórmula também pode ser aplicada em outras situações, como colônias de bactérias ou mesmo a "população" de gotas d'água produzidas por um borrifador. ■

EXEMPLO 5.6.5

Uma cidade tem uma densidade populacional $p(r) = 3e^{-0,01r^2}$ onde $p(r)$ é o número de habitantes (em milhares) por quilômetro quadrado a uma distância de r quilômetros do centro da cidade.

a. Quantas pessoas vivem a menos de 5 quilômetros do centro da cidade?
b. Os limites da cidade ficam a uma distância R do centro tal que a densidade populacional é de 1.000 habitantes por quilômetro quadrado. Quantas pessoas vivem dentro dos limites da cidade?

Solução

a. O número de habitantes dentro de um raio de 5 quilômetros é

$$P(5) = \int_0^5 2\pi r\,(3e^{-0,01r^2})\, dr = 6\pi \int_0^5 e^{-0,01r^2} r\, dr$$

Fazendo a substituição $n = -0{,}01r^2$, temos:

$$du = -0{,}01(2r\, dr) \quad \text{ou} \quad r\, dr = \frac{du}{-0{,}02} = -50\, du$$

Além disso, os limites de integração também devem ser transformados:

$$\text{Para } r = 5, \text{ temos } u = -0{,}01(5)^2 = -0{,}25$$
$$\text{Para } r = 0, \text{ temos } u = -0{,}01(0)^2 = 0$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
P(5) &= 6\pi \int_0^5 e^{-0,01r^2} r\, dr \\
&= 6\pi \int_0^{-0,25} e^u(-50\, du) && \textit{pois } r\, dr = -50\, du \\
&= 6\pi\,(-50)[e^u]\Big|_{u=0}^{u=-0,25} \\
&= -300\pi[e^{-0,25} - e^0] \\
&\approx 208{,}5
\end{aligned}$$

Isto significa que aproximadamente 200.000 pessoas vivem a menos de 5 quilômetros do centro da cidade.

b. Para determinar o raio R que corresponde aos limites da cidade, igualamos a 1 (mil) a densidade populacional e resolvemos a equação resultante:

$$\begin{aligned}
3e^{-0,01R^2} &= 1 \\
e^{-0,01R^2} &= \frac{1}{3} \\
-0{,}01R^2 &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) && \textit{tomando os logaritmos de ambos os membros} \\
R^2 &= \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{-0{,}01} = 109{,}86 \\
R &\approx 10{,}48
\end{aligned}$$

Finalmente, usando a mesma substituição $u = -0{,}01r^2$ do item (a), descobrimos que o número de habitantes que vivem dentro dos limites da cidade é

$$\begin{aligned} P(10{,}48) &= 6\pi \int_0^{10.48} e^{-0.01r^2} r\, dr \\ &= 6\pi \int_0^{-1.1} e^{u}(-50\, du) \\ &\approx -300\pi\, [e^{u}]\Big|_{u=0}^{u=-1,1} \\ &\approx -300\pi[e^{-1.1} - e^{0}] \\ &\approx 628{,}75 \end{aligned}$$

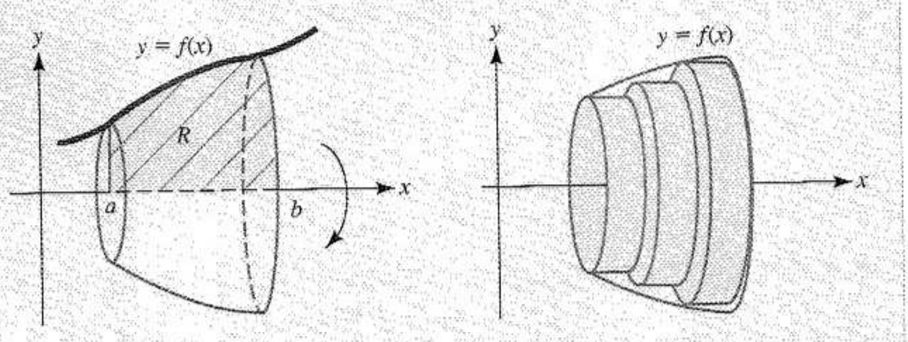
Limites de integração:
para $r = 10{,}48$, *temos* $u = -0{,}01(10{,}48)^2 \approx -1{,}1$
para $r = 0$, *temos* $u = 0$

Assim, aproximadamente 600.000 pessoas vivem dentro dos limites da cidade.

Volume de um Sólido de Revolução

Vamos agora discutir uma aplicação geométrica na qual a interpretação da integral definida como o limite de uma soma é usada para determinar o volume de um **sólido de revolução** formado pela rotação de uma região R do plano xy em torno do eixo x.

A técnica consiste em expressar o volume do sólido como o limite de uma soma dos volumes de discos. Suponha que S seja o sólido formado pela rotação em torno do eixo x da região R sob a curva $y = f(x)$ entre os pontos $x = a$ e $x = b$, como mostra a Figura 5.27a. Dividindo o intervalo $a \leq x \leq b$ em n subintervalos iguais de largura Δx, podemos aproximar a região R por n retângulos e o sólido S pelos n discos cilíndricos formados pela rotação desses retângulos em torno do eixo x. Este método geral de aproximação está ilustrado na Figura 5.27b para o caso em que $n = 3$.

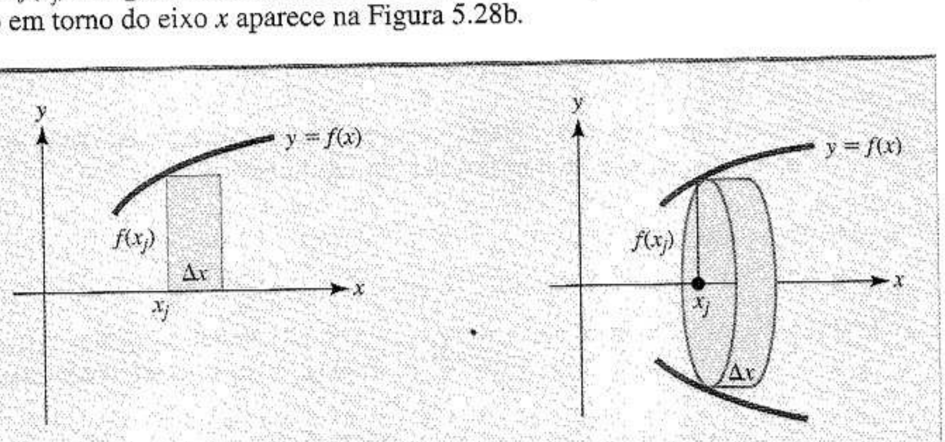


(a) A região R sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ gira em torno do eixo x para gerar o sólido S.

(b) A aproximação de R por retângulos e a aproximação correspondente de S por discos.

FIGURA 5.27 Sólido S formado pela rotação de uma região R em torno do eixo x.

Se x_j representa o início (extremidade esquerda) do subintervalo de ordem j, o j-ésimo retângulo tem altura $f(x_j)$ e largura Δx, como mostra a Figura 5.28a. O j-ésimo disco formado pela rotação deste retângulo em torno do eixo x aparece na Figura 5.28b.



(a) O j-ésimo retângulo

(b) O j-ésimo disco cilíndrico correspondente

FIGURA 5.28 O volume do sólido S é aproximadamente igual à soma dos volumes de uma série de discos.

Como o j-ésimo disco cilíndrico tem raio $r_j = f(x_j)$ e espessura Δx, seu volume é

$$\begin{aligned}\text{Volume do } j\text{-ésimo disco} &= (\text{área da seção reta circular})(\text{largura}) \\ &= \pi r_j^2(\text{largura}) = \pi[f(x_j)]^2\,\Delta x\end{aligned}$$

O volume total de S é aproximadamente igual à soma dos volumes dos n discos, ou seja,

$$\text{Volume de } S \approx \sum_{j=1}^{n} \pi[f(x_j)]^2 \Delta x$$

A aproximação tende para o valor exato quando n tende a infinito e

$$\text{Volume de } S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \pi[f(x_j)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Resumindo:

Fórmula do Volume

Suponha que $f(x)$ seja contínua e $f(x) \geq 0$ no intervalo $a \leq x \leq b$ e seja R a região sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$. Nesse caso, o volume do sólido S formado pela rotação de R em torno do eixo x é dado por

$$\text{Volume de } S = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Seguem dois exemplos.

EXEMPLO 5.6.6

Determine o volume do sólido S formado pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ e $x = 2$.

Solução

A região, o sólido de revolução e o j-ésimo disco aparecem na Figura 5.29.

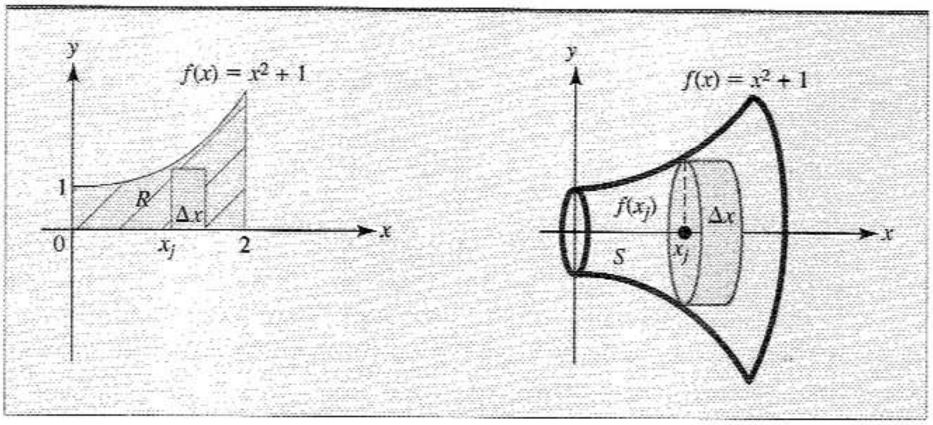


FIGURA 5.29 Sólido formado pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = x^2 + 1$ entre $x = 0$ e $x = 2$.

O raio do j-ésimo disco é $f(x_j) = x_j^2 + 1$. Assim,

$$\text{Volume do } j\text{-ésimo disco} = \pi[f(x_j)]^2\,\Delta x = \pi(x_j^2 + 1)^2\,\Delta x$$

e

$$\begin{aligned}\text{Volume de } S &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \pi(x_j^2 + 1)^2\,\Delta x \\ &= \pi \int_0^2 (x^2 + 1)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx \\ &= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{206}{15}\pi \approx 43{,}14\end{aligned}$$

EXEMPLO 5.6.7

Um tumor tem aproximadamente a mesma forma que o sólido formado pela rotação da região sob a curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{16 - 4x^2}$ em torno do eixo x, onde x e y estão em centímetros. Determine o volume do tumor.

Solução

Para determinar os pontos de interseção da curva com o eixo x, igualamos a zero sua equação:

$$\frac{1}{3}\sqrt{16 - 4x^2} = 0$$

$$16 = 4x^2 \qquad \textit{pois } \sqrt{a - b} = 0 \textit{ apenas se } a = b$$

$$x^2 = 4 \qquad \textit{dividindo ambos os membros por } 4$$

$$x = \pm 2$$

A curva (uma *elipse*) aparece na Figura 5.30.

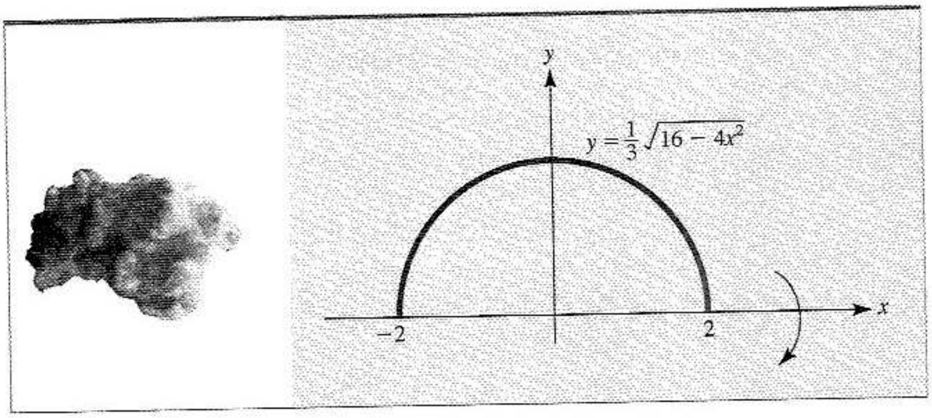


FIGURA 5.30 Tumor com a forma do sólido formado pela rotação da curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{16 - 4x^2}$ em torno do eixo x.

Seja $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{16 - 4x^2}$. O volume do sólido de revolução é dado por

$$V = \int_{-2}^{2} \pi[f(x)]^2\,dx = \int_{-2}^{2} \pi\left[\frac{1}{3}\sqrt{16 - 4x^2}\right]^2 dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \frac{\pi}{9}(16 - 4x^2)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{9}\left[16x - \frac{4}{3}x^3\right]\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{\pi}{9}\left[16(2) - \frac{4}{3}(2)^3\right] - \frac{\pi}{9}\left[16(-2) - \frac{4}{3}(-2)^3\right]$$

$$\approx 14{,}89$$

Assim, o volume do tumor é aproximadamente de 15 cm³.

PROBLEMAS 5.6

SOBREVIVÊNCIA E RENOVAÇÃO *Nos Problemas 1 a 6, são dadas uma população inicial P_0, uma taxa de renovação R e uma função de sobrevivência $S(t)$. Em cada caso, use as informações dadas para determinar a população ao final do termo T dado.*

1. $P_0 = 50.000$; $R(t) = 40$; $S(t) = e^{-0,1t}$, t em meses; termo $T = 5$ meses
2. $P_0 = 100.000$; $R(t) = 300$; $S(t) = e^{-0,02t}$, t em dias; termo $T = 10$ dias
3. $P_0 = 500.000$; $R(t) = 800$; $S(t) = e^{-0,011t}$, t em anos; termo $T = 3$ anos
4. $P_0 = 800.000$; $R(t) = 500$; $S(t) = e^{-0,005t}$, t em meses; termo $T = 5$ meses
5. $P_0 = 500.000$; $R(t) = 100\,e^{0,01t}$; $S(t) = e^{-0,013t}$, t em anos; termo $T = 8$ anos
6. $P_0 = 300.000$; $R(t) = 150\,e^{0,12t}$; $S(t) = e^{-0,02t}$, t em meses; termo $T = 20$ meses

VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO *Nos Problemas 7 a 14, determine o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região R em torno do eixo x.*

7. R é a região sob a reta $y = 3x + 1$ de $x = 0$ a $x = 1$.

8. R é a região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de $x = 1$ a $x = 4$.

9. R é a região sob a curva $y = x^2 + 2$ de $x = -1$ a $x = 3$.

10. R é a região sob a curva $y = 4 - x^2$ de $x = -2$ a $x = 2$.

11. R é a região sob a curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ de $x = -2$ a $x = 2$.

12. R é a região sob a curva $\dfrac{1}{x}$ de $x = 1$ a $x = 10$.

13. R é a região sob a curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ de $x = 1$ a $x = e^2$.

14. R é a região sob a curva $y = e^{-0.1x}$ de $x = 0$ a $x = 10$.

15. CRESCIMENTO POPULACIONAL Estima-se que daqui a t anos a população de um certo país estará crescendo à taxa de $e^{0.02t}$ milhões de habitantes por ano. Se a população atual é de 50 milhões de habitantes, qual será a população daqui a 10 anos?

16. CRESCIMENTO POPULACIONAL Um estudo revela que daqui a x meses a população de uma certa cidade estará aumentando à taxa de $10 + 2\sqrt{x}$ habitantes por ano. Qual será o aumento da população nos próximos 9 meses?

17. ASSOCIAÇÕES Uma associação nacional de consumidores estima que a fração de membros que ainda pertencem à associação t meses após se inscreverem é dada por $f(t) = e^{-0,2t}$. Uma divisão local tem 200 membros fundadores e espera atrair novos membros à taxa de 10 por mês. Quantos membros a divisão deverá ter após 8 meses?

18. TENDÊNCIAS POLÍTICAS Jorge Santos está concorrendo à prefeitura. As pesquisas indicam que a fração de eleitores que o apóiam t semanas após tomarem conhecimento de sua candidatura é dada por $f(t) = e^{-0,03t}$. Inicialmente, 25.000 pessoas o apoiavam e novos eleitores estavam aderindo à taxa de 100 por semana. Quantas pessoas devem votar em Jorge se a eleição vai ser realizada 20 semanas após o dia em que se declarou candidato?

19. DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA Uma epidemia causada por uma nova linhagem do vírus da gripe acaba de ser descoberta pelas autoridades sanitárias. No momento, 5.000 pessoas estão infectadas e 600 pessoas contraem a doença todo dia. Se a fração de pessoas infectadas que ainda estão doentes t dias após o início dos sintomas é dada por $f(t) = e^{-0,02t}$, quantas pessoas estarão gripadas daqui a 30 dias?

20. REJEITOS NUCLEARES Uma certa usina nuclear produz rejeitos radioativos na forma de estrôncio 90 à taxa constante de 200 kg por ano. Os rejeitos decaem espontaneamente com uma meia-vida de 28 anos. Qual será a quantidade de rejeitos da usina daqui a 140 anos, se ela continuar funcionando até lá? [*Sugestão:* Pense neste problema como um problema de sobrevivência e renovação.]

21. CONSUMO DE ENERGIA Estima-se que a demanda de petróleo está aumentando exponencialmente à taxa de 10% ao ano. Se a demanda atual de petróleo é de 30 bilhões de barris por ano, qual será o consumo total de petróleo durante os próximos 10 anos?

22. CRESCIMENTO POPULACIONAL Os governantes de uma cidade estimam que a fração de residentes que continuarão a morar na cidade t anos depois de se mudarem é dada pela função $f(t) = e^{-0,04t}$. Se a população atual é de 20.000 habitantes e a cidade recebe 500 novos residentes por ano, qual será a população daqui a 10 anos?

23. NAMORO POR COMPUTADOR Os operadores de um novo site de namoro estimam que a fração de pessoas que assinam o serviço durante pelo menos t meses é dada pela função $f(t) = e^{-t/10}$. O serviço tem 8.000 assinantes e os operadores esperam conquistar 200 novos membros por mês. Quantos assinantes o serviço terá daqui a 10 meses?

24. VAZÃO DE SANGUE Calcule a taxa (em centímetros cúbicos por segundo) pela qual o sangue flui em uma artéria com 0,1 centímetro de raio se a velocidade do sangue a r centímetros de distância do eixo central é de $8 - 800r^2$ centímetros por segundo.

25. DÉBITO CARDÍACO Um médico injeta 5 mg de um corante em uma veia perto do coração do paciente e, medindo a concentração de corrente no sangue em um período de 24 horas, determina que a concentração de corante que deixa o coração após t segundos $(0 \leq t \leq 24)$ é dada pela função

$$C(t) = -0{,}028t^2 + 0{,}672t \quad \text{mg/L}$$

a. Use estas informações para determinar o débito cardíaco do paciente.

b. Plote $C(t)$ e compare com o gráfico da Figura 5.25. Quais são as semelhanças entre as duas curvas? Quais são as diferenças?

26. DÉBITO CARDÍACO Responda às perguntas do Problema 25 supondo que a concentração de corante seja dada pela função

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq 2 \\ -0{,}034(t^2 - 26t + 48) & \text{para } 2 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

27. DÉBITO CARDÍACO Responda às perguntas do Problema 25 supondo que a concentração de corante seja dada pela função

$$C(t) = \frac{1}{12.312}(t^4 - 48t^3 + 378t^2 + 4.752t)$$

28. DENSIDADE POPULACIONAL A densidade populacional a r quilômetros do centro de uma certa cidade é $D(r) = 5.000(1 + 0{,}5r^2)^{-1}$ habitantes por quilômetro quadrado.

a. Quantas pessoas vivem a menos de 5 quilômetros do centro da cidade?

b. Os limites da cidade ficam a uma distância L do centro tal que a densidade populacional é de 1.000 habitantes por quilômetro quadrado. Qual é o valor de L? Quantas pessoas vivem dentro dos limites da cidade?

29. DENSIDADE POPULACIONAL A densidade populacional a r quilômetros do centro de uma certa cidade é $D(r) = 25.000e^{-0,05r^2}$ habitantes por quilômetro quadrado. Quantas pessoas vivem a uma distância entre 1 e 2 quilômetros do centro da cidade?

30. LEI DE POISEUILLE A velocidade do sangue a r centímetros de distância do eixo central de uma artéria de raio R é dada por $S(r) = k(R^2 - r^2)$. Mostre que a velocidade média do sangue é igual à metade da velocidade máxima.

31. CONTROLE DO COLESTEROL A gordura viaja pelo sangue ligada a uma proteína, em uma combinação conhecida como *lipoproteína*. A lipoproteína de baixa densidade (LDL) recolhe colesterol no fígado e o distribui pelas células, depositando o colesterol em excesso na parede das artérias. O excesso de LDL no sangue aumenta o risco de doenças cardíacas e derrames. Um paciente com uma alta concentração de LDL recebe um medicamento que reduz o nível de LDL a uma taxa dada por

$$L'(t) = -0{,}3t(49 - t^2)^{0,4} \quad \text{unidade por dia}$$

onde t é o número de dias após o medicamento ser administrado, para $0 \leq t \leq 7$.

a. Qual é a variação do nível de LDL durante os primeiros 3 dias após a administração do medicamento?

b. Suponha que o nível de LDL seja 150 na ocasião em que o medicamento é administrado. Determine $L(t)$.

c. O nível considerado "seguro" de LDL é 130. Quantos dias a concentração de LDL no sangue do paciente leva para atingir o nível "seguro"?

32. CONTROLE DO COLESTEROL Em uma revisão anual, um homem é aconselhado pelo médico a adotar um programa de exercícios, dieta e medicamentos para reduzir o nível de colesterol no sangue para 220 miligramas por decilitro (mg/dL). Suponha que o homem observe que o nível de colesterol t dias após o início do programa é dado por

$$L(t) = 190 + 65e^{-0,003t}$$

a. Qual era o nível de colesterol no início do tratamento?

b. Qual é número N de dias para que o nível de colesterol chegue a 220 mg/dL?

c. Qual é o nível médio de colesterol nos primeiros 30 dias após o início do tratamento? Qual é o nível médio durante todo o período $0 \leq t \leq N$ do tratamento?

33. COLÔNIAS DE BACTÉRIAS Um experimento é realizado com duas colônias, cada uma com uma população inicial de 100.000 espécimes. Na primeira colônia, é introduzida uma toxina branda que restringe de tal forma a multiplicação da colônia que apenas 50 novos espécimes são introduzidos por dia e a fração de espécimes que sobrevivem pelo menos t dias é dada por $f(t) = e^{\ 0,011t}$. O crescimento da segunda colônia é restringido indiretamente, limitando-se a quantidade de nutrientes e o espaço disponível, e observa-se que após t dias a colônia contém

$$P(t) = \frac{5.000}{1 + 49e^{0,009t}}$$

mil espécimes. Qual das duas colônias é maior após 50 dias? E após 100 dias? E após 300 dias?

34. MEMBROS DE UMA ASSOCIAÇÃO Ao ser fundada, uma associação tinha 10.000 membros. Suponha que a fração dos membros que permanecem na associação durante pelo menos t anos é $S(t) = e^{\ 0,03t}$ e no instante t a associação está recebendo novos membros à taxa de $R(t) = 10e^{0,017t}$ membros por ano. Quantos membros terá a associação daqui a 5 anos?

35. ESPÉCIE AMEAÇADA DE EXTINÇÃO Os ambientalistas estimam que uma espécie ameaçada de extinção possui atualmente 3.000 espécimes. A população está crescendo à razão de $R(t) = 10e^{0,01t}$ espécimes por ano e a fração dos que sobrevivem por t anos é dada por $S(t) = e^{-0,07t}$. Qual será a população daqui a 10 anos?

36. DEMOGRAFIA Uma pequena cidade possui atualmente 85.000 habitantes. Um estudo encomendado pela prefeitura mostra que o número de moradores está crescendo à taxa de $R(t) = 1.200e^{0,01t}$ por ano e que a fração dos moradores que continuam a viver na cidade t anos depois de se mudarem é $S(t) = e^{-0,02t}$. Qual deverá ser a população da cidade daqui a 10 anos?

37. DEMOGRAFIA Responda à pergunta do Problema 36 para uma taxa de renovação constante $R = 1.000$ e uma função de sobrevivência

$$S(t) = \frac{1}{t + 1}$$

38. EFICÁCIA DE UM MEDICAMENTO Um laboratório farmacêutico recebeu permissão do Ministério da Saúde para testar um novo medicamento antiviral. O medicamento é administrado a um grupo de indivíduos suscetíveis, mas não infectados; usando métodos estatísticos, os pesquisadores determinam que t meses após o teste ser iniciado, os membros do grupo estão sendo infectados a uma taxa de $D'(t)$ centenas de indivíduos por mês, onde

$$D'(t) = 0{,}2 - 0{,}04t^{1/4}$$

Os dados do governo mostram que sem o medicamento a taxa de infecção teria sido $W'(t)$ centenas de indivíduos por mês, onde

$$W'(t) = \frac{0{,}8e^{0,13t}}{(1 + e^{0,13t})^2}$$

Se os resultados do teste forem avaliados 1 ano após o seu início, quantos indivíduos terão sido poupados da infecção? Que porcentagem das pessoas que teriam sido infectadas se o medicamento não tivesse sido usado foi poupada da infecção?

39. EFICÁCIA DE UM MEDICAMENTO Repita o Problema 38 para um medicamento para o qual a taxa de infecção é

$$D'(t) = 0{,}12 + \frac{0{,}08}{t + 1}$$

Suponha que a taxa de infecção na ausência do remédio seja a mesma do Problema 38, ou seja,

$$W'(t) = \frac{0{,}8e^{0,13t}}{(1 + e^{0,13t})^2}$$

40. EXPECTATIVA DE VIDA Em um certo país do terceiro mundo, a expectativa de vida de uma pessoa com t anos de idade é $L(t)$ anos, onde

$$L(t) = 41{,}6(1 + 1{,}07t)^{0,13}$$

a. Qual é a expectativa de vida de uma pessoa deste país ao nascer? E com 50 anos de idade?

b. Qual é a expectativa de vida média da população deste país entre as idades de 10 e 70 anos?

c. Determine a idade T para a qual $L(T) = T$. Esta idade é chamada de *limite de vida*. O que se pode dizer a respeito da expectativa de vida de uma pessoa com mais de T anos?

d. Determine a expectativa de vida média L_e para o intervalo de idades $0 \leq t \leq T$. Por que é razoável chamar L_e de *duração esperada da vida* dos habitantes do país?

41. EXPECTATIVA DE VIDA Responda às perguntas do Problema 40 para um país em que a função de expectativa de vida é

$$L(t) = \frac{110e^{0,015t}}{1 + e^{0,015t}}$$

42. ENERGIA GASTA PARA VOAR Em uma investigação de V. A. Tucker e K. Schmidt-Koenig,* foi observado que a energia E consumida por um pássaro em vôo varia com a velocidade v do pássaro. Para uma certa espécie de periquito, a taxa de variação da energia com a velocidade é dada por

$$\frac{dE}{dv} = \frac{0{,}31v^2 - 471{,}75}{v^2} \quad \text{para } v > 0$$

onde E está em joules por grama por quilômetro e v em quilômetros por hora. As observações indicam que o periquito tende a voar na velocidade $v_{mín}$ que minimiza E.

a. Qual é a velocidade mais econômica $v_{mín}$?

b. Suponha que quando o periquito está voando à velocidade mais econômica, $v_{mín}$, o consumo de energia é $E_{mín}$. Use esta informação para determinar $E(v)$ para $v > 0$ em termos de $E_{mín}$.

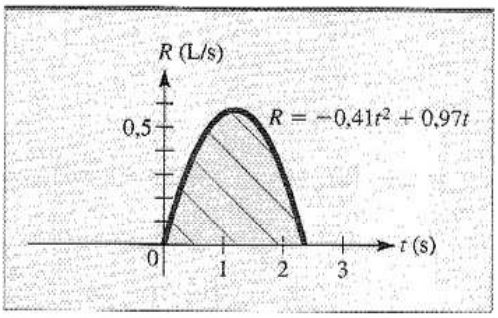
43. MEDIDA DA RESPIRAÇÃO O pneumotacógrafo é um aparelho usado pelos médicos para medir a entrada e saída de ar dos pulmões quando o paciente respira. A figura mostra a taxa de inspiração (entrada de ar) para um certo paciente. A área sob a curva corresponde ao volume total de ar inalado pelo paciente durante a fase de inspiração de um ciclo respiratório. Suponha que a taxa de inspiração seja dada por

$$R(t) = -0{,}41t^2 + 0{,}97t \quad \text{L/s}$$

a. Quanto tempo dura a fase de inspiração?

b. Determine o volume de ar inspirado pelo paciente durante a fase de inspiração.

c. Qual é a vazão média do ar que entra nos pulmões na fase de inspiração?



PROBLEMA 43

44. MEDIDA DA RESPIRAÇÃO Repita o Problema 43 supondo para uma taxa de respiração

$$R(t) = -1{,}2t^3 + 5{,}72t \quad \text{L/s}$$

e plote a curva de $R(t)$.

45. POLUIÇÃO DA ÁGUA Uma tubulação rompida em uma plataforma de petróleo produz uma mancha circular de petróleo que tem T metros de espessura a uma distância de r metros da tubulação, onde

$$T(r) = \frac{3}{2 + r}$$

No instante em que o vazamento é contido, o raio de mancha é 7 metros. Estamos interessados em determinar o volume do petróleo derramado.

a. Plote a curva de $T(r)$. Note que o volume desejado é obtido fazendo girar a curva de $T(r)$ em torno do *eixo T* (eixo vertical) e não do eixo r (eixo horizontal).

b. Resolva a equação $T = 3(2 + r)$ para obter r em função de T. Plote a curva de $r(T)$, com T no eixo horizontal.

c. Determine o volume desejado fazendo girar em torno do eixo T a curva de $r(T)$ obtida no item (b).

46. POLUIÇÃO DA ÁGUA Repita o Problema 45 supondo que a espessura da mancha seja dada por

$$T(r) = \frac{2}{1 + r^2}$$

com T e r em metros e que o raio da mancha no momento em que o vazamento é contido é de 9 metros.

47. POLUIÇÃO DO AR As partículas de fuligem emitidas pela chaminé de uma fábrica se distribuem de tal forma que a r quilômetros da chaminé a densidade da poluição é $p(r)$ unidades por quilômetro quadrado, onde

$$p(r) = \frac{200}{5 + 2r^2}$$

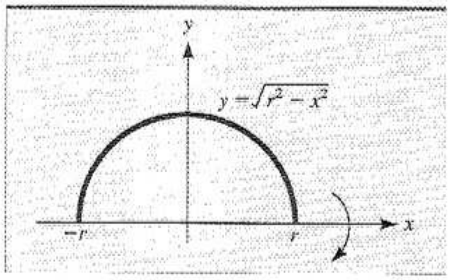
a. Qual é a poluição total em um raio de 3 quilômetros da chaminé?

b. As autoridades de saúde determinam que é desaconselhável morar a menos de L quilômetros da chaminé, onde L é a distância para a qual a densidade da poluição é quatro unidades por quilômetro quadrado. Qual é o valor de L? Qual é o valor total da poluição na área considerada perigosa?

48. VOLUME DE UMA ESFERA Use o método da integração para mostrar que o volume de uma esfera de raio r é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

[*Sugestão:* pense na esfera como o sólido formado pela rotação em torno do eixo x da região sob uma circunferência mostrada na figura.]

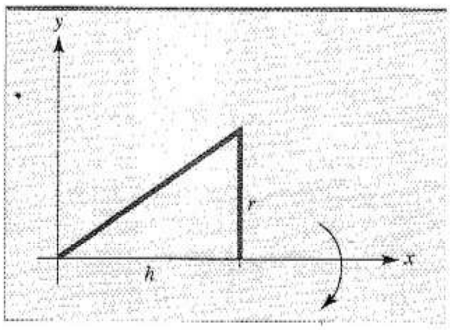


PROBLEMA 48

49. VOLUME DE UM CONE Use o método da integração para mostrar que o volume de um cilindro circular reto de altura h e raio da base r é dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

[*Sugestão:* pense no cone como um sólido formado pela rotação em torno do eixo x do triângulo mostrado na figura.]



PROBLEMA 49

*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, p. 299.

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

Antiderivada; integral indefinida: (Seção 5.1)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ se e apenas se } F'(x) = f(x)$$

Regra da potência: (Seção 5.1)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ para } n \neq -1$$

Regra de logaritmo:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Regra da exponencial:

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

Regra da multiplicação por uma constante:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Regra da soma: (Seção 5.1)

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Problema do valor inicial (Seção 5.1)

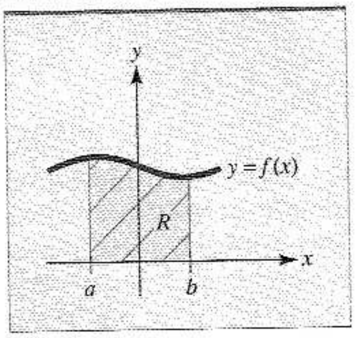
Integração por substituição: (Seção 5.2)

$$\int g(u(x))u'(x)\,dx = \int g(u)\,du \quad \text{onde } u = u(x),\ du = u'(x)\,dx$$

Integral definida: (Seção 5.3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} [f(x_1) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

Área sob uma curva: (Seção 5.3)



Área de $R = \int_a^b f(x)\,dx$

Regras para integrais definidas: (Seção 5.3)

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Regra da multiplicação por uma constante: (Seção 5.3)

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{para } k \text{ constante}$$

Regra da soma: (Seção 5.3)

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Regra da diferença: (Seção 5.3)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Regra da subdivisão: (Seção 5.3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

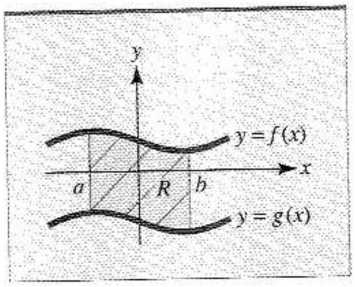
Teorema fundamental do cálculo: (Seção 5.3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{onde } F'(x) = f(x)$$

Variação de $Q(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$: (Seção 5.3)

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(x)\,dx$$

Área entre duas curvas: (Seção 5.4)

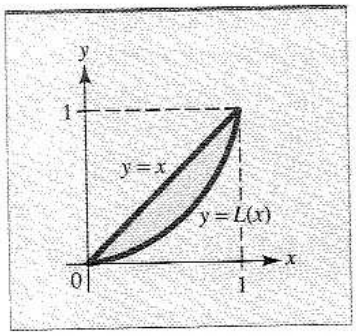


Área de $R = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

Valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$: (Seção 5.4)

$$V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Curva de Lorentz (Seção 5.4)



$$\text{Índice de Gini} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

Excesso líquido de lucro (Seção 5.4)

Valor futuro (montante) de um fluxo de receita (Seção 5.5)

Valor atual de um fluxo de receita (Seção 5.5)

Disposição do consumidor para gastar (Seção 5.5)

Excedente do consumidor: (Seção 5.5)

$$EC = \int_0^{q_0} D(q)\,dq - p_0q_0, \text{ onde } p = D(q) \text{ é a demanda}$$

Excedente do produtor: (Seção 5.5)

$$EP = p_0q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\,dq, \text{ onde } p = S(q) \text{ é a oferta}$$

Sobrevivência e renovação (Seção 5.6)
Vazão de sangue em uma artéria (Seção 5.6)
Débito cardíaco (Seção 5.6)
População total a partir da densidade populacional (Seção 5.6)
Volume de um sólido de revolução (Seção 5.6)

Verificação do Capítulo 5

1. Calcule as integrais indefinidas (antiderivadas) a seguir.

a. $\int x^3 - \sqrt{3x} + 5e^{-2x}\,dx$

b. $\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x}\,dx$

c. $\int \sqrt{x}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx$

d. $\int \frac{x}{(3 + 2x^2)^{3/2}}\,dx$

e. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x}\,dx$

f. $\int xe^{1+x^2}dx$

2. Calcule as integrais definidas a seguir.

a. $\int_1^4 x^{3/2} + \frac{2}{x}\,dx$

b. $\int_0^3 e^{3-x}\,dx$

c. $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$

d. $\int_0^3 \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}}\,dx$

3. Em cada caso, determine a área sob a região especificada.

a. A região limitada pela curva $y = x + \sqrt{x}$, o eixo x e as retas $x = 1$ e $x = 4$.

b. A região limitada pela curva $y = x^2 - 3x$ e a reta $y = x + 5$.

4. Determine o valor médio da função $f(x) = \frac{x-2}{x}$ no intervalo $1 \le x \le 2$.

5. VARIAÇÃO DA RECEITA A receita marginal com a produção de q unidades de uma certa mercadoria é $R'(q) = q(10 - q)$ centenas de reais por unidade. Qual é a renda adicional quando o nível de produção aumenta de 4 para 9 unidades?

6. BALANÇA COMERCIAL O governo de um certo país estima que daqui a t anos as importações estarão aumentando a uma taxa $I'(t)$ e as exportações a uma taxa $E'(t)$, ambas em bilhões de dólares por ano, onde

$$I'(t) = 12{,}5e^{0{,}2t} \quad \text{e} \quad E'(t) = 1{,}7t + 3$$

Qual é a variação do déficit comercial $D(t) = I(t) - E(t)$ deste país nos próximos 5 anos? O déficit aumenta ou diminui neste intervalo de tempo?

7. EXCEDENTE DO CONSUMIDOR Suponha que q centenas de unidades de uma certa mercadoria sejam demandadas pelos consumidores quando o preço unitário é $p = 25 - q^2$ reais. Qual é o excedente do consumidor da mercadoria quando o nível de produção é $q_0 = 4$ (400 unidades)?

8. MONTANTE DE UM FLUXO DE RECEITA Depósitos são realizados continuamente em uma conta a uma taxa constante de R$ 5.000,00 por ano. A conta rende juros de 5% ao ano capitalizados continuamente. Qual é o saldo da conta após 3 anos?

9. CRESCIMENTO POPULACIONAL Os demógrafos estimam que a fração de pessoas que ainda estão morando em um certa cidade t anos depois de se mudarem é dada pela função $f(t) = e^{-0{,}02t}$. Se a população atual é de 50.000 habitantes e a cidade recebe novos moradores à taxa de 700 por ano, qual será a população daqui a 20 anos?

10. CONCENTRAÇÃO MÉDIA DE UM MEDICAMENTO Um paciente recebe uma injeção de um medicamento; t horas depois, a concentração do medicamento no sangue do paciente é dada por

$$C(t) = \frac{0{,}3t}{(t^2 + 16)^{1/2}} \quad \text{mg/cm}^3$$

Qual é a concentração média do medicamento nas primeiras 3 horas após a injeção?

Problemas de Revisão

Nos Problemas 1 a 20, determine a integral indefinida indicada.

1. $\int (x^3 + \sqrt{x} - 9)\,dx$

2. $\int \left(x^{2/3} - \frac{1}{x} + 5 + \sqrt{x}\right)dx$

3. $\int (x^4 - 5e^{-2x})\,dx$

4. $\int \left(2\sqrt[3]{s} + \frac{5}{s}\right)ds$

5. $\int \left(\frac{5x^3 - 3}{x}\right) dx$

6. $\int \left(\frac{3e^{-x} + 2e^{3x}}{e^{2x}}\right) dx$

7. $\int \left(t^5 - 3t^2 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

8. $\int (x + 1)(2x^2 + \sqrt{x})\, dx$

9. $\int \sqrt{3x + 1}\, dx$

10. $\int (3x + 1)\sqrt{3x^2 + 2x + 5}\, dx$

11. $\int (x + 2)(x^2 + 4x + 2)^5\, dx$

12. $\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 2}\, dx$

13. $\int \frac{3x + 6}{(2x^2 + 8x + 3)^2}\, dx$

14. $\int (t - 5)^{12}\, dt$

15. $\int v(v - 5)^{12}\, dv$

16. $\int \frac{\ln(3x)}{x}\, dx$

17. $\int 5xe^{-x^2}\, dx$

18. $\int \left(\frac{x}{x - 4}\right) dx$

19. $\int \left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right) dx$

20. $\int \left(\frac{e^x}{e^x + 5}\right) dx$

Nos Problemas 21 a 30, calcule a integral definida indicada.

21. $\int_0^1 (5x^4 - 8x^3 + 1)\, dx$

22. $\int_1^4 (\sqrt{t} + t^{-3/2})\, dt$

23. $\int_0^1 (e^{2x} + 4\sqrt[3]{x})\, dx$

24. $\int_1^9 \frac{x^2 + \sqrt{x} - 5}{x}\, dx$

25. $\int_{-1}^2 30(5x - 2)^2\, dx$

26. $\int_{-1}^1 \frac{(3x + 6)}{(x^2 + 4x + 5)^2}\, dx$

27. $\int_0^1 2te^{t^2 - 1}\, dt$

28. $\int_0^1 e^{-x}(e^{-x} + 1)^{1/2}\, dx$

29. $\int_0^{e-1} \left(\frac{x}{x + 1}\right) dx$

30. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

ÁREA ENTRE CURVAS *Nos Problemas 31 a 38, faça um esboço da região R indicada e calcule sua área por integração.*

31. R é a região sob a curva $y = x + 2\sqrt{x}$ no intervalo $1 \leq x \leq 4$.
32. R é a região sob a curva $y = e^x + e^{-x}$ no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.
33. R é a região sob a curva $y = \frac{1}{x} + x^2$ no intervalo $1 \leq x \leq 2$.
34. R é a região sob a curva $y = \sqrt{9 - 5x^2}$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$.
35. R é a região limitada pela curva $y = \frac{4}{x}$ e pela reta $x + y = 5$.
36. R é a região limitada pelas curvas $y = \frac{8}{x}$ e $y = \sqrt{x}$ e pela reta $x = 8$.
37. R é a região limitada pela curva $y = 2 + x - x^2$ e pelo eixo x.
38. R é a região triangular com vértices nos pontos (0, 0), (2, 4) e (0, 6).

VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO *Nos Problemas 39 a 42, determine o valor médio da função dada no intervalo indicado.*

39. $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2x}$; para $1 \leq x \leq 8$
40. $f(t) = t\sqrt[3]{8 - 7t^2}$; para $0 \leq t \leq 1$
41. $g(v) = ve^{-v^2}$; para $0 \leq v \leq 2$
42. $h(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$; para $0 \leq x \leq 1$

EXCEDENTE DO CONSUMIDOR *Nos Problemas 43 a 46, $p = D(q)$ é a curva de demanda de uma certa mercadoria, ou seja, q unidades da mercadoria são demandadas quando o preço unitário é $p(q)$ reais. Em cada caso, para o nível de produção q_0 dado, determine $p_0 = D(q_0)$ e calcule o excedente do consumidor correspondente.*

43. $D(q) = 4(36 - q^2)$; $q_0 = 2$ unidades
44. $D(q) = 100 - 4q - 3q^2$; $q_0 = 5$ unidades
45. $D(q) = 10e^{-0.1q}$; $q_0 = 4$ unidades
46. $D(q) = 5 + 3e^{-0.2q}$; $q_0 = 10$ unidades

CURVA DE LORENTZ *Nos Problemas 47 a 50, plote a curva de Lorentz $y = L(x)$ e determine o índice de Gini correspondente.*

47. $L(x) = x^{3/2}$

48. $L(x) = x^{1,2}$

49. $L(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}7x$

50. $L(x) = 0{,}75x^2 + 0{,}25x$

SOBREVIVÊNCIA E RENOVAÇÃO *Nos Problemas 51 a 54, são dadas uma população inicial P_0, uma taxa de renovação $R(t)$ e uma função de sobrevivência $S(t)$. Em cada caso, use as informações dadas para determinar a população no final do termo T indicado.*

51. $P_0 = 75.000$; $R(t) = 60$; $S(t) = e^{-0{,}09t}$; t em meses; termo $T = 6$ meses

52. $P_0 = 125.000$; $R(t) = 250$; $S(t) = e^{-0{,}015t}$; t em anos; termo $T = 5$ anos

53. $P_0 = 100.000$; $R(t) = 90\,e^{0{,}1t}$; $S(t) = e^{-0{,}2t}$; t em anos; termo $T = 10$ anos

54. $P_0 = 200.000$; $R(t) = 50\,e^{0{,}12t}$; $S(t) = e^{\;0{,}017t}$; t em horas; termo $T = 20$ horas

VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO *Nos Problemas 55 a 58, determine o volume do sólido de revolução formado pela rotação em torno do eixo x da região R especificada.*

55. R é a região sob a curva $y = x^2 + 1$ de $x = -1$ a $x = 2$.

56. R é a região sob a curva $y = e^{-x/10}$ de $x = 0$ a $x = 10$.

57. R é a região sob a curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ de $x = 1$ a $x = 3$.

58. R é a região sob a curva $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ de $x = 1$ a $x = 4$.

Nos Problemas 59 a 62, resolva o problema de valor inicial dado.

59. $\dfrac{dy}{dx} = 2$, onde $y = 4$ para $x = -3$

60. $\dfrac{dy}{dx} = x(x-1)$, onde $y = 1$ para $x = 1$

61. $\dfrac{dx}{dt} = e^{-2t}$, onde $x = 4$ para $t = 0$

62. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t+1}{t}$, onde $y = 3$ para $t = 1$

63. Determine a função cuja tangente tem inclinação $x(x^2 + 1)^{-1}$ para qualquer valor de x e cuja curva passa pelo ponto $(1, 5)$.

64. Determine a função cuja tangente tem inclinação $xe^{\;2x^2}$ para qualquer valor de x e cuja curva passa pelo ponto $(0, -3)$.

65. VALOR PATRIMONIAL LÍQUIDO Um fazendeiro estima que daqui a t dias a quantidade de arroz colhida estará aumentando a uma taxa de $0{,}5t^2 + 4(t+1)^{-1}$ quilos por dia. Qual será o aumento do valor da colheita durante os próximos 6 dias se o preço de mercado permanecer fixo em R$ 2,00 o quilo?

66. DEPRECIAÇÃO O valor de revenda de uma certa máquina industrial diminui a uma taxa que varia com o tempo. Quando a máquina tem t anos de idade, a taxa com a qual seu valor varia é $200(t - 6)$ reais por ano. Se a máquina foi comprada nova por R$ 12.000,00, quanto valerá 10 anos depois?

67. VENDA DE INGRESSOS Os organizadores de uma feira agrícola estimam que t horas após os portões serem abertos às 9 h, os visitantes estarão chegando à taxa de $-4(t+2)^3 + 54(t+2)^2$ pessoas por hora. Quantas pessoas entrarão na feira entre as 10 e 12 h?

68. CUSTO MARGINAL Em uma certa fábrica, o custo marginal é $6(q-5)^2$ reais por unidade quando o nível de produção é q unidades. De quanto aumenta o custo quando o nível de produção aumenta de 10 para 13 unidades?

69. TRANSPORTE COLETIVO Estima-se que daqui a x semanas o número de usuários de uma nova linha de metrô estará aumentando à taxa de $18x^2 + 500$ por semana. No momento, a linha é usada por 8.000 pessoas. Quantas pessoas estarão usando a linha daqui a 5 semanas?

70. VARIAÇÃO DA BIOMASSA Uma amostra de proteína de massa m se desintegra em aminoácidos a uma taxa dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{-15t}{t^2 + 5}$$

onde m é a massa em gramas e t o tempo em horas. Qual é a variação da massa da amostra durante as primeiras 4 horas?

71. CONSUMO DE PETRÓLEO Estima-se que t anos após o início do ano de 2005 a demanda de petróleo de um certo país estará variando à taxa $D'(t) = (1 + 2t)^{-1}$ bilhões de barris por ano. O consumo (a demanda) de petróleo será maior em 2006 ou em 2009? Qual será a diferença?

72. VALOR FUTURO DE UM FLUXO DE RECEITA Depósitos são feitos continuamente em uma conta a uma taxa constante de R$ 5.000,00 por ano. A conta rende juros de 5% ao ano capitalizados continuamente. Qual será o saldo da conta após 3 anos?

73. VALOR FUTURO DE UM FLUXO DE RECEITA Depósitos são feitos continuamente em uma conta a uma taxa constante de R$ 1.200,00 por ano. A conta rende juros de 8% ao ano capitalizados continuamente. Qual será o saldo da conta após 5 anos?

74. VALOR FUTURO DE UM FLUXO DE RECEITA Qual é o valor atual de um investimento que gera receita continuamente a uma taxa constante de R$ 1.000 por ano durante 10 anos se a taxa de juros permanece constante em 7% ao ano capitalizados continuamente?

75. MERCADO IMOBILIÁRIO Em uma certa região, a fração de casas colocadas à venda que permanecem sem ser vendidas por pelo menos t semanas é dada aproximadamente por $f(t) = e^{-0{,}2t}$. Se 200 casas são colocadas à venda esta semana e outras casas são colocadas à venda à taxa de 8 por semana, quantas casas estarão à venda daqui a 10 semanas?

76. RECEITA MÉDIA Um fabricante de bicicletas calcula que daqui a x meses estará vendendo 5.000 bicicletas por mês ao preço de $P(x) = 80 + 3\sqrt{x}$ reais. Qual é a receita média com a venda de bicicletas esperada pelo fabricante para os próximos 16 meses?

77. REJEITOS NUCLEARES Uma usina nuclear produz rejeitos radioativos a uma taxa constante de 300 quilogramas por ano. Os rejeitos decaem espontaneamente com uma meia-vida de 35 anos. Qual será a quantidade de rejeitos da usina daqui a 200 anos, se ela continuar funcionando até lá?

78. CRESCIMENTO DE UMA ÁRVORE Uma árvore foi transplantada e após x anos está crescendo a uma taxa de

$$h'(x) = 0{,}5 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

metros por dia. Quantos metros a árvore cresce durante o segundo ano?

79. RECEITA FUTURA Um certo poço de petróleo que produz 900 barris de petróleo bruto por mês estará seco em 3 anos. O preço do barril de petróleo bruto é atualmente de 16 dólares e deverá aumentar a uma taxa constante de 8 cents por barris por mês. Se o petróleo for vendido assim que for extraído do solo, qual será a receita futura total com o poço?

80. EXCEDENTE DO CONSUMIDOR A função de demanda de um certo produto é $D(q) = 50 - 3q - q^2$ reais por unidade.

a. Determine o número de unidades que serão vendidas se o preço do mercado for de R$ 32,00 por unidade.

b. Determine a disposição do consumidor para gastar em relação a um número de unidades vendidas igual ao do item (a).

c. Determine o excedente do consumidor para um preço de mercado de R$ 32,00 a unidade.

d. Use uma calculadora para plotar a curva de demanda. Interprete a disposição do consumidor para gastar e o excedente do consumidor como regiões da curva.

81. PREÇO MÉDIO Os registros indicam que t meses após o início do ano o preço do bacon nos supermercados de uma certa região era $P(t) = 0{,}06t^2 - 0{,}2t + 1{,}2$ reais o quilo. Qual foi o preço médio do bacon nos primeiros 6 meses do ano?

82. ÁREA DA SUPERFÍCIE DE UMA CRIANÇA A área S da superfície do corpo de uma criança de 1,20 m de altura e w quilogramas de peso varia a uma taxa dada por

$$S'(w) = 1.500w^{-0{,}575} \text{ cm}^2/\text{kg}$$

Uma certa criança que tem 1,20 m de altura e pesa 23 kg tem uma área superficial de 8,531 cm². Se a criança ganha 1 kg e sua altura permanece a mesma, qual é o aumento da área superficial?

83. VARIAÇÃO DE TEMPERATURA Em uma certa cidade do sul do Brasil, t horas após a meia-noite a temperatura T está variando a uma taxa dada por

$$T'(t) = -0{,}02(t-7)(t-14) \quad °\text{C por hora}$$

Qual é a variação de temperatura entre as 8 e 20 h?

84. EFEITO DE UMA TOXINA Uma toxina é introduzida em uma colônia de bactérias e t horas depois a população $P(t)$ da colônia está variando a uma taxa

$$\frac{dP}{dt} = -(\ln 3)3^{4-t}$$

Se existiam 1 milhão de bactérias na colônia quando a toxina foi introduzida, qual é a função $P(t)$? [*Sugestão*: Note que $3^x = e^{x \ln 3}$.]

85. ANÁLISE MARGINAL Em uma certa região do país, o preço de ovos tipo A é atualmente de R$ 2,50 a dúzia. Os estudos indicam que daqui a x semanas o preço $p(x)$ estará variando à taxa de $p'(x) = 0{,}2 + 0{,}003x^2$ centavos por semana.

a. Use o método da integração para determinar $p(x)$ e plote a função em uma calculadora gráfica. Quanto custarão os ovos daqui a 10 semanas?

b. Suponha que a taxa de variação do preço fosse $p'(x) = 0{,}3 + 0{,}003x^2$. Como isto afetaria $p(x)$? Verifique se o seu raciocínio está correto plotando no mesmo gráfico as funções obtidas nos itens (a) e (b). Neste caso, quanto custariam os ovos daqui a 10 semanas?

86. INVESTINDO EM UM MERCADO EM BAIXA Jane aplicou R$ 5.000 em um fundo de ações no início de janeiro e depositava R$ 200,00 por mês no fundo a partir de fevereiro. Infelizmente, a bolsa está em baixa e a moça descobre que após t meses cada real investido vale apenas $100f(t)$ centavos, onde $f(t) = e^{-0{,}01t}$. Se a tendência continuar, quanto valerá a aplicação após 2 anos? [*Sugestão:* Pense neste problema como um problema de sobrevivência e renovação.]

87. DISTÂNCIA E VELOCIDADE Após t minutos, um corpo que se move em linha reta tem uma velocidade $v(t) = 1 + 4t + 3t^2$ metros por minuto. Que distância o corpo percorre no terceiro minuto?

88. POPULAÇÃO MÉDIA A população de uma certa cidade (em milhares de habitantes) t anos após 1° de janeiro de 1995 é dada pela função

$$P(t) = \frac{150e^{0{,}03t}}{1 + e^{0{,}03t}}$$

Qual foi a população média da cidade durante a década de 1995–2005?

89. DISTRIBUIÇÃO DE RENDA Um estudo mostra que a distribuição de renda dos assistentes sociais e dos fisioterapeutas pode ser representada pelas curvas de Lorentz $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$, respectivamente, onde

$$L_1(x) = x^{1{,}6} \quad \text{e} \quad L_2(x) = 0{,}65x^2 + 0{,}35x$$

Em qual das duas profissões a distribuição de renda é mais eqüitativa?

90. DISTRIBUIÇÃO DE RENDA Um estudo realizado em um certo país mostra que a distribuição de renda dos professores do ensino médio e dos corretores de imóveis pode ser representada pelas funções

$$L_1(x) = 0{,}67x^4 + 0{,}33x^3$$
$$L_2(x) = 0{,}72x^2 + 0{,}28x$$

respectivamente. Em qual das duas profissões a distribuição de renda é mais eqüitativa?

91. ECOLOGIA Um lago tem aproximadamente a forma da metade inferior do sólido obtido pela rotação da curva $2x^2 + 3y^2 = 6$ em torno do eixo x, com x e y em quilômetros. Os conservacionistas querem que o lago contenha 1.000 trutas por quilômetro cúbico. Se o lago contém atualmente 5.000 trutas, quantas devem ser introduzidas no lago para satisfazer os conservacionistas?

92. HORTICULTURA Um sistema de irrigação borrifa água em um jardim de tal forma que $28e^{-r^2/90}$ centímetros de água são aplicados por hora a uma distância de r centímetros do borrifador. Qual é a quantidade total de água aplicada pelo sistema em um raio de 1,5 metro durante um período de 20 minutos?

93. VELOCIDADE E DISTÂNCIA Um carro está se movendo de tal forma que após t horas sua velocidade é $S(t)$ quilômetros por hora.

a. Escreva uma integral definida que corresponda à velocidade média do carro durante as primeiras N horas.

b. Escreva uma integral definida que corresponda à distância percorrida pelo carro durante as primeiras N horas.

c. Discuta a relação entre as integrais dos itens (a) e (b).

94. Use uma calculadora gráfica para plotar no mesmo gráfico as curvas $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ e $y = x \ln x$. Use **TRACE** e **ZOOM** ou outro recurso da calculadora para determinar os pontos de interseção das curvas e calcule a área da região limitada pelas curvas.

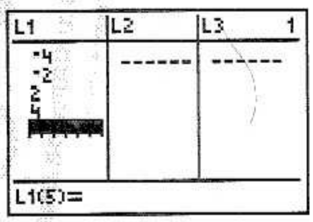
95. Repita o Problema 94 para as curvas

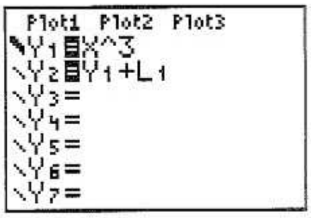
$$y = \frac{x-2}{x+1} \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{25 - x^2}$$

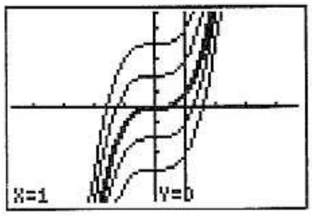
ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

Solução do Exercício EXPLORE! 1

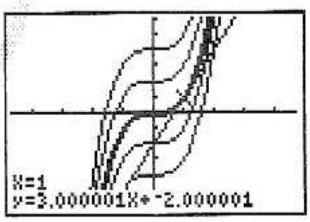
Entre com as constantes $\{-4, -2, 2, 4\}$ em L1 e com as funções Y1 = X^3 e Y2 = Y1 + L1. Plote Y1 em negrito, usando uma janela decimal modificada $[-4.7, 4.7]1$ por $[-6, 6]1$. Em $x = 1$ (onde foi traçada uma reta vertical no gráfico da direita), todas as curvas parecem ter a mesma inclinação.

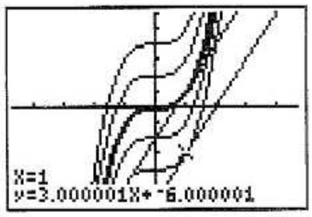


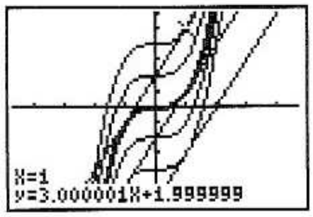




Usando a rotina de reta tangente da calculadora, trace retas tangentes a estas curvas passando por pontos como $x = 1$. Todas estas retas tangentes têm uma inclinação de 3, embora interceptem o eixo y em pontos diferentes.

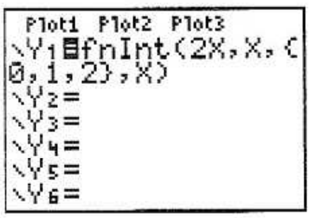


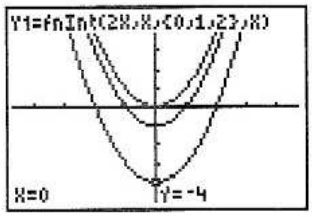




Solução do Exercício EXPLORE! 2

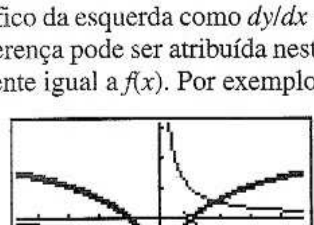
Para ter acesso à função integral numérica, **fnInt**(expressão, variável, limite inferior, limite superior), aperte a tecla **MATH** e escolha a opção **9:fnInt**(, que pode ser usada para entrar com a função Y1 da figura abaixo à esquerda. Obtemos uma família de curvas que parecem ser parábolas, com vértices no eixo y em $y = 0$, -1 e -4. A antiderivada de $f(x) = 2x$ é $F(x) = x^2 + C$, onde $C = 0$, -1 e -4, no nosso caso.

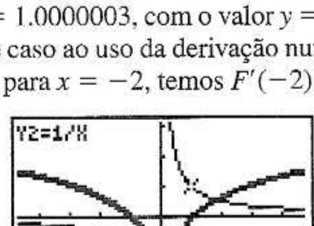




Solução do Exercício EXPLORE! 3

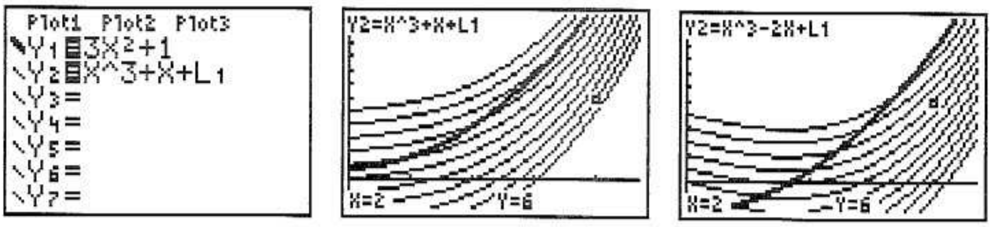
Entre com $y = F(x) = \ln|x|$ em Y1 como ln(abs(X)), entre com $f(x) = 1/x$ em Y2 e plote as duas curvas usando uma janela decimal e o estilo negrito para a primeira curva. Faça $x = 1$ e compare a derivada $F'(1)$, que é mostrada no gráfico da esquerda como $dy/dx = 1.0000003$, com o valor $y = 1$ de $f(1)$ no gráfico da direita. A pequena diferença pode ser atribuída neste caso ao uso da derivação numérica. Na maioria dos casos, $F'(x)$ é exatamente igual a $f(x)$. Por exemplo: para $x = -2$, temos $F'(-2) = -0{,}5 = f(-2)$.





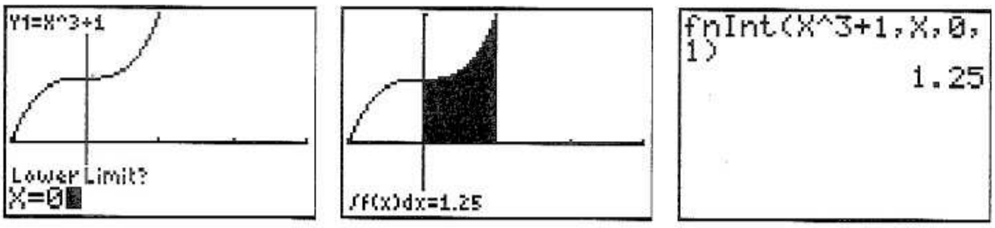
Solução do Exercício EXPLORE! 4

Entre com os números inteiros de -5 a 5 em L1 (**STAT EDIT 1**). Entre em Y1 e Y2 com as funções mostradas a seguir. Plote com a janela padrão e observe que as curvas das antiderivadas são geradas seqüencialmente, começando pela de baixo. Use **TRACE** para assinalar o ponto (2, 6) e observe que a antiderivada que passa por este ponto é a segunda na lista de L1. Esta curva é $F(x) = x^3 + x - 4$, que também pode ser calculada analiticamente, como no Exemplo 5.1.4. Para $f(x) = 3x^2 - 2$, a família de antiderivadas é $F(x) = x^3 - 2x + \text{L1}$ e a mesma janela pode ser usada para gerar o gráfico da direita. A antiderivada desejada é a oitava de baixo para cima e corresponde a $F(x) = x^3 - 2x + 2$, cujo termo constante pode ser confirmado algebricamente.



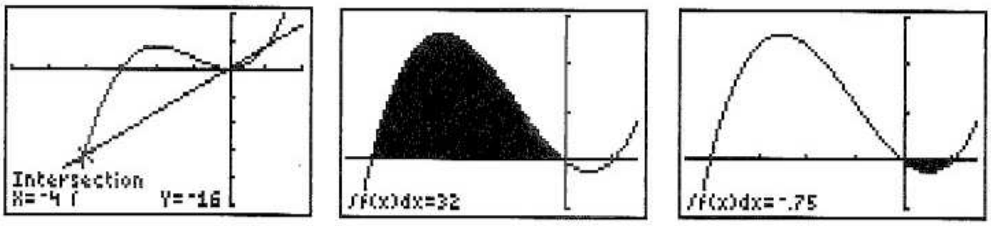
Solução do Exercício EXPLORE! 8

Como no Exemplo 5.3.3, faça Y1 $= x^3 + 1$ e plote usando uma janela $[-1, 3]1$ por $[-1, 2]$. Entre na rotina de integração numérica com **CALC, 7:∫f(x)dx**, especificando o limite inferior como X = 0 e o limite superior como X = 1 para obter $\int_0^1 (x^3 + 1)\, dx = 1{,}25$. A integração numérica também pode ser realizada a partir da tela inicial usando **MATH, 9:fnInt(**, como mostra a figura da direita.



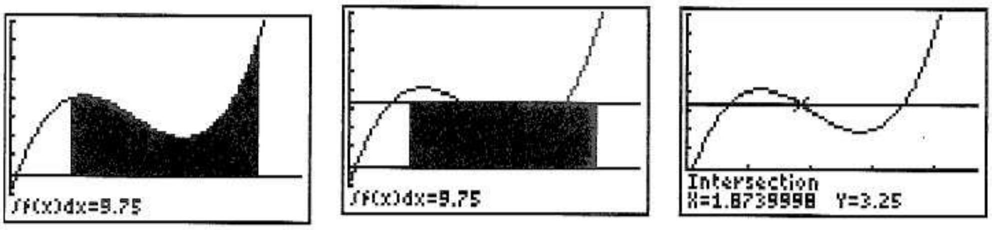
Solução do Exercício EXPLORE! 10

Como no Exemplo 5.4.2, faça Y1 = 4X e Y2 = $X^3 + 3X^2$ no editor de equações. Plote usando uma janela $[-6, 2]1$ por $[-25, 10]5$. As coordenadas x dos pontos de interseção são $x = -4$, 0 e 1. Considerando $y = 4x$ como linha de base, a área entre Y1 e Y2 pode ser vista como a área da curva diferença Y3 = Y2 − Y1. Desative Y1 e Y2 e plote Y3 usando uma janela $[-4.5, 1.5]0.5$ por $[-5, 15]5$. A integração numérica desta curva entre $x = -4$ e $x = 0$ nos dá uma área de 32 unidades quadradas para o primeiro setor limitado pelas duas curvas. A área do segundo setor, entre $x = 0$ e $x = 1$, é $-0{,}75$. A área total limitada pelas duas curvas é $32 + |0{,}75| = 32{,}75$.



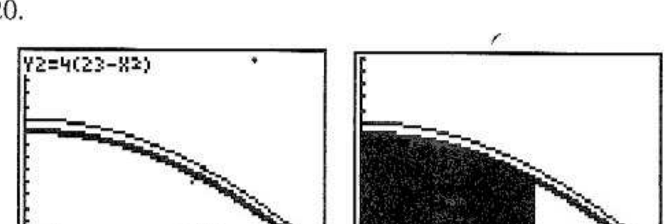
Solução do Exercício EXPLORE! 11

Faça Y1 $= x^3 - 6x^2 + 10x - 1$ e use a opção **CALC, 7:∫f(x)dx** para determinar que a área sob a curva de $x = 1$ a $x = 4$ é 9,75 unidades quadradas, o que é igual à parte retangular sob Y2 = $9{,}75/(4 - 1) = 3{,}25$ de largura 3. É como se a área sob $f(x)$ no intervalo [1, 4] se tornasse líquida e escorresse para ocupar uma região com uma altura constante de 3,25, o valor médio de $f(x)$. Este valor é atingido para $x \approx 1{,}874$ (assinalado na figura da direita) e também para $x = 3{,}473$. Note que é preciso apagar o sombreado anterior, usando **DRAW, 1:ClrDraw**, para passar ao gráfico seguinte.



Solução do Exercício EXPLORE! 13

Entre com $D_{nova}(q)$ em negrito como Y2 = $4(23 - X^2)$ e com $D(q)$ como Y1 = $4(25 - X^2)$, usando uma janela $[0, 5]1$ por $[0, 150]10$. Visualmente, $D_{nova}(q)$ é menor que $D(q)$ em todo o intervalo de observação, o que confirma a conjectura de que a área sob a curva de $D_{nova}(q)$ é menor que à de $D(q)$ no intervalo [0, 3]. O valor calculado para esta área é R$ 240,00, menor que o valor de R$ 264,00 obtido para a área de $D(q)$ na Figura 5.20.



PARA PENSAR

PEQUENAS DIFERENÇAS DE PERCEPÇÃO

O cálculo permite conhecer melhor a percepção humana, ajudando, por exemplo, a descobrir quantas freqüências sonoras e quantas cores uma pessoa é capaz de distinguir. Nosso objetivo neste ensaio é mostrar que o cálculo integral pode ser usado para estimar o número de freqüências diferentes que uma pessoa consegue perceber quando a freqüência sonora aumenta desde a menor freqüência audível, 15 Hz, até a maior freqüência audível, 18.000 Hz. (Hz é a abreviação de hertz, a unidade de freqüência do SI, que corresponde a 1 ciclo por segundo.)

Um modelo matemático* da percepção auditiva humana usa a expressão $y = 0{,}767x^{0{,}439}$, onde y (em Hz) é a menor variação de freqüência que pode ser detectada na freqüência x (em Hz). Assim, no caso da menor freqüência audível, 15 Hz, a menor variação de freqüência que uma pessoa é capaz de detectar é $y = 0{,}767 \times 15^{0{,}439} \approx 2{,}5$ Hz, enquanto no caso da maior freqüência audível, 18.000 Hz, a menor diferença perceptível é $y = 0{,}767 \times 18.000^{0{,}439} \approx 57$ Hz. Se a menor variação perceptível fosse a mesma para todas as freqüências, poderíamos calcular o número de freqüências que um ser humano é capaz de distinguir simplesmente dividindo a faixa de freqüências audíveis por esta menor variação perceptível. Infelizmente, acabamos de ver que a menor variação perceptível de freqüência aumenta quando a freqüência aumenta, de modo que esta abordagem simples não é praticável, Entretanto, podemos estimar o número de freqüências que uma pessoa é capaz de perceber usando uma integral.

Para isso, vamos chamar de $f(x)$ a menor diferença de freqüência que uma pessoa é capaz de perceber quando a freqüência é x e escolher números $x_0, x_1, \ldots, x_n$, começando com $x_0 = 15$ Hz e terminando com $x_n = 18.000$ Hz, de tal forma que para $j = 0, 2, \ldots, n - 1$,

$$x_j + f(x_j) = x_{j+1}$$

Assim, x_{j+1} é o número que obtemos somando a x_j a menor diferença perceptível quando a freqüência é x_j. Nesse caso, a largura do intervalo de ordem j é dada por

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = f(x_j)$$

Dividindo por $f(x_j)$, obtemos

$$\frac{\Delta x_j}{f(x_j)} = \frac{x_{j+1} - x_j}{f(x_j)} = 1$$

e, portanto,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta x_j}{f(x_j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{f(x_j)} = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0)} + \frac{x_2 - x_1}{f(x_1)} + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)}$$
$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termos}} = n$$

A soma do lado esquerdo desta equação é uma soma de Riemann, e como os intervalos $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ são muito pequenos, a soma é aproximadamente igual a uma integral definida. Assim, temos:

$$\int_{x_0}^{x_n} \frac{dx}{f(x)} \approx \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta x_j}{f(x_j)} = n$$

* Parte deste ensaio se baseia em Anthony Barcellos, *Applications of Calculus: Selected Topics from the Environmental and Life Sciences*, New York: McGraw-Hill, 1994, pp. 21-24.

Finalmente, fazendo $f(x) = 0{,}767x^{0{,}439}$, $x_0 = 15$ e $x_n = 18.000$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} \frac{dx}{f(x)} &= \int_{15}^{18.000} \frac{dx}{0{,}767x^{0{,}439}} \\ &= \frac{1}{0{,}767}\left(\frac{x^{0{,}561}}{0{,}561}\right)\Bigg|_{15}^{18.000} \\ &= 2{,}324(18.000^{0{,}561} - 15^{0{,}561}) \\ &= 556{,}2\end{aligned}$$

Assim, existem aproximadamente 556 freqüências perceptíveis no intervalo de 15 Hz a 18.000 Hz.

Seguem alguns exercícios que envolvem a aplicação destes princípios à percepção auditiva e visual.

Exercícios

1. As 88 teclas de um piano vão de 15 Hz a 4.186 Hz. Se o número de teclas fosse baseado nas menores diferenças de freqüência que uma pessoa é capaz de perceber, quantas teclas teria um piano?
2. Um monitor monocromático de 8 bits é capaz de representar 256 tons de cinza. Seja x uma tonalidade de cinza, com $x = 0$ para o branco e $x = 1$ para o preto. Um modelo para a percepção de tons de cinza utiliza a expressão $y = Ax^{0{,}3}$, onde A é uma constante positiva e y é a menor mudança que pode ser detectada pelo olho humano quando o tom de cinza é x. Como os experimentos mostram que o olho humano é incapaz de distinguir 256 tons diferentes de cinza, o número n de tons de cinza que o olho humano é capaz de perceber entre $x = 0$ e $x = 1$ deve ser menor que 256. A partir da hipótese de que $n < 256$, determine um valor mínimo para a constante A na expressão $y = Ax^{0{,}3}$.
3. Um modelo da capacidade da visão humana de distinguir cores utiliza a expressão $y = 2{,}9 \times 10^{-24}\, x^{8{,}52}$, onde y é a menor diferença de cor que o olho pode distinguir para uma cor com um comprimento de onda x, com x e y em nanômetros (nm).
   a. A luz amarela tem um comprimento de onda de 580 nm. Qual é a menor diferença que o olho humano pode perceber para este comprimento de onda?
   b. A luz vermelha tem um comprimento de onda de 760 nm. Qual é a menor diferença que o olho humano pode perceber para este comprimento de onda?
   c. Quantos matizes o olho humano é capaz de perceber entre o amarelo e o vermelho?
4. Formule um modelo da forma $y = ax^k$ para os matizes que o olho humano é capaz de perceber entre o amarelo, com 580 nm, e o violeta, com 400 nm. Use o fato de que a menor diferença que o olho humano pode perceber no caso da luz amarela é de 1 nm e no caso da luz violeta de 0,043 nm.

CAPÍTULO | 6

OUTROS TÓPICOS DE INTEGRAÇÃO

SEÇÃO 6.1 | Integração por Partes; Tabelas de Integrais

A integração por partes é uma técnica de integração baseada na regra do produto para derivadas. Em particular, se $u(x)$ e $v(x)$ são funções deriváveis de x, temos:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

e, portanto,

$$u(x)\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - v(x)\frac{du}{dx}$$

Integrando ambos os membros desta equação em relação a x, obtemos:

$$\int\left[u(x)\frac{dv}{dx}\right]dx = \int\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]\,dx - \int\left[v(x)\frac{du}{dx}\right]dx$$
$$= u(x)v(x) - \int\left[v(x)\frac{du}{dx}\right]dx$$

já que $u(x)v(x)$ é uma antiderivada de $\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]$. Podemos escrever esta expressão na forma mais compacta

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

já que

$$dv = \frac{dv}{dx}dx \qquad \text{e} \qquad du = \frac{du}{dx}dx$$

A equação $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ é chamada de **fórmula de integração por partes**. A grande vantagem desta fórmula é que se podemos encontrar funções u e v tais que uma dada integral $\int f(x)dx$ pode ser expressa na forma $\int f(x)dx = \int u\, dv$, temos:

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

e a integral dada pode ser substituída diretamente pela integral $\int v\, du$. Se a integral $\int v\, du$ é mais fácil de calcular que $\int u\, dv$, a substituição facilita o cálculo de $\int f(x)dx$. Segue um exemplo.

EXEMPLO 6.1.1

Determine $\int x^2 \ln x\, dx$.

Solução

Nossa estratégia consiste em expressar $\int x^2 \ln x\, dx$ como $\int u\, dv$ escolhendo u e v de tal forma que $\int v\, du$ seja mais fácil de calcular que $\int u\, dv$. Neste caso, o melhor é fazer

$$u = \ln x \qquad \text{e} \qquad dv = x^2\,dx$$

já que

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

é uma expressão mais simples que $\ln x$, enquanto v pode ser obtida através da integração relativamente simples

$$v = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$$

(Para facilitar, omitimos o "$+ C$" dos cálculos até o resultado final.) Usando estes valores de u e v na fórmula de integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x\,dx &= \int \overbrace{(\ln x)}^{u}\overbrace{(x^2\,dx)}^{dv} = \overbrace{(\ln x)}^{u}\overbrace{\left(\frac{1}{3}x^3\right)}^{v} - \int \overbrace{\left(\frac{1}{3}x^3\right)}^{v}\overbrace{\left(\frac{1}{x}\,dx\right)}^{du}\\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + C\\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

Aqui está um resumo do método que acabamos de ilustrar:

Integração por Partes

Para determinar uma integral $\int f(x)dx$ usando a fórmula de integração por partes:

1.° passo: Escolha funções u e v tais que $f(x)dx = u\, dv$. Procure escolher u de tal forma que du seja mais simples que u e um dv seja fácil de integrar.

2.° passo: Organize o cálculo de du e v como

$$\begin{array}{cc} u & dv \\ du & v = \int dv \end{array}$$

3.° passo: Complete a integração calculando $\int v\,du$. O resultado é

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Acrescente "$+ C$" apenas quando terminar os cálculos.

A escolha de u e dv para integrar por partes requer habilidade e experiência. No Exemplo 6.1.1, as coisas não correriam tão bem se tivéssemos escolhido $u = x^2$ e $dv = \ln x\,dx$. Certamente, $du = 2x\,dx$ é mais simples que $u = x^2$, mas o que faríamos com $v = \int \ln x\,dx$? Na verdade, o cálculo desta integral é tão difícil quanto o da integral original (veja Exemplo 6.1.4). Os Exemplos 6.1.2, 6.1.3 e 6.1.4 ilustram várias formas de escolher u e dv em integrais que podem ser calculadas usando o método da integração por partes.

EXEMPLO 6.1.2

Determine $\int xe^{2x}\,dx$.

Solução

Embora os dois fatores, x e e^{2x}, sejam fáceis de integrar, apenas x se torna mais simples quando é derivado. Assim, fazemos $u = x$ e $dv = e^{2x}\,dx$ para obter

$$u = x \qquad dv = e^{2x}\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Substituindo na fórmula de integração por partes, temos:

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{(e^{2x}\,dx)}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C$$

EXEMPLO 6.1.3

Determine $\int x\sqrt{x+5}\,dx$.

Solução

Neste caso, os dois fatores, x e $\sqrt{x+5}$, são fáceis de derivar e de integrar, mas apenas x se torna mais simples ao ser derivado. Assim, é melhor escolher

$$u = x \qquad dv = \sqrt{x+5}\,dx = (x+5)^{1/2}\,dx$$

donde

$$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$$

Substituindo na fórmula de integração por partes, obtemos

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{(\sqrt{x+5}\,dx)}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left[\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}\right]}_{v} - \int \underbrace{\left[\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}\right]}_{v}\underbrace{dx}_{du}$$

$$= \frac{2}{3}x(x+5)^{3/2} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+5)^{5/2}\right] + C$$

$$= \frac{2}{3}x(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$$

NOTA Algumas integrais podem ser calculadas tanto por substituição como por integração por partes. A integral do Exemplo 6.1.3 pode ser determinada usando a substituição $u = x + 5$, $du = dx$ e $x = u - 5$, caso em que

$$\int x\sqrt{x+5}\,dx = \int (u-5)\sqrt{u}\,du = \int (u^{3/2} - 5u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{5u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$$

Este resultado não é igual ao obtido no Exemplo 6.1.3. Para mostrar que os dois resultados são equivalentes, observe que a antiderivada do Exemplo 6.1.3 pode ser expressa na forma

$$\frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} = (x+5)^{3/2}\left[\frac{2x}{3} - \frac{4}{15}(x+5)\right]$$

$$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{5} - \frac{4}{3}\right) = (x+5)^{3/2}\left[\frac{2}{5}(x+5) - \frac{10}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2}$$

que é igual à antiderivada obtida por substituição. Este exemplo mostra que nem sempre o fato de o aluno obter uma resposta diferente da que aparece no final do livro significa que sua resposta está errada. ■

Integração Definida por Partes

A fórmula da integração por partes pode ser aplicada a integrais definidas observando que

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

A integração definida por partes é usada no Exemplo 6.1.4 para calcular uma área.

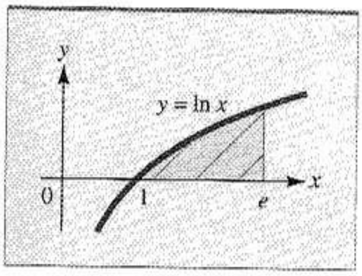


FIGURA 6.1 A região sob a curva $y = \ln x$ no intervalo $1 \leq x \leq e$.

EXEMPLO 6.1.4

Determine a área da região limitada pela curva $y = \ln x$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = e$.

Solução

A região aparece na Figura 6.1. Como $\ln x \geq 0$ para $1 \leq x \leq e$, a área é dada pela integral definida

$$A = \int_1^e \ln x\,dx$$

Para calcular esta integral usando integração por partes, pensamos em $\ln x\,dx$ como $(\ln x)(1\,dx)$ e fazemos

$$u = \ln x \qquad dv = 1\,dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \int 1\,dx = x$$

Assim, a área pedida é

$$
\begin{aligned}
A = \int_1^e \ln x\,dx &= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\left(\frac{1}{x}\,dx\right)\\
&= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 1\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e\\
&= [e\ln e - e] - [1\ln 1 - 1]\\
&= [e(1) - e] - [1(0) - 1] \qquad \ln e = 1 \text{ e } \ln 1 = 0\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Como mais uma ilustração das aplicações práticas da integração por partes, vamos usá-la no Exemplo 6.1.5 para calcular o valor futuro de um fluxo de receita contínuo (veja Seção 5.5).

EXEMPLO 6.1.5

Marília está pensando em fazer um investimento de 5 anos e estima que daqui a t anos ele estará gerando um fluxo de receita contínuo de $3.000 + 50t$ reais por ano. Se a taxa de juros permanecer constante em 4% ao ano capitalizados continuamente durante todo o termo, qual será o valor do investimento daqui a 5 anos?

Solução

O valor do investimento de Marília é igual ao valor futuro do fluxo de receita. Como vimos na Seção 5.5, o valor futuro VF de um fluxo de receita depositado continuamente à taxa $f(t)$ em uma conta com uma taxa anual r de juros capitalizados continuamente por um termo de T anos é dado pela integral

$$\text{VF} = \int_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt$$

No caso deste investimento, temos $f(t) = 3.000 + 50t$, $r = 0{,}04$, $T = 5$ e, portanto, o valor futuro é dado por

$$\text{VF} = \int_0^5 (3.000 + 50t)e^{0{,}04(5-t)}\,dt$$

Integrando por partes com

$$
\begin{aligned}
u &= 3.000 + 50t \qquad & dv &= e^{0{,}04(5-t)}\,dt\\
du &= 50\,dt \qquad & v &= \frac{e^{0{,}04(5-t)}}{-0{,}04} = -25e^{0{,}04(5-t)}
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\text{VF} &= \left[(3.000 + 50t)(-25)e^{0{,}04(5-t)}\right]\Big|_0^5 - \int_0^5 (50)(-25)e^{0{,}04(5-t)}\,dt\\
&= \left[(-75.000 - 1.250t)e^{0{,}04(5-t)}\right]\Big|_0^5 - 1.250\left[\frac{e^{0{,}04(5-t)}}{-0{,}04}\right]\Big|_0^5\\
&= \left[(-106.250 - 1.250t)e^{0{,}04(5-t)}\right]\Big|_0^5 \qquad \textit{combinando termos}\\
&= \left[-106.250 - 1.250(5)\right]e^0 - \left[-106.250 - 1.250(0)\right]e^{0{,}04(5)}\\
&\approx 17.274{,}04
\end{aligned}
$$

Assim, daqui a 5 anos o investimento de Marília valerá aproximadamente R$ 17.300,00.

Aplicação Repetida da Integração por Partes

Às vezes, a integração por partes leva a uma nova integral que também precisa ser calculada pelo método da integração por partes. Esta situação é ilustrada no Exemplo 6.1.6.

EXEMPLO 6.1.6

Determine $\int x^2 e^{2x}\,dx$.

Solução

Como o fator e^{2x} é fácil de integrar e a derivada de x^2 é mais simples que a função original, fazemos

$$u = x^2 \qquad dv = e^{2x}\,dx$$

e, portanto,

$$du = 2x\,dx \qquad v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x}\,dx &= x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)(2x\,dx)\\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx\end{aligned}$$

A integral $\int xe^{2x}\,dx$ também pode ser calculada pelo método da integração por partes. Como vimos no Exemplo 6.1.2,

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}\right] + C\\ &= \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x} + C\end{aligned}$$

Uso de Tabelas de Integrais

A maioria das integrais encontradas nas ciências sociais, econômicas e biológicas pode ser calculada usando as expressões básicas da Seção 5.1 e os métodos de substituição e integração por partes. Às vezes, porém, aparecem integrais que não podem ser calculadas por estes métodos. Algumas, como $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, não possuem solução analítica; outras são encontradas em **tabelas de integrais**, compilações de integrais calculadas com auxílio de mátodos mais sofisticados que os discutidos neste livro.

Uma pequena tabela de integrais* aparece mais adiante. Observe que a tabela está dividida em seções como "expressões da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$" e que as expressões são dadas em termos de constantes como a, b e n. O uso desta tabela é ilustrado nos Exemplos 6.1.7 a 6.1.11.

1 EXPLORE!

Entre com $F(x) = \frac{1}{2p}\ln\frac{p+x}{p-x}$ como (1 ÷ (2P)) ln(abs((P + X) ÷ (P − X))) em negrito e $f(x) = \frac{1}{p^2 - x^2}$ como 1 ÷ (P^2 − X^2) como duas funções separadas no editor de equações. Entre com 0.8 como P e plote usando uma janela decimal. Verifique que $F'(x) = f(x)$ exceto para $x = \pm 0{,}08$.

EXEMPLO 6.1.7

Determine $\int \frac{1}{x(3x-6)}\,dx$.

*Tabelas mais completas podem ser encontradas em livros especializados como Murray R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Schaum Outline Series, New York: McGraw-Hill, 1968.

Solução

Aplicando a Fórmula 6 com $a = -6$ e $b = 3$, obtemos:

$$\int \frac{1}{x(3x-6)}\,dx = \frac{-1}{6}\ln\left|\frac{x}{3x-6}\right| + C$$

EXEMPLO 6.1.8

Determine $\int \frac{1}{6-3x^2}\,dx$.

Solução

Se o coeficiente de x^2 fosse 1 e não 3, poderíamos usar a Fórmula 16. Entretanto, podemos escrever o integrando na forma

$$\frac{1}{6-3x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2-x^2}\right)$$

e aplicar a Fórmula 16 com $a = \sqrt{2}$:

$$\int \frac{1}{6-3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2-x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + C$$

EXEMPLO 6.1.9

Determine $\int \frac{1}{3x^2-6}\,dx$.

Solução

É natural tentar reduzir esta integral à da Fórmula 16 escrevendo

$$\int \frac{1}{3x^2+6}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{-2-x^2}\,dx$$

Entretanto, como -2 é um número negativo, não pode ser escrito como o quadrado a^2 de um número real a e, portanto, a Fórmula 16 não pode ser aplicada. Na verdade, existe uma fórmula para esta integral, mas envolve funções trigonométricas inversas, que não são discutidas neste livro.

EXEMPLO 6.1.10

Determine $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx$.

Solução

Para colocar esta integral na forma da Fórmula 20, escrevemos

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{\sqrt{4(x^2-9/4)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-9/4}}$$

Aplicando a fórmula com $a^2 = 9/4$, obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9/4}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9/4}| + C$$

Nosso último exemplo ilustra o uso da Fórmula 26. Uma fórmula deste tipo recebe o nome de **fórmula de redução** porque permite expressar uma integral dada em termos de uma integral mais simples da mesma forma.

EXEMPLO 6.1.11

Determine $\int x^3 e^{5x}\,dx$.

Solução

Aplicando a Fórmula 26 com $n = 3$ e $a = 5$, obtemos

$$\int x^3 e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{5}\int x^2 e^{5x}\,dx$$

TABELA DE INTEGRAIS

Expressões da Forma $a + bu$

1. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^2}[a + bu - a\ln|a + bu|] + C$

2. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a + bu} = \frac{1}{2b^3}[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2\ln|a + bu|] + C$

3. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu|\right] + C$

4. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}}\right| + C \quad a > 0$

6. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a + bu}\right| + C$

7. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = \frac{-1}{a}\left[\frac{1}{u} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{u}{a + bu}\right|\right] + C$

8. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a + bu)^2} = \frac{-1}{a^2}\left[\frac{a + 2bu}{u(a + bu)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{u}{a + bu}\right|\right] + C$

Expressões da Forma $\sqrt{a^2 + u^2}$

9. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

10. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

12. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

13. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

Expressões da Forma $\sqrt{a^2 - u^2}$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{-1}{a} \ln \left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a + u}{a - u}\right| + C$

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

Expressões da Forma $\sqrt{u^2 - a^2}$

18. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = \frac{-\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

21. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

Expressões da Forma e^{au} e $\ln u$

22. $\displaystyle\int ue^{au} du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$

23. $\displaystyle\int \ln u\, du = u \ln |u| - u + C$

24. $\displaystyle\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$

25. $\displaystyle\int u^m \ln u\, du = \frac{u^{m+1}}{m + 1}\left(\ln u - \frac{1}{m + 1}\right) \quad m \neq -1$

Fórmulas de Redução

26. $\displaystyle\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au} du$

27. $\displaystyle\int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1} du$

28. $\displaystyle\int u^n \sqrt{a + bu}\, du = \frac{2}{b(2n + 3)}[u^n(a + bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\, du] \quad \text{para } n \neq -\frac{3}{2}$

Aplicando novamente a Fórmula 26, desta vez com $n = 2$ e $a = 5$, temos:

$$\int x^2 e^{5x} dx = \frac{1}{5}x^2 e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x} dx$$

Aplicando a mesma fórmula (com $n = 1$, $a = 5$) à integral do lado direito, obtemos:

$$\int xe^{5x} dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int (1)e^{5x} dx$$

$$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right) + C$$

Finalmente, calculamos a integral original combinando estes resultados:

$$\begin{aligned}\int x^3e^{5x}dx &= \frac{1}{5}x^3e^{5x} - \frac{3}{5}\left[\frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx\right]\\ &= \frac{1}{5}x^3e^{5x} - \frac{3}{25}x^2e^{5x} + \frac{6}{25}\left[\frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)\right] + C\\ &= \left[\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{125}x - \frac{6}{625}\right]e^{5x} + C\end{aligned}$$

SISTEMAS DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL Algumas calculadoras científicas e programas aplicativos como MAPLE, MATHCAD e MATHEMATICA dispõem de um sistema de álgebra computacional (CAS*) que compara um integrando dado com os integrandos de uma tabela. Embora a integração via CAS seja rápida e conveniente, não é necessária, já que a grande maioria das integrais encontradas em problemas práticos pode ser resolvida facilmente à mão ou usando a tabela aqui apresentada. ■

*Do inglês Computer Algebra System. (N.T.)

PROBLEMAS | 6.1

Nos Problemas 1 a 26, use o método da integração por partes para determinar a integral dada.

1. $\int xe^{-x}\,dx$
2. $\int xe^{x/2}\,dx$
3. $\int (1-x)e^{x}\,dx$
4. $\int (3-2x)e^{-x}\,dx$
5. $\int t\ln 2t\,dt$
6. $\int t\ln t^2\,dt$
7. $\int ve^{-v/5}\,dv$
8. $\int we^{0,1w}\,dw$
9. $\int x\sqrt{x-6}\,dx$
10. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$
11. $\int x(x+1)^8\,dx$
12. $\int (x+1)(x+2)^6\,dx$
13. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$
14. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$
15. $\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+5}}\,dx$
16. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$
17. $\int_0^1 \frac{x}{e^{2x}}\,dx$
18. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
19. $\int_1^{e^2} x\ln\sqrt[3]{x}\,dx$
20. $\int_0^1 x(e^{-2x}+e^{-x})\,dx$
21. $\int_{1/2}^{e/2} t\ln 2t\,dt$
22. $\int_1^2 (t-1)e^{1-t}\,dt$
23. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
24. $\int x(\ln x)^2\,dx$
25. $\int x^3e^{x^2}\,dx$

    [*Sugestão:* Use $dv = xe^{x^2}dx$.]
26. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

    $\left[\textit{Sugestão: } \text{Use } dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.\right]$

Use a tabela de integrais apresentada anteriormente para calcular as integrais dos Problemas 27 a 38.

27. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3 - 5x}$

28. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 9}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x^2}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9 + 2x^2)^{3/2}}$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2 + 3x)}$

32. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\sqrt{4 - 5t}}$

33. $\displaystyle\int \frac{du}{16 - 3u^2}$

34. $\displaystyle\int we^{-3w}\,dw$

35. $\displaystyle\int (\ln x)^3\,dx$

36. $\displaystyle\int x^2\sqrt{2 + 5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(5 + 2x)^2}$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}\,dx$

39. Determine a função cujas retas tangentes têm uma inclinação $(x + 1)e^{-x}$ para qualquer valor de x e cuja curva passa pelo ponto $(1, 5)$.

40. Determine a função cujas retas tangentes têm uma inclinação $x \ln \sqrt{x}$ para qualquer valor de $x > 0$ e cuja curva passa pelo ponto $(2, -3)$.

41. **DISTÂNCIA** Após t segundos, um corpo está se movendo com uma velocidade de $te^{-t/2}$ metros por segundo. Expresse a posição do corpo em função do tempo.

42. **EFICIÊNCIA** Após t horas no emprego, um operário consegue produzir $100te^{-0,5t}$ unidades por hora. Quantas unidades o operário consegue produzir nas primeiras 3 horas?

43. **CAMPANHA BENEFICENTE** Após t semanas, as contribuições para uma campanha beneficente estavam variado à taxa de $2.000te^{-0,2t}$ reais por semana. Qual foi a quantia levantada nas primeiras 5 semanas?

44. **CUSTO MARGINAL** Um fabricante observou que o custo marginal é $(0,1q + 1)e^{0,03q}$ reais por unidade quando q unidades são produzidas. O custo total para produzir 10 unidades é de R$ 200,00. Qual é o custo total para produzir as primeiras 20 unidades?

45. **CRESCIMENTO POPULACIONAL** Estima-se que daqui a t anos a população de uma certa cidade estará variando à taxa de $t \ln \sqrt{t + 1}$ milhares de habitantes por ano. Se a população atual é de 2 milhões de habitantes, qual será a população daqui a 5 anos?

46. **COLÔNIA DE BACTÉRIAS** A população $P(t)$ de uma colônia de bactérias t horas após a introdução de uma toxina está variando a uma taxa $P'(t) = (1 - 0,5t)e^{0,5t}$ milhares de bactérias por hora. De quanto varia a população durante a quarta hora?

47. **CONCENTRAÇÃO MÉDIA DE UM MEDICAMENTO** A concentração de um medicamento t horas após ser injetado no sangue de um paciente é dada por $C(t) = 4te^{(2-0,3t)}$ mg/mL. Qual é a concentração média do medicamento no sangue do paciente durante as primeiras 6 horas após a injeção?

Os Problemas 48 a 59 envolvem aplicações discutidas nas Seções 5.4, 5.5 e 5.6 do Capítulo 5.

48. **DEMANDA MÉDIA** Um fabricante observa que, quando x centenas de unidades de uma certa mercadoria são produzidas, o lucro obtido é $P(x)$ milhares de reais, onde

$$P(x) = \frac{500 \ln(x + 1)}{(x + 1)^2}$$

Qual é o lucro médio na faixa de produção $0 \leq x \leq 10$?

49. **VALOR FUTURO DE UM INVESTIMENTO** Depósitos são realizados em uma conta à taxa de $R(t) = 3.000 + 5t$ reais por ano por 10 anos, onde t é o número de anos após 2000. Se a conta rende 5% de juros ao ano capitalizados continuamente, qual é o saldo da conta no final do período de 10 anos (ou seja, em 2010)?

50. **VALOR FUTURO DE UM INVESTIMENTO** Depósitos são realizados em uma conta à taxa de $R(t) = 1.000te^{-0,3t}$ reais por ano por 5 anos. Se a conta rende 4% de juros ao ano capitalizados continuamente, qual é o saldo da conta após o período de 5 anos?

51. **VALOR ATUAL DE UM INVESTIMENTO** Um investimento produz um fluxo de receita contínuo à taxa de $R(t) = 20 + 3t$ centenas de reais por ano durante 5 anos. Se a taxa de juros permanece constante em 7% ao ano capitalizados continuamente, qual é o valor atual do investimento?

52. **VALOR DE UM INVESTIMENTO** Uma cadeia nacional de pizzarias pretende vender uma franquia de 6 anos para um restaurante em Fortaleza. A experiência com estabelecimentos semelhantes mostra que daqui a t anos a franquia deverá estar gerando lucro continuamente à taxa de $R(t) = 300 + 5t$ milhares de reais por ano. Se a taxa de juros permanecer durante os próximos 6 anos em 6% ao ano capitalizados continuamente, qual é preço justo para a franquia? [*Sugestão:* Use o valor atual como uma medida do "preço justo" da franquia.]

53. **NÚMERO DE MEMBROS DE UM CLUBE** Um clube do livro compilou estatísticas que mostram que a fração de membros que continuam ativos t meses após entrarem para o clube é dada pela função $S(t) = e^{-0,02t}$. O clube atualmente tem 5.000 membros e espera atrair novos membros à taxa de $R(t) = 5t$ por mês. Quantos membros deverá ter o clube daqui a 9 meses? [*Sugestão:* Pense neste problema como um problema de sobrevivência e renovação.]

54. DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA Uma doença virótica acaba de ser considerada epidêmica pelas autoridades. No momento, 10.000 pessoas sofrem da doença e estima-se que daqui a t dias novos casos surgirão à taxa de $R(t) = 10te^{-0,1t}$ casos por dia. Se a fração de pacientes que ainda são portadores do vírus t dias após contraírem a doença é dada por $S(t) = e^{-0,015t}$, quantas pessoas estarão infectadas pelo vírus daqui a 90 dias? E daqui a um ano (365 dias)? [*Sugestão:* Pense neste problema como um problema de sobrevivência e renovação.]

55. EXCEDENTE DO CONSUMIDOR Um fabricante determinou que, quando q milhares de unidades de uma certa mercadoria são produzidas, o preço para o qual todas as unidades serão vendidas é $p = D(q)$ reais por unidade, onde D é a função de demanda

$$D(q) = 10 - qe^{0,02q}$$

a. Que preço corresponde a uma demanda de 5.000 unidades ($q_0 = 5$)?

b. Determime o excedente do consumidor para uma demanda de 5.000 unidades.

56. EXCEDENTE DO CONSUMIDOR Responda às perguntas do Problema 55 para a função de demanda

$$D(q) = \ln\left(\frac{52}{q+1}\right)$$

e uma demanda de 12.000 unidades ($q_0 = 12$).

57. CURVA DE LORENTZ Determine o índice de Gini para uma distribuição de renda cuja curva de Lorentz é o gráfico da função $L(x) = xe^{x-1}$ para $0 \le x \le 1$.

58. COMPARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES DE RENDA Em um certo estado, as curvas de Lorentz para a distribuição de renda de advogados e engenheiros são $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$, respectivamente, onde

$$L_1(x) = 0,6x^2 + 0,4x \quad \text{e} \quad L_2(x) = x^2e^{x-1}$$

Determine o índice de Gini para as duas curvas. Em qual das duas profissões a distribuição de renda é mais eqüitativa?

59. DÉBITO CARDÍACO Um médico injeta 5 mg de corante em uma veia próxima do coração de um paciente e determina que a concentração de corante no sangue que deixa o coração t segundos após a injeção é dada pela função

$$C(t) = 1,54te^{-0,12t} - 0,007t^2$$

Supondo que sejam necessários 20 segundos para que todo o corante passe pelo coração, qual é o débito cardíaco do paciente?

60. Use o método da integração por partes para demonstrar a fórmula de redução 27:

$$\int (\ln u)^n\,du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\,du$$

61. Use o método da integração por partes para demonstrar a fórmula de redução 26:

$$\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$$

62. Determine uma fórmula de redução para a integral

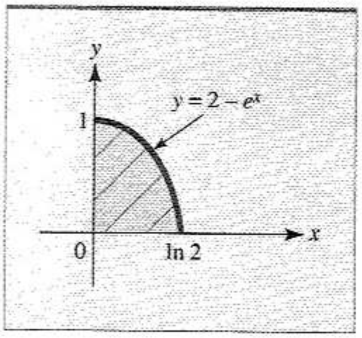
$$\int u^n(\ln u)^m\,du$$

CENTRO DE UMA REGIÃO *Seja $f(x)$ uma função contínua com $f(x) \ge 0$ para $a \le x \le b$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Nesse caso, o centróide (ou centro) de R é o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde*

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

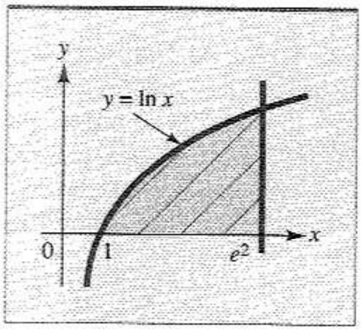
e A é a área de R. Nos Problemas 63 e 64, determine o centróide da região indicada.

63.



PROBLEMA 63

64.



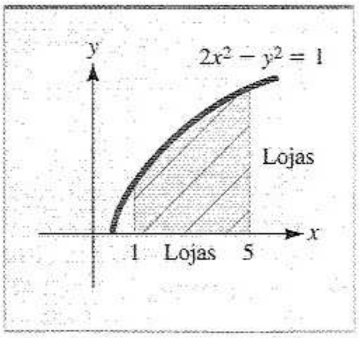
PROBLEMA 64

[*Sugestão:* Consulte a tabela de integrais apresentada anteriormente].

65. SEGURANÇA DE UM SHOPPING A região sombreada da figura é o estacionamento de um shopping. As dimensões estão em centenas de metros. Para aumentar a segurança, a administração do shopping pretende instalar uma cabina de observação no centro do estacionamento (veja a definição que precede os Problemas 63 e 64).

a. Onde deve ser instalada a cabina? Indique a localização em termos do sistema de coordenadas indicado na figura. [*Sugestão:* Consulte a tabela de integrais].

b. Escreva um ensaio de pelo menos 10 linhas a respeito da segurança no estacionamento de shoppings. Em particular, você acha que a localização central deve ser a consideração mais importante na hora de instalar uma cabina de observação ou existem outros fatores que devem ser levados em conta?



PROBLEMA 65

66. Use uma calculadora gráfica para plotar no mesmo gráfico as curvas das funções $y = x^2e^{-x}$ e $y = \frac{1}{x}$. Use **ZOOM** e **TRACE** ou outra rotina da calculadora para determinar os pontos de interseção das curvas e calcule a área da região limitada pelas curvas.

67. Repita o Problema 66 para as curvas

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{e} \qquad y = x^3 - 3{,}5x^2 + 2x$$

68. Repita o Problema 66 para as curvas

$$y = \ln x \qquad \text{e} \qquad y = x^2 - 5x + 4$$

69. Repita o Problema 66 para as curvas

$$y = e^{2x} + 4 \qquad \text{e} \qquad y = 5e^x$$

Use a rotina de integração numérica de sua calculadora para calcular as integrais dos Problemas 70 a 73. Em cada caso, mostre que o resultado está correto usando uma fórmula de integração apropriada.

70. $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln\sqrt{x}\,dx$

71. $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{4x^2 - 7}\,dx$

72. $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{4 + 5x}\,dx$

73. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{(x + 1)^2}\,dx$

SEÇÃO 6.2 Introdução às Equações Diferenciais

Na Seção 1.4, definimos a modelagem matemática como um processo dinâmico que envolve três estágios:

1. Um problema prático recebe uma formulação matemática, conhecida como *modelo matemático*. Este passo freqüentemente requer o uso de hipóteses simplificadoras para tornar o problema mais fácil de resolver.
2. O modelo matemático é analisado ou resolvido usando métodos da álgebra, do cálculo ou da estatística, entre outros, ou métodos numéricos baseados em calculadoras ou computadores.
3. A solução do modelo matemático é interpretada em termos do problema prático original. Este passo freqüentemente leva a ajustes nas hipóteses do modelo.

O processo pode ser repetido várias vezes, usando modelos cada vez mais refinados, até que uma descrição satisfatória do problema prático seja obtida.

Até agora, usamos os métodos do cálculo para analisar vários modelos matemáticos e muitos destes modelos envolveram taxas de variação. Às vezes, a formulação matemática de um problema envolve uma equação na qual uma grandeza e sua taxa de variação estão relacionadas através de uma equação. Como as taxas de variação são expressas através de derivadas ou diferenciais, uma equação deste tipo é chamada de **equação diferencial**. Assim, por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5 \qquad \text{e} \qquad \frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

são equações diferenciais. As equações diferenciais estão entre os instrumentos mais versáteis para modelar fenômenos contínuos. A dinâmica das populações, a cinética das reações químicas, a disseminação de doenças, a economia, a ecologia e a transmissão de informações são apenas algumas das muitas áreas das ciências econômicas, físicas, sociais e biológicas que podem ser estudadas com o auxílio das equações diferenciais. Nesta seção, vamos apresentar técnicas para solução de alguns tipos simples de equações diferenciais e discutir algumas aplicações práticas.

O tipo mais simples de equação diferencial é da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

em que a derivada da grandeza y é dada explicitamente em função da variável independente x. Uma equação deste tipo pode ser resolvida simplesmente determinando a integral indefinida de $g(x)$. Uma descrição completa de todas as soluções possíveis da equação é chamada de **solução geral**. A combinação de uma equação diferencial com uma condição auxiliar é chamada de **problema de valor inicial** e uma solução que satisfaz tanto a equação diferencial como a condição auxiliar recebe o nome de **solução particular** do problema de valor inicial. Os Exemplos 6.2.1 a 6.2.3 ilustram esta terminologia e demonstram o uso de equações diferenciais para construir modelos matemáticos.

EXEMPLO 6.2.1

Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x$$

e a solução particular que satisfaz a condição $y = 2$ para $x = 1$.

Solução

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} y &= \int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int (x^2 + 3x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

Esta é a solução geral, já que todas as soluções podem ser expressas desta forma. Para obter a solução particular, fazemos $x = 1$ e $y = 2$ na solução geral:

$$2 = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 + C$$

$$C = 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Assim, a solução particular pedida é $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}$.

EXEMPLO 6.2.2

O valor de revenda de uma certa máquina industrial diminui em um período de 10 anos a uma taxa que depende da idade da máquina. Quando a máquina tem x anos de idade, a taxa com a qual seu valor está mudando é $220(x - 10)$ reais por ano. Expresse o valor da máquina em função da idade e do valor inicial. Se a máquina valia inicialmente R$ 12.000,00, quanto valerá quando tiver 10 anos de idade?

Solução

Seja $V(x)$ o valor da máquina quando tem x anos de idade. A derivada $\frac{dV}{dx}$ é igual à taxa $220(x - 10)$ com a qual o valor da máquina está variando. Assim, para modelar este problema, podemos usar a equação diferencial

$$\frac{dV}{dx} = 220(x - 10) = 220x - 2.200$$

Para determinar V, resolvemos esta equação diferencial por integração:

$$V(x) = \int (220x - 2.200)\,dx = 110x^2 - 2.200x + C$$

Observe que C é igual a $V(0)$, o valor inicial da máquina. Um símbolo mais descritivo para esta constante é V_0. Usando esta notação, podemos escrever a solução geral na forma

$$V(x) = 110x^2 - 2.200x + V_0$$

Se $V_0 = 12.000$, a solução particular correspondente é

$$V(x) = 110x^2 - 2.200x + 12.000$$

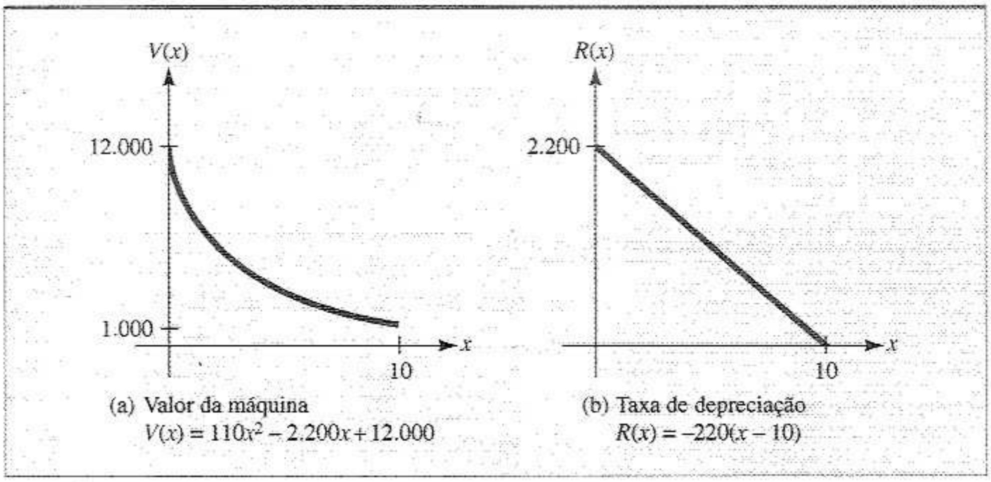


FIGURA 6.2 O valor da máquina e sua taxa de depreciação.

Assim, quando a máquina alcançar 10 anos de idade, seu valor será

$$V(10) = 110(10)^2 - 2.200(10) + 12.000 = \$1.000$$

O negativo da taxa de variação do valor de revenda da máquina

$$R = -\frac{dV}{dx} = -220(x - 10)$$

é chamado de **taxa de depreciação**. As curvas do valor de revenda V e da taxa de depreciação R da máquina aparecem na Figura 6.2.

EXEMPLO 6.2.3

Um poço de petróleo que acaba de entrar em operação deverá produzir 300 barris de petróleo bruto por mês e, a esta taxa, deverá se esgotar em 3 anos. Estima-se que daqui a t meses o preço do petróleo bruto será $p(t) = 28 + 0{,}3\sqrt{t}$ reais o barril. Se o petróleo é vendido assim que extraído, qual é a receita total gerada pelo poço durante todo o período em que permanece produtivo?

Solução

Seja $R(t)$ a receita gerada durante os primeiros t meses de funcionamento do poço, caso em que $R(0) = 0$. Para escrever a equação diferencial apropriada, use a relação

$$\begin{array}{c}\text{Taxa de variação da receita}\\ \text{com o tempo (reais/mês)}\end{array} = \begin{pmatrix}\text{reais por}\\ \text{barril}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{barris por}\\ \text{mês}\end{pmatrix}$$

Assim, podemos modelar este problema usando a equação diferencial

$$\underbrace{\frac{dR}{dt}}_{\substack{\textit{taxa de variação}\\ \textit{da receita}}} = \underbrace{(28 + 0{,}3\sqrt{t})}_{\substack{\textit{reais}\\ \textit{por barril}}}\ \underbrace{(300)}_{\substack{\textit{barris}\\ \textit{por mês}}}$$

e, portanto,

$$\frac{dR}{dt} = (28 + 0{,}3\sqrt{t})(300)$$
$$= 8.400 + 90t^{1/2}$$

Integrando, descobrimos que a solução geral desta equação diferencial é

$$R(t) = \int (8.400 + 90t^{1/2})\,dt = 8.400t + 90\left(\frac{t^{3/2}}{3/2}\right) + C$$
$$= 8.400t + 60t^{3/2} + C$$

Como $R(0) = 0$, temos:

$$R(0) = 0 = 8.400(0) + 60(0)^{3/2} + C$$

e, portanto, $C = 0$ e a solução particular desejada é

$$R(t) = 8.400t + 60t^{3/2}$$

Como o poço deixa de produzir após 36 meses, a receita total gerada pelo poço será

$$R(36) = 8.400(36) + 60(36)^{3/2}$$
$$= \text{R\$}315.360{,}00$$

Equações Separáveis

Muitas equações diferenciais de interesse podem ser escritas de tal forma que todos os termos que contêm a variável independente aparecem de um lado da equação e todos os termos que contêm a variável dependente aparecem do outro. As equações diferenciais que apresentam esta propriedade são ditas **separáveis** e podem ser resolvidas usando o método descrito a seguir, que envolve duas integrações.

Equações Diferenciais Separáveis ■ Uma equação diferencial que pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$$

é chamada de **separável**. A solução geral de uma equação deste tipo pode ser obtida separando as variáveis e integrando ambos os membros:

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

2 EXPLORE!

Leia o Exemplo 6.2.4. Entre com a família de curvas $y = (3x^2 + L1)^{\wedge}(1/3)$ em Y1 do editor de equações, com a lista L1 = {−16, −12, −8, −4, 0, 4, 8, 12, 16}. Use uma janela decimal modificada [4.7, 4.7]1 por [−3, 4]1 para plotar esta família de curvas e descreva o que observa na tela. Qual destas curvas passa pelo ponto (0, 2)?

EXEMPLO 6.2.4

Determine a solução geral da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y^2}$.

Solução

Para separar as variáveis, fazemos de conta que a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ é uma razão e escrevemos

$$y^2\,dy = 2x\,dx$$

Em seguida, integramos ambos os membros desta equação para obter

$$\int y^2\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 + C_1 = x^2 + C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Explicitando y, obtemos

$$\frac{1}{3}y^3 = x^2 + (C_2 - C_1) = x^2 + C_3 \qquad \textit{onde } C_3 = C_2 - C_1$$

$$y^3 = 3x^2 + 3C_3 = 3x^2 + C \qquad \textit{onde } C = 3C_3$$

$$y = (3x^2 + C)^{1/3}$$

EXEMPLO 6.2.5

Um corpo está se movendo ao longo do eixo x de tal forma que no instante t sua velocidade é dada pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \ln t$$

Se o corpo está o ponto $x = -2$ no instante $t = 1$, onde se encontra no instante $t = 3$?

Solução

Separando as variáveis da equação diferencial dada e integrando, obtemos

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \ln t\,dt$$

$$\frac{-1}{x} + C_1 = t\ln t - \int \frac{1}{t}(t)\,dt \qquad \textit{integrando por partes com } u = \ln t \quad dv = dt$$

$$= t\ln t - t + C_2 \qquad du = \frac{1}{t}dt \quad v = t$$

e, portanto, a solução geral é

$$\frac{-1}{x} = t\ln t - t + C \qquad \textit{onde } C = C_2 - C_1$$

Como $x = -2$ para $t = 1$, temos

$$\frac{-1}{(-2)} = (1)\ln(1) - (1) + C \qquad \textit{onde } \ln 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} = 0 - 1 + C$$

$$C = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{-1}{x} = t\ln t - t + \frac{3}{2}$$

Em particular, para $t = 3$, temos

$$\frac{-1}{x} = (3)\ln(3) - (3) + \frac{3}{2} \approx 1{,}80$$

Explicitando x nesta equação, obtemos

$$x \approx \frac{-1}{1{,}8} \approx -0{,}56$$

o que significa que, no instante $t = 3$, o corpo está no ponto $x = -0{,}56$.

Crescimento e Decaimento Exponencial

Na Seção 4.1, obtivemos as expressões $Q = Q_0e^{kt}$ para o crescimento exponencial e $Q = Q_0e^{-kt}$ para o decaimento exponencial; na Seção 4.3, mostramos que a taxa de variação de uma grandeza que está sofrendo uma variação exponencial (crescimento ou decaimento) é proporcional ao seu valor, ou seja, que $\dfrac{dQ}{dt} = mQ$, onde m é uma constante. O Exemplo 6.2.6 mostra que a recíproca é verdadeira.

EXEMPLO 6.2.6

Mostre que uma grandeza Q que varia a uma taxa proporcional ao seu valor satisfaz a equação $Q(t) = Q_0e^{mt}$, onde $Q_0 = Q(0)$.

Solução

Como Q varia a uma taxa proporcional ao seu valor, temos:

$$\frac{dQ}{dt} = mQ$$

onde m é uma constante. Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int \frac{1}{Q}\,dQ = \int m\,dt$$

$$\ln Q = mt + C_1$$

e tomando as exponenciais de ambos os membros

$$Q(t) = e^{\ln Q} = e^{mt+C_1} = e^{C_1}e^{mt}$$
$$= Ce^{mt} \qquad \textit{onde } C = e^{C_1}$$

Como $Q(0) = Q_0$, temos

$$Q_0 = Q(0) = Ce^0 = C \qquad \textit{onde } e^0 = 1$$

Assim, $Q(t) = Q_0e^{mt}$, como queríamos demonstrar.

Modelos de Aprendizado

No Capítulo 4, chamamos os gráficos de funções da forma $Q(t) = B - Ae^{-kt}$ de *curvas de aprendizado* porque funções deste tipo são freqüentemente usadas para descrever a relação entre a eficiência com a qual um indivíduo desempenha uma certa tarefa e o seu grau de experiência. Em geral, qualquer grandeza que aumenta a uma taxa proporcional à diferença entre o seu valor e um limite superior fixo é representada por uma função desta forma. Segue um exemplo que envolve um modelo de aprendizado.

EXEMPLO 6.2.7

A taxa com a qual as pessoas ouvem falar de um aumento das tarifas postais é proporcional ao número de pessoas que ainda não ouviram falar do aumento. Expresse o número de pessoas que já ouviram falar do aumento em função do tempo.

Solução

Seja $Q(t)$ o número de pessoas que já ouviram falar do aumento no instante t e seja B o número total de pessoas. Nesse caso,

$$\begin{array}{c}\text{Taxa com a qual as pessoas}\\ \text{ouvem falar do aumento}\end{array} = \frac{dQ}{dt}$$

e

$$\begin{array}{c}\text{Número de pessoas que ainda não}\\ \text{ouviram falar do aumento}\end{array} = B - Q$$

Como a taxa com a qual as pessoas ouvem falar do aumento é proporcional ao número de pessoas que ainda não ouviram falar do aumento, temos

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Observe que a constante k deve ser positiva poque $\frac{dQ}{dt} > 0$ (já que Q é uma função crescente de t) e $B - Q > 0$ (já que $B > Q$).

Separamos as variáveis escrevendo

$$\frac{1}{B - Q}\,dQ = k\,dt$$

e integramos para obter

$$\int \frac{1}{B - Q}\,dQ = \int k\,dt$$
$$-\ln|B - Q| = kt + C$$

(O leitor sabe de onde vem o sinal negativo?) Neste caso, o sinal de valor absoluto pode ser omitido, já que $B - Q > 0$. Assim,

$$-\ln(B - Q) = kt + C$$
$$\ln(B - Q) = -kt - C$$
$$B - Q = e^{-kt-C} = e^{-kt}e^{-C}$$
$$Q = B - e^{-C}e^{-kt}$$

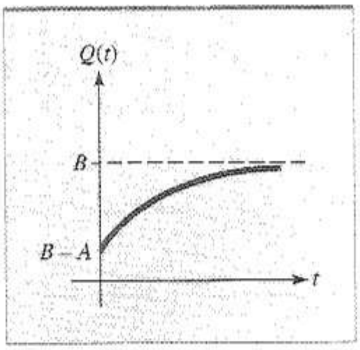


FIGURA 6.3 Uma curva de aprendizado: $Q(t) = B - Ae^{-kt}$.

Chamando a constante e^{-C} de A e usando a notação de função, concluímos que

$$Q(t) = B - Ae^{-kt}$$

que é precisamente a equação geral de uma curva de aprendizado. A título de ilustração, a curva de Q é mostrada na Figura 6.3.

Crescimento Logístico

Vimos no Capítulo 3 que a taxa de crescimento relativa de uma grandeza $Q(t)$ é dada pela razão $Q'(t)/Q(t)$. No caso do crescimento e decaimento exponencial, em que $Q'(t) = kQ(t)$, a taxa de crescimento relativo é constante:

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k$$

Uma população cujo crescimento não é limitado pela falta de espaço ou de recursos pode muitas vezes ser modelada por uma função de crescimento exponencial. Entretanto, no caso em que existem limitações, é razoável supor que existe uma certa população máxima B que o ambiente é capaz de sustentar (chamada de **capacidade de sustento**) e que, em qualquer instante t, a taxa de crescimento relativa da população é proporcional ao *máximo aumento possível* da população, $B - Q(t)$, ou seja,

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k(B - Q(t))$$

onde k é uma constante positiva. Esta relação leva à equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$$

Esta equação é chamada de **equação logística** e o modelo de crescimento limitado pelo ambiente é conhecido **como modelo logístico.**

A equação diferencial logística é separável, mas antes de resolvê-la analiticamente, vamos ver a que conclusões é possível chegar usando métodos qualitativos. Observe, em primeiro lugar, que a equação logística pode ser escrita na forma $\frac{dQ}{dt} = R(Q)$, onde a taxa de variação da população $R(Q) = kQ(B - Q)$ é uma função do segundo grau em Q. Como $k > 0$, a curva de $R(Q)$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo (veja Figura 6.4); como $R(0) = R(B) = 0$, a curva intercepta o eixo Q em 0 e em B. O máximo (vértice) da parábola está em $Q = B/2$.

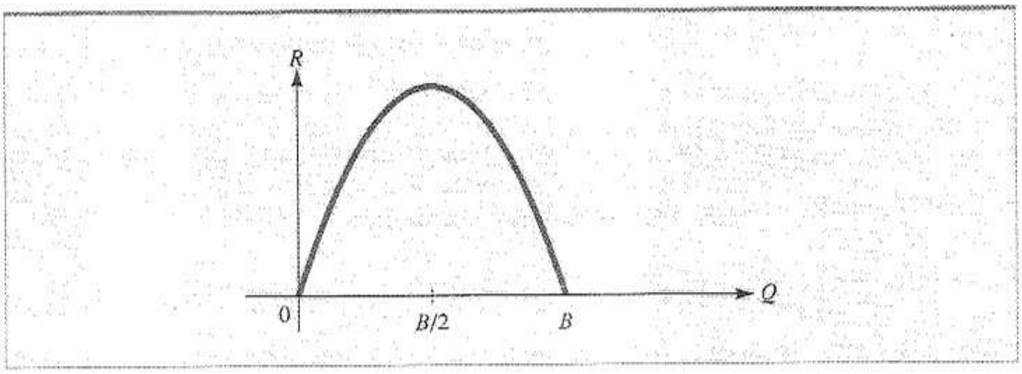


FIGURA 6.4 Gráfico da função $R(Q) = kQ(B - Q)$.

Se a população inicial $Q(0)$ é 0, $Q(t) = 0$ para qualquer valor de $t > 0$; por outro lado, se $Q(0) = B$, $Q(t) = B$ para qualquer valor de $t > 0$. As duas soluções constantes $Q = 0$ e $Q = B$, conhecidas como *soluções de equilíbrio* da equação logística, estão indicadas na Figura 6.5a.

Se a população inicial $Q(0)$ está no intervalo $0 < Q(0) < B$, temos

$$R(Q) = kQ(B - Q) > 0$$

já que k, Q e $B - Q$ são grandezas positivas. Como a taxa de crescimento é positiva, a população $Q(t)$ é crescente. Quando $Q(t)$ tende a B, a taxa de crescimento da população $\frac{dQ}{dt}$ tende a 0, o que mostra

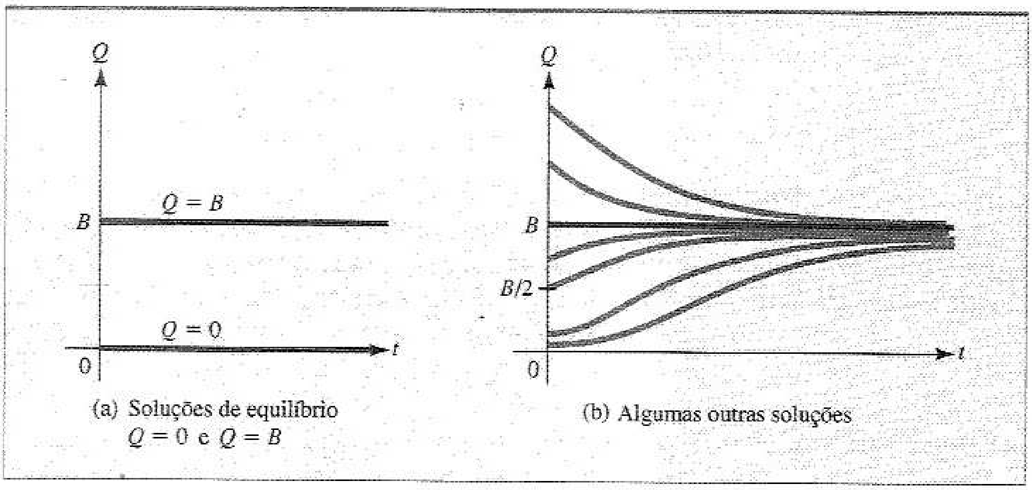


FIGURA 6.5 Soluções típicas da equação logística $dQ/dt = kQ(B - Q)$.

que a população $Q(t)$ se "estabiliza", tendendo assintoticamente para a capacidade de sustento. Se a população inicial satisfaz a desigualdade $Q(0) > B$, temos

$$R(Q) = kQ(B - Q) < 0$$

já que k e Q são positivas e $B - Q$ é negativa. Neste caso, a população *diminui* com o tempo, mas continua a tender assintoticamente para a capacidade de sustento quando Q tende a B. A Figura 6.5b mostra algumas soluções não-constantes da equação logística.

Além do seu papel da modelagem do crescimento populacional com restrições, a equação logística também pode ser usada para descrever o comportamento da economia e as interações em um grupo social, como a disseminação de boatos (veja Problema 40). No Exemplo 6.2.8, o modelo logístico é usado para descrever a disseminação de uma epidemia.

EXEMPLO 6.2.8

A taxa com a qual uma epidemia se espalha em uma comunidade é conjuntamente proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas suscetíveis que ainda não foram infectadas. Expresse o número de pessoas infectadas em função do tempo.

Solução

Seja $Q(t)$ o número de pessoas suscetíveis infectadas no instante t e seja B o número total de pessoas suscetíveis. Nesse caso,

Lembrete

Dizer que uma grandeza é conjuntamente proporcional às variáveis x e y é o mesmo que dizer que existe uma constante k tal que $z = kxy$.

$$\text{Taxa com a qual as pessoas suscetíveis estão sendo infectadas} = \frac{dQ}{dt}$$

e

$$\text{Número de pessoas suscetíveis que ainda não foram infectadas} = B - Q$$

Como "conjuntamente proporcional" significa "proporcional ao produto", a equação diferencial que descreve a disseminação da epidemia é

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$$

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade. (O leitor sabe por que k é necessariamente positivo?) Trata-se de uma equação diferencial separável, cuja solução é

$$\int \frac{dQ}{Q(B - Q)} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{B} \ln\left|\frac{Q}{B - Q}\right| = kt + C$$

onde a integração da esquerda foi realizada usando a fórmula 6 da tabela de integrais constante da Seção 6.1; especificamente,

$$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$$

com $u = Q$, $a = B$ e $b = -1$.

Como $Q > 0$ e $B > Q$, podemos omitir o sinal de valor absoluto da solução e escrever

$$\frac{1}{B} \ln \left(\frac{Q}{B-Q} \right) = kt + C$$

$$\ln \left(\frac{Q}{B-Q} \right) = Bkt + BC$$

$$\frac{Q}{B-Q} = e^{Bkt+BC} = e^{Bkt}e^{BC}$$

$$= A_1 e^{Bkt} \quad \text{onde } A_1 = e^{BC}$$

Multiplicando ambos os membros da última equação por $B - Q$ e explicitando Q, obtemos

$$Q = (B-Q)A_1 e^{Bkt} = (BA_1 - QA_1)\, e^{Bkt} \qquad \textit{multiplicando ambos}$$

$$Qe^{-Bkt} = BA_1 - QA_1 \qquad \textit{os membros } e^{-Bkt}$$

$$Q(A_1 + e^{-Bkt}) = BA_1 \qquad \textit{somando } QA_1 \textit{ a ambos os membros}$$

$$Q = \frac{BA_1}{A_1 + e^{-Bkt}}$$

$$= \frac{B}{1 + \frac{1}{A_1} e^{-Bkt}} \qquad \textit{dividindo todos os termos do lado direito por } A_1$$

3 EXPLORE!

Em uma pequena cidade de 1.000 habitantes, o número de pessoas que ficam gripadas em um período de 7 semanas é mostrado na tabela abaixo.

Semana	N.º de Pessoas Gripadas
1	45
2	75
3	200
4	450
5	595
6	700
7	760

Use a rotina de modelagem matemática de sua calculadora para ajustar uma curva logística aos dados e determine o número provável de pessoas que ficarão gripadas, de acordo como modelo logístico.

Finalmente, fazendo $A_1 = \frac{1}{A_1}$, vemos que Q tem a forma logística

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$$

A curva de $Q(t)$, o número de pessoas infectadas aparece na Figura 6.6. Observe que a curva tem a "forma de S" característica de uma curva logística com capacidade de sustento B. No início da epidemia, apenas $Q(0) = \frac{B}{1+A}$ pessoas estão infectadas. O número de pessoas infectadas aumenta rapidamente a princípio e a taxa de aumento é máxima no ponto de inflexão da curva. Não é difícil demonstrar que isto acontece quando metade da população suscetível está infectada (veja Problema 63). A partir deste instante, a taxa de aumento do número de pessoas infectadas começa a diminuir e o número de pessoas infectadas tende assintoticamente para B, o número total de pessoas suscetíveis.

Modelos de Diluição

Uma aplicação importante das equações diferenciais separáveis é a modelagem de situações nas quais uma grandeza é "diluída". Estes modelos podem ser usados em áreas como finanças, ecologia,

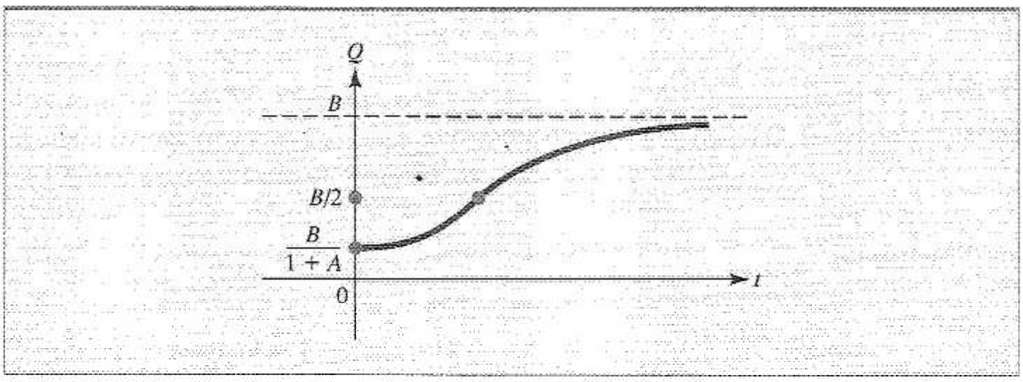


FIGURA 6.6 A curva logística $y = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$ que mostra o número de pessoas $Q(t)$ infectadas no instante t durante uma epidemia!

medicina e química. No exemplo a seguir, o modelo de diluição é aplicado a um problema de saúde pública.

EXEMPLO 6.2.9

Os moradores de uma cidade decidiram, em plebiscito, suspender a fluoração da água. O reservatório de água da cidade contém no momento 200 milhões de litros de água fluorada, que contêm 1.600 quilogramas de flúor. A água fluorada está sendo consumida à taxa de 4 milhões de litros por dia e sendo substituída por um volume igual de água não-fluorada, que se mistura uniformemente com água fluorada que resta. Expresse a massa de flúor no reservatório em função do tempo.

Solução

Seja $Q(t)$ a massa de flúor (em quilogramas) no reservatório t dias após ser interrompida a fluoração. Começamos com a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix}\text{Taxa de variação da quantidade}\\ \text{de flúor com o tempo}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{fluxo de entrada}\\ \text{do flúor}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{fluxo de saída}\\ \text{do flúor}\end{bmatrix}$$

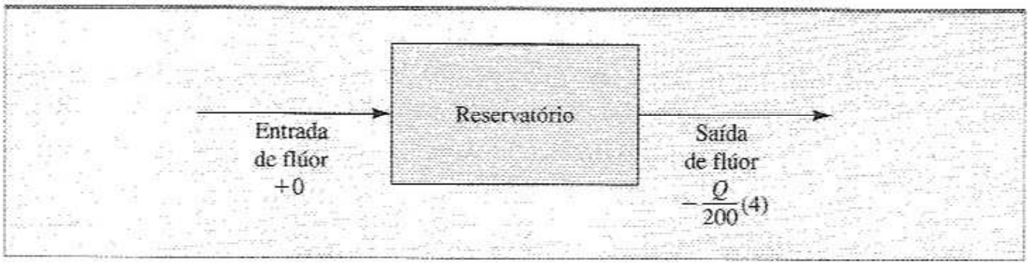
A taxa de variação com o tempo da massa de flúor é $\frac{dQ}{dt}$; como a fluoração foi interrompida, a taxa de entrada de flúor é 0. Como o volume de água no reservatório tem o valor constante de 200 milhões de litros e o flúor está distribuído uniformemente em toda a água do reservatório, a concentração de flúor no reservatório no instante t é dada pela razão

$$\frac{Q(t) \text{ quilogramas de flúor}}{200 \text{ milhões de litros de água fluorada}}$$

Assim, como 4 milhões de litros de água fluorada estão sendo removidos diariamente, a taxa de saída de flúor é dada pelo produto

$$\begin{matrix}\text{Fluxo de saída}\\ \text{do flúor}\end{matrix} = \left(\frac{Q(t) \text{ kg}}{200 \text{ milhões de L}}\right)\left(\frac{4 \text{ milhões de L}}{\text{dia}}\right) = \frac{4Q}{200} \text{ kg/dia}$$

O diagrama a seguir ilustra a situação.



Como a taxa de variação da quantidade de flúor no reservatório é igual à diferença entre a taxa de entrada e a taxa de saída, temos

$$\frac{dQ}{dt} = \underbrace{0}_{\textit{fluxo de entrada}} - \underbrace{\frac{4Q}{200}}_{\textit{fluxo de saída}} = -\frac{Q}{50}$$

Resolvendo esta equação diferencial por separação de variáveis, obtemos

$$\int \frac{1}{Q}\,dQ = -\int \frac{1}{50}\,dt$$

$$\ln Q = -\frac{t}{50} + C$$

$$\begin{aligned} Q &= e^{C - t/50} = e^{C}e^{-t/50} \\ &= Q_0 e^{-t/50} \qquad \text{onde } Q_0 = e^{C} \end{aligned}$$

Como inicialmente o reservatório contém 1.600 quilogramas de flúor,

$$1.600 = Q(0) = Q_0 e^0 = Q_0$$

Então,

$$Q(t) = 1.600e^{-t/50}$$

e a quantidade de flúor no reservatório diminui exponencialmente, como mostra a Figura 6.7.

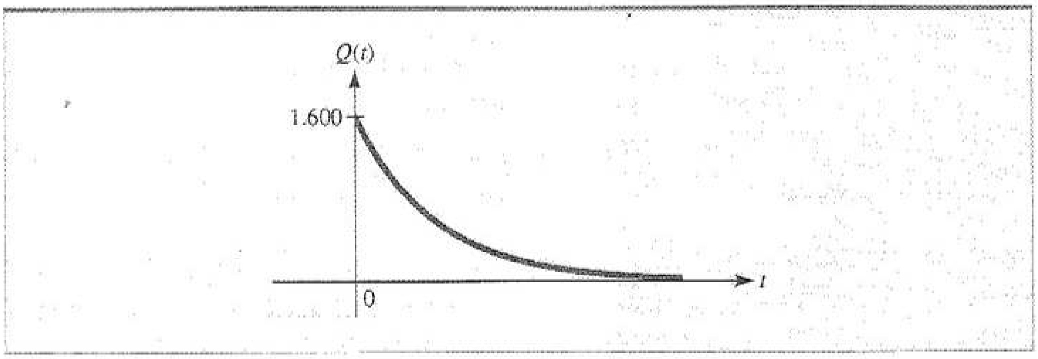


FIGURA 6.7 Quantidade de flúor $Q(t) = 1.600e^{-t/50}$.

Um Modelo de Ajuste de Preços

Seja $S(p)$ o número de unidades de uma certa mercadoria que são oferecidas ao mercado por um preço de p reais e seja $D(p)$ o número de unidades demandadas pelo mercado pelo mesmo preço. Em uma economia estável, preço de equilíbrio é aquele para o qual a demanda é igual à oferta (veja Seção 1.4). Alguns modelos econômicos, porém, consideram uma situação mais dinâmica na qual o preço, a oferta e a demanda variam com o tempo. Um destes modelos, o *modelo de ajuste de preços de Evans*,* supõe que a taxa de variação do preço em relação ao tempo seja proporcional à escassez $D - S$, de modo que

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S)$$

onde k é uma constante positiva. O exemplo a seguir envolve este modelo.

EXEMPLO 6.2.10

O preço $p(t)$ de uma certa mercadoria varia de tal forma que a taxa de variação com o tempo é proporcional à escassez $D - S$, onde $D(p)$ e $S(p)$ são as funções lineares de demanda e oferta $D = 8 - 2p$ e $S = 2 + p$.

a. Se o preço é R$ 5,00 em $t = 0$ e R$ 3,00 em $t = 2$, determine $p(t)$.

b. Determine o que acontece com $p(t)$ "a longo prazo", isto é, quando $t \to +\infty$.

Solução

a. A taxa de variação de $p(t)$ é dada pela equação diferencial separável

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= k(D - S) = k[(8 - 2p) - (2 + p)] \\ &= k(6 - 3p)\end{aligned}$$

*O modelo de ajuste de preços de Evans e vários outros modelos econômicos dinâmicos são discutidos em J.E. Draper and J.S. Klingman, *Mathematical Analysis with Business and Economic Applications*, New York: Harper and Row, 1967, pp. 430-434.

Separando as variáveis, integrando e explicitando p, temos:

$$\int \frac{dp}{6-3p} = \int k\,dt$$

$$\frac{-1}{3} \ln|6-3p| = kt + C_1$$

$$\ln|6-3p| = -3kt - 3C_1$$

$$6 - 3p = e^{-3kt-3C_1}$$

$$= e^{-3kt}e^{-3C_1} = Ce^{-3kt} \quad \text{onde } C = e^{-3C_1}$$

$$p(t) = 2 - \frac{1}{3}Ce^{-3kt}$$

Para calcular o valor da constante C, usamos o fato de que $p(0) = 5$:

$$5 = p(0) = 2 - \frac{1}{3}Ce^0 = 2 - \frac{1}{3}C$$

$$C = -9$$

Assim, $$p(t) = 2 + 3e^{-3kt}$$

Resta calcular o valor de k. Como $p = 3$ quando $t = 2$, temos:

$$3 = p(2) = 2 + 3e^{-3k(2)} = 2 + 3e^{-6k}$$

Explicitando e^{-6k} nesta equação e tomando os logaritmos de ambos os membros, obtemos

$$e^{-6k} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$-6k = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -1{,}0986$$

$$k = \frac{-1{,}0986}{-6} = 0{,}1831$$

Assim, o preço no instante t é dado por

$$p(t) = 2 + 3e^{-6(0{,}1831t)} = 2 + 3e^{-1{,}0986t}$$

b. Quando t aumenta indefinidamente, $e^{-1{,}0986t}$ tende a 0 e $p(t)$ tende a 2, que é o preço para o qual a oferta é igual à demanda. Assim, "a longo prazo", $p(t)$ tende para o preço de equilíbrio da mercadoria (veja Figura 6.8).

4 EXPLORE!

Leia o Exemplo 6.2.10. Plote a função $p(x) = 2 + 3e^{-1{,}0986x}$, usando uma janela [0, 9.4]1 por [0, 7]1. Use **TRACE** para determinar o menor valor de x para o qual $p(x) < 2{,}01$. Qual é o menor valor de x para o qual $p(x) < 2{,}000001$?

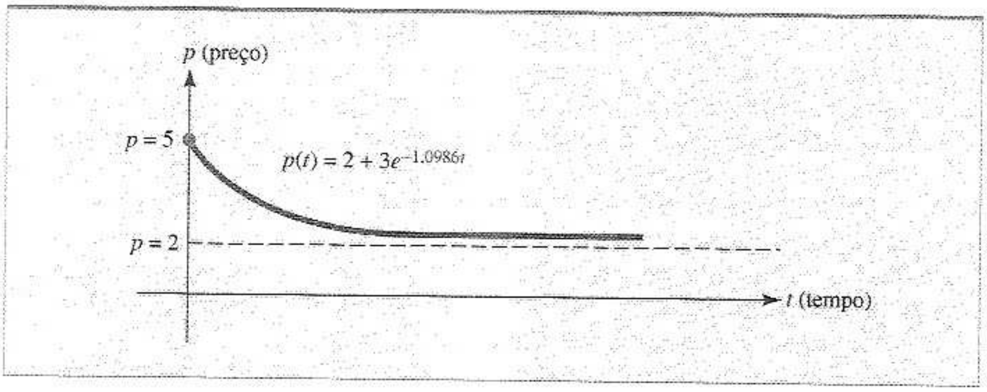


FIGURA 6.8 O preço $p(t)$ tende ao preço de equilíbrio $p = 2$ quando $t \to +\infty$.

Por que o Método de Separação de Variáveis Funciona

Considere a equação diferencial separável

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$$

ou

$$g(y)\frac{dy}{dx} - h(x) = 0$$

O lado esquerdo desta equação pode ser escrito em termos de antiderivadas de g e h. Em particular, se G é uma antiderivada de g e H é uma antiderivada de h, temos, de acordo com a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[G(y) - H(x)] = G'(y)\frac{dy}{dx} - H'(x) = g(y)\frac{dy}{dx} - h(x)$$

Assim, a equação diferencial $g(y)\frac{dy}{dx} - h(x) = 0$ é equivalente a

$$\frac{d}{dx}[G(y) - H(x)] = 0$$

Entretanto, as constantes são as únicas funções cuja derivada é nula para qualquer valor da variável independente. Assim,

$$G(y) - H(x) = C$$

onde C é uma constante. Nesse caso,

$$G(y) = H(x) + C$$

ou

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx + C$$

como queríamos demonstrar.

PROBLEMAS | 6.2

Nos Problemas 1 a 16, determine a solução geral da equação diferencial dada. Nos Problemas 17 a 20, pode ser necessário usar o método de integração por partes.

1. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 6$

2. $\frac{dP}{dt} = \sqrt{t} + e^{-t}$

3. $\frac{dy}{dx} = 3y$

4. $\frac{dy}{dx} = y^2$

5. $\frac{dy}{dx} = e^y$

6. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

9. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 4}{xy}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - 1}$

12. $\frac{dy}{dx} = e^y\sqrt{x + 1}$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + 3}{(2x - 5)^6}$

14. $\frac{dy}{dx} = (e^y + 1)(x - 2)^9$

15. $\frac{dx}{dt} = \frac{xt}{2t + 1}$

16. $\frac{dy}{dt} = \frac{te^y}{2t - 1}$

17. $\frac{dy}{dx} = xe^{x-y}$

18. $\frac{dw}{ds} = \frac{se^{2w}}{w}$

19. $\frac{dy}{dt} = y \ln \sqrt{t}$

20. $\frac{dx}{dt} = \frac{\ln t}{\ln x}$

Nos Problemas 21 a 28, determine a solução particular da equação diferencial dada que satisfaz à condição indicada.

21. $\dfrac{dy}{dx} = e^{5x}$; $y = 1$ para $x = 0$

22. $\dfrac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 - 2$; $y = 4$ para $x = 1$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y^2}$; $y = 3$ para $x = 2$

24. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3y^2$; $y = 2$ para $x = 1$

25. $\dfrac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4 - x}$; $y = 2$ para $x = 4$

26. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{y - x^2}$; $y = 0$ para $x = 1$

27. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y + 1}{t(y - 1)}$; $y = 2$ para $t = 1$

$\left[\textit{Sugestão: } \dfrac{y - 1}{y + 1} = 1 - \dfrac{2}{y + 1}\right]$

28. $\dfrac{dx}{dt} = xt\sqrt{t + 1}$; $x = 1$ para $t = 0$

Nos Problemas 29 a 40, escreva uma equação diferencial que descreva a situação dada. Identifique todas as variáveis e constantes que apareçam na equação. (Não tente resolver a equação diferencial.)

29. COLÔNIA DE BACTÉRIAS O número de bactérias em uma cultura aumenta a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes.

30. DECAIMENTO RADIOATIVO Uma amostra de rádio decai a uma taxa proporcional ao número de átomos de rádio presentes.

31. AUMENTO DE UM INVESTIMENTO Um investimento aumenta a uma taxa de 7% do seu valor.

32. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO A taxa com a qual a concentração de um medicamento no sangue diminui é proporcional à sua concentração.

33. CRESCIMENTO DEMOGRÁFICO A população de uma certa cidade aumenta a uma taxa constante de 500 habitantes por ano.

34. CUSTO MARGINAL O custo marginal de um fabricante é de R$ 60,00 por unidade.

35. VARIAÇÃO DE TEMPERATURA A taxa com a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente.

36. DISSOLUÇÃO DE AÇÚCAR Depois de ser introduzido em um recipiente com água, o açúcar se dissolve a uma taxa proporcional à quantidade de açúcar que ainda não se dissolveu.

37. MEMÓRIA Quando se pede a uma pessoa para se lembrar de uma série de fatos, a rapidez com que os fatos são lembrados é proporcional ao número de fatos que ainda não foram lembrados.

38. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA A rapidez com a qual uma epidemia se espalha por uma comunidade é proporcional ao produto do número de pessoas infectadas pelo número de pessoas que ainda não foram infectadas.

39. CORRUPÇÃO NO GOVERNO A taxa com a qual as pessoas são indiciadas em um escândalo que envolve membros do governo é proporcional ao número de pessoas já indiciadas e ao número de pessoas envolvidas que ainda não foram indiciadas.

40. DISSEMINAÇÃO DE UM BOATO A taxa com a qual um boato se espalha em uma comunidade é proporcional ao número de pessoas da comunidade que já ouviram o boato e o número das que ainda não ouviram.

41. Mostre que a função $y = Ce^{kx}$ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = ky$.

42. Mostre que a função $Q = B - Ce^{-kt}$ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{dQ}{dt} = k(B - Q)$.

43. Mostre que $y = C_1e^x + C_2xe^x$ satisfaz a equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

44. Mostre que $y = \dfrac{1}{20}x^4 - \dfrac{C_1}{x} + C_2$ satisfaz a equação diferencial $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = x^3$.

45. PRODUÇÃO DE PETRÓLEO Um certo poço de petróleo que produz 400 barris de petróleo bruto por mês estará seco daqui a 2 anos. O preço do barril de petróleo bruto é atualmente de 56 dólares e deverá aumentar a uma taxa constante de 4 cents por mês. Se o petróleo for vendido imediatamente após ser extraído, qual será a receita futura total do poço?

46. MEMÓRIA Alguns psicólogos acreditam que, quando uma pessoa tem que se lembrar de uma série de fatos, a taxa com a qual os fatos são lembrados é proporcional ao número de fatos relevantes na memória da pessoa que ainda não foram lembrados. Expresse o número de fatos lembrados em função do tempo e plote a curva correspondente.

47. DISSOLUÇÃO DE AÇÚCAR Quando é colocado em um recipiente com água, o açúcar se dissolve a uma taxa proporcional à quantidade de açúcar que ainda não se dissolveu. Expresse a quantidade de açúcar dissolvido em função do tempo e plote a curva correspondente.

48. LEI DE NEWTON DO RESFRIAMENTO A taxa com a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Um refrigerante é retirado da geladeira em um dia quente de verão e colocado em uma sala onde a temperatura é de 30°C. Expresse a temperatura do refrigerante em função do tempo (em minutos) se a temperatura do refrigerante era de 5°C ao ser retirado da geladeira e de 10°C após 20 minutos.

49. LEI DE NEWTON DO RESFRIAMENTO A taxa com a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Expresse a temperatura do corpo em função do tempo e plote a curva correspondente, supondo que a temperatura inicial seja maior que a do ambiente.

50. PRODUÇÃO AGRÍCOLA De acordo com o **modelo de Mitscherlich,** um modelo de produção agrícola, o volume $Q(t)$ da produção de uma lavoura varia a uma taxa proporcional a $B - Q(t)$, onde B é o maior volume possível da produção:

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q)$$

a. Resolva esta equação diferencial para obter $Q(t)$. Expresse a resposta em termos de k e do volume inicial da produção, $Q_0 = Q(0)$.

b. Uma certa lavoura tem uma produção máxima de 200 sacas por hectare. No início da colheita ($t = 0$), a produção é de 50 sacas por hectare; 1 mês depois, de 60 sacas. Qual é a produção 3 meses após iniciada a colheita ($t = 3$)?

c. Observe que este modelo é semelhante ao modelo de aprendizado do Exemplo 6.2.6. Trata-se de uma simples coincidência ou existe uma analogia entre as duas situações? Justifique sua resposta.

51. DILUIÇÃO Um tanque contém 200 litros de salmoura com 0,25 quilogramas de sal por litro. O tanque é alimentado com água pura à taxa de 5 litros por minuto e a solução, mantida uniforme por agitação, deixa o tanque à mesma taxa.

a. Se $S(t)$ é a massa de sal em solução no instante t, um litro da solução contém

$$\frac{\text{Quantidade de sal}}{\text{Quantidade de água}} = \frac{S(t)}{200}$$

A que taxa o sal está saindo do tanque no instante t?

b. Escreva uma equação diferencial para a taxa de variação com o tempo de $S(t)$ usando o fato de que

$$\frac{dS}{dt} = \begin{bmatrix}\text{fluxo de entrada} \\ \text{do sal}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{fluxo de saída} \\ \text{do sal}\end{bmatrix}$$

c. Resolva a equação diferencial do item (b) para obter $S(t)$. [*Sugestão*: Qual é o valor de $S(0)$?]

52. PLANO DE INVESTIMENTO Um investidor faz depósitos regulares anuais de D reais em uma conta que rende uma taxa anual r de juros capitalizados continuamente.

a. Mostre que a conta cresce a uma taxa

$$\frac{dV}{dt} = rV + D$$

onde $V(t)$ é o saldo da conta t anos após o depósito inicial. Resolva esta equação diferencial para expressar $V(t)$ em termos de r e D.

b. Amanda pretende se aposentar daqui a 20 anos. Para formar um fundo de aposentadoria, começa a fazer depósitos anuais de R$ 8.000,00. Se a taxa de juros permanecer constante em 4% ao ano capitalizados continuamente, qual será o saldo da conta após o período de 20 anos?

c. Roberto estima que vai precisar de R$ 800.000,00 quando se aposentar. Se a taxa de juros é de 5% ao ano capitalizados continuamente, quanto deve depositar anualmente para poder se aposentar em 30 anos?

53. FUNDO DE APOSENTADORIA Um aposentado deposita S reais em uma conta que rende uma taxa anual r de juros capitalizados continuamente e retira anualmente W reais.

a. Mostre que o saldo da conta varia a uma taxa dada por

$$\frac{dV}{dt} = rV - W$$

onde $V(t)$ é o saldo da conta t anos após ser aberta. Resolva esta equação diferencial para expressar $V(t)$ em termos de r, W e S.

b. Alberto e Patrícia depositam R$ 500.000,00 em uma conta que rende 5% de juros ao ano capitalizados continuamente. Se eles retiram R$ 50.000,00 por ano, qual é o saldo da conta após 10 anos?

c. Que retirada anual W o casal do item (b) pode fazer se seu objetivo é manter a conta com um saldo de R$ 500.000,00?

d. Se o casal do item (b) decide retirar R$ 80.000,00 por ano, quanto tempo é necessário para que o saldo da conta chegue a zero?

54. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA A taxa com a qual uma epidemia se espalha em uma população com 2.000 pessoas suscetíveis é proporcional ao número de pessoas infectadas e ao número de pessoas suscetíveis que ainda não foram infectadas. Expresse o número de pessoas infectadas em função do tempo (em semanas), se 500 pessoas têm inicialmente a doença e existem 855 pessoas infectadas após a primeira semana.

55. EFICIÊNCIA DA MÃO-DE-OBRA Para $0 \leq p \leq 1$, seja $p(t)$ a probabilidade de um operário de uma linha de montagem cometer um erro t horas após começar o seu turno de trabalho de 8 horas. Um certo operário, Henrique, nunca comete erros no início do turno e tem uma probabilidade de 5% de cometer um erro no fim do turno. Escreva e resolva uma equação diferencial para $p(t)$, supondo que em qualquer instante t a probabilidade de Henrique cometer um erro aumenta a uma taxa proporcional à probabilidade $1 - p(t)$ de que ainda não tenha cometido um erro.

56. EFICIÊNCIA NO TRABALHO Dora, uma colega de Henrique do Problema 55, tem uma probabilidade de 1% de cometer um erro no início do turno e uma probabilidade de 3% de cometer um erro no fim do turno. Escreva e resolva uma equação diferencial para $p(t)$, supondo que em qualquer instante t a probabilidade de Dora cometer um erro aumenta a uma taxa proporcional à probabilidade $1 - p(t)$ de que ainda não tenha cometido um erro.

57. PURIFICAÇÃO DO AR Um galpão de 2.400 metros quadrados contém um filtro de ar de carvão ativado através do qual o ar passa com uma vazão de 400 metros cúbicos por minuto. O ozônio presente no ar é absorvido pelo filtro e o ar purificado é reintroduzido no galpão. Supondo que o ozônio que ainda não foi filtrado esteja sempre distribuído uniformemente no ar do galpão, determine o tempo necessário para que o filtro remova 50% do ozônio presente no ar do galpão.

58. CORRUPÇÃO NO GOVERNO O número de pessoas indiciadas em um escândalo envolvendo o governo aumenta a uma taxa proporcional ao número de pessoas já indiciadas e ao número de pessoas envolvidas que ainda não foram indiciadas. Suponha que 7 pessoas tenham sido indiciadas logo depois que um jornal denunciou pela primeira vez um esquema de corrupção, que 9 outras pessoas tenham sido indiciadas nos 3 meses seguintes e que outras 12 tenham sido indiciadas nos 3 meses subseqüentes. Quantas pessoas estavam envolvidas no esquema de corrupção? [*Advertência*: Este problema é um teste para criatividade algébrica do leitor!]

59. EVOLUÇÃO DOS PREÇOS O preço $p(t)$ de uma certa mercadoria varia de tal forma que sua taxa de variação com o tempo, $\frac{dp}{dt}$, é proporcional à escassez $D - S$, onde $D = 7 - p$ e $S = 1 + p$ são as funções de demanda e de oferta da mercadoria.

a. Se o preço é de R$ 6,00 para $t = 0$ e R$ 4,00 para $t = 4$, determine $p(t)$.

b. Mostre que quando t aumenta sem limite, $p(t)$ tende ao preço para o qual a oferta é igual à demanda.

60. MODELO DE AJUSTE DE PREÇOS DE EVANS Suponha que as funções de demanda e oferta de uma certa mercadoria sejam lineares, $D(p) = a - bp$ e $S(p) = r + sp$, onde p é o preço e a, b, r e s são constantes positivas. Suponha também que o preço seja função do tempo t e que a taxa de variação do preço com o tempo proporcional à escassez $D - S$:

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S)$$

Resolva esta equação diferencial e plote a curva de $p(t)$. O que acontece com $p(t)$ "a longo prazo" (quando $t \to +\infty$)?

61. MODELO DE DÍVIDA DE DOMAR Sejam D e I a dívida e a receita da União, respectivamente, e suponha que ambas variem com o tempo t. Um dos vários **modelos de dívida de Domar** supõe que as taxas de variação de D e I são proporcionais a I, ou seja, que

$$\frac{dD}{dt} = aI \quad \text{e} \quad \frac{dI}{dt} = bI$$

Suponha que $I(0) = I_0$ e $D(0) = D_0$.

a. Resolva as duas equações diferenciais e expresse $D(t)$ e $I(t)$ em termos de a, b, I_0 e D_0.

b. O economista Evsey Domar, o primeiro a estudar este modelo, estava interessado na razão entre a dívida e a receita da União. O que acontece com a razão $\frac{D(t)}{I(t)}$ quando $t \to +\infty$?

62. ALOMETRIA Os diferentes membros e órgãos de um indivíduo muitas vezes crescem a taxas diferentes; uma disciplina chamada de **alometria** é dedicada ao estudo destas diferenças (veja o ensaio Para Pensar do Capítulo 1). Suponha que $x(t)$ seja o tamanho (comprimento, volume ou peso) no instante t de um órgão ou membro de um certo organismo e $y(t)$ seja o tamanho de outro órgão ou mesmo do mesmo organismo. Nesse caso, de acordo com a lei da alometria, as taxas de crescimento relativas de x e y são proporcionais:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k\frac{x'(t)}{x(t)} \quad \text{onde } k > 0$$

Mostre que a lei da alometria pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}$$

e resolva esta equação para determinar a função $y(x)$.

63. DISSEMINAÇÃO DE UMA EPIDEMIA A taxa com a qual uma epidemia se espalha em uma população é proporcional ao número de habitantes que já foram infectados e ao número de habitantes suscetíveis que ainda não foram infectados. Mostre que a taxa de disseminação da epidemia é máxima quando metade das pessoas suscetíveis estão infectadas. [*Sugestão*: Não é necessário resolver uma equação diferencial para resolver este problema. Escreva uma expressão para a *taxa* de disseminação de uma epidemia e use os métodos do cálculo para maximizar esta taxa.]

64. CURVAS LOGÍSTICAS Mostre que se uma grandeza Q satisfaz a equação diferencial $\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$, onde k e B são constantes positivas, a taxa de variação $\frac{dQ}{dt}$ é máxima quando $Q(t) = \frac{B}{2}$. O que significa este resultado em termos do ponto de inflexão de uma curva logística? Justifique sua resposta. [*Sugestão*: Veja a sugestão do Problema 63.]

65. CONCENTRAÇÃO DE GLICOSE NO SANGUE Uma solução de glicose é injetada no sangue de um paciente a uma taxa constante R e ao mesmo tempo a glicose é convertida e eliminada a uma taxa proporcional à concentração instantânea de glicose no sangue, $C(t)$. Nesse caso,

$$\frac{dC}{dt} = R - kC \quad \text{onde } k > 0$$

Resolva esta equação diferencial para determinar a função $C(t)$. Expresse a resposta em termos de R, k e a concentração inicial de glicose $C_0 = C(0)$.

66. RESPOSTA A UM ESTÍMULO De acordo com a lei de Weber-Fechner da psicologia experimental, a taxa de variação de uma resposta R com o nível de estímulo S é inversamente proporcional ao estímulo:

$$\frac{dR}{dS} = \frac{k}{S}$$

Seja S_0 o limiar de estímulo, ou seja, o estímulo mais forte para o qual não há resposta, de modo que $R = 0$ para $S \leq S_0$.

a. Resolva esta equação diferencial para determinar a função $R(S)$. Expresse a resposta em termos de k e S_0.

b. Plote a curva da função de resposta $R(S)$ obtida no item (a).

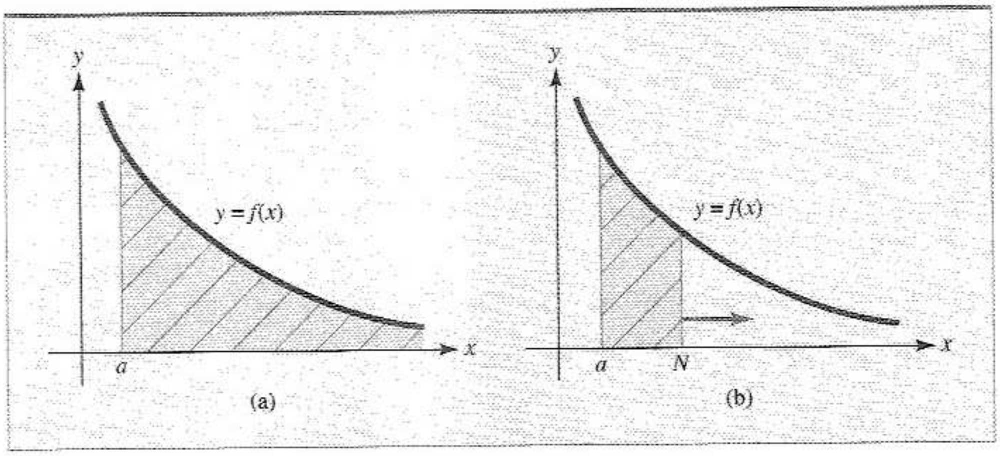
SEÇÃO 6.3 Integrais Impróprias; Probabilidade Contínua

A definição de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, apresentada na Seção 5.3, exige que o intervalo de integração $a \leq x \leq b$ seja finito; entretanto, para resolver certos problemas, é interessante considerar integrais com um intervalo de integração *infinito*, como $x \geq a$. Nesta seção, vamos definir estas **integrais impróprias** e discutir algumas de suas propriedades e aplicações. Em seguida, vamos mostrar que as integrais, próprias e impróprias, podem ser usadas calcular probabilidades.

A Integral Imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

A integral imprópria de $f(x)$ no intervalo infinito $x \geq a$ é representada pelo símbolo $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Se $f(x) \geq 0$ para $x \geq a$, esta integral pode ser interpretada como a área da região entre a curva $y = f(x)$ à direita de $x = a$, como mostra a Figura 6.9a. Embora esta região tenha uma extensão infinita, sua área pode ser finita ou infinita, dependendo da rapidez com a qual $f(x)$ tende a zero quando x aumenta sem limite.

FIGURA 6.9 Área $= \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)\,dx$.



Um método razoável para calcular a área de uma região deste tipo é usar primeiro uma integral definida para calcular a área de $x = a$ até um ponto finito $x = N$ à direita de a e, em seguida, fazer N tender a infinito na expressão resultante:

$$\text{Área total} = \lim_{N \to +\infty} (\text{área de } a \text{ a } N) = \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Este método está representado graficamente na Figura 6.9b e leva à seguinte definição de integral imprópria.

> **Integral Imprópria** ■ Se $f(x)$ é uma função contínua para $x \geq a$,
>
> $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$
>
> Se o limite que define a integral imprópria existe, dizemos que a integral **converge**; caso contrário, dizemos que a integral **diverge**.

5 EXPLORE!

Leia o Exemplo 6.3.1. Entre com $f(x) = 1/x^2$ em Y1 do editor de equações e escreva Y2 = **fnInt(Y1, X, 1, X, 0.001)**, a função de integração numérica. Defina uma tabela de valores que comece em X = 500 com incrementos de 500. Explique o que você observa.

EXEMPLO 6.3.1

Calcule o valor da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

ou mostre que a integral diverge.

Solução

Em primeiro lugar, calculamos a integral de 1 a N; em seguida, fazemos N tender a infinito. O resultado é o seguinte:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_1^N\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{N}+1\right) = 1$$

EXEMPLO 6.3.2

Calcule o valor da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

ou mostre que a integral diverge.

Solução

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\left(\ln|x|\bigg|_1^N\right) = \lim_{N\to+\infty} \ln N = +\infty$$

Como o limite não existe (não é um número finito), a integral imprópria diverge.

NOTA Acabamos de ver que a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (Exemplo 6.3.1), enquanto $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge (Exemplo 6.3.2). Em termos geométricos, isto significa que a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$ à direita de $x = 1$ é *finita*, enquanto a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ à direita de $x = 1$ é *infinita*. A razão para esta diferença é que, quando x tende a infinito, $\frac{1}{x^2}$ tende a zero mais rapidamente que $\frac{1}{x}$ (veja Figura 6.10). ∎

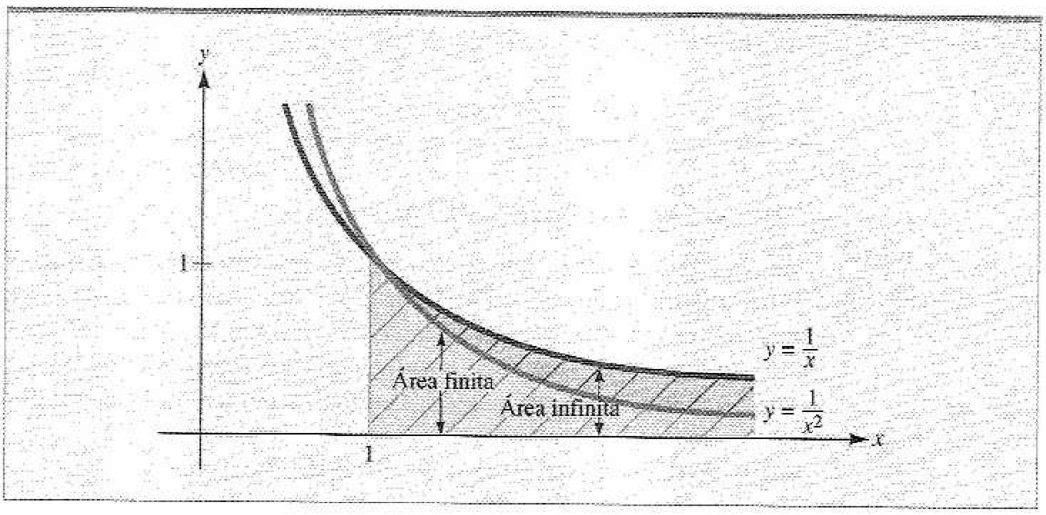


FIGURA 6.10 Comparação da área sob a curva $y = 1/x$ com a área sob a curva $y = 1/x^2$.

O cálculo das integrais impróprias que aparecem em problemas práticos freqüentemente envolve limites da forma

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^p}{e^{kN}} = \lim_{N\to\infty} N^p e^{-kN} \quad (\text{para } k > 0)$$

Em geral, como uma expressão exponencial da forma e^{kN} aumenta mais depressa com N do que *qualquer* expressão da forma N^p, o produto

$$N^p e^{-kN} = \frac{N^p}{e^{kN}}$$

tende a zero para grandes valores de N. Resumindo:

Um Limite Útil para Integrais Impróprias ■ Para qualquer potência p e qualquer número positivo k,

$$\lim_{N\to\infty} N^p e^{-kN} = 0$$

6 EXPLORE!

Leia o Exemplo 6.3.3. Plote a função $f(x) = xe^{-2x}$ usando uma janela [0, 9.4]1 por [−0.05, 0.02]1. Use a rotina de integração numérica da calculadora, **CALC (2nd TRACE)**, 7: $\int f(x)\,dx$, para mostrar que a área sob a curva de $f(x)$ entre 0 e um valor relativamente grande de x tende para o valor 1/4.

EXEMPLO 6.3.3

Calcule o valor da integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$$

ou mostre que a integral diverge.

Solução

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^N xe^{-2x}\,dx \\
&= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^N + \frac{1}{2}\int_0^N e^{-2x}\,dx\right) \qquad \textit{integrando por partes} \\
&= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^N \\
&= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}Ne^{-2N} - \frac{1}{4}e^{-2N} + 0 + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

pois $e^{-2N} \to 0$ e $Ne^{-2N} \to 0$ quando $N \to +\infty$.

Aplicações da Integral Imprópria

Vamos agora discutir duas aplicações da integral imprópria que são generalizações de aplicações da integral definida discutidas no Capítulo 5. Em ambos os casos, a estratégia consiste em expressar uma grandeza como uma integral definida com um limite superior de integração variável e, em seguida, fazer o limite superior de integração tender a infinito. Ao estudar os exemplos a seguir, talvez seja conveniente reler os problemas correspondentes com integrais definidas, que foram apresentados no Capítulo 5.

Valor Atual de um Fluxo de Receita Perpétuo

No Exemplo 5.5.3 da Seção 5.5, vimos que o valor atual de um investimento que gera receita continuamente durante um período finito de tempo é dado por uma integral definida. Se a geração de receita continua por um tempo indefinido, o valor atual do investimento é dado por uma integral imprópria, como ilustra o Exemplo 6.3.4.

EXEMPLO 6.3.4

Um milionário deseja fazer uma doação a uma universidade particular que produza uma receita perpétua de 25.000 + 1.200t reais por ano. Supondo que a taxa de juros permaneça constante em 5% ao ano capitalizados continuamente, qual deve ser o valor da doação?

Solução

O valor da doação deve ser igual ao valor atual do fluxo de receita perpétuo. Como vimos na Seção 5.5, o valor atual de um fluxo de receita contínuo $f(t)$ aplicado continuamente em uma conta a uma taxa anual r de juros capitalizados continuamente por um termo de T anos é dado pela integral

$$\text{VA} = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$$

Como desejamos que $f(t) = 25.000 + 1.200t$ e sabemos que $r = 0{,}05$, o valor atual para um termo de T anos é

$$\textit{Valor atual da bolsa por T anos} \qquad \text{VA} = \int_0^T (25.000 + 1.200t)e^{-0{,}05t}\,dt$$

Integrando por partes, com

$$u = 25.000 + 1.200t \qquad dv = e^{-0{,}05t}\,dt$$
$$du = 1.200\,dt \qquad v = \frac{e^{-0{,}05t}}{-0{,}05} = -20e^{-0{,}05t}$$

o valor atual é dado por

$$\begin{aligned}
\text{VA} &= \int_0^T (25.000 + 1.200t)e^{-0{,}05t}\,dt \\
&= \left[(25.000 + 1.200t)(-20e^{-0{,}05t})\right]\Big|_0^T - \int_0^T 1.200(-20e^{-0{,}05t})\,dt \\
&= \left[(-500.000 - 24.000t)e^{-0{,}05t}\right]\Big|_0^T + 24.000\left(\frac{e^{-0{,}05t}}{-0{,}05}\right)\Big|_0^T \\
&= \left[(-980.000 - 24.000t)e^{-0{,}05t}\right]\Big|_0^T \\
&= \left[(-980.000 - 24.000T)e^{-0{,}05T}\right] - \left[(-980.000 - 24.000(0))e^{0}\right] \\
&= (-980.000 - 24.000T)e^{-0{,}05T} + 980.000
\end{aligned}$$

Para determinar o valor atual para um fluxo perpétuo, tomamos o limite para $T \to +\infty$, ou seja, calculamos a integral imprópria

$$\begin{aligned}
\textit{Valor atual da bolsa por um tempo infinito} \quad & \int_0^{+\infty} (25.000 + 1.200t)e^{-0{,}05t}\,dt \\
&= \lim_{T\to+\infty} [(-980.000 - 24.000T)e^{-0{,}05T} + 980.000] \\
&= 0 + 980.000 \qquad \textit{pois } e^{-0{,}05T} \to 0 \textit{ e } Te^{-0{,}05T} \to 0 \text{ quando } T \to +\infty \\
&= 980.000
\end{aligned}$$

Assim, o milionário deve doar R$ 980.000,00

Rejeitos Nucleares

No Exemplo 5.6.1 da Seção 5.6, apresentamos um problema de sobrevivência e renovação por um termo de duração infinita durante o qual a renovação acontecia a uma taxa constante. No Exemplo 6.3.5, vamos considerar uma situação mais geral, na qual a sobrevivência e a renovação variam com o tempo e o processo de sobrevivência e renovação continua indefinidamente.

EXEMPLO 6.3.5

Estima-se que daqui a t anos uma certa usina nuclear estará produzindo lixo radioativo à razão de $f(t) = 400t$ quilogramas por ano. O lixo decai exponencialmente à razão de 2% ao ano. O que acontecerá a longo prazo com a quantidade de lixo radioativo produzida pela usina?

Solução

Para calcular a quantidade de lixo radioativo que estará presente daqui a N anos, dividimos o intervalo de N anos $0 \leq t \leq N$ em n subintervalos iguais de duração Δt e chamamos de t_j o início do subintervalo de ordem j (Figura 6.11). Nesse caso, temos:

$$\begin{array}{c}\text{Quantidade de rejeitos produzidos}\\ \text{no } j\text{-ésimo intervalo}\end{array} \approx 400t_j\,\Delta t$$

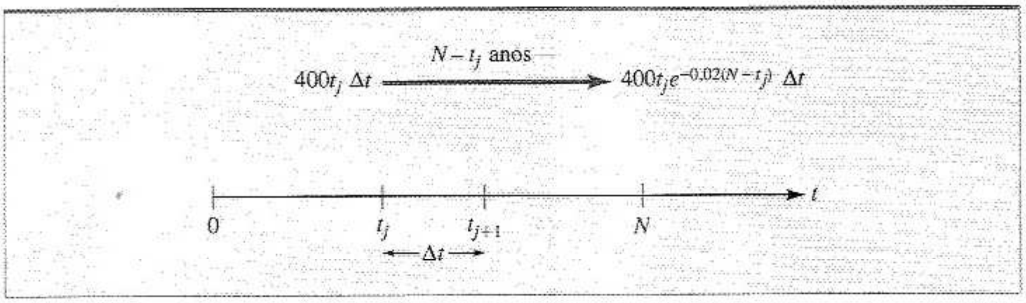


FIGURA 6.11 Rejeitos radioativos gerados durante o j-ésimo subintervalo.

Como o lixo decai exponencialmente à taxa de 2% ao ano e existem $N - t_j$ anos entre os instantes $t = t_j$ e $t = N$, temos:

$$\begin{array}{c}\text{Quantidade de rejeitos produzidos}\\ \text{no } j\text{-ésimo intervalo ainda}\\ \text{presentes em } t = N\end{array} \approx 400t_je^{-0{,}02(N-t_j)}\Delta t$$

Assim,

$$\begin{aligned}\begin{array}{c}\text{Quantidade de rejeitos}\\ \text{presentes após } N \text{ anos}\end{array} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}400t_je^{-0{,}02(N-t_j)}\Delta t\\ &= \int_0^N 400te^{-0{,}02(N-t)}\,dt\\ &= 400e^{-0{,}02N}\int_0^N te^{0{,}02t}\,dt\end{aligned}$$

A quantidade de lixo radioativo presente a longo prazo é o limite desta expressão quando N tende a infinito. Assim,

$$\begin{aligned}\begin{array}{c}\text{Quantidade de rejeitos}\\ \text{presentes a longo prazo}\end{array} &= \lim_{N\to+\infty}400e^{-0{,}02N}\int_0^N te^{0{,}02t}\,dt\\ &= \lim_{N\to+\infty}400e^{-0{,}02N}\left(50te^{0{,}02t} - 2.500e^{0{,}02t}\right)\Big|_0^N\\ &= \lim_{N\to+\infty}400e^{-0{,}02N}\left(50Ne^{0{,}02N} - 2.500e^{0{,}02N} + 2.500\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty}400\left(50N - 2.500 + 2.500e^{-0{,}02N}\right)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Assim, a longo prazo, a quantidade de lixo radioativo tende a infinito.

Probabilidade Contínua

As integrais impróprias também aparecem nos estudos de probabilidade e estatística, que desempenham um papel importante em certas áreas das ciências sociais, empresariais e biológicas. Vamos concluir esta seção com uma breve introdução a este tipo de emprego das integrais impróprias.

O tempo de vida de uma lâmpada escolhida ao acaso, por exemplo, é uma grandeza que não pode ser prevista com precisão. O processo de escolher uma lâmpada é chamado de **amostragem** e o tempo de vida X da lâmpada é uma **variável aleatória contínua**. Outros exemplos de variável aleatória são o tempo que um motorista escolhido ao acaso fica esperando um sinal de trânsito abrir, o peso de uma pessoa escolhida ao acaso e o tempo que uma pessoa escolhida ao acaso leva para aprender a executar uma certa tarefa.

A **probabilidade** P de que uma variável aleatória assuma um certo valor é um número entre 0 e 1 que mede a freqüência relativa com que a variável assume este valor em um grande número de amostragens. No caso da lâmpada, por exemplo, se 90% das lâmpadas tiverem um tempo de vida entre 8.000 e 12.000 horas, podemos dizer que $P(8.000 \leq X \leq 12.000) = 0{,}9$.

A **densidade de probabilidade** de uma variável aleatória X é uma função f tal que $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x e a área sob a curva de $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é igual a $P(a \leq X \leq b)$. A Figura 6.12 mostra uma curva típica de densidade de probabilidade. Observe que, no caso desta curva em particular, a probabilidade de que a variável X assuma valores "pequenos" (entre 0 e 40, digamos) é muito maior que a probabilidade de que assuma valores "grandes" (entre 80 e 120, digamos).

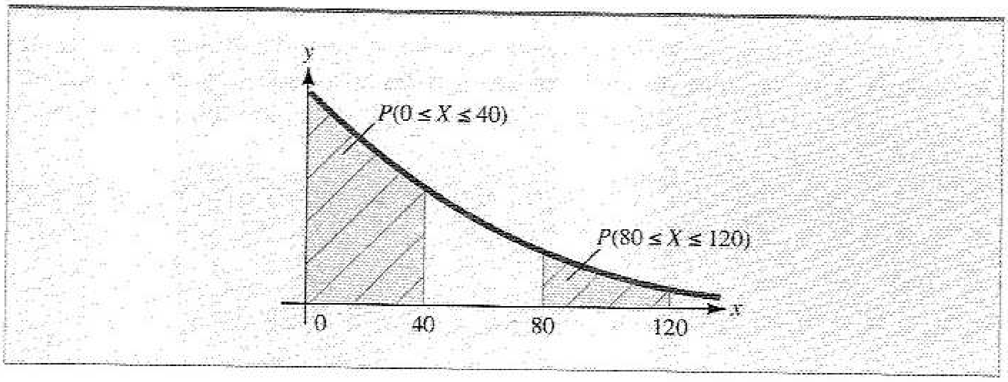


FIGURA 6.12 Uma possível densidade de probabilidade para a vida útil de uma lâmpada.

As propriedades básicas da densidade de probabilidade podem ser expressas em termos das integrais usadas para calcular as áreas correspondentes.

Densidade de Probabilidade ■ A densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é uma função $f(x)$ que satisfaz três condições:

1. $f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x
2. A área total sob o gráfico de $f(x)$ é 1.
3. A probabilidade de que X esteja no intervalo $a \leq X \leq b$ é dada pela integral

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Os valores de a e b nesta expressão não precisam ser finitos; se um dos dois for infinito, a probabilidade correspondente será dada por uma integral imprópria. Assim, por exemplo, a probabilidade de que $X \geq a$ é

$$P(X \geq a) = P(a \leq X < +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

A segunda condição que aparece na definição de densidade de probabilidade é uma conseqüência do fato de que a probabilidade de que X assuma um valor qualquer é 100%. Esta condição também pode ser expressa na forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

onde a integral imprópria do lado esquerdo é definida como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{0} f(x)\,dx + \lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{N} f(x)\,dx$$

e converge se e apenas se os dois limites existirem.

A determinação da densidade de probabilidade para uma dada variável aleatória pode ser considerada como o problema central da teoria das probabilidades, que não cabe discutir aqui. Vamos nos limitar a examinar dois casos particulares de densidade de probabilidade e ilustrar, através de exemplos, sua aplicação a situações concretas.

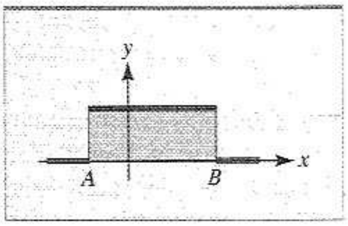


FIGURA 6.13 Densidade de probabilidade uniforme.

Densidade de Probabilidade Uniforme

A **densidade de probabilidade uniforme** (Figura 6.13) é uma função que tem valor constante em um certo intervalo $A \leq x \leq B$ e é nula fora deste intervalo. Quando a densidade de probabilidade de uma variável aleatória é uniforme, dizemos que a variável é **uniformemente distribuída**. No caso de uma variável uniformemente distribuída, podemos dizer que todos os valores dentro do universo de amostragem são "igualmente prováveis". Mais precisamente, uma variável aleatória contínua é uniformemente distribuída se a probabilidade de que seu valor esteja compreendido em um certo subintervalo do universo de amostragem é igual à de que esteja em qualquer outro subintervalo de mesma largura. Um exemplo de variável aleatória uniformemente distribuída é o tempo de espera em um sinal de trânsito. Se o sinal permanece fechado durante 40 segundos, por exemplo, todos os tempos de espera entre 0 e 40 segundos são igualmente prováveis.

Se k é o valor constante de uma densidade de probabilidade uniforme $f(x)$ no intervalo $A \leq x \leq B$, o valor de k é determinado pela condição de que a área total sob a curva de f seja igual a 1. Em particular,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_A^B f(x)\,dx \quad [f(x) = 0 \text{ fora do intervalo } A \leq x \leq B]$$

$$= \int_A^B k\,dx = kx \Big|_A^B = k(B - A)$$

e, portanto,

$$k = \frac{1}{B - A}$$

Esta observação leva à seguinte expressão para a densidade de probabilidade uniforme:

Densidade de Probabilidade Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & \text{para } A \leq x \leq B \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

Segue uma aplicação típica da densidade de probabilidade uniforme.

7 EXPLORE!

As densidades de probabilidade que são definidas em intervalos finitos são facilmente plotadas em calculadoras gráficas. Leia o Exemplo 6.3.6, represente $f(x)$ em Y1 e mostre graficamente a probabilidade de ter que esperar pelo menos 15 segundos para que o sinal fique verde.

EXEMPLO 6.3.6

Um certo sinal de trânsito permanece fechado durante 40 segundos de cada vez. Um motorista chega ao cruzamento e encontra o sinal fechado. Use a densidade de probabilidade uniforme para calcular a probabilidade de que o motorista tenha que esperar pelo menos 15 segundos até o sinal abrir.

Solução

Seja X a variável aleatória associada ao tempo de espera. Como todos os tempos de espera entre 0 e 40 segundos são igualmente prováveis, a variável X é uniformemente distribuída no intervalo $0 \leq x \leq 40$. A densidade de probabilidade correspondente é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} & \text{para } 0 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

e a probabilidade desejada é

$$P(15 \leq X \leq 40) = \int_{15}^{40} \frac{1}{40}\,dx = \frac{x}{40}\Big|_{15}^{40} = \frac{40 - 15}{40} = \frac{5}{8}$$

Densidade de Probabilidade Exponencial

A **densidade de probabilidade exponencial** é uma função $f(x)$ que é nula para $x < 0$ e diminui exponencialmente para $x \geq 0$:

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-kx} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde A e k são constantes positivas.

O valor de A é determinado pela condição de que a área total sob a curva de $f(x)$ seja 1. Temos:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} Ae^{-kx}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N Ae^{-kx}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left(-\frac{A}{k} e^{-kx} \Big|_0^N \right) = \lim_{N\to+\infty} \left(-\frac{A}{k} e^{-kN} + \frac{A}{k} \right) = \frac{A}{k}$$

e, portanto, $A = k$.

Este cálculo leva à expressão geral para a densidade de probabilidade exponencial apresentada a seguir e representada graficamente na Figura 6.14.

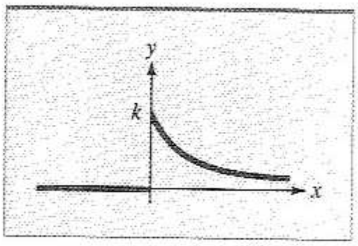


FIGURA 6.14 Densidade de probabilidade exponencial.

Densidade de Probabilidade Exponencial

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Quando a densidade de probabilidade de uma variável aleatória é exponencial, dizemos que a variável é **exponencialmente distribuída**. Como se pode ver na Figura 6.14, é muito mais provável que uma variável exponencialmente distribuída assuma um valor "pequeno" do que assuma um valor "grande". Alguns exemplos de variáveis exponencialmente distribuídas são o tempo de vida dos componentes eletrônicos, a duração dos telefonemas e o intervalo entre as chegadas de aviões nos aeroportos. Segue um exemplo.

8 EXPLORE!

Leia o Exemplo 6.3.7. Entre com a função $f(x)$ em Y1 como 0.5e^(−0.5X)*(X ≥ 0), usando uma janela [−2, 10]1 por [−0.1, 0.6]0.1. Confirme numericamente que $f(x)$ é uma densidade de probabilidade e calcule $P(2 \leq X \leq 3)$.

EXEMPLO 6.3.7

Seja X a variável aleatória usada para medir a duração dos telefonemas em uma certa cidade. A densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é a duração em minutos de uma chamada escolhida ao acaso.

a. Determine a probabilidade de que uma chamada escolhida ao acaso tenha uma duração entre 2 e 3 minutos.

b. Determine a probabilidade de que uma chamada escolhida ao acaso dure pelo menos 2 minutos.

Solução

a. $$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 0{,}5e^{-0{,}5x}\,dx = -e^{-0{,}5x}\Big|_2^3$$

$$= -e^{-1{,}5} + e^{-1} = 0{,}1447$$

b. Existem duas formas de calcular esta probabilidade. A primeira consiste em calcular uma integral imprópria.

$$P(X \geq 2) = P(2 \leq X < +\infty) = \int_2^{+\infty} 0{,}5e^{-0{,}5x}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \int_2^N 0{,}5e^{-0{,}5x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \left(-e^{-0{,}5x} \Big|_2^N \right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} (-e^{-0{,}5N} + e^{-1}) = e^{-1} \approx 0{,}3679$$

Uma segunda forma de resolver o problema é subtrair de 1 a probabilidade de que X seja menor que 2:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - \int_0^2 0{,}5e^{-0{,}5x}dx = 1 - \left(-e^{-0{,}5x}\Big|_0^2\right) \\ &= 1 - (-e^{-1} + 1) = e^{-1} \approx 0{,}3679 \end{aligned}$$

Densidade de Probabilidade Normal

As funções de densidade de probabilidade mais usadas na prática são as funções de **densidade de probabilidade normal**. O leitor já deve ter visto curvas "em forma de sino" como a da Figura 6.15. Uma discussão a respeito deste importante tópico está fora do escopo deste livro, mas podem ser encontradas em qualquer livro de estatística.

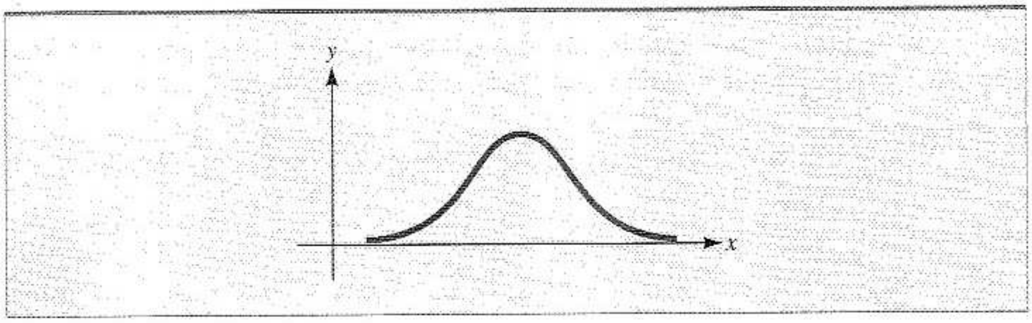


FIGURA 6.15 Densidade de probabilidade normal.

Valor Esperado de uma Variável Aleatória

Uma propriedade útil de uma variável aleatória X é o **valor esperado**, representado por $E(x)$. Se um experimento é realizado várias vezes e os resultados são registrados, a média aritmética dos resultados tende para o valor esperado. Neste sentido, $E(X)$ pode ser considerado o "valor médio" da variável aleatória X. Alguns exemplos de valores esperados usados no dia-a-dia são o consumo médio de gasolina de um certo modelo de automóvel, o tempo médio de espera na fila para examinar a bagagem de mão em um dado aeroporto e o tempo médio de vida de um certo aparelho eletrônico. Apresentamos a seguir uma fórmula para o valor esperado de uma variável aleatória contínua X em termos de uma integral da densidade de probabilidade.

Valor Esperado ■ Se X é uma variável aleatória contínua com uma densidade de probabilidade f, o valor esperado (ou valor médio) de X é dado por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

NOTA **(Interpretação Geométrica do Valor Esperado)** Às vezes, é interessante pensar na densidade de probabilidade de uma variável aleatória X como a distribuição de massa em uma viga orientada ao longo do eixo x. Nesse caso, o valor esperado de X é o ponto de equilíbrio da viga. ■

Os Exemplos 6.3.8 e 6.3.9 ilustram o uso da fórmula do valor esperado de uma variável aleatória contínua.

EXEMPLO 6.3.8

Determine o valor esperado da variável aleatória uniforme do Exemplo 6.3.6, cuja densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} & \text{para } 0 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

Solução

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{40} \frac{x}{40}dx = \left.\frac{x^2}{80}\right|_0^{40} = \frac{1.600}{80} = 20$$

No contexto do Exemplo 6.3.6, isto significa que o tempo médio de espera no sinal é de 20 segundos, uma conclusão que não deve causar surpresa no caso de uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 40.

EXEMPLO 6.3.9

Determine o valor esperado da uma variável aleatória do Exemplo 6.3.7, cuja densidade de probabilidade é dada pela distribuição exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Solução

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} 0{,}5xe^{-0{,}5x}dx \\ &= \lim_{N\to+\infty}\int_0^N 0{,}5xe^{-0{,}5x}dx \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(-xe^{-0{,}5x}\Big|_0^N + \int_0^N e^{-0{,}5x}dx\right) \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(-xe^{-0{,}5x} - 2e^{-0{,}5x}\right)\Big|_0^N \\ &= \lim_{N\to+\infty}(-Ne^{-0{,}5N} - 2e^{-0{,}5N} + 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Assim, a duração média de um telefonema na cidade do Exemplo 6.3.7 é de 2 minutos.

PROBLEMAS 6.3

Nos Problemas 1 a 24, calcule o valor da integral imprópria ou mostre que a integral diverge.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$

2. $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

4. $\int_1^{+\infty} x^{-2/3}\,dx$

5. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{2x-1}\,dx$

6. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}\,dx$

7. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx$

8. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

9. $\int_0^{+\infty} 5e^{-2x}\,dx$

10. $\int_1^{+\infty} e^{1-x}\,dx$

11. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx$

12. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$

13. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx$

14. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2xe^{-3x}\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{1-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

22. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

Nos Problemas 25 a 30, determine se a função dada é uma densidade de probabilidade.

25. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{(x+10)^2} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-2x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9}\sqrt{x} & \text{para } 0 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2 + 2x & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{3}x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

Nos Problemas 31 a 38, f(x) é a densidade de probabilidade de uma certa variável aleatória X. Use integrais para determinar as probabilidades pedidas.

31. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{para } 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

a. $P(2 \leq X \leq 5)$
b. $P(3 \leq X \leq 4)$
c. $P(X \geq 4)$

32. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

a. $P(0 \leq X \leq 2)$
b. $P(1 \leq X \leq 2)$
c. $P(X \leq 1)$

33. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}(4 - x) & \text{para } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

a. $P(0 \leq X \leq 4)$
b. $P(2 \leq X \leq 3)$
c. $P(X \geq 1)$

34. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{32}(4x - x^2) & \text{para } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

a. $P(0 \leq X \leq 4)$
b. $P(1 \leq X \leq 2)$
c. $P(X \leq 1)$

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4} & \text{para } x \geq 1 \\ 0 & \text{para } x < 1 \end{cases}$

a. $P(1 \leq X < +\infty)$
b. $P(1 \leq X \leq 2)$
c. $P(X \geq 2)$

36. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}e^{-x/10} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

a. $P(0 \leq X < +\infty)$
b. $P(X \leq 2)$
c. $P(X \geq 5)$

37. $f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

a. $P(X \geq 0)$
b. $P(1 \leq X \leq 2)$
c. $P(X \leq 2)$

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

a. $P(0 \leq X < +\infty)$
b. $P(2 \leq X \leq 4)$
c. $P(X \geq 6)$

Nos Problemas 39 a 44, determine o valor esperado da variável aleatória para a densidade de probabilidade indicada.

39. Problema 31

40. Problema 32

41. Problema 33

42. Problema 34

43. Problema 35

44. Problema 36

45. VALOR ATUAL DE UM INVESTIMENTO Um investimento é capaz de gerar R$ 2.400,00 ao ano por um prazo indeterminado. Se o dinheiro é aplicado continuamente e a taxa de juros permanece fixa em 4% ao ano capitalizados continuamente, qual é o valor atual do investimento?

46. VALOR ATUAL DO ALUGUEL DE UM APARTAMENTO Estima-se que daqui a t anos o aluguel de um apartamento esteja gerando receita para o proprietário à razão de $f(t) = 10.000 + 500t$ reais por ano. Se a receita é gerada por tempo indeterminado e a taxa de juros permanece fixa em 5% ao ano capitalizados continuamente, qual é o valor atual do aluguel do apartamento?

47. VALOR ATUAL DE UMA FRANQUIA Uma cadeia nacional de lanchonetes está vendendo uma franquia permanente em Manaus. A experiência em locais semelhantes mostra que daqui a t anos a franquia deverá estar gerando receita à razão de $f(t) = 12.000 + 900t$ reais por ano. Se a taxa de juros permanece fixa em 5% ao ano capitalizados continuamente, qual é o valor atual da franquia?

48. REJEITOS NUCLEARES Uma certa usina nuclear produz lixo radioativo à razão de 600 quilogramas por ano. O lixo decai exponencialmente à taxa de 2% ao ano. Qual é a quantidade de lixo radioativo a longo prazo?

49. TRATAMENTO MÉDICO A fração de pacientes que ainda estará recebendo tratamento em uma certa clínica t meses após a primeira consulta é $f(t) = e^{-t/20}$. Se a clínica recebe novos pacientes à razão de 10 por mês, quantos pacientes estarão sendo tratados na clínica a longo prazo?

50. CRESCIMENTO POPULACIONAL Estudos demográficos realizados em uma certa cidade revelam que a fração de residentes que permanece na cidade durante pelo menos t anos é $f(t) = e^{-t/20}$. A população atual da cidade é de 200.000 habitantes e estima-se que a cidade receberá mais 100 moradores por ano. Se esta estimativa estiver correta, qual será a população da cidade a longo prazo?

51. MEDICINA Um paciente internado em um hospital recebe 5 unidades por hora de um certo medicamento por via intravenosa. A fração do medicamento que permanece no corpo do paciente após t horas é $f(t) = e^{-t/10}$. Se o tratamento continuar por um longo tempo, quantas unidades do medicamento haverá no corpo do paciente?

52. VIDA ÚTIL DE UMA MÁQUINA A vida útil X de um certo tipo de máquina é uma variável aleatória com uma densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{28} + \dfrac{3}{x^2} & \text{para } 3 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

onde x é o número de anos que uma máquina escolhida aleatoriamente permanece funcionando.

a. Determine a probabilidade de que uma máquina escolhida ao acaso permaneça mais de 4 anos em serviço.

b. Determine a probabilidade de que uma máquina escolhida ao acaso funcione permaneça menos de 5 anos em serviço.

c. Determine a probabilidade de que uma máquina escolhida ao acaso permaneça em serviço entre 4 e 6 anos.

d. Qual é o valor esperado do tempo de vida da máquina?

53. ENGENHARIA DE TRÂNSITO Um certo sinal luminoso permanece fechado durante 45 segundos de cada vez. Um motorista chega ao sinal e encontra o sinal vermelho. Use a densidade de probabilidade uniforme apropriada para determinar:

a. A probabilidade de que o sinal abra após um intervalo de menos de 15 segundos.

b. A probabilidade de que o sinal abra após um intervalo de tempo entre 5 e 10 segundos.

c. O valor esperado do tempo de espera dos motoristas que encontram o sinal fechado.

54. TRENS DE SUBÚRBIO Nas horas de maior movimento, existe um trem de 20 em 20 minutos de uma certa estação dos subúrbios para o centro da cidade. Um passageiro chega à estação e não encontra o trem na plataforma. Supondo que os trens estejam todos no horário, use a densidade de probabilidade apropriada para determinar:

a. A probabilidade de o passageiro ter que esperar pelo menos 8 minutos por um trem.

b. A probabilidade de que o passageiro tenha que esperar entre 2 e 5 minutos por um trem.

c. O valor esperado do tempo de espera para os passageiros que, ao chegar, não encontram o trem na plataforma.

55. PSICOLOGIA EXPERIMENTAL O tempo que um rato de laboratório leva para percorrer um certo labirinto é dado por uma variável aleatória X cuja densidade de probabilidade é a função exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}e^{-x/3} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o número de minutos que um rato escolhido ao acaso leva para percorrer o labirinto.

a. Determine a probabilidade de que um rato escolhido ao acaso leve mais de 3 minutos para percorrer o labirinto.

b. Determine a probabilidade de que um rato escolhido ao acaso leve entre 2 e 5 minutos para percorrer o labirinto.

c. Determine o valor esperado do tempo que um rato leva para percorrer o labirinto.

56. CONFIABILIDADE DE UM PRODUTO O tempo de vida das lâmpadas produzidas por uma certa empresa é medido por uma variável aleatória X cuja densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01e^{-0{,}01x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o tempo de vida (em horas) de uma lâmpada escolhida ao acaso.

a. Qual é a probabilidade de que o tempo de vida de uma lâmpada escolhida ao acaso esteja entre 50 e 60 horas?

b. Qual é a probabilidade de que o tempo de vida de uma lâmpada escolhida ao acaso seja menor que 60 horas?

c. Qual é a probabilidade de que o tempo de vida de uma lâmpada escolhida ao acaso seja maior que 60 horas?

d. Qual é o valor esperado do tempo de vida de uma lâmpada?

57. CONFIABILIDADE DE UM PRODUTO O tempo de vida útil de um certo modelo de impressora é medida por uma variável aleatória X cuja densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}02e^{-0{,}02x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o número de meses que uma impressora escolhida ao acaso permanece em serviço.

a. Qual é a probabilidade de que uma impressora escolhida ao acaso permaneça em serviço entre 10 e 15 meses?

b. Qual é a probabilidade de que uma impressora escolhida ao acaso permaneça em serviço durante menos de 8 meses?

c. Qual é a probabilidade de que uma impressora escolhida ao acaso permaneça em serviço durante mais de 1 ano?

d. Qual é o valor esperado da vida útil de uma impressora?

58. ATENDIMENTO AO CLIENTE Suponha que o tempo X que um cliente precisa esperar na fila em um certo banco é dado por uma variável aleatória X cuja densidade de probabilidade é a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}e^{-x/4} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o número de minutos que um cliente escolhido ao acaso tem que esperar na fila.

a. Determine a probabilidade de que um cliente tenha que esperar na fila mais de 8 minutos.

b. Determine a probabilidade de que um cliente tenha que esperar na fila ente 1 e 5 minutos.

c. Determine o valor esperado do tempo de espera dos clientes na fila.

59. MEDICINA Um grupo de pacientes com uma doença potencialmente fatal foi tratado com um medicamento experimental. Suponha que o tempo de sobrevivência X de um paciente que recebe o medicamento seja uma variável aleatória com uma densidade de probabilidade exponencial dada por

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o número de anos que um paciente sobrevive depois de receber o medicamento pela primeira vez.

a. As pesquisas revelam que o tempo esperado de sobrevivência de um paciente que recebe o medicamento é de 5 anos. Com base nesta informação, qual é o valor de k?

b. Usando a densidade de probabilidade do item (a), determine a probabilidade de que um paciente escolhido ao acaso sobreviva menos de 2 anos.

c. Qual é a probabilidade de que um paciente escolhido ao acaso sobreviva mais de 7 anos?

60. PSICOLOGIA EXPERIMENTAL O tempo que um rato de laboratório leva para percorrer um certo labirinto é dado por uma variável aleatória X cuja densidade de probabilidade é dada pela função exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{16}xe^{-x/4} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o número de minutos que um rato escolhido ao acaso passa no labirinto.

a. Determine probabilidade de que um rato escolhido ao acaso leve no máximo 5 minutos para percorrer o labirinto.

b. Determine a probabilidade de que um rato escolhido ao acaso leve pelo menos 10 minutos para percorrer o labirinto.

c. Determine o valor esperado do tempo necessário para um rato atravessar o labirinto.

61. CHEGADA DE AVIÕES O intervalo de tempo entre a chegada sucessiva de dois aviões em um certo aeroporto é dado por uma variável aleatória X como uma densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}2e^{-0{,}2x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o tempo (em minutos) entre as chegadas sucessivas de dois aviões escolhidos ao acaso.

a. Qual é a probabilidade de que dois aviões sucessivos escolhidos ao acaso cheguem com um intervalo de menos de 5 minutos?

b. Qual é a probabilidade de que dois aviões sucessivos escolhidos ao acaso cheguem com um intervalo de mais de 6 minutos?

c. Se uma pessoa chega ao aeroporto no momento em que um avião está pousando, quanto tempo terá que esperar, em média, para ver outro avião pousar?

62. ESPIONAGEM Após atropelar um camelo no Problema 56 da Seção 5.1, nosso espião é atacado por André Scélérat e seus capangas. Depois de trocar tiros com os bandidos, fica sem munição e é forçado a lançar mão da última arma de que dispõe, uma granada de alto poder de destruição. Ao puxar o pino da granada, lembra-se do dia, há exatamente um ano, em que a recebeu do chefe, "N", juntamente com um soco inglês. Enquanto a granada atravessa o ar em direção aos facínoras, lembra-se também de que a arma tem apenas um ano de garantia e seu tempo de vida X é uma variável aleatória cuja densidade de probabilidade é

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}08e^{-0{,}08t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

onde t é o número de meses que se passaram desde que a granada foi fabricada. Supondo que a granada fosse nova quando o espião a recebeu, qual é a probabilidade de que ainda funcione?

63. **DOAÇÃO** Um milionário deseja doar uma cátedra de matemática no valor de G mil reais a uma pequena universidade particular. O matemático que ocupar a cátedra receberá R$ 70.000,00 por ano em salários e benefícios. Se os juros se mantiverem em 8% ao ano capitalizados continuamente, qual é o menor valor possível de G?

64. **CUSTO CAPITALIZADO** O **custo capitalizado** de um bem é a soma do custo do bem com o valor atual da quantia necessária para mantê-lo. Uma companhia precisa comprar uma máquina e tem que escolher entre dois modelos. O modelo 1 custa R$ 10.000,00 e daqui a t anos custará $M_1(t) = 1.000(1 + 0{,}06t)$ reais por ano para manter; o modelo 2 custa R$ 8.000,00 e o custo de manutenção é $M_2(t) =$ R$ 1.100,00 por ano.
   a. Se a taxa de juros é de 9% ao ano capitalizados continuamente, qual é o custo capitalizado de cada modelo? Qual o modelo mais barato a longo prazo?
   b. Leia a respeito dos métodos usados pelos economistas para fazer comparações entre bens. Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito destes métodos.

65. **MANDATOS POLÍTICOS** De acordo com um modelo matemático das ciências políticas,* o tempo que um político permanece (continuamente) em um cargo legislativo é uma variável aleatória com uma densidade de probabilidade exponencial

$$N(t) = \begin{cases} ce^{-ct} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

onde t é o número de anos de mandato contínuo e c é uma constante positiva que depende da natureza do corpo legislativo.
   a. No caso da Câmara dos Deputados dos Estados Unidos, os dados históricos mostram que $c = 0{,}0866$. Calcule a probabilidade de que um deputado americano escolhido ao acaso permaneça pelo menos 6 anos na Câmara.
   b. No caso da Câmara dos Comuns, na Inglaterra, $c = 0{,}135$. Qual é a probabilidade de que um membro da Câmara dos Comuns tenha um mandato de pelo menos 6 anos?
   c. O módulo do UMAP citado neste problema mostra que a densidade de probabilidade do item (a) também poderia ser usada para estimar o número de membros do Comitê Central Soviético expurgados por Nikita Khrushchev no período de 1956-1961. Leia este módulo e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas dizendo o que você pensa a respeito do método de análise usado pelo autor.

*Thomas W. Casstevens, "Exponential Models for Legislative Turnover", *UMAP Modules 1978: Tools for Teaching*, Lexington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1979.

66. **VALOR ATUAL** Um investimento irá produzir renda indefinidamente à taxa contínua de Q reais por ano. Supondo uma taxa anual r de juros (em forma decimal), capitalizados continuamente, use uma integral imprópria para mostrar que o valor atual do investimento é Q/r reais.

67. **VALOR ATUAL** Daqui a t anos, um investimento estará gerando $f(t) = A + Bt$ reais por ano, onde A e B são constantes. Se a renda é gerada por um tempo indefinido e supondo uma taxa anual r de juros (em forma decimal), capitalizados continuamente, mostre que o valor atual do investimento é $\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r^2}$ reais.

68. **VALOR ESPERADO** Mostre que no caso de uma variável aleatória X com uma densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & \text{para } A \leq x \leq B \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

o valor esperado é $E(x) = \dfrac{A + B}{2}$.

69. **VALOR ESPERADO** Mostre que no caso de uma variável aleatória X com uma densidade de probabilidade exponencial

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

o valor esperado é $E(x) = \dfrac{1}{k}$.

SEÇÃO 6.4 Integração Numérica

Nesta seção são discutidas algumas técnicas para calcular o valor aproximado de integrais definidas. Métodos numéricos como estes são necessários quando a função a ser integrada não possui uma antiderivada que possa ser expressa em termos de funções elementares, como acontece, por exemplo, com as funções $\sqrt{x^3 + 1}$ e e^x/x.

Aproximação por Retângulos

Se $f(x)$ é positiva no intervalo $a \leq x \leq b$, a integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é igual à área sob a curva de f entre $x = a$ e $x = b$. Como vimos na Seção 5.3, uma forma de determinar o valor aproximado desta área é usar n retângulos, como mostra a Figura 6.16. Em particular, podemos dividir o intervalo $a \leq x \leq b$ em n subintervalos iguais de largura $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$ e chamar de x_j a coordenada x do início do j-ésimo subintervalo. A base do j-ésimo retângulo é o j-ésimo intervalo e a altura do retângulo é $f(x_j)$. Assim, a área do j-ésimo retângulo é $f(x_j)\Delta x$. Como a soma das áreas dos n retângulos é uma aproximação da área sob a curva, uma aproximação da integral definida correspondente é

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

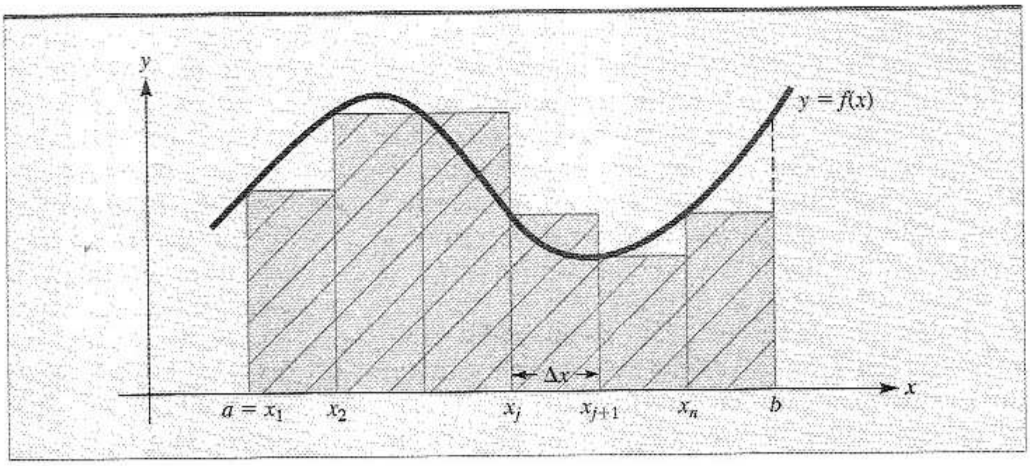


FIGURA 6.16 Aproximação por retângulos.

Como esta aproximação se torna cada vez melhor à medida que o número de retângulos aumenta, é possível estimar a integral com um grau arbitrário de precisão simplesmente escolhendo um valor adequado para n. Como, porém, é preciso usar um valor muito grande de n para obter uma precisão razoável, a aproximação por retângulos raramente é usada na prática.

Aproximação por Trapézios

Para um dado valor de n, a precisão da aproximação aumenta consideravelmente quando usamos trapézios em vez de retângulos. A Figura 6.17a mostra a área da Figura 6.16 sendo aproximada por n trapézios. É fácil observar que, neste caso, a aproximação é muito melhor que a aproximação por retângulos.

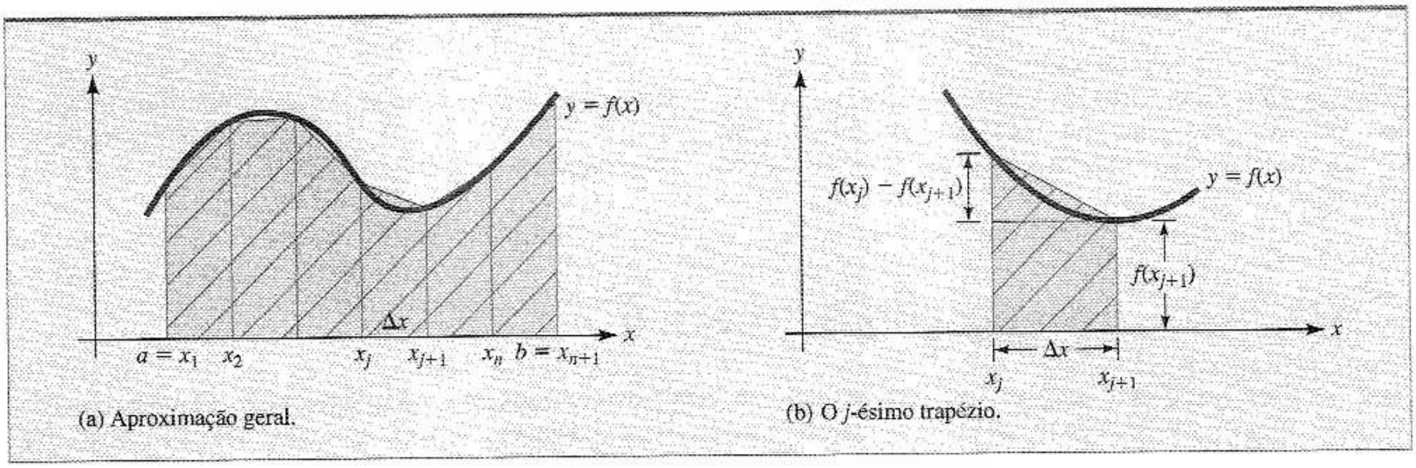


FIGURA 6.17 Aproximação por trapézios.

O j-ésimo trapézio é mostrado com mais detalhes na Figura 6.17b. Observe que pode ser considerado como a combinação de um retângulo e um triângulo retângulo. Como

$$\text{Área do retângulo} = f(x_{j+1})\Delta x$$

e

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2}[f(x_j) - f(x_{j+1})]\Delta x$$

temos

$$\text{Área do } j\text{-ésimo trapézio} = f(x_{j+1})\Delta x + \frac{1}{2}[f(x_j) - f(x_{j+1})]\Delta x$$
$$= \frac{1}{2}[f(x_j) + f(x_{j+1})]\Delta x$$

A soma das áreas dos n trapézios é uma aproximação da área sob a curva e, portanto, uma aproximação da integral definida correspondente. Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\approx \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]\Delta x + \frac{1}{2}[f(x_2) + f(x_3)]\Delta x + \cdots + \frac{1}{2}[f(x_n) + f(x_{n+1})]\Delta x$$
$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Esta fórmula de aproximação é conhecida como **regra do trapézio** e se aplica mesmo que a função f não seja positiva em todos os pontos do intervalo de integração.

Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

O uso da regra do trapézio é ilustrado no Exemplo 6.4.1.

9 EXPLORE!

Leia o Exemplo 6.4.1, no qual $a = 1$, $b = 2$ e $n = 10$. Uma lista pode ser usada para facilitar a integração numérica pela regra do trapézio. Faça Y1 = 1/x. Coloque os valores de x 1.0;1.1;...;1.9;2.0 em L1 e coloque em L2 os coeficientes da regra do trapézio 1,2,...,2,1. Escreva L3 = Y1(L1)*L2*H/2, onde $H = (b - a)/n$. Confirme o resultado obtido no Exemplo 6.4.1. Para mais detalhes, veja a Atualização do Explore!, no final do capítulo.

EXEMPLO 6.4.1

Use a regra do trapézio, com $n = 10$, para determinar o valor aproximado de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solução

Como
$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$$

o intervalo $1 \le x \le 2$ é dividido em 10 subintervalos pelos pontos

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1{,}1,\ x_3 = 1{,}2,\ \ldots,\ x_{10} = 1{,}9,\ x_{11} = 2$$

como mostra a Figura 6.18.

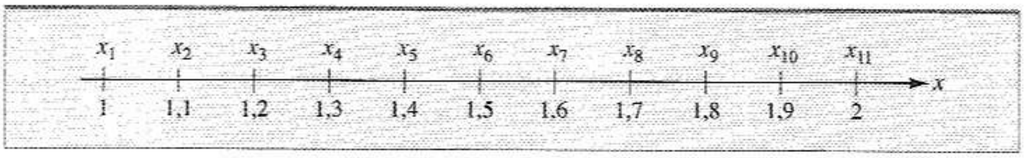


FIGURA 6.18 Divisão do intervalo $1 \le x \le 2$ em 10 subintervalos.

Nesse caso, de acordo com regra do trapézio,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{0{,}1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}7} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{2}{1{,}9} + \frac{1}{2}\right)$$
$$\approx 0{,}693771$$

A integral do Exemplo 6.4.1 pode ser calculada diretamente. O resultado é o seguinte:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0{,}693147$$

Assim, a aproximação desta integral pela regra do trapézio com $n = 10$ tem uma precisão (após o arredondamento) de duas casas decimais.

Precisão da Regra do Trapézio

A diferença entre o valor exato da integral $\int_a^b f(x)\,dx$ e o valor aproximado obtido usando a regra do trapézio com n subintervalos é representada pelo símbolo E_n. A demonstração da estimativa do valor absoluto de E_n apresentada a seguir está além do escopo deste livro, mas pode ser encontrada em livros de cálculo avançado.

Estimativa do Erro da Regra do Trapézio ■ Se M é o valor máximo de $|f''(x)|$ no intervalo $a \leq x \leq b$, temos

$$|E_n| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

O uso desta expressão é ilustrado no Exemplo 6.4.2.

EXEMPLO 6.4.2

Estime a precisão da aproximação da integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ pela regra do trapézio com $n = 10$.

Lembrete

Lembre-se de que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

Solução

Começando com $f(x) = \frac{1}{x}$, calculamos as derivadas

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

e observamos que o valor máximo de $|f''(x)|$ no intervalo $1 \leq x \leq 2$ é $|f''(1)| = 2$.
Assim, aplicamos a fórmula do erro com

$$M = 2 \qquad a = 1 \qquad b = 2 \qquad \text{e} \qquad n = 10$$

para obter

$$|E_{10}| \leq \frac{2(2-1)^3}{12(10)^2} \approx 0{,}00167$$

Assim, o erro da aproximação do Exemplo 6.4.1 não pode ser maior que 0,00167. (Na verdade, o erro, arredondado para cinco casas decimais, é 0,00062, como se pode constatar comparando a aproximação obtida no Exemplo 6.4.1 com a representação decimal de ln 2.)

Usando a estimativa de erro, podemos decidir de antemão qual é o número de subintervalos necessário para obter a precisão desejada. Segue um exemplo.

EXEMPLO 6.4.3

Quantos subintervalos são necessários para garantir que o erro seja menor que 0,00005 na aproximação de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ usando a regra do trapézio?

Solução

De acordo com o Exemplo 6.4.2, $M = 2$ para $a = 1$ e $b = 2$ e, portanto,

$$|E_n| \leq \frac{2(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

Assim, temos que determinar o menor número inteiro positivo n para o qual

$$\frac{1}{6n^2} < 0{,}00005$$

e, portanto,

$$n^2 > \frac{1}{6(0{,}00005)}$$

ou

$$n > \sqrt{\frac{1}{6(0{,}00005)}} \approx 57{,}74$$

Como o menor número inteiro que satisfaz esta desigualdade é 58, são necessários 58 subintervalos para obter a precisão desejada.

Aproximação Usando Parábolas: Regra de Simpson

O número relativamente grande de subintervalos necessário no Exemplo 6.4.3 para assegurar um erro menor que 0,00005 mostra que a aproximação por trapézios pode não ser prática em certas situações. Existe outra fórmula de aproximação, conhecida como **regra de Simpson**, que não é mais difícil de usar que a regra do trapézio, mas, em geral, exige um número bem menor de cálculos para se conseguir a mesma precisão. Como no caso da regra do trapézio, a idéia é substituir a área sob uma curva por colunas; a diferença está no fato de que no alto das colunas são usados arcos de parábolas em vez de segmentos de reta.

Mais especificamente, a aproximação de uma integral definida usando parábolas se baseia na seguinte construção (ilustrada na Figura 6.19 para $n = 6$): dividimos o intervalo $a \leq x \leq b$ em um número **par** de subintervalos para que todos os subintervalos adjacentes possam ser emparelhados. Substituímos a parte da curva que está acima do primeiro par de subintervalos pela (única) parábola que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ e $(x_3, f(x_3))$ e usamos a área sob esta parábola entre x_1 e x_3 como uma aproximação da área correspondente sob a curva. Fazemos o mesmo para todos os outros pares de subintervalos e usamos a soma das áreas resultantes como uma aproximação da área total sob a curva. A fórmula de aproximação que resulta desta construção é a seguinte:

Regra de Simpson ■ Para um número inteiro par n,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Observe que o primeiro e o último valor da função na expressão da regra de Simpson são multiplicados por 1, enquanto os outros valores são multiplicados alternadamente por 4 e 2.

A demonstração da regra de Simpson se baseia no fato de que a equação de uma parábola é um polinômio da forma $y = Ax^2 + Bx + C$. Para cada par de subintervalos, os três pontos dados são

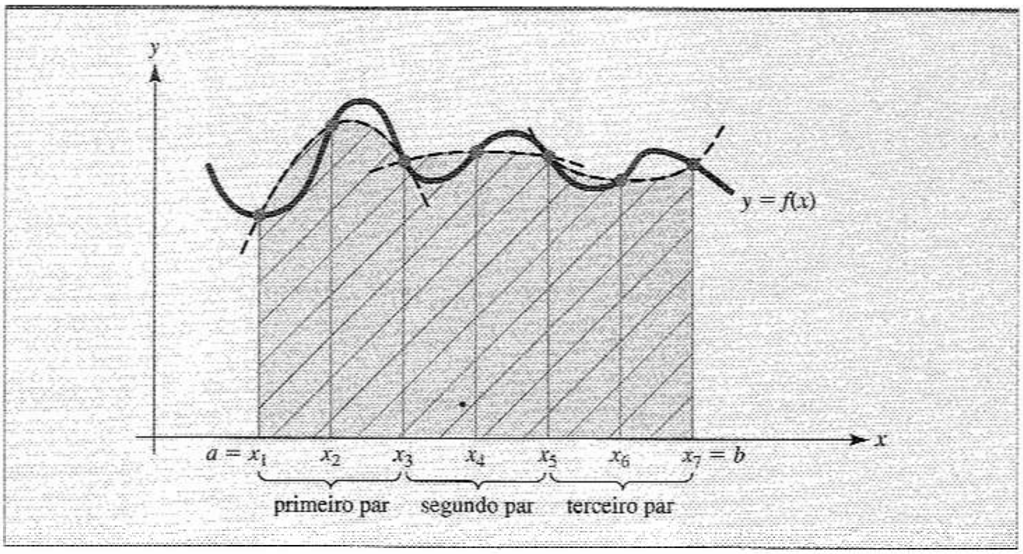


FIGURA 6.19 Aproximação usando parábolas.

usados para determinar os coeficientes A, B e C e o polinômio resultante é integrado para se obter a área correspondente. A demonstração, embora conceitualmente simples, é trabalhosa e não será apresentada aqui.

10 EXPLORE!

Leia o Exemplo 6.4.4, no qual $a = 1$, $b = 2$ e $n = 10$. Uma lista pode ser usada para facilitar a integração numérica pela regra de Simpson. Faça Y1 = 1/x. Coloque os valores de x 1,0;1,1;...;1,9;2,0 em L1 e coloque em L2 os coeficientes da regra de Simpson 1,4,2,...,4,1. Escreva L3 = Y1(L1)*L2*H/3, onde $H = (b - a)/n$. Confirme o resultado obtido no Exemplo 6.4.4. Compare com a integração pela regra do trapézio no Explore! 9

EXEMPLO 6.4.4

Use a regra de Simpson com $n = 10$ para determinar o valor aproximado de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solução

Como no Exemplo 6.4.1, $\Delta x = 0{,}1$ e, portanto, o intervalo $1 \le x \le 2$ é dividido em 10 subintervalos pelos pontos

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1{,}1,\ x_3 = 1{,}2,\ \dots,\ x_{10} = 1{,}9,\ x_{11} = 2$$

Nesse caso, de acordo com a regra de Simpson,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{0{,}1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{4}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{4}{1{,}7} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{4}{1{,}9} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}693150$$

Observe que esta é uma excelente aproximação do valor exato, $\ln 2 = 0{,}693147\ldots$, até a sexta casa decimal.

Precisão da Regra de Simpson

Do mesmo modo como a estimativa do erro da regra do trapézio se baseia no valor máximo da derivada segunda, a estimativa do erro da regra de Simpson se baseia no valor máximo da derivada quarta. A expressão é a seguinte:

Estimativa de Erro da Regra de Simpson ■ Se M é o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ no intervalo $a \le x \le b$, temos:

$$|E_n| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

O Exemplo 6.4.5 ilustra o uso desta expressão.

11 EXPLORE!

Use a regra de Simpson com $n = 4$ para calcular numericamente o valor de $\int_0^2 (3x^2 + 1)\,dx$. Para isso, entre com a função em uma calculadora e determine o seu valor para 0; 0,5; 1,5 e 2. Calcule a soma apropriada. Compare a resposta com a obtida usando retângulos e usando a regra do trapézio.

EXEMPLO 6.4.5

Estime a precisão da aproximação de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ pela regra de Simpson com $n = 10$.

Solução

Começando com $f(x) = \frac{1}{x}$, calculamos as derivadas

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

e observamos que o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ no intervalo $1 \le x \le 2$ é $|f^{(4)}(1)| = 24$. Assim, aplicamos a fórmula do erro com $M = 24$, $a = 1$ e $n = 10$ para obter

$$|E_{10}| \le \frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} \approx 0{,}000013$$

Assim, o erro da aproximação do Exemplo 6.4.4 não pode ser maior que 0,000013.

No Exemplo 6.4.6, a estimativa de erro é usada para determinar o número de subintervalos necessários para obter a precisão desejada.

EXEMPLO 6.4.6

Quantos subintervalos são necessários para garantir que o erro seja menor que 0,00005 na aproximação de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ usando a regra de Simpson?

Solução

De acordo com o Exemplo 6.4.5, $M = 24$ para $a = 1$ e $b = 2$ e, portanto,

$$|E_n| \leq \frac{24(2-1)^5}{180n^4} = \frac{2}{15n^4}$$

Assim, temos que determinar o menor número inteiro positivo n (par) para o qual

$$\frac{2}{15n^4} < 0{,}00005$$

e, portanto,
$$n^4 > \frac{2}{15(0{,}00005)}$$

ou
$$n > \left[\frac{2}{15(0{,}00005)}\right]^{1/4} \approx 7{,}19$$

Como o menor número inteiro par que satisfaz esta desigualdade é 8, são necessários 8 subintervalos para obter a precisão desejada. De acordo com o resultado do Exemplo 6.4.3, são necessários 58 subintervalos para conseguir a mesma precisão usando a regra trapezoidal.

Análise de Dados Usando Integração Numérica

A integração numérica também é muito usada para estimar uma grandeza da forma $\int_a^b f(x)\,dx$ quando tudo que se sabe a respeito de $f(x)$ são pontos experimentais da forma $(x_j, f(x_j))$. Seguem dois exemplos.

EXEMPLO 6.4.7

Jorge gostaria de conhecer a área da piscina de sua casa de campo para comprar uma rede de proteção, mas isso é difícil por causa da forma irregular da piscina. Suponha que Jorge considere as medidas mostradas na Figura 6.20 a intervalos regulares ao longo do comprimento da piscina (todos os valores estão em metros). Como estimar a área com base nestes resultados, usando a regra do trapézio?

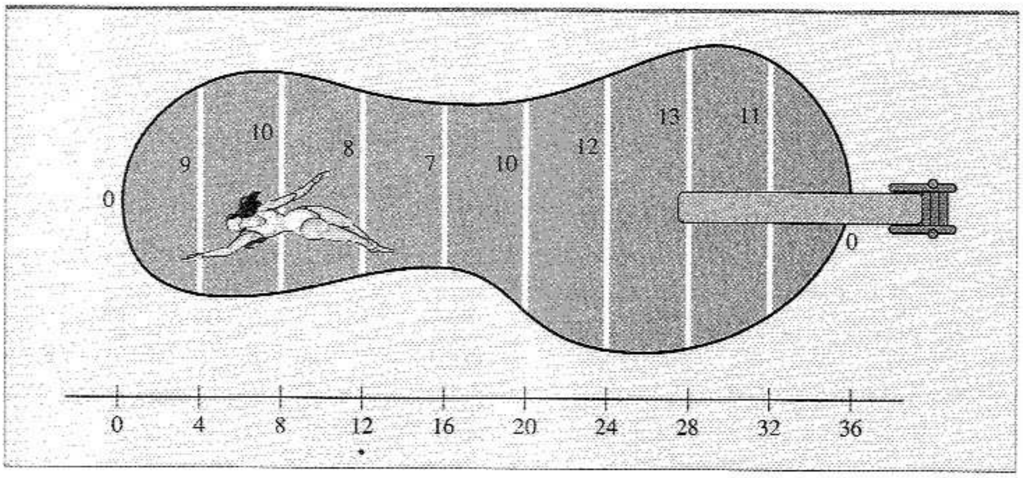


FIGURA 6.20 Medida da área de uma piscina.

Solução

Se Jorge conhecesse as funções $f(x)$ e $g(x)$ que descrevem as duas bordas da piscina, poderia calcular a área através da integral definida $A = \int_0^{36} [f(x) - g(x)]\,dx$. A forma irregular torna impossível, ou pelo menos muito difícil, encontrar expressões matemáticas para f e g. Entretanto, de acordo com as medidas de Jorge, sabemos que

$$f(0) - g(0) = 0 \quad f(4) - g(4) = 9 \quad f(8) - g(8) = 10 \ldots f(36) - g(36) = 0$$

Substituindo estes dados na aproximação da regra do trapézio e fazendo $\Delta x = (36 - 0)/9 = 4$, temos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{36} [f(x) - g(x)]dx \\ &\approx \frac{4}{2}[0 + 2(9) + 2(10) + 2(8) + 2(7) + 2(10) + 2(12) + 2(13) + 2(11) + 0] \\ &= \frac{4}{2}(160) = 320 \end{aligned}$$

Assim, a área da piscina é de aproximadamente 320 m^2.

EXEMPLO 6.4.8

O dono de uma cadeia de pet shops pretende colocar à venda uma franquia de 10 anos. A experiência com estabelecimentos semelhantes mostra que daqui a t anos a franquia deverá estar gerando receita à taxa de $f(t)$ milhares de reais por ano, onde $f(t)$ está indicada na tabela que se segue para uma década típica.

Ano t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fluxo de receita $f(t)$	510	580	610	625	654	670	642	610	590	573	550

Se a taxa de juros permanecer em 5% ao ano capitalizados continuamente durante o termo de 10 anos da franquia, qual é o preço justo para a franquia?

Solução

Se o fluxo de receita $f(t)$ fosse uma função contínua, o preço justo para a franquia poderia ser determinado calculando o valor atual do fluxo de receita para o termo de 10 anos. De acordo com uma expressão que foi demonstrada na Seção 5.5, este valor atual seria dado pela integral definida

$$\text{VA} = \int_0^{10} f(t)\, e^{-0,05t}\, dt$$

já que a taxa anual de juros é 5% ($r = 0,05$). Como não dispomos de uma função contínua $f(t)$, vamos usar a regra de Simpson com $n = 10$ e $\Delta t = 1$ para *estimar* o valor atual. Temos:

$$\begin{aligned} \text{VA} &= \int_0^{10} f(t)\, e^{-0,05t}\, dt \\ &\approx \frac{\Delta t}{3}[f(0)\, e^{-0,05(0)} + 4f(1)\, e^{-0,05(1)} + 2f(2)\, e^{-0,05(2)} + \cdots + 4f(9)\, e^{-0,05(9)} \\ &\quad + f(10)\, e^{-0,05(10)}] \\ &\approx \frac{1}{3}[(510)e^{-0,05(0)} + 4(580)e^{-0,05(1)} + 2(610)e^{-0,05(2)} + 4(625)e^{-0,05(3)} \\ &\quad + 2(654)e^{-0,05(4)} + 4(670)e^{-0,05(5)} + 2(642)e^{-0,05(6)} + 4(610)e^{-0,05(7)} \\ &\quad + 2(590)e^{-0,05(8)} + 4(573)e^{-0,05(9)} + (550)e^{-0,05(10)}] \\ &\approx \frac{1}{3}(14.387) \approx 4.796 \end{aligned}$$

Assim, o valor atual do fluxo de receita para um termo de 10 anos é de aproximadamente 4.796 milhares de reais (R$ 4.796.000,00). O dono da cadeia de pet shops pode usar este valor como uma estimativa do preço justo para a franquia.

PROBLEMAS | 6.4

Nos Problemas 1 a 14, determine o valor aproximado da integral dada, usando (a) a regra do trapézio e (b) a regra de Simpson com o número especificado de subintervalos.

1. $\int_1^2 x^2\,dx;\ n = 4$

2. $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;\ n = 10$

3. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx;\ n = 4$

4. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx;\ n = 4$

5. $\int_{-1}^0 \sqrt{1+x^2}\,dx;\ n = 4$

6. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx;\ n = 6$

7. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx;\ n = 4$

8. $\int_0^2 e^{x^2}\,dx;\ n = 10$

9. $\int_2^4 \frac{dx}{\ln x};\ n = 6$

10. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x+2}\,dx;\ n = 4$

11. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx;\ n = 4$

12. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};\ n = 6$

13. $\int_0^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx;\ n = 8$

14. $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx;\ n = 4$

Nos Problemas 15 a 20, determine o valor aproximado da integral dada e estime o erro cometido $|E_n|$ usando (a) a regra do trapézio e (b) a regra de Simpson com o número especificado de subintervalos.

15. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx;\ n = 4$

16. $\int_0^2 x^3\,dx;\ n = 8$

17. $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx;\ n = 10$

18. $\int_1^2 \ln x\,dx;\ n = 4$

19. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx;\ n = 4$

20. $\int_0^{0.6} e^{x^3}\,dx;\ n = 6$

Nos Problemas 21 a 26, determine quantos subintervalos são necessários para garantir uma precisão de 0,00005 na aproximação da integral dada (a) pela regra do trapézio e (b) pela regra de Simpson.

21. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

22. $\int_0^4 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx$

23. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

24. $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx$

25. $\int_{1,2}^{2,4} e^x\,dx$

26. $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

27. Um quarto de circunferência de raio 1 é descrito pela equação $y = \sqrt{1-x^2}$ para $0 \le x \le 1$ e tem uma área de $\pi/4$. Isso significa que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$. Use esta relação para estimar o valor de π aplicando:

a. A regra do trapézio

b. A regra de Simpson

Nos dois casos, utilize $n = 8$ subintervalos.

28. Use a regra do trapézio para estimar a área limitada pela curva $y = \sqrt{x^3+1}$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 1$.

29. Use a regra do trapézio com $n = 10$ para estimar o valor médio da função $f(x) = \frac{e^{-0,4x}}{x}$ no intervalo $1 \le x \le 6$.

30. Use a regra do trapézio com $n = 6$ para estimar o valor médio da função $y = \sqrt{\ln x}$ no intervalo $1 \le x \le 4$.

31. Use a regra do trapézio com $n = 7$ para estimar o volume do sólido gerado pela rotação da região sob a curva $y = x/(1+x)$ entre $x = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo x.

32. Use a regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o volume do sólido gerado pela rotação da região sob a curva $y = \ln x$ entre $x = 1$ e $x = 2$ em torno do eixo x.

33. **VALOR FUTURO DE UM INVESTIMENTO** Um investimento gera receita continuamente à taxa de $f(t) = \sqrt{t}$ milhares de reais por ano, onde t é o tempo em anos. Se a taxa anual de juros é 6% ao ano, capitalizados continuamente, use a regra do trapézio com $n = 5$ para estimar o valor futuro do investimento para um termo de 10 anos. (Veja Exemplo 5.5.2 da Seção 5.5.)

34. **VALOR ATUAL DE UMA FRANQUIA** A administração de uma rede nacional de lanchonetes está vendendo uma franquia de 5 anos para operar em Porto Alegre. A experiência com estabelecimentos semelhantes mostra que daqui a t anos a franquia deverá estar gerando lucro continuamente à taxa de $f(t) = 12.000\sqrt{t}$ reais por ano. Suponha que a taxa de juros permanecerá durante os próximos 5 anos em 5% ao ano capitalizados continuamente. Use a regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o valor atual da franquia.

35. **DISSEMINAÇÃO DE UMA DOENÇA** Uma epidemia causada por uma nova linhagem do vírus da gripe acaba de ser descoberta pelas autoridades sanitárias. No momento, 3.000 pessoas estão infectadas e o número de pessoas infectadas está aumentando à taxa de $R(t) = \sqrt{t}$ pessoas por dia. Além disso, a fração de pessoas infectadas que ainda estão doentes t semanas após o início dos sintomas é dada por $S(t) = e^{-0,01t}$. Use a regra de Simpson com $n = 8$ para estimar o número de pessoas que estarão doentes daqui a 8 semanas. [*Sugestão:* pense neste problema como um problema de sobrevivência e renovação, como o Exemplo 5.6.2 da Seção 5.6.]

36. **EXCEDENTE DO CONSUMIDOR** Um economista modela a demanda de um certo produto pela função

$$p = D(q) = \frac{100}{q^2 + q + 1}$$

onde q centenas de unidades são vendidas quando o preço unitário é p reais. Use a regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o excedente do consumidor quando o nível de produção é $q_0 = 5$. (Veja Exemplo 5.5.5 da Seção 5.5.)

37. **DISTÂNCIA E VELOCIDADE** Roberto e Marisa estão viajando de carro e o hodômetro enguiçou. Para determinar a distância percorrida entre as 14 e 15 h, Marisa anota as indicações do velocímetro a cada 5 minutos, que aparecem na tabela a seguir.

Minutos após as 14 h	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Leitura do velocímetro	45	48	37	39	55	60	60	55	50	67	58	45	49

Use a regra do trapézio para estimar a distância percorrida pelo carro no período em questão.

38. **TRATAMENTO PSIQUIÁTRICO** Um hospital psiquiátrico acaba de ser inaugurado. O hospital aceita inicialmente 300 pacientes para tratamento e pretende aceitar novos pacientes à taxa de 10 por mês. Seja $f(t)$ a fração de pacientes que recebem tratamento continuamente durante pelo menos t dias. Durante os primeiros 60 dias, os valores de $f(t)$ são os seguintes:

t (dias)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$f(x)$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$

Use estas informações e a regra do trapézio para estimar o número de pacientes internados após o período de 60 dias. [*Sugestão:* Pense neste problema como um problema de sobrevivência e renovação, como o Exemplo 5.6.1 da Seção 5.6.]

39. **VALOR FUTURO DE UM INVESTIMENTO** Marcos fez um pequeno investimento que produz um fluxo de receita variável. O dinheiro é depositado continuamente em uma conta que rende 4% de juros ao ano, capitalizados continuamente. Marcos verifica o fluxo de receita no dia primeiro do mês, a cada dois meses, durante um ano, obtendo os resultados que aparecem na tabela a seguir.

Mês	Jan	Mar	Mai	Jul	Set	Nov	Jan
Fluxo de receita	R$4737,00	R$357,00	R$615,00	R$510,00	R$415,00	R$550,00	R$593,00

Assim, por exemplo, o fluxo de receita foi de R$ 615,00 por mês no dia primeiro de maio, mas diminuiu para R$ 510,00 por mês no dia primeiro de julho. Use estas informações e a regra de Simpson para estimar o valor futuro do fluxo de receita durante este período de 1 ano. [*Sugestão:* Veja Exemplo 5.5.2 da Seção 5.5.]

40. **DÉBITO CARDÍACO** Quando medem o débito cardíaco (Exemplo 5.6.4 da Seção 5.6), os médicos, em geral, não dispõem de uma expressão $C(t)$ para a concentração de corante que atravessa o coração do paciente, mas utilizam dados discretos. Suponha que 5 mg de corante tenham sido injetados em uma veia perto do coração do paciente e as medidas executadas a cada

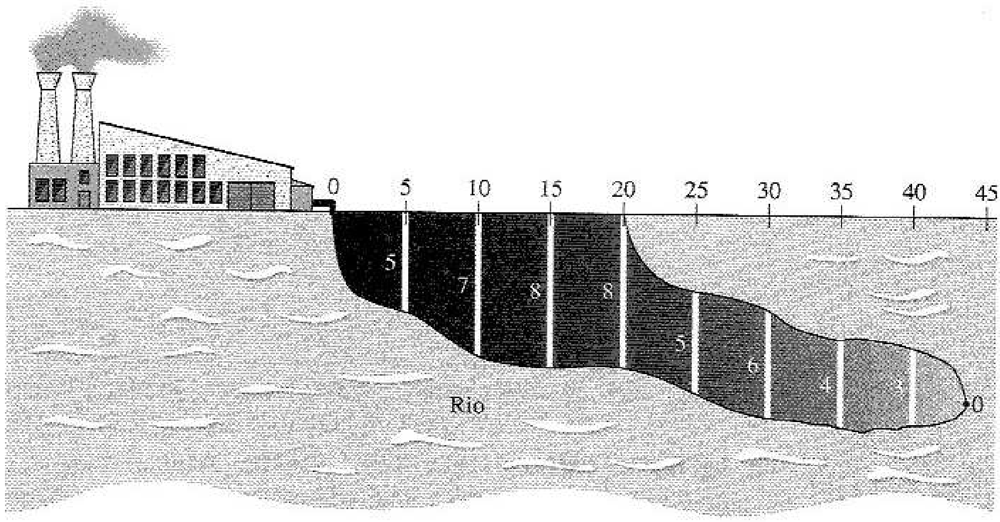
5 segundos durante um período de 30 segundos tenham fornecido os resultados que aparecem na tabela a seguir.

Tempo t(s)	0	5	10	15	20	25	30
Concentração $C(t)$ (mg/L)	0	10	36	35	15	12	8

a. Use a regra de Simpson para estimar a integral $\int_0^{30} C(t)\,dt$. Com base neste resultado, qual é o débito cardíaco do paciente?

b. Leia a respeito da circulação sangüínea e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito dos métodos matemáticos usados para medir o débito cardíaco em várias circunstâncias.*

41. CONTROLE DA POLUIÇÃO Uma fábrica despeja rejeitos em um rio. Os poluentes são levados pela correnteza e 3 horas depois apresentam a distribuição mostrada na figura. As medidas, em metros, são tomadas a intervalos de 5 metros. Use estas informações e a regra do trapézio para estimar a área da seção reta da região contaminada.



PROBLEMA 41

42. LUCRO MÉDIO No primeiro dia de cada mês, o gerente de uma pequena empresa estima a taxa com a qual o lucro deverá aumentar durante o mês. Os resultados para os 6 primeiros meses do ano aparecem na tabela a seguir, onde $P'(t)$ é a taxa de aumento do lucro em milhares de reais por mês durante o mês t ($t = 1$ para janeiro e $t = 6$ para junho). Use estas informações e a regra do trapézio para estimar o lucro total obtido pela empresa durante o período de 6 meses, de janeiro a junho.

t **(meses)**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Taxa de lucro $P'(t)$	0,65	0,43	0,72	0,81	1,02	0,97

43. EXCEDENTE DO PRODUTOR Um economista que está estudando a oferta de um certo produto obtém os dados da tabela a seguir, que expressam o número de unidades q do produto (em milhares) que são oferecidas ao mercado pelos produtores a um preço de p reais a unidade. Use estas informações e a regra do trapézio para estimar o excedente do produtor quando são oferecidas 7.000 unidades ($q_0 = 7$).

q (1.000 unidades)	0	1	2	3	4	5	6	7
p (reais por unidade)	1,21	3,19	3,97	5,31	6,72	8,16	9,54	11,03

*Um bom lugar para começar é o artigo "Measuring Cardiac Output", *UMAP Modules 1977: Tools for Teaching*, Lexington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1978.

44. EXCEDENTE DO CONSUMIDOR Um economista que está estudando a demanda de um certo produto obtém os dados da tabela a seguir, que expressam o número de unidades q do produto (em milhares) que são demandadas (vendidos) por um preço de p reais a unidade. Use estas informações e a regra de Simpson para estimar o excedente do consumidor quando são produzidas 24.000 unidades ($q_0 = 24$).

q (1.000 unidades)	0	4	8	12	16	20	24
p (reais por unidade)	49,12	42,90	31,32	19,83	13,87	10,58	7,25

45. DENSIDADE POPULACIONAL Um estudo demográfico determina que a densidade populacional em uma certa cidade a r quilômetros do centro é $D(r)$ habitantes por quilômetro quadrado, onde D tem os valores indicados na tabela a seguir para $0 \leq r \leq 10$ a intervalos de 2 quilômetros.

Distância r do centro da cidade (km)	0	2	4	6	8	10
Densidade populacional $D(r)$ (habitantes/km^2)	3.120	2.844	2.087	1.752	1.109	879

Use a regra do trapézio para estimar o número de pessoas que vivem a menos de 10 quilômetros do centro da cidade. (Veja Exemplo 5.6.5 da Seção 5.6.)

46. DISTRIBUIÇÃO DE RENDA Um sociólogo que estuda a distribuição de renda em um país industrializado compila os dados que aparecem na tabela a seguir, onde $L(x)$ é a fração da renda total anual recebida pelos $100x\%$ menos bem-remunerados assalariados do país. Use estas informações e a regra do trapézio para estimar o índice de Gini (IG) para este país, ou seja,

$$\text{IG} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

x	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$L(x)$	0	0,0063	0,0631	0,1418	0,2305	0,3342	0,4713	0,6758	1

47. MORTES PROVOCADAS PELA AIDS A tabela a seguir, que já apareceu no ensaio Para Pensar no Capítulo 3, mostra o número de mortes provocadas pela AIDS durante o ano t após 1990, para o período de 1990 a 2001. (*Fonte: Centers for Disease Control and Prevention, National Center for HIV, STD, and TB Prevention.*)

Ano	t	Mortes por AIDS	Ano	t	Mortes por AIDS
1990	0	31.120	1996	6	38.296
1991	1	36.175	1997	7	22.245
1992	2	40.587	1998	8	18.823
1993	3	45.850	1999	9	18.249
1994	4	50.842	2000	10	16.672
1995	5	51.670	2001	11	15.603

Entretanto, a tabela não reflete toda a realidade, já que muitas mortes provocadas pela AIDS não são comunicadas aos órgãos de saúde ou são atribuídas a outras causas. Seja $D(t)$ a função que expressa o número acumulado de mortes causadas pela AIDS até o ano t. Nesse caso, os dados da tabela podem ser interpretados como a taxa de variação de $D(t)$, ou seja, como a taxa de mortalidade. Assim, por exemplo, de acordo com tabela, em 1992 ($t = 2$), as mortes causadas pela AIDS estavam acontecendo à taxa de 40.587 por ano.

a. Supondo que a função $D(t)$ seja derivável, explique por que o número total N de mortes causadas pela AIDS no período de 1990-2001 é dado pela integral

$$N = \int_0^{11} D'(t)\,dt$$

b. Estime o valor de N usando os dados da tabela e a regra do trapézio para calcular o valor aproximado da integral do item (a).

c. Por que a função de mortalidade $D(t)$ provavelmente *não é* derivável? Este fato invalida a estimativa de N calculada no item (a)? Escreva um ensaio de pelo menos 10 linhas defendendo ou combatendo o método usado para estimar o valor de N neste problema.

48. CONFIABILIDADE DE UM PRODUTO O tempo de vida de um modelo de processador de alimentos é medido por uma variável aleatória X com uma densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}002xe^{-0{,}001x^2} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o tempo de vida (em meses) de um processador de alimentos escolhido ao acaso. (A probabilidade contínua foi discutida na Seção 6.3.)

a. Confirme que $f(x)$ é uma densidade de probabilidade mostrando que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

b. O valor esperado de X é dado pela integral imprópria

$$E(X) = \int_0^{+\infty} 0{,}002x^2e^{-0{,}001x^2}\,dx$$

que pode ser calculada apenas por métodos numéricos. Estime o valor de $E(X)$ aplicando a regra de Simpson com $n = 10$ à integral

$$\int_0^{100} 0{,}002x^2e^{-0{,}001x^2}\,dx$$

Com base no resultado, qual é o tempo de vida esperado para um processador de alimentos escolhido ao acaso?

c. O valor esperado correto é de aproximadamente 28 (meses). Discuta o que poderia ser feito para tornar mais preciso o resultado do item (b).

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

RESUMO DO CAPÍTULO

Integração por partes: (Seção 6.1)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Tabela de integrais: (Seção 6.1)

Expressões da forma $a + bu$ (Seção 6.1)

Expressões da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$ (Seção 6.1)

Expressões da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$ (Seção 6.1)

Expressões da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$ (Seção 6.1)

Expressões da forma e^{au} e $\ln u$ (Seção 6.1)

Fórmulas de redução (Seção 6.1)

Equação diferencial (Seção 6.2)

Solução geral (Seção 6.2)

Solução particular (Seção 6.2)

Equação diferencial separável: (Seção 6.2)

Se $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{h(x)}{g(y)}$, então, $\displaystyle\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx + C$

Modelo exponencial: $\dfrac{dQ}{dt} = kQ$ (Seção 6.2)

Modelo de aprendizado: $\dfrac{dQ}{dt} = k(B - Q)$ (Seção 6.2)

Modelo logístico: $\dfrac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$ (Seção 6.2)

Modelo de diluição (Seção 6.2)

Modelo de ajuste de preços de Evans (Seção 6.2)

Integrais impróprias

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^0 f(x)\,dx + \lim_{N\to+\infty}\int_0^N f(x)\,dx$$

Variável aleatória contínua (Seção 6.3)

Densidade de probabilidade: (Seção 6.3)

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Densidade de probabilidade uniforme: (Seção 6.3)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & \text{para } A \leq x \leq B \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

Densidade de probabilidade exponencial: (Seção 6.3)

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Valor esperado (valor médio): (Seção 6.3)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Regra do trapézio: (Seção 6.4)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Estimativa de erro: (Seção 6.4)

$$|E_n| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

onde M é o valor máximo de $|f''(x)|$ no intervalo $[a,b]$

Regra de Simpson: para n par, (Seção 6.4)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Estimativa de erro: (Seção 6.4)

$$|E_n| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

onde M é o valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ no intervalo $[a, b]$

Verificação do Capítulo 6

1. Use o método de integração por partes para calcular as integrais indefinidas e definidas.

a. $\int \sqrt{2x}\ln x^2\,dx$ **b.** $\int_0^1 xe^{0,2x}\,dx$

c. $\int_{-4}^{0} x\sqrt{1-2x}\,dx$ **d.** $\int \frac{x-1}{e^x}\,dx$

2. Em cada caso, calcule o valor da integral imprópria ou mostre que a integral diverge.

a. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1,1}}\,dx$ **b.** $\int_1^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$

c. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$ **d.** $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

3. Use a tabela de integrais da Seção 6.1 para calcular as integrais dadas.

a. $\int \left(\ln\sqrt{3x}\right)^2 dx$ **b.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

c. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ **d.** $\int \frac{dx}{3x^2-4x}$

4. Em cada caso, determine a solução particular da equação diferencial dada que satisfaz a condição especificada.

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^2 y}$ onde $y = 1$ para $x = -1$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+1}$ onde $y = -3$ para $x = 0$

c. $\frac{dy}{dx} = xe^{y-x}$ onde $y = 0$ para $x = 0$

5. CRESCIMENTO DE UM INVESTIMENTO Um investimento inicial de R$ 10.000,00 cresce a uma taxa de 5% do seu valor em qualquer instante t. Qual é o valor do investimento após 10 anos?

6. VALOR ATUAL DE UM BEM Estima-se que daqui a t anos um edifício de escritórios estará gerando lucro para o proprietário a uma taxa $R(t) = 50 + 3t$ milhares de reais por ano. Se o lucro é gerado por um tempo indefinido e a taxa de juros permanece constante em 6% ao ano, qual é o valor atual do edifício?

7. CONFIABILIDADE DE UM PRODUTO A vida útil de um certo modelo de forno de microondas é dada por uma variável aleatória X com uma densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}03e^{-0{,}03x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o tempo de uso do forno em meses.

a. Qual é a probabilidade de que um forno escolhido ao acaso dure mais de um ano?

b. Qual é a probabilidade de que um forno escolhido ao acaso dure entre 3 e 6 meses?

c. Qual é o valor esperado do tempo de vida de um forno?

8. CONCENTRAÇÃO DE UM MEDICAMENTO Um paciente em um hospital recebe 0,7 mg por hora de um certo medicamento por via intravenosa. Sua eliminação dá-se exponencialmente de tal forma que a fração do medicamento que permanece no sangue do paciente após t horas é $f(t) = e^{-0,2t}$. Se o tratamento prossegue indefinidamente, quantas unidades permanecem no sangue do paciente a longo prazo (para $t \to +\infty$)?

9. DECAIMENTO DE UMA PROTEÍNA Um pesquisador determina que uma amostra de proteína de massa $m(t)$ (em gramas) no instante t se decompõe em aminoácidos a uma taxa conjuntamente proporcional a $m(t)$ e t. Os experimentos mostram que metade da amostra se desintegra em 12 horas.

a. Escreva e resolva uma equação diferencial para $m(t)$.

b. Que fração de uma amostra permanece intacta após 9 horas?

10. Use a regra do trapézio com $n = 8$ para estimar o valor da integral

$$\int_3^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx$$

Em seguida, use a tabela de integrais da Seção 6.1 para determinar o valor exato da integral e compare com o valor estimado.

RESUMO DO CAPÍTULO

Problemas de Revisão

Nos Problemas 1 a 10, use o método da integração por partes para determinar a integral dada.

1. $\int te^{1-t}\,dt$

2. $\int (5+3x)e^{-x/2}\,dx$

3. $\int x\sqrt{2x+3}\,dx$

4. $\int_{-9}^{-1} \frac{y\,dy}{\sqrt{4-5y}}$

5. $\int_1^4 \frac{\ln\sqrt{s}}{\sqrt{s}}\,ds$

6. $\int (\ln x)^2\,dx$

7. $\int_{-2}^{1} (2x+1)(x+3)^{3/2}\,dx$

8. $\int \frac{w^3}{\sqrt{1+w^2}}\,dw$

9. $\int x^3\sqrt{3x^2+2}\,dx$

10. $\int_0^1 \frac{x+2}{e^{3x}}\,dx$

Nos Problemas 11 a 16, use a tabela de integrais da Seção 6.1 para determinar a integral dada.

11. $\int \frac{5\,dx}{8-2x^2}$

12. $\int \frac{2\,dt}{\sqrt{9t^2+16}}$

13. $\int w^2 e^{-w/3}\,dw$

14. $\int \frac{4\,dx}{x(9+5x)}$

15. $\int (\ln 2x)^3\,dx$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$

Nos Problemas 17 a 26, calcule o valor da integral imprópria ou mostre que a integral diverge.

17. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx$

18. $\int_0^{+\infty} (1+2x)^{-3/2}\,dx$

19. $\int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^2+1}\,dt$

20. $\int_0^{+\infty} 3e^{-5x}\,dx$

21. $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$

22. $\int_0^{+\infty} 2x^2e^{-x^3}\,dx$

23. $\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}\,dx$

24. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt$

25. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

26. $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x+2}\,dx$

Nos Problemas 27 a 30, determine a solução geral da equação diferencial dada.

27. $\frac{dy}{dx} = x^3 - 3x^2 + 5$

28. $\frac{dy}{dx} = 0{,}02xy$

29. $\frac{dy}{dx} = k(80 - y)$

30. $\frac{dy}{dx} = e^{2x-y}$ [*Sugestão:* $e^{2x-y} = e^{2x}/e^{y}$.]

Nos Problemas 31 a 34, determine a solução particular da equação diferencial dada que satisfaz a condição especificada.

31. $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 - 2$; $y = 4$ para $x = 1$

32. $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{y}$; $y = 100$ para $x = 1$

33. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$; $y = 2$ para $x = 0$

34. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$; $y = 5$ e $\frac{dy}{dx} = 3$ para $x = 0$

Nos Problemas 35 a 38, integre a densidade de probabilidade dada para calcular a probabilidade pedida.

35. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{para } 1 \le x \le 4 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

a. $P(1 \le X \le 4)$

b. $P(2 \le X \le 3)$

c. $P(X \le 2)$

36. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{9}(3 - x) & \text{para } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$

a. $P(0 \le X \le 3)$

b. $P(1 \le X \le 2)$

37. $f(x) = \begin{cases} 0{,}2e^{-0{,}2x} & \text{para } x \ge 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

a. $P(X \ge 0)$

b. $P(1 \le X \le 4)$

c. $P(X \ge 5)$

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{(x+5)^2} & \text{para } x \ge 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

a. $P(X > 0)$

b. $P(1 \le X \le 9)$

c. $P(X \ge 3)$

39. DEPRECIAÇÃO O valor de revenda de uma certa máquina industrial diminui a uma taxa proporcional à diferença entre o valor atual e o valor como sucata, que é de R$ 5.000,00. A máquina valia R$ 40.000,00 quando nova e R$ 30.000,00 4 anos depois. Quanto valerá quanto tiver 8 anos de idade?

40. PRODUÇÃO Depois de t horas de trabalho, um operário produz $100te^{-0{,}5t}$ unidades por hora. Quantas unidades um operário que chega ao trabalho às 8 h produz entre 10 h e meio-dia?

41. DILUIÇÃO Um tanque contém inicialmente 200 litros de salmoura com 3 quilogramas de sal por litro. Água doce é injetada no tanque com uma vazão de 4 litros por minuto, enquanto a mistura, mantida homogênea, é drenada do tanque com a mesma vazão. Qual é a quantidade de sal no tanque após 100 minutos?

42. CRESCIMENTO POPULACIONAL A taxa com a qual a população de um certo país está aumentando é conjuntamente proporcional ao limite superior de 10 milhões de habitantes imposto por fatores ambientais e à diferença entre o limite superior e o tamanho da população. Expresse a população do país (em milhões de habitantes) em função do tempo (em anos após 1995) se a população em 1995 era de 4 milhões de habitantes e no ano 2000 de 4,74 milhões de habitantes.

43. RENOVAÇÃO DE PAPEL-MOEDA Um certo país tem 5 bilhões de unidades da moeda local em papel-moeda. Todo dia, cerca de 18 milhões de unidades são depositados nos bancos e a mesma quantia é sacada. Suponha que o país decida que, toda vez que a partir de um certo dia, todas as notas depositadas nos bancos sejam destruídas e substituídas por notas novas. Quanto tempo será necessário para renovar 90% do papel-moeda em circulação? [*Sugestão:* pense nesta situação como um problema de diluição como o do Exemplo 6.2.9 da Seção 6.2.]

44. LEI DE PARETO De acordo com a **lei de Pareto** da economia, a taxa de variação (de aumento) do número de pessoas P em uma economia estável que têm uma renda de pelo menos x reais é diretamente proporcional ao número dessas pessoas e inversamente proporcional à sua renda. Expresse esta lei como uma equação diferencial e resolva a equação para obter a função $P(x)$.

45. DEMOGRAFIA (SOBREVIVÊNCIA/RENOVAÇÃO) Estudos demográficos realizados em uma certa cidade mostram que a fração dos residentes que permanecem na cidade durante pelo menos t anos é $f(t) = e^{-t/20}$. A cidade tem atualmente 100.000 habitantes e estima-se que daqui a t anos a cidade receberá novos moradores à taxa de $100t$ pessoas por ano. Se esta estimativa estiver correta, o que acontecerá com a população da cidade a longo prazo?

46. DURAÇÃO DE TELEFONEMAS A duração dos telefonemas em uma certa cidade é medida por uma variável aleatória X com uma densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} & \text{para } x \ge 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é a duração (em minutos) de uma chamada escolhida ao acaso.

a. Qual é a probabilidade de que uma chamada escolhida ao acaso dure entre 2 e 3 minutos?

b. Que porcentagem das chamadas dura 2 minutos ou menos? [*Sugestão:* Pense nesta porcentagem como uma probabilidade.]

c. Que porcentagem das chamadas dura mais de 2 minutos?

d. Quanto tempo deve durar uma chamada escolhida ao acaso?

47. HORÁRIOS DE CINEMA Um filme de 2 horas está sendo exibido em sessões contínuas em um cinema de bairro. Uma pessoa sai de casa sem consultar o horário do cinema. Use uma densidade de probabilidade apropriada para calcular a probabilidade de que a pessoa chegue ao cinema menos de dez minutos antes ou depois do início do filme.

48. NÚMERO DE ASSINANTES A editora de uma revista de grande circulação verificou que a fração de assinantes que continuam a assinar a revista durante pelo menos t anos é $f(t) = e^{-t/10}$. No momento, a revista tem 20.000 assinantes e estima-se que novas assinaturas serão vendidas à taxa de 1.000 assinaturas por ano. Quantos assinantes terá a revista a longo prazo?

49. VALOR ATUAL DE UM INVESTIMENTO Estima-se que daqui a t anos um certo investimento estará gerando receita à taxa $f(t) = 8.000 + 400t$ reais por mês. Se a receita é gerada por um tempo indefinido e a taxa de juros permanece constante em 5% ao ano capitalizados continuamente, determine o valor atual do investimento.

50. GARANTIA O tempo de vida X de um certo aparelho eletrodoméstico tem uma distribuição exponencial, com uma densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}08\,e^{-0{,}08x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o tempo em meses. O fabricante oferece uma garantia de 1 ano. Se uma pessoa compra um aparelho escolhido ao acaso, determine a probabilidade de que a garantia expire antes que o aparelho apresente defeito.

51. HORA DO LANCHE Uma padaria produz uma nova fornada de biscoitos de chocolate a cada 45 minutos. Uma pessoa chega à padaria (em um momento escolhido ao acaso) para comprar biscoitos. Use uma densidade de probabilidade apropriada para calcular a probabilidade de que a pessoa chegue à padaria menos de 5 minutos antes ou depois de sair uma fornada.

52. ENGENHARIA DE TRÂNSITO O tempo entre as chegadas sucessivas de dois automóveis a uma cabina de pedágio é dado por uma variável aleatória X com uma distribuição exponencial da forma

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5e^{-0{,}5x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

onde x é o tempo em minutos. Determine a probabilidade de que um par de automóveis escolhidos ao acaso chegue à cabina com uma diferença de pelo menos 6 minutos.

53. TESTE PSICOLÓGICO Em um experimento de psicologia, observa-se que a fração de participantes que leva mais de t minutos para executar uma certa tarefa é dada por

$$\int_t^{+\infty} 0{,}07e^{-0{,}07u}\,du$$

a. Determine a fração de participantes que leva mais de 5 minutos para executar a tarefa.

b. Determine a fração de participantes que leva entre 10 e 15 minutos para executar a tarefa.

54. VARIAÇÃO DE PREÇOS O preço $p(t)$ de uma certa mercadoria varia de tal forma que a taxa de variação com o tempo é proporcional à escassez $D - S$, onde $D(p)$ e $S(p)$ são as funções de demanda e de oferta da mercadoria, respectivamente. Isto significa que

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S)$$

Determine $p(t)$ para o caso em que $D(p) = 40 - 3p$ e $S(p) = 5 + 4p$, se o preço é de R\$ 4,00 para $t = 0$ e de R\$ 3,00 para $t = 5$.

55. VARIAÇÃO DE OFERTA E DEMANDA A oferta $S(t)$ e a demanda $D(t)$ de uma certa mercadoria variam com o tempo t (em meses) de forma tal que

$$\frac{dD}{dt} = -kD \quad \text{e} \quad \frac{dS}{dt} = 2kS$$

onde $k > 0$ é uma constante. Sabe-se que $D(0) = 50$ unidades e $S(0) = 5$ unidades e que o equilíbrio é atingido para $t = 10$ meses, ou seja, que $D(10) = S(10)$.

a. Use estas informações para determinar o valor de k.

b. Determine $D(t)$ e $S(t)$.

c. Quantas unidades são fornecidas e demandadas quando o equilíbrio é atingido?

56. LEI DE FICK Quando uma célula é colocada em um líquido que contém um soluto, o soluto atravessa a parede celular por difusão. Em conseqüência, a concentração do soluto no interior da célula varia, aumentando se a concentração do soluto do lado de fora da célula é maior que a concentração do lado de dentro e diminuindo se a concentração do lado de fora da célula é menor que a concentração do lado de dentro. Quando aplicada à biologia, a lei de Fick diz que a concentração do soluto no interior da célula varia a uma taxa que é conjuntamente proporcional à área da parede celular e à diferença entre as concentrações do lado de dentro e do lado de fora da célula. Supondo que a concentração do soluto do lado de fora da célula seja constante e maior que a concentração do lado de dentro, escreva uma expressão para a concentração do soluto do lado de dentro da célula.

57. TAXAS DE NATALIDADE E MORTALIDADE DE UMA POPULAÇÃO Seja $P(t)$ o número de indivíduos em uma população no instante t e, para a mesma população, sejam $N(t)$ e $M(t)$ o número de nascimentos e mortes no instante t, respectivamente. Nesse caso, a taxa de aumento da população é $P'(t) = N'(t) - M'(t)$, onde $N'(t)$ e $M'(t)$ são, respectivamente, a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

a. Suponha que $N'(t) = bP(t)$ e $M'(t) = aP(t)$, onde b e a são constantes positivas. Escreva e resolva uma equação diferencial para $P(t)$. Expresse a solução em termos de b, a e a população inicial $P_0 = P(0)$.

b. Um modelo de população usada para os países emergentes supõe que $N'(t) - M'(t) = kP^{1+1/c}$, onde k e c são constantes positivas. Escreva e resolva uma equação diferencial para $P(t)$, com base nesta hipótese. Expresse a solução em termos de k, c e $P_0 = P(0)$.

c. Suponha que $k = 0{,}02$ e $c = 3$ para uma certa população que possa ser descrita pelo modelo do item (b). Se $P_0 = 1.000$ e t está em anos, qual é a população após 5 anos?

58. DEMOGRAFIA **A função de Gompertz** é usada pelos demógrafos para prever populações. Seja P_0 a população inicial de uma região (um país, o mundo etc.) e seja β a taxa de crescimento da população. Nesse caso, a função de Gompertz $P(t)$ representa a população no instante t e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = P(\ln P_0)(\ln \beta)\beta^t$$

Resolva esta equação para obter a função $P(t)$. Suponha que P_0 e β sejam constantes positivas.

59. REJEITOS NUCLEARES Após t anos de funcionamento, uma certa usina nuclear produz rejeitos radioativos à taxa de $R(t)$ quilogramas por ano, onde

$$R(t) = 300 - 200e^{-0{,}03t}$$

Os rejeitos, que são armazenados no local, decaem espontaneamente à taxa de 2% ao ano. Qual será a quantidade de rejeitos radioativos presentes na usina a longo prazo?

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA *Nos Problemas 60 a 63, calcule o valor aproximado da integral dada e estime o erro para o número especificado de subintervalos usando*

(a) A regra do trapézio

(b) A regra de Simpson

60. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx;\ n = 10$ **61.** $\int_0^2 e^{x^2}dx;\ n = 8$

62. $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx;\ n = 10$ **63.** $\int_1^2 xe^{1/x}\,dx;\ n = 8$

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA *Nos Problemas 64 e 65, determine o número de subintervalos necessários para garantir uma precisão de 0,00005 do valor exato da integral dada usando*

(a) A regra do trapézio

(b) A regra de Simpson

64. $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx$ **65.** $\int_{0.5}^1 e^{-1.1x}\,dx$

66. CUSTO TOTAL A PARTIR DO CUSTO MARGINAL Um fabricante observa que o curso marginal para produzir q unidades de uma certa mercadoria é $C'(q) = \sqrt{qe^{0.01q}}$ reais por unidade.

a. Expresse o custo total para produzir as primeiras 8 unidades como uma integral definida.

b. Estime o valor da integral do item (a) usando a regra do trapézio com $n = 8$ subintervalos.

67. RECEITA A PARTIR DA DEMANDA Um economista que está estudando a demanda de uma certa mercadoria obtém dos dados da tabela a seguir, que mostra o número q de unidades da mercadoria (em milhares) que serão demandadas (vendidas) a um preço de p reais a unidade.

q (1.000 unidades)	0	4	8	12	16	20	24
p (R$/unidade)	49,12	42,90	31,32	19,83	13,87	10,58	7,25

Use estas informações e a regra de Simpson para estimar a receita total

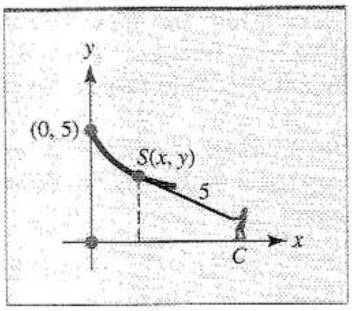
$$R = \int_0^{24} qp(q)\,dq \quad \text{milhares de reais}$$

obtida quando o nível de produção aumenta de 0 para 24.000 unidades (de $q = 0$ para $q = 24$).

68. Uma criança, de pé na origem do sistema de coordenadas, segura uma corda de 5 metros de comprimento que está amarrada a um trenó. A criança caminha ao longo do eixo x mantendo a corda esticada, como mostra a figura a seguir (as distâncias estão em metros).

Se o trenó parte do ponto (0, 5) e está em $S(x, y)$ quando a criança está em C, é possível mostrar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{25 - y^2}}$$



a. Determine a equação da trajetória seguida pelo trenó. (Esta curva é chamada de **tratriz**.) [*Sugestão:* Use uma das fórmulas da tabela de integrais da Seção 6.1.]

b. Plote a curva em uma calculadora gráfica e use **ZOOM** e **TRACE** ou outro recurso da calculadora para determinar o ponto da curva que está a exatamente 3 metros do eixo y.

69. Use uma calculadora para plotar as curvas $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ e $y = \ln x$ no mesmo gráfico. Em seguida, use **ZOOM** e **TRACE** ou outro recurso da calculadora para determinar os pontos de interseção das duas curvas e determine a área da região limitada pelas curvas.

70. Repita o Problema 69 para as curvas

$$y = \frac{x-2}{x+1} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{25 - x^2}$$

Se a sua calculadora dispõe de uma rotina de integração numérica, use-a para determinar os valores das integrais dos Problemas 71 e 72. Em cada caso, verifique se o resultado está correto usando uma das fórmulas das tabela de integrais da Seção 6.1.

71. $\int_{-1}^1 \frac{2 + 3x}{9 - x^2}\,dx$

72. $\int_0^1 x^2\sqrt{9 + 4x^2}\,dx$

73. Use a rotina de integração numérica de uma calculadora para determinar o valor de

$$I(N) = \int_0^N \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\,dx$$

para $N = 1$, 10 e 50. Com base nestes resultados, você acha que a integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\,dx$$

converge? Se a resposta for afirmativa, para que valor?

74. Use a rotina de integração numérica de uma calculadora para determinar o valor de

$$I(N) = \int_1^N \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$$

para $N = 10$, 100, 1.000 e 10.000. Com base nestes resultados, você acha que a integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$$

converge? Se a resposta for afirmativa, para que valor?

75. ELIMINAÇÃO DE REJEITOS TÓXICOS Para estudar a degradação de certos rejeitos tóxicos, os pesquisadores às vezes usam a equação de Haldane

$$\frac{dS}{dt} = \frac{aS}{b + cS + S^2}$$

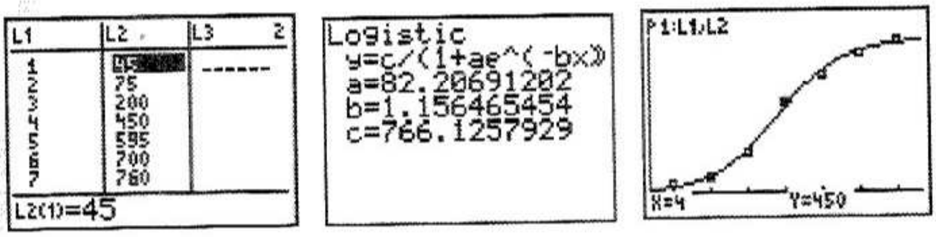
onde a, b e c são constantes positivas e $S(t)$ é a concentração do substrato (substância sobre a qual agem as bactérias contidas nos rejeitos).* Determine a solução geral da equação de Haldane. Expresse a resposta em forma implícita (como uma equação envolvendo S e t).

*Michael D. LaGrega, Philip L. Buckingham, and Jeffrey C. Evans, *Hazardous Waste Management*, New York: McGraw-Hill, 1994, p. 578.

ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

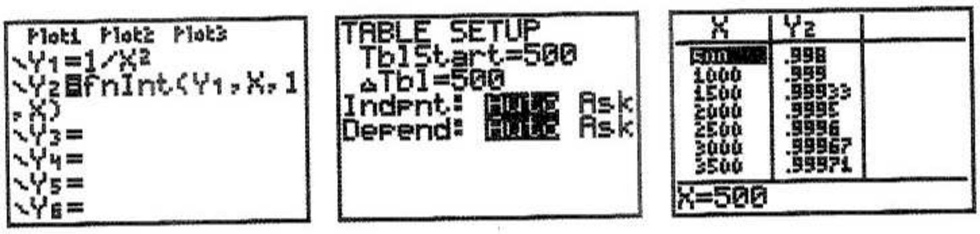
Solução do Exercício EXPLORE! 3

Entre com os dados no editor **STAT**, como mostra a tela da esquerda. No menu **CALC**, escolha a opção **B:Logistic** e escreva o comando **Logistic L1,L2,Y1** para obter os parâmetros da equação logística, que aparecem na tela do meio. Os pontos dos dados e a curva da equação logística podem ser mostrados usando o comando **STAT PLOT** (tela da direita). Depois de um longo tempo (para um valor relativamente grande de x), o denominador da equação logística se torna praticamente igual a 1, o que significa que o número de pessoas infectadas tende a se estabilizar em $y \approx 766$, o que corresponde ao número de pessoas suscetíveis. Em que instante o número de pessoas infectadas é igual à metade do número de pessoas suscetíveis?



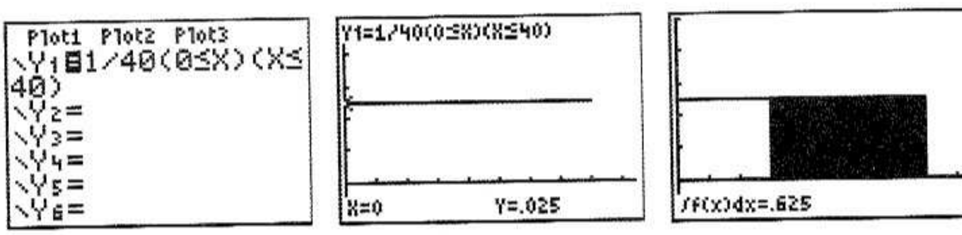
Solução do Exercício EXPLORE! 5

Leia o Exemplo 6.3.1. Entre com $f(x) = 1/x^2$ em Y1 do editor de equações e entre com Y2 = **fnInt**(Y1, X, 1, X, 0.001), usando a rotina de integração numérica, encontrada no menu da tecla **MATH, 9:fnInt(**. Desative Y1 para mostrar apenas os valores de Y2. Programe a tabela para começar em X = 500 em incrementos de 500, como mostra a tela do meio. A tabela da direita mostra a área sob a curva $f(x) = 1/x^2$ de $x = 1$ até o valor especificado de X. Parece que a integral converge lentamente para 1. A calculadora pode levar alguns segundos para mostrar os valores de Y2.



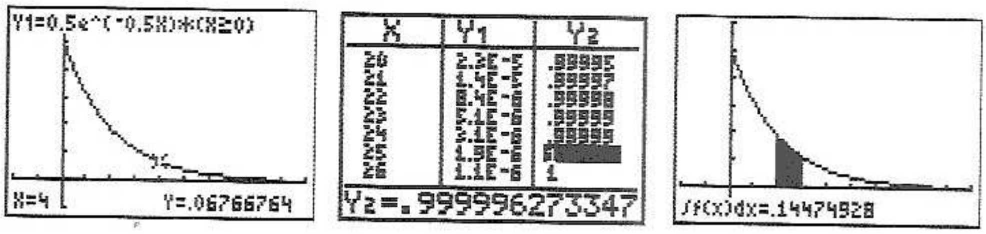
Solução do Exercício EXPLORE! 7

Entre com $f(x)$ do Exemplo 6.3.6 em Y1 (tela da esquerda) e plote a função usando uma janela [0, 47]5 por [−0.01, 0.05]0.01. A área desta densidade de probabilidade uniforme entre $x = 15$ e $x = 40$ é 0,625 = 5/8, como mostra a tela da direita.



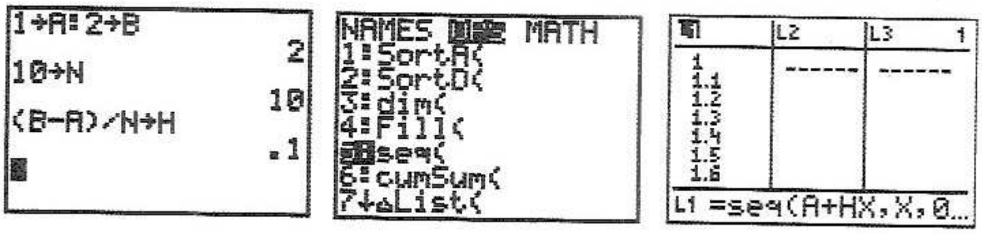
Solução do Exercício EXPLORE! 8

Entre com a função do Exemplo 6.3.7, Y1 = 0,5e^(−0,5X)*)(X ≥ 0) e plote a função usando uma janela [−2, 10]1 por [−0,1, 0,6]0,1 (tela da esquerda). Entre com Y2 = **fnInt(Y1, X, 0, X)** e observe a tabela de valores de Y2 para os valores dados de X, começando em $X = 20$ com incrementos de 1 (tela do meio). Observe que a densidade de probabilidade cumulativa Y2 atinge o valor 1 para $X = 25$, com uma precisão de 10^{-5}. A rotina de integração numérica pode ser usada para confirmar que $P(2 \leq X \leq 3) \approx 0{,}1447$ (tela da direita).

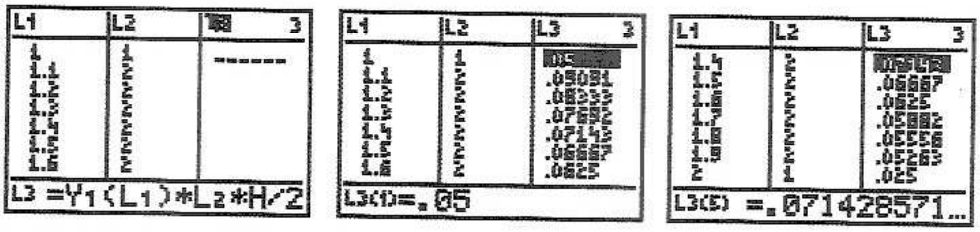


Solução do Exercício EXPLORE! 9

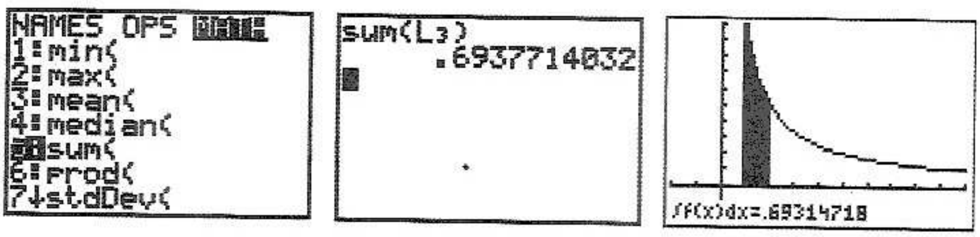
A rotina para gerar listas da calculadora pode ser usada para facilitar os cálculos necessários para aplicar a regra do trapézio aos problemas de integração numérica. No Exemplo 6.4.1, temos $f(x) = 1/x$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 10$. Faça Y1 = 1/x. Em uma tela inicial limpa, entre com 1 em A, 2 em B e 10 em N e defina (B − A)/N como H. Uma forma rápida de gerar os números 1,0; 1,1;...; 1,9; 2,0 em L1 (ao qual se tem acesso através de **STAT, EDIT, 1:Edit**) é escrever **L1 5 seq(A + HX, X, 0, N)**, onde o comando de seqüência pode ser encontrado em LIST (**2nd STAT**), **OPS, 5:seq(**.



Agora entre com os coeficientes da regra do trapézio 1, 2,...2, 1 em L2. Escreva **L3 = Y1(L1)*L2*H/2**, lembrando-se de que é preciso colocar o cursor sobre a linha do cabeçalho de L3 para escrever o comando desejado. As telas do meio e da direita mostram todos os dados.



Finalmente, a soma da lista L3 fornece a aproximação desejada para $f(x) = 1/x$ no intervalo [1, 2], com $n = 10$, usando a regra do trapézio. O comando de soma pode ser encontrado em **LIST** (**2nd STAT**), **MATH, 5:sum(**, como mostra a tela da esquerda. A resposta coincide com a do Exemplo 6.4.1 e é uma boa aproximação da resposta obtida resolvendo diretamente a integral.



Usando os mesmos passos descritos neste exercício, é possível escrever um programa para calcular a integral de qualquer função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$, com n subintervalos. Para praticar, refaça o cálculo com $n = 20$.

PARA PENSAR

MODELANDO UMA EPIDEMIA

Uma doença que surge rapidamente num lugar e acomete um grande número de pessoas é chamada de *epidemia* (do grego *epi*, "sobre" e *demos*, "pessoas"). A matemática desempenha um papel importante no estudo das epidemias, uma disciplina conhecida como *epidemiologia*. Foram formulados modelos matemáticos para a gripe, a peste bubônica, a AIDS, a varíola, a gonorréia e outras doenças. Fazendo algumas hipóteses simplificadoras, podemos construir um modelo baseado em equações diferenciais, conhecido como modelo **S-I-R**, que ajuda a prever o curso de uma epidemia. Nosso modelo inicial será muito simples, com hipóteses simplificadoras em número suficiente para que a matemática envolvida seja acessível. Mais tarde, vamos discutir estas hipóteses e tentar torná-las mais realistas.

Para formular nosso modelo, vamos considerar uma epidemia que afete uma população de N pessoas, onde cada uma das quais se enquadra em um e apenas um dos seguintes grupos no instante t:

Suscetíveis, $S(t)$, são as pessoas que ainda não ficaram doentes, mas poderão ficar doentes no futuro. Quando uma pessoa suscetível fica doente, supomos que isto acontece de forma instantânea.

Infectados, $I(t)$, são as pessoas que estão doentes e podem infectar outras pessoas. Os portadores não são mantidos em quarentena e continuam a interagir normalmente com outras pessoas.

Removidos, $R(t)$, são as pessoas que não podem infectar outras pessoas. Em particular, as pessoas que já tiveram a doença e se curaram não podem ser infectadas novamente nem infeccionar outras pessoas.

Vamos supor que a população permanece constante (não há viagens, nascimentos ou mortes) e que no instante $t = 0$ existem alguns suscetíveis e alguns infectados, mas não existem removidos. Assim,

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \qquad \text{para qualquer } t \geq 0$$

onde

$$S(0) > 0 \qquad I(0) > 0 \qquad R(0) = 0$$

de modo que $S(0) + I(0) = N$.

O segredo para modelar uma epidemia ou qualquer outra situação dinâmica está nas hipóteses a respeito das taxas de variação. Em nosso modelo, supomos que a taxa com a qual pessoas suscetíveis estão sendo infectadas em qualquer instante seja proporcional ao número de contatos entre suscetíveis e infectados, ou seja, ao produto SI. Assim, o número de pessoas suscetíveis $S(t)$ está sempre *diminuindo* (já que algumas dessas pessoas são infectadas) a uma taxa dada por

$$(1) \qquad \frac{dS}{dt} = -aSI$$

Supomos também que a taxa com a qual as pessoas são removidas da população infectada seja proporcional ao número de pessoas infectadas, ou seja,

$$(2) \qquad \frac{dR}{dt} = bI$$

onde $b > 0$ é uma constante. Finalmente, supomos que a taxa com a qual o número de pessoas infectadas varia seja igual à taxa com a qual as pessoas suscetíveis ficam infectadas menos a taxa com a qual as pessoas infectadas são removidas da população de infectados. Isto significa que

$$(3) \qquad \frac{dI}{dt} = aSI - bI = aI(S - b/a) = aI(S - c)$$

onde $c = b/a$. [No Exercício 1, o leitor terá que calcular esta última taxa derivando ambos os membros da equação $I(t) = N - S(t) - R(t)$ em relação a t e substituindo as taxas nas equações (1) e (2).]

O modelo S-I-R é constituído pelo sistema de três equações diferenciais que acabamos de montar, quais sejam:

$$\frac{dS}{dt} = -aSI \qquad \frac{dR}{dt} = bI \qquad \frac{dI}{dt} = aI(S - c)$$

onde $S(t) + I(t) + R(t) = N$ para qualquer valor de t, com $R(0) = 0$ e $S(0) > 0$, $I(0) > 0$. Embora não seja possível resolver analiticamente este sistema para obter expressões simples para as funções $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, podemos usar estas equações diferenciais para compreender melhor a evolução da epidemia. Ilustramos este fato aplicando o modelo S-I-R a um caso histórico, uma epidemia de peste bubônica ocorrida em Eyam, uma aldeia perto de Sheffield, na Inglaterra, de 1665 a 1666. Esta análise é possível porque a aldeia entrou em quarentena durante a epidemia e guardou registros suficientemente detalhados. Vamos usar estes registros para estimar o valor das constantes a e b nas equações (1) e (2).

Em primeiro lugar, observe que a constante b da equação (2) pode ser interpretada como a taxa com a qual as pessoas são removidas da população de infectados. O período infeccioso da peste bubônica em Eyam foi de 11 dias ou 0,367 mês. Assim, medindo o tempo t em meses e supondo, para simplificar os cálculos, que as pessoas infectadas são removidas da população a uma taxa constante, o valor de b é dado aproximadamente pela razão

$$b = \frac{1}{0{,}367} \approx 2{,}72$$

Os registros mantidos durante a epidemia mostram também que em 19 de julho de 1666 havia 201 suscetíveis e 22 infectados, enquanto em 19 de agosto de 1666 havia 121 suscetíveis e 21 infectados. Assim, o número de suscetíveis variou de $121 - 201 = -80$ neste período de um mês. Esta variação pode ser usada para estimar o valor de $\frac{dS}{dt}$ no início do período. Em 19 de julho de 1666,

$$S = 201 \qquad I = 22 \qquad \text{e} \qquad \frac{dS}{dt} \approx -80$$

Substituindo na equação (1) e explicitando a constante a, obtemos:

$$a = \frac{-dS/dt}{SI} \approx \frac{-(-80)}{(201)(22)} \approx 0{,}018$$

O modelo resultante, com os valores de a e b que acabamos de obter, reproduz muito bem os resultados experimentais. A Figura 1 mostra os valores previstos pelo modelo e os dados reais. [Estas informações foram adaptadas de Raggett (1982) e de uma discussão em Brauer e Castillo-Chávez (2001).]

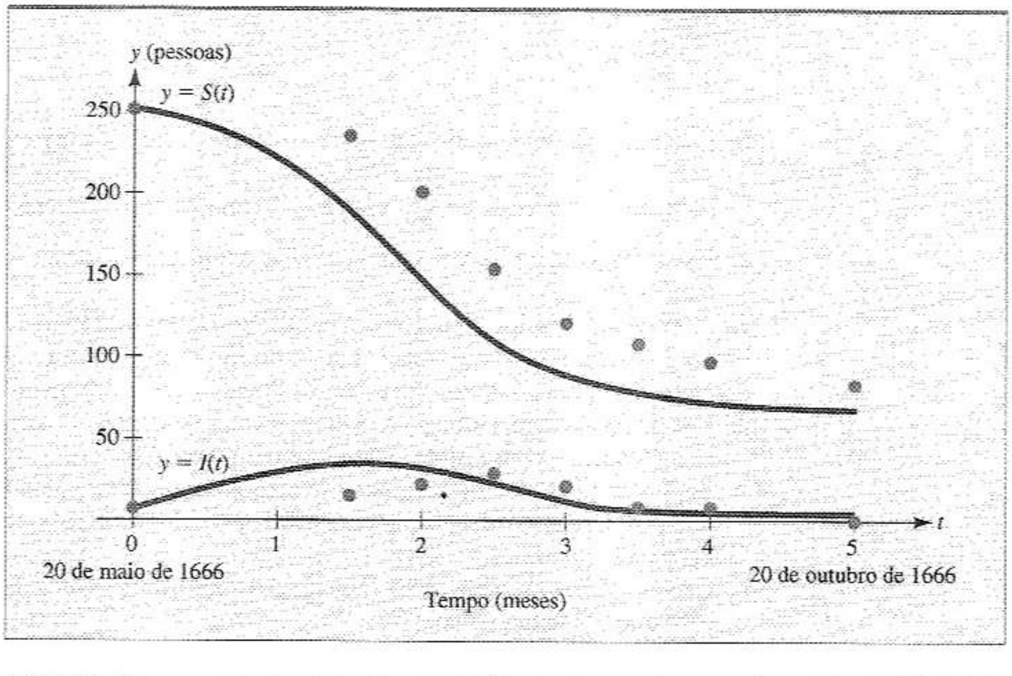


FIGURA 1 Comparação dos dados da peste de Eyam com os valores previstos pelo modelo S-I-R.

O modelo S-I-R pode ser usado para fazer algumas previsões de caráter geral a respeito do curso das epidemias. Assim, por exemplo, a menos que o número de infectados aumente inicialmente, a epidemia jamais acontecerá (pois o número de casos jamais se tornará maior que o número inicial). Na linguagem do cálculo, uma epidemia acontece apenas se $\frac{dI}{dt} > 0$ para $t = 0$. Examinando a equação (3) do modelo S-I-R, vemos que isto acontece apenas se $S(0) > c$. Por esta razão, c é chamado de *número mínimo de suscetíveis*. Quando o número inicial de suscetíveis é maior que c, a epidemia se espalha; quando isto não acontece, o número de pessoas infectadas tende a zero. Os registros da epidemia de peste bubônica de 1666 em Eyam mostram que havia inicialmente $S(0) = 254$ suscetíveis. Usando nossas estimativas de $a \approx 0{,}018$ e $b \approx 2{,}72$, o número limite de suscetíveis neste caso é

$$c = \frac{b}{a} = \frac{2{,}72}{0{,}018} \approx 151$$

Como $S(0) = 254 > 151$, o modelo prevê que a epidemia se disseminará, o que é exatamente o que aconteceu na vida real.

Provavelmente o leitor notou que quando construímos nosso modelo S-I-R e o aplicamos à epidemia de Eyam, fizemos várias hipóteses simplificadoras, como a de que $S(t) + I(t) + R(t)$ é constante. Será realista supor que o tamanho de uma população sujeita a uma epidemia permanece constante? Será realista supor que as pessoas infectadas podem imediatamente infectar outras pessoas? Certamente que não, já que praticamente todas as doenças têm um tempo de incubação, mas a inclusão de um tempo de retardo para levar em conta o período de incubação tornaria o modelo matemático resultante complicado demais para ser analisado com as ferramentas matemáticas usuais. Este fato ilustra um dilema que todas as pessoas que recorrem à modelagem matemática têm que enfrentar: *um modelo perfeitamente realista é muitas vezes difícil ou impossível de analisar, enquanto o uso de hipóteses simplificadoras pode levar a resultados que não são muito realistas.* O modelo S-I-R realmente se baseia em várias hipóteses simplificadoras que não podem ser consideradas realistas, mas vimos que o modelo pode ser usado para analisar com sucesso a dinâmica de uma epidemia. De que forma o leitor acha que seria possível aumentar o realismo do modelo sem torná-lo excessivamente complexo?

Exercícios

1. Use a equação $N = S(t) + I(t) + R(t)$ e as equações (1) e (2) do modelo S-I-R para mostrar que a equação (3) está correta.

2. **a.** Use a regra da cadeia para mostrar que no modelo S-I-R a taxa de variação do número de infectados em relação ao número de suscetíveis é igual à razão entre a taxa de variação com o tempo do número de infectados dividida pela taxa de variação com o tempo do número de suscetíveis, ou seja, que

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI/dt}{dS/dt}$$

b. Escreva uma expressão para $\frac{dI}{dS}$ a partir das equações (1) e (3) do modelo. Use esta expressão para calcular o valor de $\frac{dI}{dS}$ para a epidemia de peste bubônica de 1666 em Eyam.

c. Use a resposta do item (b) para calcular o número de suscetíveis quando o número de infectados é máximo.

3. Uma epidemia de gripe começou em um colégio interno da Inglaterra em 1978. No início da epidemia, havia 762 meninos suscetíveis e 1 menino infectado; no dia seguinte, mais dois meninos ficaram doentes. Suponha que todos os meninos doentes possam transmitir imediatamente a infecção.

a. Use os dados fornecidos para estimar o valor da constante a na equação (1) do modelo S-I-R para esta epidemia, com t representando o tempo em dias.

b. Suponha que todos os meninos infectados sejam removidos da população um dia após ficarem doentes. Use esta informação para estimar o valor da constante b na equação (2) do modelo S-I-R para esta epidemia.

c. Use os valores de a e b obtido nos itens (a) e (b) para determinar o número mínimo de suscetíveis para que haja uma epidemia.

d. Use os resultados do Exercício 2 para determinar o número de suscetíveis quando o número de doentes de gripe é máximo.

4. Modifique o modelo S-I-R de modo a levar em conta a vacinação da população a uma taxa constante d, admitindo que uma pessoa vacinada imediatamente deixe de ser suscetível. Escreva uma expressão para $\frac{dI}{dS}$ que se aplique a este modelo.

5. Um modelo S-I pode ser usado para modelar uma epidemia na qual todas as pessoas que contraem a doença permanecem infectadas indefinidamente. (O modelo S-I é, na verdade, um caso especial do modelo S-I-R no qual $b = 0$.) Responda às perguntas a seguir a respeito deste tipo de epidemia.

   a. Mostre que $\frac{dS}{dt} = -aS(N - S)$, onde N é o tamanho da população (que estamos supondo constante).

   b. Mostre que $S(t) = \frac{N(N-1)}{(N-1) + e^{aNt}}$ é uma solução desta equação diferencial e conclua que $I(t) = \frac{Ne^{aNt}}{(N-1) + e^{aNt}}$.

   c. Mostre que $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} I(t) = N$. Plote as curvas do número de pessoas suscetíveis e de pessoas infectadas em função do tempo, $y = S(t)$ e $y = I(t)$, supondo que no instante $t = 0$ existam I_0 pessoas infectadas, onde $0 < I_0 < N$.

Referências

W. O. Kermack and A. G. McKendrick, "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics," *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 115, 1927, pp. 700–721.

G. F. Raggett, "Modeling the Eyam Plague," *IMA Journal*, Vol. 18, 1982, pp. 221–226.

Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, New York: Springer-Verlag, 2001.

Leah Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, Birkhauser Mathematics Series, Boston: McGraw-Hill, 1988, pp. 243–256.

CAPÍTULO 7

CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

SEÇÃO 7.1 Funções de Várias Variáveis

Na indústria, se um fabricante determina que x unidades de um certo produto podem ser vendidas no mercado interno por R$ 90,00 a unidade e y unidades podem ser vendidas no mercado externo pelo equivalente a R$ 110,00 a unidade, a receita total obtida com as vendas do produto é dada por

$$R = 90x + 110y$$

Na psicologia, o quociente de inteligência de uma pessoa, ou QI, é medido através da expressão

$$\text{QI} = \frac{100m}{a}$$

onde a e m são a idade cronológica da pessoa e sua idade mental. Um carpinteiro que está construindo uma arca com x centímetros de comprimento, y centímetros de largura e z centímetros de altura sabe que a arca terá um volume V e uma área S, onde

$$V = xyz \qquad \text{e} \qquad S = 2xy + 2xz + 2yz$$

Estas são situações típicas em que uma grandeza de interesse depende dos valores de duas ou mais variáveis. Outros exemplos são o volume de água no reservatório de uma cidade, que pode depender da quantidade de chuva e do consumo da população, e a produção de uma fábrica, que pode depender do capital disponível, do número de operários e do preço das matérias-primas.

Neste capítulo, vamos estender os métodos do cálculo às funções de duas ou mais variáveis independentes. Quase todo nosso trabalho será feito com funções de duas variáveis, que, como veremos, podem ser representadas geometricamente como superfícies no espaço tridimensional. Vamos começar com algumas definições.

Função de Duas Variáveis ■ Uma função f de duas variáveis independentes x e y é uma regra que atribui a cada par ordenado (x, y) pertencente a um dado conjunto D (o **domínio** de f) um e apenas um número real, representado pelo símbolo $f(x, y)$.

NOTA **Convenção de domínio:** a menos que seja dito explicitamente o contrário, o domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) para os quais a expressão $f(x, y)$ é definida. ■

Como no caso das funções de uma variável, uma função de duas variáveis, $f(x, y)$, pode ser imaginada como uma "máquina" que produz uma "saída" $f(x, y)$ para cada "entrada" (x, y), como mostra a Figura 7.1. O domínio de f é o conjunto de todas as entradas possíveis; o conjunto de todas as saídas possíveis é o **contradomínio** de f. Funções de três variáveis independentes, $f(x, y, z)$, de quatro variáveis independentes, $f(x, y, z, t)$, ou de um número maior de variáveis podem ser definidas de forma semelhante.

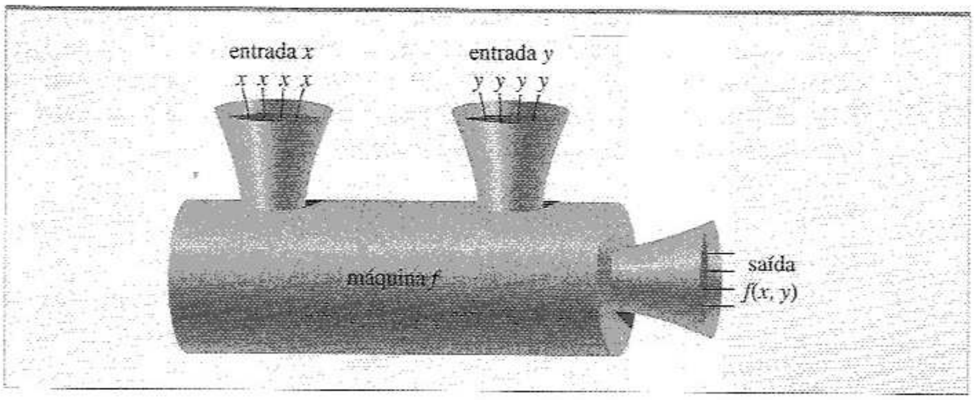


FIGURA 7.1 Função de duas variáveis como uma "máquina".

1 EXPLORE!

As calculadoras gráficas, em geral, plotam apenas funções de uma variável. Uma forma de plotar funções de duas variáveis independentes é plotar uma família de curvas para diferentes valores da segunda variável. Assim, por exemplo, entre com a função $f(x, y) = x^3 - x^2y^2 - xy^3 - y^4$ em Y1 como X^3 – X^2*L1^2 – X*L1^3 – L1^4, onde L1 pode assumir os valores {0, 1.5, 2.0, 2.25, 2.5}. Plote a função usando uma janela [–9.4, 9.4]1 por [–150, 100]20. Como a mudança do valor de L1 afeta a forma do gráfico?

EXEMPLO 7.1.1

Dada a função $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + 5y}{x - y}$.

a. Determine o domínio de f.
b. Calcule $f(1, -2)$.

Solução

a. Como é possível dividir um polinômio por qualquer número real exceto zero, a função dada pode ser calculada para qualquer par ordenado (x, y) tal que $x - y \neq 0$ ou $x \neq y$. Geometricamente, este é o conjunto de todos os pontos do plano xy exceto os pontos pertencentes à reta $y = x$.

b. $f(1, -2) = \dfrac{3(1)^2 + 5(-2)}{1 - (-2)} = \dfrac{3 - 10}{1 + 2} = -\dfrac{7}{3}$.

EXEMPLO 7.1.2

Dada a função $f(x, y) = xe^y + \ln x$.

a. Determine o domínio de f.
b. Calcule $f(e^2, \ln 2)$.

Solução

a. Como a expressão xe^y é definida para todos os números reais x e y e $\ln x$ é definido apenas para $x > 0$, o domínio de f é constituído por todos os pares ordenados (x, y) de números reais tais que $x > 0$.
b. $f(e^2, \ln 2) = e^2e^{\ln 2} + \ln e^2 = 2e^2 + 2 = 2(e^2 + 1) \approx 16{,}78$

EXEMPLO 7.1.3

Dada a função de três variáveis $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, calcule $f(-1,2,5)$.

Solução

Fazendo $x = -1$, $y = 2$ e $z = 5$ na expressão de $f(x, y, z)$, temos

$$f(-1, 2, 5) = (-1)(2) + (-1)(5) + (2)(5) = 3$$

Aplicações

Seguem exemplos de aplicações de funções de duas variáveis ao comércio, à economia, às finanças e à biologia.

EXEMPLO 7.1.4

Uma loja de artigos esportivos em Foz do Iguaçu oferece dois tipos de raquetes de tênis, um com a assinatura de Serena Williams e outro com a assinatura de Jennifer Capriati. De acordo com as pesquisas, a demanda de cada raquete não depende apenas do seu próprio preço, mas também do preço da concorrente. Assim, se a raquete Williams for vendida por x reais e a raquete Capriati por y reais, a demanda da raquete Williams será $D_1 = 300 - 20x + 30y$ raquetes por ano e a demanda da raquete Capriati será $D_2 = 200 + 40x - 10y$ raquetes por ano. Expresse a receita total anual da loja com a venda dos dois tipos de raquetes em função dos preços x e y.

Solução

Seja R a receita total anual. Nesse caso,

$$\begin{aligned} R = {} & \text{(número de raquetes Williams vendidas)(preço de uma raquete Williams)} \\ & + \text{(número de raquetes Capriati vendidas)(preço de uma raquete Capriati)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (300 - 20x + 30y)(x) + (200 + 40x - 10y)(y) \\ &= 300x + 200y + 70xy - 20x^2 - 10y^2 \end{aligned}$$

A produção Q de uma fábrica muitas vezes é considerada como uma função do capital imobilizado K e do volume L da mão-de-obra. Funções de produção da forma

$$Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

onde A, α e β são constantes positivas, com $\alpha + \beta = 1$, se revelaram particularmente úteis em análises econômicas e são conhecidas como **funções de produção de Cobb-Douglas**.* Segue um exemplo envolvendo este tipo de função.

2 EXPLORE!

Leia o Exemplo 1.5. Entre com a equação 0 = Q − 60K^(1/3)*L^(2/3) em sua calculadora gráfica. Determine o valor de Q para $K = 512$ e $L = 1.000$. O que acontece com Q quando L é multiplicado por dois?

EXEMPLO 7.1.5

A produção de uma certa fábrica é dada pela função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = 60K^{1/3}L^{2/3}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão-de-obra em homens-horas.

a. Calcule a produção da fábrica para um capital imobilizado de R$ 512.000,00 e um volume de mão-de-obra de 1.000 homens-horas.

b. Mostre que a produção calculada no item (a) será duas vezes maior se tanto o capital imobilizado quanto o volume de mão-de-obra forem multiplicados por dois.

Solução

a. Calcule $Q(K, L)$ para $K = 512$ (milhares) e $L = 1.000$:

$$\begin{aligned} Q(512, 1.000) &= 60(512)^{1/3}(1.000)^{2/3} \\ &= 60(8)(100) = 48.000 \text{ unidades} \end{aligned}$$

b. Calcule $Q(K, L)$ para $K = 2(512)$ e $L = 2(1.000)$:

$$\begin{aligned} Q[2(512), 2(1.000)] &= 60[2(512)]^{1/3}[2(1.000)]^{2/3} \\ &= 60(2)^{1/3}(512)^{1/3}(2)^{2/3}(1.000)^{2/3} = 96.000 \text{ unidades} \end{aligned}$$

que é duas vezes maior que a produção calculada no item (a).

*Veja, por exemplo, Dominick Salvatore, *Managerial Economics*, New York: McGraw-Hill, 1989, pp. 332-336.

EXEMPLO 7.1.6

Como vimos na Seção 4.1, o valor atual de B reais investidos durante t anos a uma taxa anual r de juros capitalizados k vezes por ano é dado por

$$P(B, r, k, t) = B\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$$

Determine o valor atual a R$ 10.000,00 investidos durante 5 anos a juros de 6% ao ano capitalizados trimestralmente.

Solução

Para $B = 10.000$, $r = 0{,}06$ (juros de 6% ao ano), $k = 4$ (juros capitalizados 4 vezes por ano) e $t = 5$, o valor atual é

$$P(10.000; 0{,}06; 4; 5) = 10.000\left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^{-4(5)}$$
$$\approx 7.424{,}7$$

ou aproximadamente R$ 7.425,00.

EXEMPLO 7.1.7

Como vimos na Seção 6.2, uma população que cresce exponencialmente satisfaz a equação

$$P(A, k, t) = Ae^{kt}$$

onde P é a população no instante t, A é a população inicial (para $t = 0$) e k é a taxa de crescimento relativa ("per capita"). A população de um certo país é atualmente de 5 milhões de habitantes e está crescendo à taxa de 3% ao ano. Qual será a população daqui a 7 anos?

Solução

Seja P a população em milhões de habitantes. Fazendo $A = 5$, $k = 0{,}03$ (crescimento anual de 3%) e $t = 7$ na função população, temos:

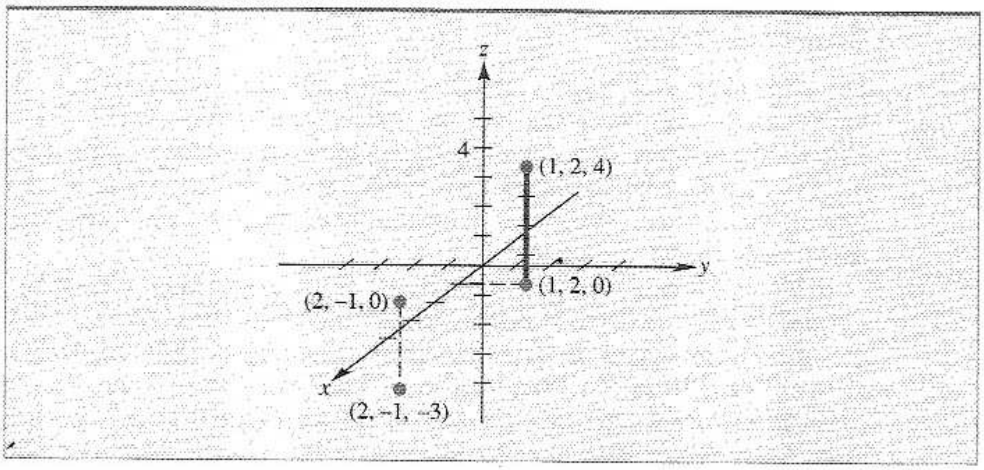
$$P(5; 0{,}03; 7) = 5e^{0{,}03(7)} \approx 6{,}16839$$

Assim, daqui a 7 anos a população será de aproximadamente 6.200.000 habitantes.

Gráficos de Funções de Duas Variáveis

O **gráfico** de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ é o conjunto de todos os grupos ordenados de três números (x, y, z) tais que o par (x, y) pertence ao domínio de f e $z = f(x, y)$. Para poder visualizar um gráfico deste tipo, precisamos definir um sistema de coordenadas **tridimensional,** acrescentando um terceiro eixo (o eixo z) perpendicular aos eixos x e y usados nos gráficos bidimensionais, como mostra a Figura 7.2. Observe que, por convenção, supomos que o plano xy é horizontal e o sentido positivo do eixo z é "para cima".

FIGURA 7.2 Sistema de coordenadas tridimensional.



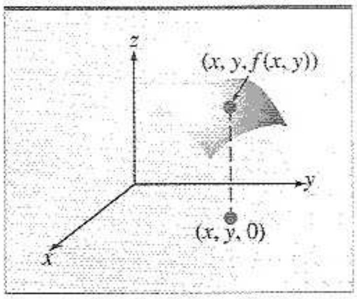


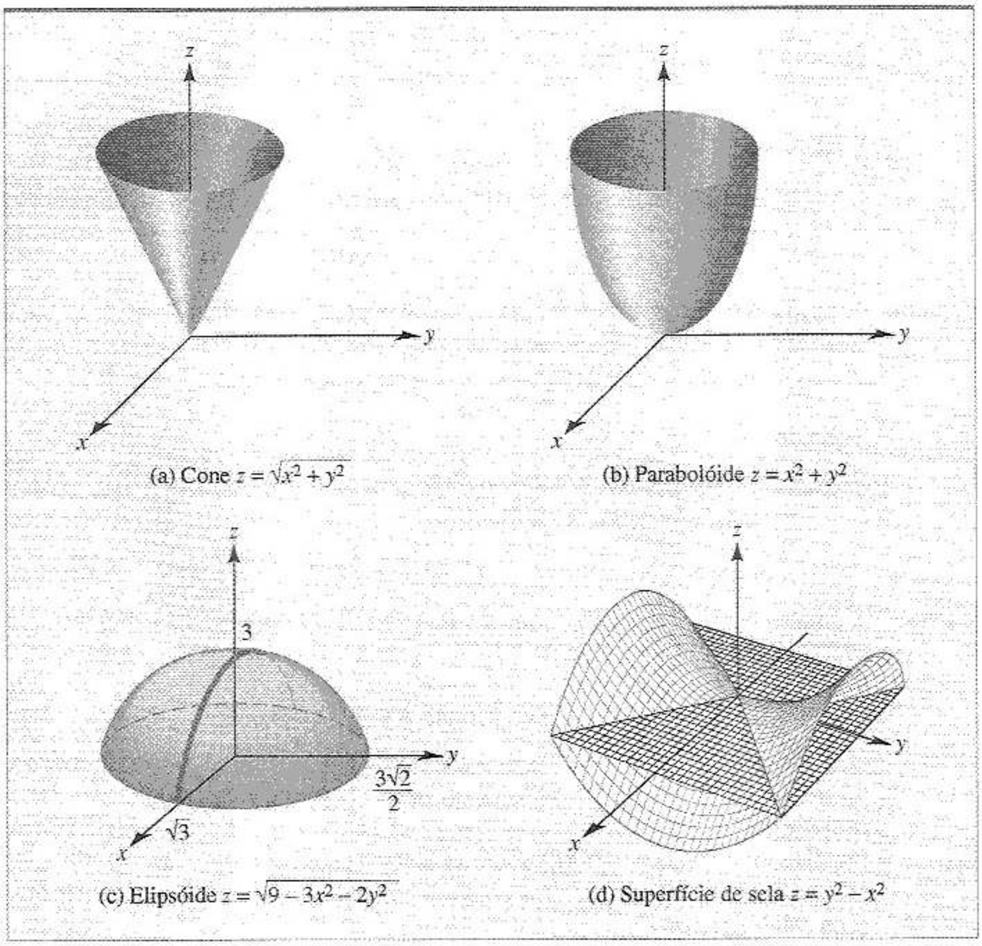
FIGURA 7.3 Gráfico da função $z = f(x, y)$.

A posição de um ponto no espaço tridimensional pode ser especificada através de três coordenadas. Assim, por exemplo, o ponto que está 4 unidades acima do plano xy e diretamente acima do ponto cujas coordenadas x e y são $x = 1$, $y = 2$ é representado pelo grupo ordenado de três números $(x, y, z) = (1, 2, 4)$. Da mesma forma, o grupo ordenado de três números $(2, -1, -3)$ representa um ponto que está 3 unidades diretamente abaixo do ponto $(2, -1)$ do plano xy. Estes pontos aparecem na Figura 7.2.

Para plotar uma função $f(x, y)$ de duas variáveis independentes x e y, costuma-se usar a letra z para representar a variável dependente, isto é, fazer $z = f(x, y)$ (Figura 7.3). Os pares ordenados (x, y) do domínio de f são considerados pontos do plano xy e a função f é usada para calcular a "altura" de cada ponto (ou "profundidade", se o valor de z for negativo). Assim, se $f(1, 2) = 4$, esta igualdade pode ser representada graficamente plotando o ponto $(1, 2, 4)$ no espaço tridimensional. Quando isto é feito para todos os pontos do domínio da função, o resultado é uma superfície no espaço tridimensional.

A Figura 7.4 mostra quatro destas superfícies. A superfície da Figura 7.4a é um **cone**, a da Figura 7.4b um **parabolóide**, a da Figura 7.4c um **elipsóide** e a da Figura 7.4d uma **sela**. Superfícies como estas desempenham um papel importante nos exemplos e exercícios deste capítulo.

FIGURA 7.4 Várias superfícies no espaço tridimensional.



Curvas de Nível

Em geral, não é fácil traçar o gráfico de uma função de duas variáveis. A Figura 7.5 mostra uma das formas usadas para visualizar uma superfície. Quando o plano $z = C$ intercepta a superfície $z = f(x, y)$, o resultado é uma curva no espaço. O conjunto de pontos (x, y) no plano xy que satisfaz à equação $f(x, y) = C$ é chamado de **curva de nível** de f em C; fazendo variar o valor de C, é possível gerar uma família inteira de curvas de nível. Plotando alguns membros desta família no plano xy, obtemos a forma aproximada da superfície $z = f(x, y)$.

Imagine, por exemplo, que a superfície $z = f(x, y)$ seja uma "montanha" cuja "altitude" no ponto (x, y) é dada por $f(x, y)$, como mostra a Figura 7.6a. A curva de nível $f(x, y) = C$ está diretamente abaixo de uma trilha na montanha onde a altitude é constante e igual a C. Para plotar a montanha, podemos indicar as trilhas de altitude constante traçando a família de curvas de nível e espetando uma "bandeira" em cada curva para mostrar qual é a elevação correspondente (Figura 7.6b). Esta figura "plana" é conhecida como **mapa topográfico** da superfície $z = f(x, y)$.

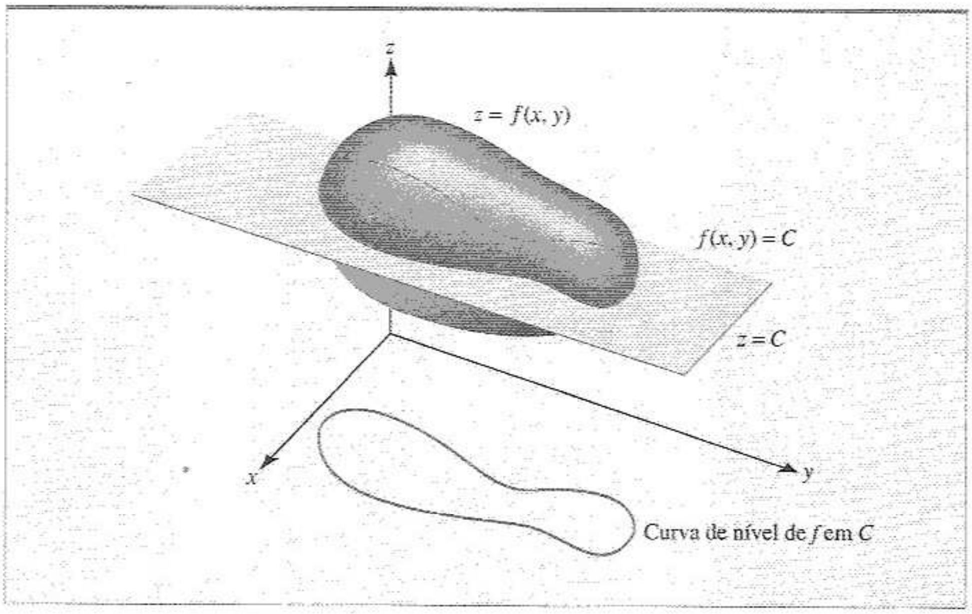


FIGURA 7.5 Curva de nível da superfície $z = f(x, y)$.

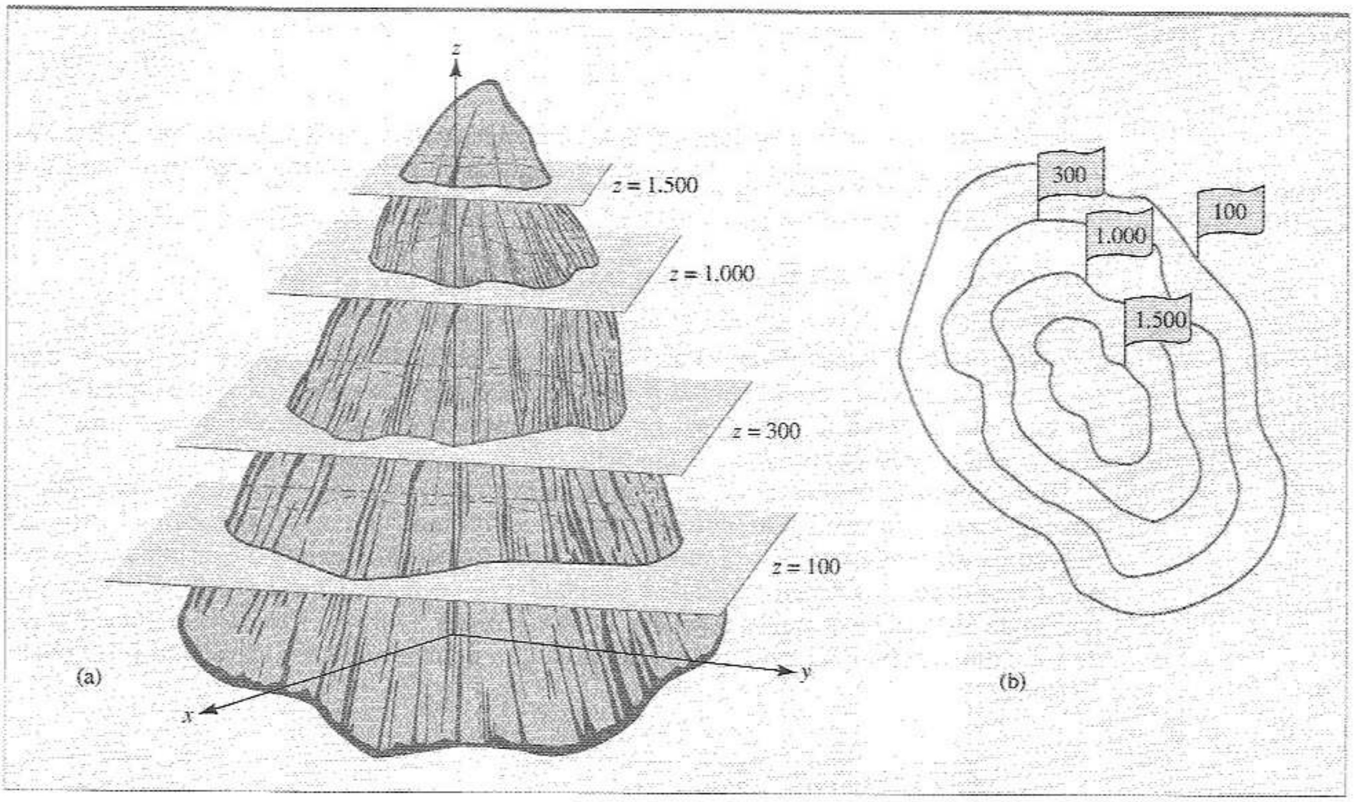


FIGURA 7.6 (a) A superfície $z = f(x, y)$ como uma montanha; (b) as curvas de nível representam um mapa topográfico de $z = f(x, y)$.

EXEMPLO 7.1.8

Discuta as curvas de nível da função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução

A equação da curva de nível $f(x, y) = C$ é $x^2 + y^2 = C$. Para $C = 0$, esta equação corresponde ao ponto $(0, 0)$; para $C > 0$, a equação corresponde a uma circunferência de raio $\sqrt{C}$; para $C < 0$, a equação não tem solução.

O gráfico da superfície $z = x^2 + y^2$ aparece na Figura 7.7. As curvas de nível discutidas no Exemplo 7.1.8 correspondem a seções retas perpendiculares ao eixo z. É possível mostrar que as seções retas

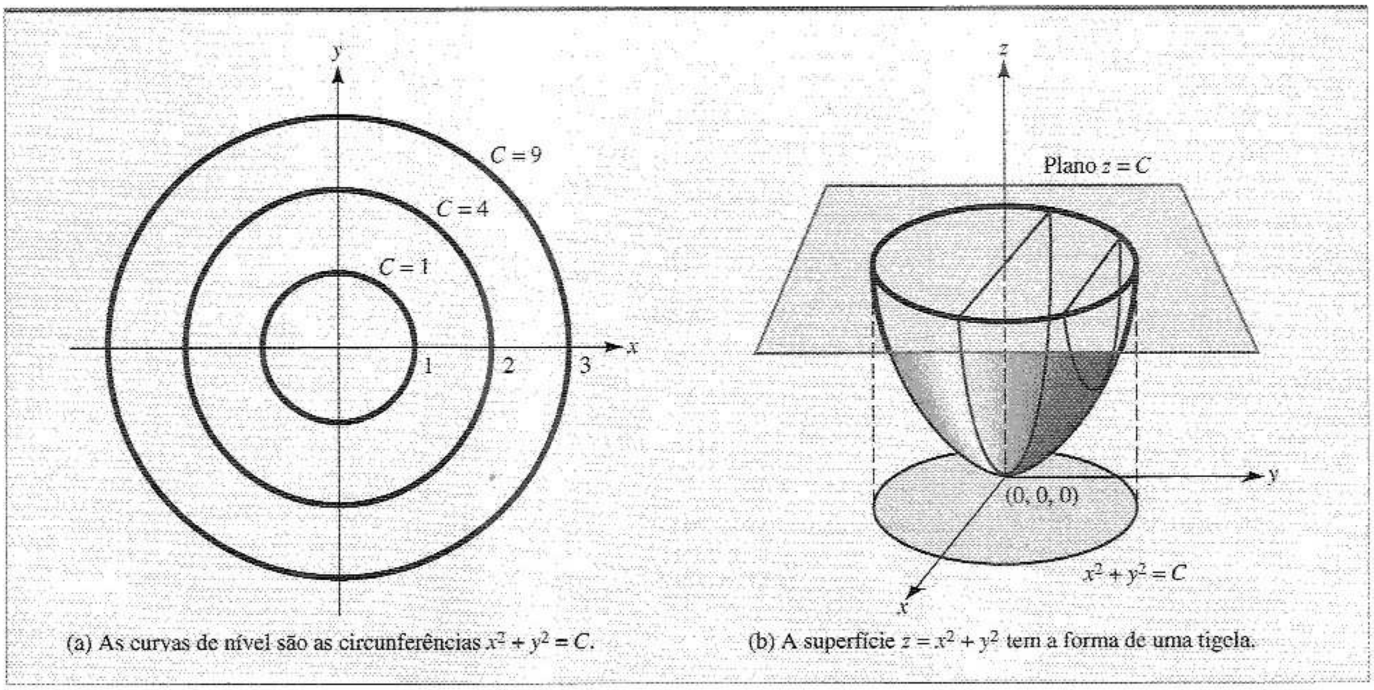


FIGURA 7.7 As curvas de nível ajudam a visualizar a forma de uma superfície.

perpendiculares aos eixos x e y são parábolas (a demonstração fica a cargo do leitor). Por esta razão, a superfície tem a forma de uma tigela. Ela é chamada de **parabolóide circular** ou **parabolóide de revolução**.

Curvas de Nível na Economia: Isoquantas e Curvas de Indiferença

As curvas de nível aparecem em muitas situações diferentes. Na economia, por exemplo, se a produção $Q(x, y)$ de um processo é determinada por dois insumos x e y (horas de trabalho e capital imobilizado, por exemplo), a curva de nível $Q(x, y) = C$ é chamada de **curva de produto constante** C, ou, mais concisamente, de **isoquanta** ("iso" é um prefixo que significa "igual").

Outra aplicação das curvas de nível na economia envolve o conceito de curvas de indiferença. A um consumidor que está pensando em comprar várias unidades de dois produtos é associada uma **função de utilidade** $U(x, y)$ que mede a satisfação (ou **utilidade**) que o consumidor recebe ao adquirir x unidades do primeiro produto e y unidades do segundo. Uma curva de nível $U(x, y) = C$ da função de utilidade é chamada de **curva de indiferença** e fornece todas as combinações possíveis de x e y que resultam no mesmo grau de satisfação do consumidor. O Exemplo 7.1.9 ilustra estes conceitos.

3 EXPLORE!

Leia o Exemplo 7.1.9. Plote as curvas de indiferença $U(x, y) = x^{3/2}y = C$ explicitando y para obter $y = Cx^{-3/2}$. Entre com X^(−3/2)*L1 como Y1 no editor de equações, onde L1 = {800, 1,280, 2, 000, 3, 000} inclui alguns níveis de utilidade constante C. Use uma janela [0, 37.6]5 por [0, 150]10. Qual o efeito sobre as curvas do valor de C? Localize o ponto (16, 20) da curva de indiferença $x^{3/2}y$ = 1.280.

EXEMPLO 7.1.9

A utilidade para um consumidor da aquisição de x unidades de um produto e y unidades de um segundo produto é dada pela função de utilidade $U(x, y) = x^{3/2}y$. Se o consumidor possui $x = 16$ unidades do primeiro produto e $y = 20$ unidades do segundo, determine o nível de utilidade do consumidor e plote a curva de indiferença correspondente.

Solução

O nível de utilidade é

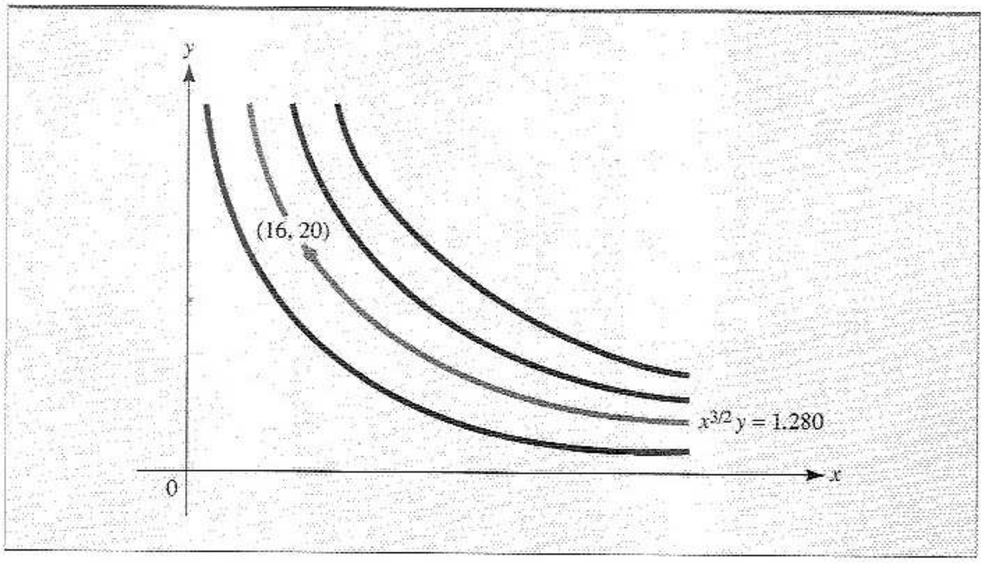
$$U(16, 20) = (16)^{3/2}(20) = 1.280$$

e a curva de indiferença correspondente é

$$x^{3/2}y = 1.280$$

ou $y = 1.280x^{-3/2}$. Esta curva é constituída por todos os pontos (x, y) para os quais o nível de utilidade $U(x, y)$ é igual a 1.280. A Figura 7.8 mostra a curva $x^{3/2}y = 1.280$ e outras curvas da família $x^{3/2}y = C$.

FIGURA 7.8 Curvas de indiferença da função de utilidade $U(x, y) = x^{3/2}y$.



Gráficos Gerados em Computador

Nos problemas práticos de economia, biologia e ciências sociais, raramente é necessário plotar funções de duas variáveis. Por esta razão, não vamos perder mais tempo discutindo os métodos usados para plotar este tipo de função.

Hoje em dia, existem programas de computador bastante sofisticados para plotar funções de duas variáveis. Estes programas permitem escolher escalas diferentes para os três eixos coordenados e visualizar as superfícies resultantes a partir de diferentes pontos de vista. A Figura 7.9 mostra alguns gráficos de funções de duas variáveis gerados em computador.

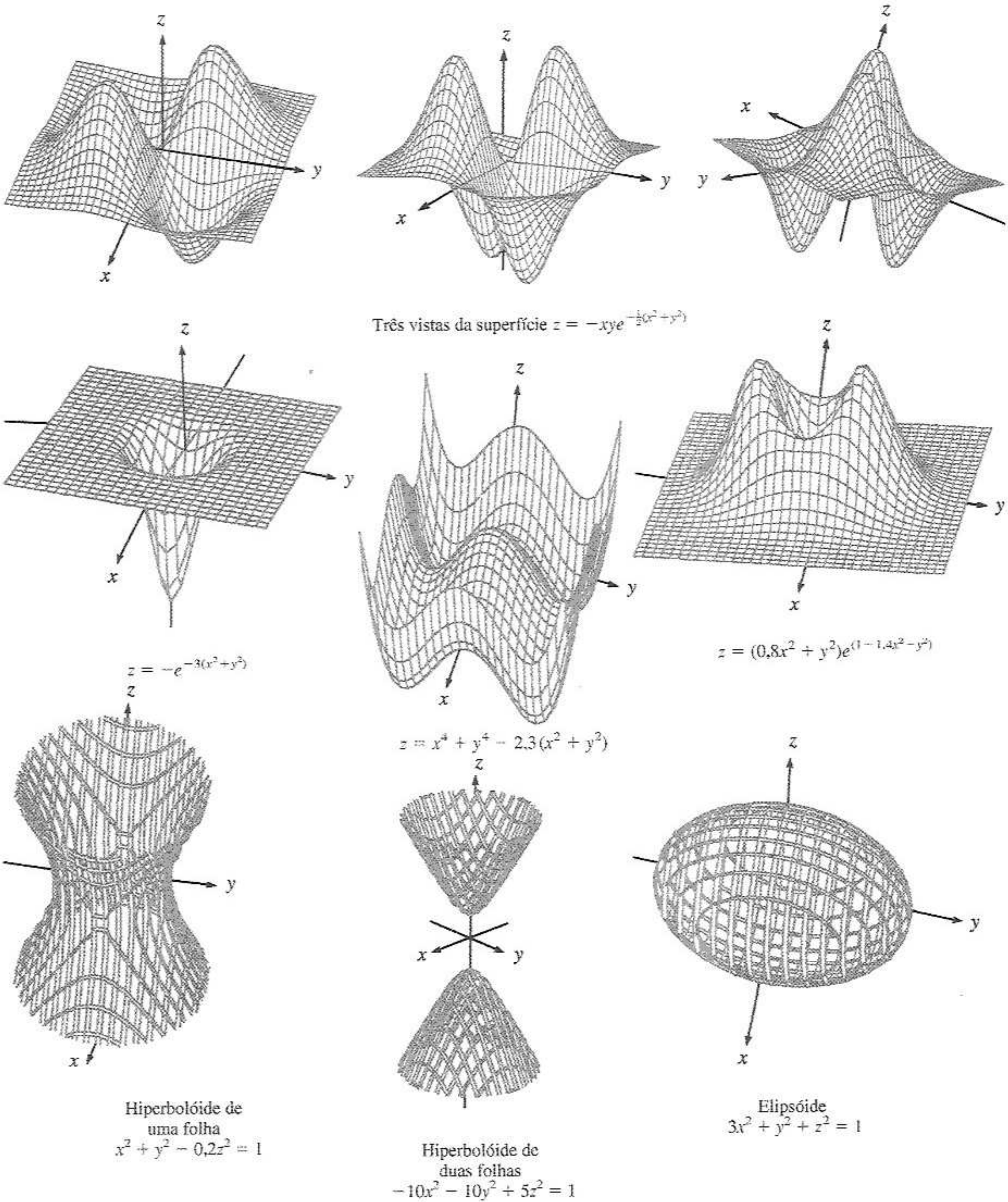


FIGURA 7.9 Algumas superfícies geradas em computador.

PROBLEMAS | 7.1

Nos Problemas 1 a 12, calcule o valor da função nos pontos especificados.

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2xy^3$; $f(2, -1)$, $f(1, 2)$

2. $f(x, y) = \dfrac{3x + 2y}{2x + 3y}$; $f(1, 2)$, $f(-4, 6)$

3. $g(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$; $g(4, 5)$, $g(-1, 2)$

4. $g(u, v) = 10u^{1/2}v^{2/3}$; $g(16, 27)$, $g(4, -1331)$

5. $f(r, s) = \dfrac{s}{\ln r}$; $f(e^2, 3)$, $f(\ln 9, e^3)$

6. $f(x, y) = xye^{xy}$; $f(1, \ln 2)$, $f(\ln 3, \ln 4)$

7. $g(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$; $g(1, 2)$, $g(2, -3)$

8. $f(s, t) = \dfrac{e^{st}}{2 - e^{st}}$; $f(1, 0)$, $f(\ln 2, 2)$

9. $f(x, y, z) = xyz$; $f(1, 2, 3)$, $f(3, 2, 1)$

10. $g(x, y, z) = (x + y)e^{yz}$; $g(1, 0, -1)$, $g(1, 1, 2)$

11. $F(r, s, t) = \dfrac{\ln(r + t)}{r + s + t}$; $F(1, 1, 1)$, $F(0, e^2, 3e^2)$

12. $f(x, y, z) = xye^z + xze^y + yze^x$; $f(1, 1, 1)$, $f(\ln 2, \ln 3, \ln 4)$

Nos Problemas 13 a 18, descreva o domínio da função dada.

13. $f(x, y) = \dfrac{5x + 2y}{4x + 3y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

15. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

16. $f(x, y) = \dfrac{x}{\ln(x + y)}$

17. $f(x, y) = \ln(x + y - 4)$

18. $f(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x - 2y}}$

Nos Problemas 19 a 26, plote a curva de nível $f(x, y) = C$ para os valores especificados de C.

19. $f(x, y) = x + 2y$; $C = 1$, $C = 2$, $C = -3$

20. $f(x, y) = x^2 + y$; $C = 0$, $C = 4$, $C = 9$

21. $f(x, y) = x^2 - 4x - y$; $C = -4$, $C = 5$

22. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$; $C = -2$, $C = 2$

23. $f(x, y) = xy$; $C = 1$, $C = -1$, $C = 2$, $C = -2$

24. $f(x, y) = ye^x$; $C = 0$, $C = 1$

25. $f(x, y) = xe^y$; $C = 1$, $C = e$

26. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; $C = 4$, $C = \ln 4$

27. PRODUÇÃO Usando x operários especializados e y operários não-especializados, uma fábrica é capaz de produzir $Q(x, y) = 10x^2y$ unidades por dia. No momento, a fábrica opera com 20 operários especializados e 40 operários não-especializados.

a. Quantas unidades estão sendo produzidas por dia?

b. Qual será a variação na produção diária se a fábrica puder contar com mais 1 operário especializado?

c. Qual será a variação da produção diária se a fábrica puder contar com mais 1 operário não-especializado?

d. Qual será a variação da produção diária se a fábrica puder contar com mais 1 operário especializado e mais 1 operário não-especializado?

28. CUSTO DE PRODUÇÃO Um fabricante produz calculadoras científicas por um custo de R$ 40,00 a unidade e calculadoras comerciais por um custo de R$ 20,00 a unidade.

a. Expresse o custo de produção mensal do fabricante em função do número de calculadoras científicas e comerciais produzidas.

b. Calcule o custo mensal se 500 calculadoras científicas e 800 calculadoras comerciais forem produzidas.

c. O fabricante pretende fabricar 50 calculadoras científicas a mais por mês que o nível de produção do item (b). Qual deve ser a variação do número de calculadoras comerciais produzidas para que o custo mensal total não varie?

29. VENDAS A VAREJO Uma loja de tintas vende duas marcas de tinta látex. Os dados de vendas mostram que se a primeira marca for vendida por x_1 reais a lata e a segunda por x_2 reais a lata, a demanda da primeira marca será $D_1(x_1, x_2) = 200 - 10x_1 + 20x_2$ latas por mês e a demanda da segunda marca será $D_2(x_1, x_2) = 100 + 5x_1 - 10x_2$ latas por mês.

a. Expresse a receita total da loja com a venda de tinta látex em função dos preços x_1 e x_2.

b. Calcule a receita do item (a) se a primeira marca for vendida por R$ 6,00 a lata e a segunda por R$ 5,00 a lata.

30. PRODUÇÃO A produção de uma certa fábrica é $Q(K, L) = 120K^{2/3}L^{1/3}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão-de-obra em homens-horas.

a. Calcule a produção se o capital imobilizado for de R$ 125.000,00 e o volume da mão-de-obra de 1.331 homem-hora.

b. O que acontecerá com a produção do item (a) se o capital imobilizado e o volume de mão-de-obra forem reduzidos à metade?

31. PRODUÇÃO A Fazenda Boa Esperança calcula que, se $100x$ homens-horas de trabalho forem usados em y hectares de terra, o número de sacos de trigo produzidos será $f(x, y) = Ax^ay^b$, onde A, a e b são constantes positivas. Suponha que a fazenda decida multiplicar por dois os fatores de produção x e y. Determine de que forma esta decisão afeta a produção de trigo nos seguintes casos:

a. $a + b > 1$

b. $a + b < 1$

c. $a + b = 1$

32. PRODUÇÃO Quando x máquinas e y homens-horas são usados, uma certa fábrica produz $Q(x, y) = 10xy$ telefones celulares por dia. Descreva a relação entre os insumos que resulta em uma produção diária de 1.000 telefones celulares. (Isto equivale a determinar uma curva de nível de Q.)

33. VENDAS A VAREJO Um fabricante com direitos exclusivos para produzir uma nova máquina industrial sofisticada pretende vender um número limitado destas máquinas a firmas nacionais e estrangeiras. O preço que o fabricante espera receber pelas máquinas depende do número de máquinas produzidas. O fabricante calcula que, se fornecer

x máquinas ao mercado interno e y máquinas ao mercado externo, as máquinas serão vendidas por $60 - \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{20}$ milhares de reais por unidade no mercado interno e pelo equivalente a $50 - \dfrac{y}{10} + \dfrac{x}{20}$ milhares de reais no mercado externo. Expresse a receita do fabricante, R, em função de x e y.

34. VENDAS A VAREJO Um fabricante pretende vender um novo produto por um preço unitário de A reais e estima que, se gastar x mil reais no desenvolvimento do produto e y mil reais em propaganda, os consumidores comprarão $\dfrac{320y}{y+2} + \dfrac{160x}{x+4}$ unidades do produto. Expresse o lucro total em função de x e y, sabendo que o custo de fabricação do produto é de R$ 50,00 por unidade.

35. ÁREA SUPERFICIAL DO CORPO HUMANO Os pediatras às vezes usam uma expressão empírica* que relaciona a área superficial S (em m^2) de uma criança ao seu peso W (em kg) e altura H (em cm):

$$S(W, H) = 0{,}0072W^{0{,}425}H^{0{,}725}$$

a. Calcule o valor de $S(15{,}83; 87{,}11)$. Trace a curva de nível da função $S(W, H)$ que passa pelo ponto $(15{,}83; 87{,}11)$. Trace outras curvas de nível de $S(W, H)$. O que representam estas curvas?

b. Se Marcos pesa 18,37 kg e tem uma área superficial de 0,648 m^2, qual é a sua altura?

c. Suponha que, em algum instante de sua vida, Jane pese duas vezes mais e tenha uma altura três vezes maior do que no dia em que nasceu. Qual foi a variação correspondente da área superficial do seu corpo?

d. Pergunte aos seus pais com que peso e altura você nasceu (eles sabem!). Compre ou peça emprestada uma boneca com a mesma altura que você tinha quando nasceu e meça a área superficial da boneca. O resultado de suas medidas está próximo do resultado calculado usando a expressão empírica? Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito das conclusões que você tirou deste "experimento".

36. PSICOLOGIA O quociente de inteligência (QI) de uma pessoa é dado pela função

$$I(m, a) = \frac{100m}{a}$$

onde a é a idade cronológica da pessoa e m é a idade mental.

a. Calcule $I(12, 11)$ e $I(16, 17)$.

b. Plote várias curvas de nível de $I(m, a)$. Como são estas curvas?

37. CURVAS DE PRODUÇÃO CONSTANTE Usando x operários especializados e y operários não-especializados, um fabricante é capaz de produzir $Q(x, y) = 3x + 2y$ unidades por dia. No momento, a mão-de-obra da fábrica consiste em 10 operários especializados e 20 não-especializados.

a. Calcule a produção diária da fábrica.

b. Escreva uma equação que relacione o número de operários especializados ao número de operários não-especializados supondo que a produção se mantenha constante nos níveis atuais.

c. Plote a isoquanta (curva de produção constante) correspondente à produção atual.

d. Qual deve ser a variação do número de operários não-especializados para que a produção se mantenha inalterada se mais dois operários especializados forem contratados?

38. CURVAS DE INDIFERENÇA A utilidade para o consumidor de x unidades de um produto e y unidades de um segundo produto é dada pela função de utilidade $U(x, y) = 2x^3y^2$. Um consumidor possui $x = 5$ unidades do primeiro produto e $y = 4$ unidades do segundo. Determine o nível de utilidade do consumidor e plote a curva de indiferença correspondente.

39. CURVAS DE INDIFERENÇA A utilidade para o consumidor de x unidades de um produto e y unidades de um segundo produto é dada pela função de utilidade $U(x, y) = (x + 1)(y + 2)$. Um consumidor possui $x = 25$ unidades do primeiro produto e $y = 8$ unidades do segundo. Determine o nível de utilidade do consumidor e plote a curva de indiferença correspondente.

40. POLUIÇÃO DO AR Quando uma grande quantidade de terra está sendo manipulada, o ar pode ficar contaminado com partículas. Para estimar a emissão de partículas, foi proposta a seguinte fórmula empírica:*

$$E(V, M) = k(0{,}0032)\left(\frac{V}{5}\right)^{1{,}3}\left(\frac{M}{2}\right)^{-1{,}4}$$

onde E é o fator de emissão (libras de partículas liberadas por tonelada de terra manipulada), V é a velocidade do vento (milhas por hora), M é a umidade do material (dada na forma de uma porcentagem) e k é uma constante que depende do tamanho das partículas.

a. Para partículas pequenas (5 mm de diâmetro), $k = 0{,}2$. Calcule $E(10, 13)$.

b. A emissão total é dada pelo fator de emissão E multiplicado pela quantidade de terra manipulada em toneladas. Suponha que 19 toneladas do material do item (a) sejam manipuladas. Quantas toneladas de um segundo tipo de material com $k = 0{,}48$ (partículas de 15 mm de diâmetro) e 27% de umidade teriam que ser manipuladas para produzir a mesma emissão total?

c. Trace várias curvas de nível de $E(V, M)$ supondo que o tamanho de partícula permaneça constante. O que representam estas curvas?

41. HEMODINÂMICA De acordo com uma das leis de Poiseuille†, a velocidade V do sangue (em cm/s) a uma distância r (em cm) do eixo de um vaso sangüíneo de raio R (em cm) e comprimento L (em cm) é dada por

$$V(P, L, R, r) = \frac{9{,}3P}{L}(R^2 - r^2)$$

*J. Routh, *Mathematical Preparation for Laboratory Technicians*, Philadelphia: Saunders Co., 1971, p. 92.

*M. D. LaGrega, P. L. Buckingham and J. C. Evans, *Hazardous Waste Management*, New York: MacGraw-Hill, 1994, p. 140.

†E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, pp. 102-103.

onde P (em dinas/cm^2) é a pressão no vaso. Suponha que um certo vaso tenha 0,0075 cm de raio e 1,675 cm de comprimento.

a. Com que velocidade o sangue está circulando a uma distância de 0,004 cm do eixo do vaso se a pressão no vaso é de 3875 dinas/cm^2?

b. Como R e L são fixos para este vaso, V é função apenas de P e r. Trace várias curvas de nível de $V(P, r)$. Explique o que representam.

42. RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA Suponha que a produção Q de uma fábrica seja dada pela função de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, onde A e α são constantes positivas e $0 < \alpha < 1$. Prove que, se K e L forem multiplicadas pelo mesmo número positivo m, a produção Q também será multiplicada por m, isto é, mostre que $Q(mK, mL) = mQ(K, L)$.

43. QUÍMICA De acordo com a **equação de van der Waal**, 1 mol de um gás confinado satisfaz a equação

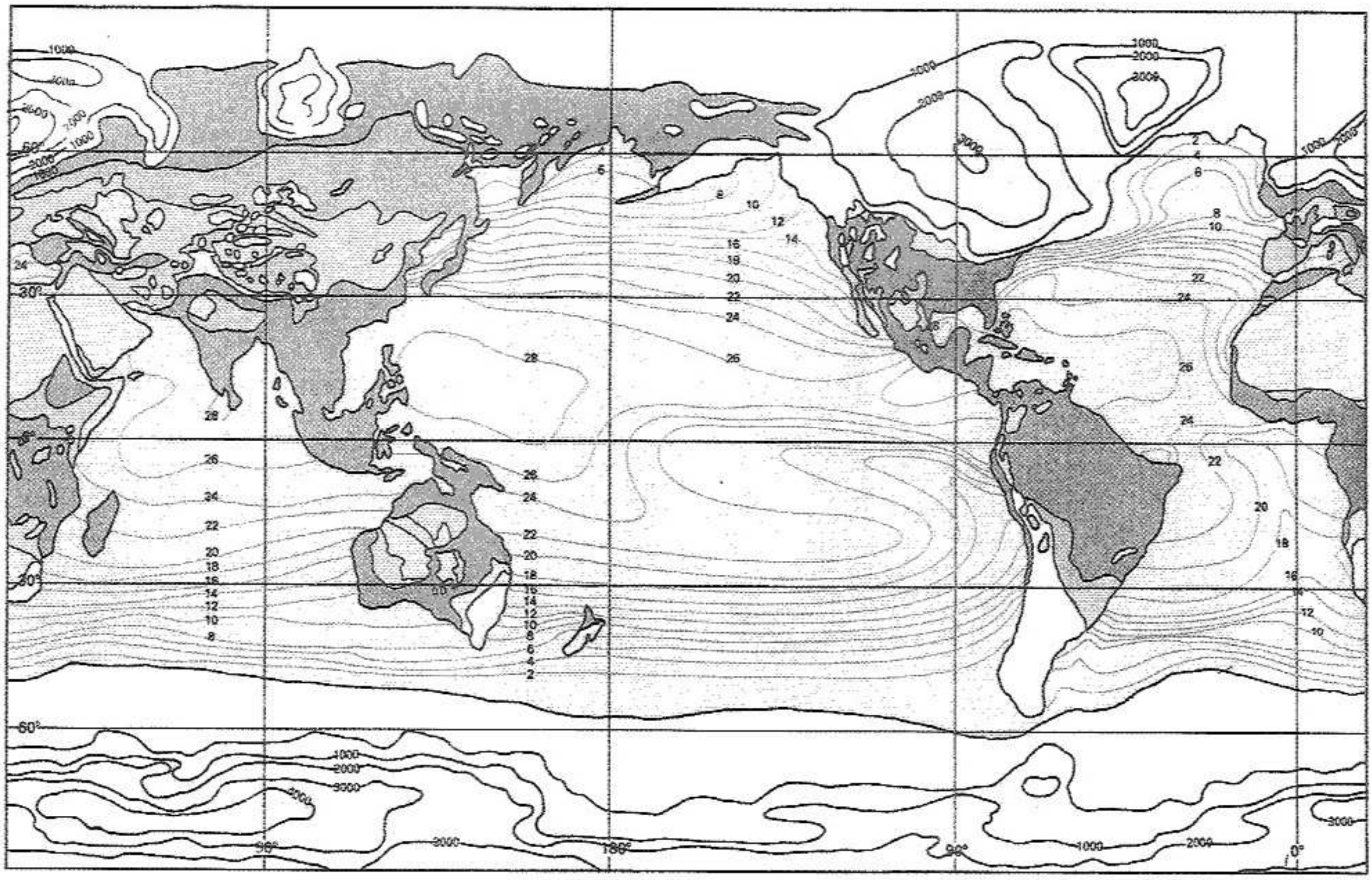
$$T(P, V) = 0{,}0122\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - 273{,}15$$

onde T é a temperatura do gás em graus centígrados, V é o volume do gás em centímetros cúbicos, P é a pressão do gás em atmosferas e a e b são constantes que dependem do gás considerado.

a. Trace algumas curvas de nível de T. Estas curvas são chamadas de **curvas de temperatura constante** ou **isotermas**.

b. Quando o gás confinado é o cloro, os resultados experimentais mostram que $a = 6{,}49 \times 10^6$ e $b = 56{,}2$. Determine $T(1{,}13; 31{,}275 \times 10^3)$, isto é, a temperatura que corresponde a 31,275 cm^3 de cloro à pressão de 1,13 atmosfera.

44. PALEOCLIMATOLOGIA As curvas de nível nas regiões emersas da figura a seguir indicam a altura do gelo em relação ao nível do mar, em metros, durante a última glaciação (cerca de 18.000 anos atrás). As curvas de nível no mar indicam a temperatura na superfície do mar. Assim, por exemplo, o gelo tinha 3.000 metros de espessura na região dos Grandes Lagos e a temperatura da água nas proximidades do arquipélago do Havaí era de 24°C. Em que parte da Terra a camada de gelo era mais espessa? Em que continente as águas costeiras eram mais quentes?



PROBLEMA 44

FONTE: *The Cambridge Encyclopedia of Earth Sciences*, New York: Crown/Cambridge Press, 1981, p. 302.

45. CONSUMO DIÁRIO DE ENERGIA Suponha que uma pessoa com I anos de idade tenha p quilogramas de peso e a centímetros de altura. Nesse caso, de acordo com as equações de Harris-Benedict, o consumo basal diário de energia, em quilocalorias, será dado por

$B_h(p, a, I) = 66{,}47 + 13{,}75p + 5{,}00a - 6{,}77I$

no caso de um homem e por

$B_m(p, a, I) = 655{,}10 + 9{,}60p + 1{,}85a - 4{,}68I$

no caso de uma mulher.

a. Determine o consumo basal de energia de um homem de 22 anos de idade com 90 kg de peso e 190 cm de altura.

b. Determine o consumo basal de energia de uma mulher de 27 anos de idade com 61 kg de peso e 170 cm de altura.

c. Um homem mantém um peso de 85 kg e uma altura de 193 cm durante toda a vida adulta. Em que idade seu consumo basal de energia é de 2.018 quilocalorias?

d. Uma mulher mantém um peso de 67 kg e uma altura de 173 cm durante toda a vida adulta. Em que idade seu consumo basal de energia é de 1.504 quilocalorias?

46. CONTROLE DE ESTOQUE Uma empresa consome N unidades por ano de um certo produto. Suponha que cada remessa do produto custe D reais e o custo de armazenamento do produto S reais por ano. As unidades são consumidas (ou vendidas) a uma taxa constante e uma nova remessa chega no instante em que a remessa anterior se esgota.

a. Mostre que o custo $C(x)$ para manter o estoque do produto quando x unidades são encomendadas em cada remessa é o menor possível para $x = Q$, onde

$$Q(N, D, S) = \sqrt{\frac{2DN}{S}}$$

(Veja o Exemplo 3.5.7 da Seção 3.5.)

b. O valor de Q obtido no item (a) é chamado de *lote econômico de compra* (LEC). Qual é o LEC quando 9.720 unidades são encomendadas por ano a um custo de R$ 35,00 por remessa e um custo unitário de armazenamento de 84 centavos por ano?

47. AMORTIZAÇÃO DE UMA DÍVIDA Um empréstimo de A reais deve ser amortizado durante n anos a uma taxa anual r de juros capitalizados mensalmente. Seja $i = \frac{r}{12}$ a taxa mensal de juros equivalente. Nesse caso, o valor das prestações mensais é M reais, onde

$$M(A, n, i) = \frac{Ai}{1 - (1 + i)^{-12n}}$$

(Veja Problemas 58 a 61 da Seção 4.1.)

a. Alice comprou um apartamento por R$ 250.000,00 financiados em 15 anos a juros fixos de 5,2% ao ano. Qual é o valor das prestações mensais? Qual é o valor total dos juros que a moça vai pagar?

b. Jorge também comprou um apartamento por R$ 250.000,00, mas o financiamento foi em 30 anos a juros fixos de 5,6% ao ano. Qual é o valor das prestações mensais? Qual é o valor total dos juros que o rapaz vai pagar?

48. ENERGIA EÓLICA As máquinas eólicas, em geral, convertem a energia cinética do vento em energia mecânica com o auxílio de pás giratórias, como em um moinho. Suponha que um vento de velocidade v esteja passando por uma máquina eólica de seção reta A. De acordo com os princípios da física*, a potência gerada pelo vento é dada por uma expressão da forma

$$P(v, A) = abAv^3$$

onde $b = 1{,}2$ kg/m^3 é a massa específica do ar e a é uma constante positiva.

a. No caso de uma máquina eólica ideal (com uma eficiência de 100%), $a = \frac{1}{2}$ na expressão de $P(v, A)$. Qual a potência produzida por um moinho ideal com pás de 15 metros de raio se a velocidade do vento é de 22 metros por segundo?

b. Nenhuma máquina eólica é 100% eficiente. Na verdade, foi demonstrado que a eficiência máxima que podemos esperar de uma máquina é 59% da eficiência ideal, de modo que uma boa expressão empírica para a potência pode ser obtida tomando $a = \frac{8}{27}$. Calcule $P(v, A)$ usando este valor de a se o raio das pás do moinho do item (a) for multiplicado por dois e a velocidade do vento for reduzida à metade.

c. A humanidade vem tentando aproveitar a energia eólica há pelo menos 4.000 anos, às vezes com conseqüências interessantes ou grotescas. Por exemplo: na fonte citada na nota de rodapé, o autor observa que durante a Segunda Guerra Mundial foi construído em Vermont um moinho cujas pás tinham 53 metros de raio! Leia a respeito de moinhos de vento e outros equipamentos usados para aproveitar a energia eólica. Você acha que estes equipamentos são compatíveis com o mundo moderno? Justifique sua resposta.

49. OSMOSE REVERSA A água usada na fabricação de semicondutores deve ser extremamente pura. Para separar a água das impurezas, utiliza-se um processo conhecido como **osmose reversa**, no qual se faz a água passar por uma membrana semipermeável. Um parâmetro importante deste processo é a **pressão osmótica**, que pode ser calculada através da **equação de va't Hoff**:**

$$P(N, C, T) = 0{,}075NC(273{,}15 + T)$$

onde P é a pressão osmótica em atmosferas, N é o número de íons por molécula do soluto, C é a concentração do soluto em gramas-mols por litro e T é a temperatura do soluto em graus centígrados. Determine a pressão osmótica de uma solução de cloreto de sódio (NaCl) com uma concentração de 0,53 g·mol/L a uma temperatura de 23°C. (Cada molécula de NaCl contém dois íons: Na^+ e Cl^-.)

50. A produção de uma certa fábrica é dada pela função de produção de Cobb-Douglas $Q(K, L) = 57K^{1/4}L^{3/4}$, onde K é o capital em milhares de reais e L é a mão-de-obra disponível em homens-horas.

a. Use uma calculadora para obter o valor de $Q(K, L)$ para os valores de K e L que aparecem na tabela a seguir.

K(R$1.000)	277	311	493	554	718
L	743	823	1.221	1.486	3.197
$Q(K, L)$					

b. Observe na tabela que a produção é multiplicada por dois quando o capital é multiplicado por dois, de 277 para

*Raymond A. Serway, *Physics*, 3rd ed., Philadelphia: Saunders, 1992, pp. 408-410.

**M.D. LaGrega, P.L. Buckingham and J.C. Evans, *Hazardous Waste Management*, New York: McGraw-Hill, 1994, pp. 530-543.

554, e o volume de mão-de-obra também é multiplicado por dois, de 743 para 1.486. Demonstre que, da mesma forma, a produção é multiplicada por três quando K e L são multiplicados por três e é reduzida à metade quando K e L são reduzidos à metade. O que acontece quando o capital K é multiplicado por dois e o volume de mão-de-obra L é reduzido à metade? Use uma calculadora para verificar se o seu raciocínio está correto.

51. RETORNOS CONSTANTES DE ESCALA Generalize os resultados do Problema 50 mostrando que, para qualquer número s, a função de produção de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

satisfaz a relação

$$Q(sK, sL) = sQ(K, L)$$

Quando uma função de produção apresenta esta propriedade, dizemos que possui retornos constantes de escala.

SEÇÃO 7.2 Derivadas Parciais

Em muitos problemas que envolvem funções de duas variáveis, o objetivo é determinar a taxa de variação da função com uma das variáveis enquanto a outra é mantida constante. Em outras palavras, o objetivo é derivar a função em relação a uma das variáveis mantendo a outra variável fixa. Este processo é conhecido como **derivação parcial**; a derivada resultante é chamada de **derivada parcial** da função.

Suponha, por exemplo, que um estudo realizado em uma fábrica revele que

$$Q(x, y) = 5x^2 + 7xy$$

unidades de um certo produto são fabricadas quando x operários especializados e y operários não-especializados estão trabalhando. Nesse caso, se o número de operários não-especializados permanece constante, a taxa de variação da produção com o número de operários especializados pode ser obtida derivando $Q(x, y)$ em relação a x. O resultado é chamado de **derivada parcial de Q em relação a x** e representado pelo símbolo $Q_x(x, y)$. Assim,

$$Q_x(x, y) = 5(2x) + 7(1)y = 10x + 7y$$

Da mesma forma, se o número de operários especializados permanece constante, a taxa de variação da produção com o número de operários não-especializados é dada pela **derivada parcial de Q em relação a y**, que é obtida derivando $Q(x, y)$ em relação a y:

$$Q_y(x, y) = (0) + 7x(1) = 7x$$

Apresentamos a seguir uma definição geral de derivada parcial e uma notação alternativa.

Derivada Parcial ■ Se $z = f(x, y)$, a derivada parcial de f em relação a x é representada por

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{ou} \quad f_x(x, y)$$

e é a função obtida derivando f em relação a x enquanto y é tratada como constante. A derivada parcial de f em relação a y é representada por

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{ou} \quad f_y(x, y)$$

e é a função obtida derivando z em relação a y enquanto x é tratada como constante.

NOTA Como vimos no Capítulo 2, a derivada de uma função de uma variável, $f(x)$, é definida como o limite de um quociente diferença:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Analogamente, a derivada parcial $f_x(x, y)$ é dada por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

e a derivada parcial $f_y(x, y)$ é dada por

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$ ■

O Cálculo de Derivadas Parciais

Não é necessária nenhuma nova regra para calcular derivadas parciais. Para calcular f_x, basta derivar f em relação à variável x, tratando a variável y como constante; para calcular f_y, basta derivar f em relação à variável y, tratando a variável x como constante. Seguem alguns exemplos.

4 EXPLORE!

Uma calculadora pode ser usada para calcular e visualizar derivadas parciais em pontos particulares. Como no Exemplo 7.2.1, suponha que $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y/(3x)$ e entre em Y1 com a expressão correspondente, X^2 + 2X*L1^2 + 2L1/(3X). Suponha que estejamos interessados em calcular a derivada parcial $f_x(-2, -1)$. Entre com -1, o valor de y, em L1. Plote Y1 usando uma janela decimal e determine o valor de $f_x(-2, -1)$ usando a rotina para derivação numérica da calculadora. Confirme o resultado analiticamente e plote a tangente até $f(x, y)$ na direção x passando pelo ponto $(-2, -1)$.

EXEMPLO 7.2.1

Calcule as derivadas parciais f_x e f_y de $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \dfrac{2y}{3x}$.

Solução

Para simplificar os cálculos, podemos escrever a função na forma

$$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2}{3}yx^{-1}$$

Para calcular f_x, derivamos a função termo a termo, considerando x como variável e y como constante

$$f_x(x, y) = 2x + 2(1)y^2 + \frac{2}{3}y(-x^{-2}) = 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3x^2}$$

Para calcular f_y, derivamos a função termo a termo, considerando y como variável e x como constante:

$$f_y(x, y) = 0 + 2x(2y) + \frac{2}{3}(1)x^{-1} = 4xy + \frac{2}{3x}$$

EXEMPLO 7.2.2

Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ da função $z = (x^2 + xy + y)^5$.

Solução

Mantendo y constante e usando a regra da cadeia para derivar z em relação a x, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 5(x^2 + xy + y)^4 \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y)\\ &= 5(x^2 + xy + y)^4(2x + y)\end{aligned}$$

Mantendo x constante e usando a regra da cadeia para derivar z em relação a y, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= 5(x^2 + xy + y)^4 \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y)\\ &= 5(x^2 + xy + y)^4(x + 1)\end{aligned}$$

EXEMPLO 7.2.3

Calcule as derivadas parciais f_x e f_y da função $f(x, y) = xe^{-2xy}$.

Solução

De acordo com a regra do produto,

$$f_x(x, y) = x(-2ye^{-2xy}) + e^{-2xy} = (-2xy + 1)e^{-2xy}$$

e de acordo com a regra da multiplicação por uma constante,

$$f_y(x, y) = x(-2xe^{-2xy}) = -2x^2e^{-2xy}$$

Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

Como vimos na Seção 7.1, as funções de duas variáveis podem ser representadas graficamente como superfícies em um sistema de coordenadas tridimensional. Em particular, se $z = f(x, y)$, um par ordenado

(x, y) no domínio de f pode ser associado a um ponto no plano xy e o valor funcional correspondente, $z = f(x, y)$, pode ser associado a uma "altura" em relação a este ponto. O gráfico de f é a superfície formada por todos os pontos (x, y, z) do espaço tridimensional cuja altura z é igual a $f(x, y)$.

As derivadas parciais de uma função de duas variáveis podem ser interpretadas geometricamente da seguinte forma: para cada número fixo y_0, os pontos (x, y_0, z) formam um plano vertical cuja equação é $y = y_0$. Se $z = f(x, y)$ e y é mantido fixo com o valor $y = y_0$, os pontos correspondentes $(x, y_0, f(x, y_0))$ formam uma curva no espaço tridimensional que é a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$. Em cada ponto desta curva, a derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ é simplesmente a inclinação da reta no plano $y = y_0$ que é tangente à curva no ponto em questão. Em outras palavras, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ é a inclinação da tangente "na direção x" (Figura 7.10a).

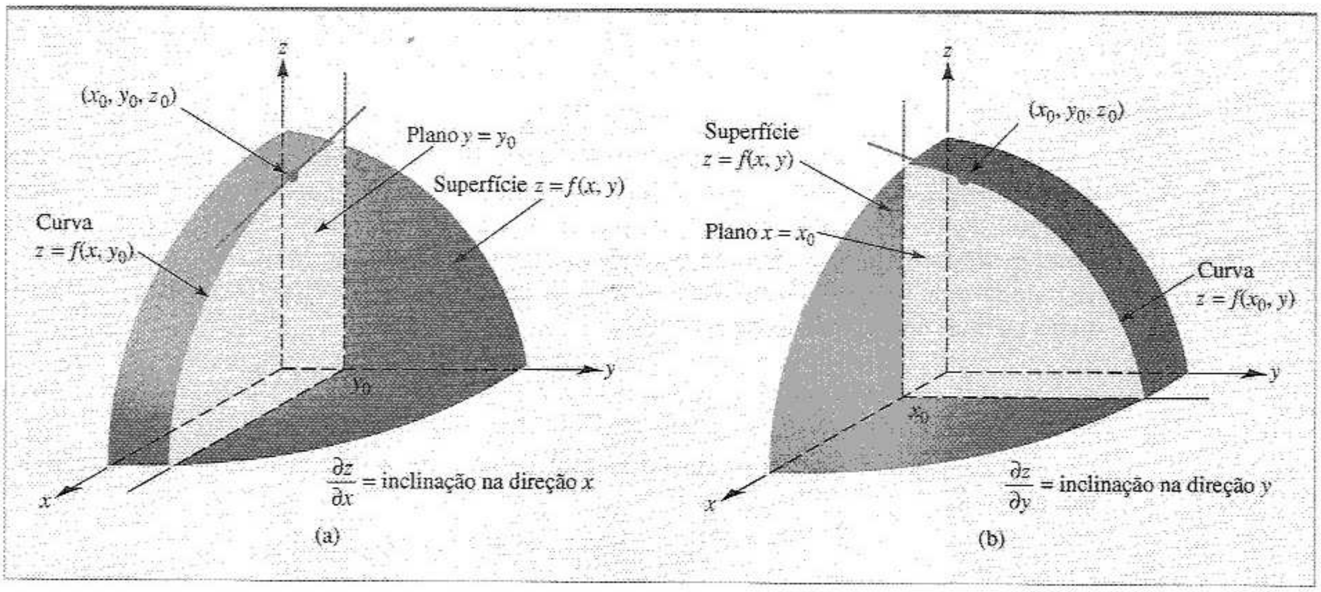


FIGURA 7.10 Interpretação geométrica de derivadas parciais.

Da mesma forma, se x é mantido fixo com o valor $x = x_0$, os pontos correspondentes $(x_0, y, f(x_0, y))$ formam uma curva que é a interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano vertical $x = x_0$. Em cada ponto da curva, a derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ é a inclinação da reta do plano $x = x_0$ que é tangente à curva no ponto em questão. Em outras palavras, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ é a inclinação da tangente "na direção y" (Figura 7.10b).

Análise Marginal

Em economia, o termo **análise marginal** se refere à prática de usar uma derivada para estimar a variação do valor de uma função em conseqüência de uma mudança no valor de uma das variáveis. Na Seção 2.5, vimos alguns exemplos de análise marginal envolvendo derivadas ordinárias de funções de uma variável. O exemplo a seguir ilustra o uso de derivadas parciais em problemas do mesmo tipo.

EXEMPLO 7.2.4

Estima-se que a produção semanal de uma certa fábrica é dada pela função $Q(x, y) = 1.200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ unidades, onde x é o número de operários especializados e y o número de operários não-especializados utilizados no trabalho. No momento, a mão-de-obra disponível é constituída por 30 operários especializados e 60 não-especializados. Use os métodos de análise marginal para estimar a variação da produção se mais 1 operário especializado for contratado e o número de operários não-especializados permanecer constante.

Solução

A derivada parcial

$$Q_x(x, y) = 1.200 + 2xy - 3x^2$$

é a taxa de variação da produção com o número de operários especializados. Para quaisquer valores de x e y, esta é uma aproximação do número de unidades a mais que serão produzidas por semana se o número de operários especializados aumentar de x para $x + 1$ e o número y de operários não-especializados permanecer constante. Em particular, se o número de operários especializados aumentar de 30 para 31 e o número de operários não-especializados permanecer constante em 60, a variação resultante da produção será de aproximadamente

$$Q_x(30, 60) = 1.200 + 2(30)(60) - 3(30)^2 = 2.100 \text{ unidades}$$

Para praticar, calcule a variação exata, $Q(31, 60) - Q(30, 60)$. Comparando a variação exata com a variação estimada, você diria que os métodos da análise marginal permitiram chegar a uma boa aproximação?

Na Seção 7.1, definimos a *função de produção de Cobb-Douglas*

$$Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

onde Q é a produção de um processo industrial, K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão-de-obra em homens-horas. A derivada parcial $Q_K(K, L)$, conhecida como **produtividade marginal do capital**, é uma medida da variação da produção com o capital imobilizado quando o volume da mão-de-obra permanece constante. Analogamente, a derivada parcial $Q_L(K, L)$, conhecida como **produtividade marginal da mão-de-obra**, é uma medida da variação da produção com a mão-de-obra quando o capital imobilizado permanece constante. O Exemplo 7.2.5 ilustra o uso destas derivadas parciais em problemas de economia.

EXEMPLO 7.2.5

Um fabricante estima que a produção mensal de uma certa fábrica é dada pela função de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = 50K^{0,4}L^{0,6}$$

onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão-de-obra em homens-horas.

a. Determine a produtividade marginal do capital, Q_K, e a produtividade marginal da mão-de-obra, Q_L, para um capital imobilizado de R$ 750.000,00 e um volume de mão-de-obra de 991 homens-horas.

b. O fabricante deve aumentar o capital imobilizado ou o volume de mão-de-obra para aumentar rapidamente a produção?

Solução

a.
$$Q_K(K, L) = 50(0,4K^{-0,6})L^{0,6} = 20K^{-0,6}L^{0,6}$$

e

$$Q_L(K, L) = 50K^{0,4}(0,6L^{-0,4}) = 30K^{0,4}L^{-0,4}$$

e, portanto, para $K = 750$ (R$ 750.000,00) e $L = 991$

$$Q_K(750, 991) = 20(750)^{-0,6}(991)^{0,6} \approx 23,64$$

e

$$Q_L(750, 991) = 30(750)^{0,4}(991)^{-0,4} \approx 26,84$$

b. De acordo com o resultado do item (a), um aumento de uma unidade no capital imobilizado (R$ 1.000,00) resulta em um aumento na produção de 23,64 unidades, que é menor que o aumento de 26,84 unidades resultante de um aumento de uma unidade no volume de mão-de-obra. Assim, o fabricante deve aumentar o volume de mão-de-obra para aumentar rapidamente a produção.

Produtos Substitutos e Complementares

Dois produtos são chamados de **produtos substitutos** se o aumento da demanda de um resulta na diminuição da demanda do outro. Produtos substitutos são competitivos, como manteiga e margarina.

Por outro lado, dois produtos são chamados de **produtos complementares** se o aumento da demanda de um resulta no aumento da demanda do outro. É o caso, por exemplo, de computadores e impressoras. Se a demanda de computadores cair, é provável que a demanda de impressoras também diminua.

As derivadas parciais podem ser usadas para verificar se dois produtos são substitutos ou complementares. Suponha que $D_1(p_1, p_2)$ unidades de um produto e $D_2(p_1, p_2)$ unidades de um segundo produto sejam vendidas quando os preços unitários dos dois produtos são p_1 e p_2, respectivamente. É razoável esperar que as demandas diminuam quando os preços aumentam, de modo que

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_2} < 0$$

No caso de produtos substitutos, a demanda de cada produto aumenta quando o preço do outro aumenta; assim,

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_1} > 0$$

No caso de produtos complementares, por outro lado, a demanda de cada produto diminui quando o preço do outro aumenta; assim,

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_1} < 0$$

O Exemplo 7.2.6 ilustra o uso destes critérios para verificar se dois produtos são complementares, substitutos ou nenhuma coisa nem outra.

EXEMPLO 7.2.6

A demanda de farinha de trigo em uma certa cidade é dada por

$$D_1(p_1, p_2) = 500 + \frac{10}{p_1 + 2} - 5p_2$$

enquanto a demanda de pão é dada por

$$D_2(p_1, p_2) = 400 - 2p_1 + \frac{7}{p_2 + 3}$$

onde p_1 é o preço do quilo de farinha de trigo e p_2 é o preço do pão francês de 50 gramas. Verifique se o pão e a farinha de trigo são produtos substitutos ou complementares.

Solução

Calculando as derivadas parciais relevantes, temos

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = -5 < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_1} = -2 < 0$$

Como as duas derivadas parciais são sempre negativas, chegamos à conclusão de que o pão e a farinha de trigo (como era de se esperar) são produtos complementares.

Derivadas Parciais de Segunda Ordem

As derivadas parciais podem ser novamente derivadas. As funções resultantes recebem o nome de **derivadas parciais de segunda ordem**. Apresentamos a seguir uma lista das quatro possíveis derivadas parciais de segunda ordem de uma função de duas variáveis.

Derivadas Parciais de Segunda Ordem ■ Se $z = f(x, y)$, a derivada parcial de f_x em relação a x é

$$f_{xx} = (f_x)_x \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

A derivada parcial de f_x em relação a y é

$$f_{xy} = (f_x)_y \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

(continua)

A derivada parcial de f_y em relação a x é

$$f_{yx} = (f_y)_x \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

A derivada parcial de f_y em relação a y é

$$f_{yy} = (f_y)_y \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

O Exemplo 7.2.7 ilustra o cálculo de derivadas parciais de segunda ordem.

EXEMPLO 7.2.7

Calcule as quatro derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x, y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x + 1$$

Solução

Como

$$f_x = y^3 + 5y^2 + 2$$

temos

$$f_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad f_{xy} = 3y^2 + 10y$$

Como

$$f_y = 3xy^2 + 10xy$$

temos

$$f_{yy} = 6xy + 10x \quad \text{e} \quad f_{yx} = 3y^2 + 10y$$

NOTA As derivadas parciais de segunda ordem f_{xy} e f_{yx} são chamadas de **derivadas parciais mistas** de f. Observe que as derivadas parciais mistas calculadas no Exemplo 7.2.7 são iguais. Isto não é coincidência. Na grande maioria dos casos, as derivadas parciais mistas de uma função $f(x, y)$ são iguais, ou seja,

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Isto significa que obtemos a mesma resposta se derivamos $f(x, y)$ em relação a x e derivamos o resultado em relação a y e se derivamos $f(x, y)$ em relação a y e derivamos o resultado em relação a x. ■

O Exemplo 7.2.8 ilustra o uso da derivada parcial de segunda ordem em um problema da vida real.

EXEMPLO 7.2.8

A produção Q de uma fábrica depende do capital K investido na fábrica e também do volume de mão-de-obra L, medido em homens-horas. Qual é o significado econômico do sinal da derivada parcial de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$?

Solução

Se $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ é negativa, a produtividade marginal da mão-de-obra $\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ diminui quando L aumenta. Isto significa que, para um capital investido constante, o efeito sobre a produção do aumento da mão-de-obra em 1 unidade é maior quando o volume de mão-de-obra é pequeno.

Por outro lado, se $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ é positiva, o efeito sobre a produção do aumento da mão-de-obra em 1 unidade é maior quando o volume de mão-de-obra é grande.

Na maioria das fábricas que operam com uma mão-de-obra adequada, $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ é negativa. O leitor pode apresentar uma explicação para este fato?

Regra da Cadeia para Funções de Duas Variáveis

Em muitos problemas práticos, uma certa grandeza é função de duas ou mais variáveis, que, por sua vez, dependem de outra variável, e o objetivo é o de determinar a taxa de variação da grandeza com esta outra variável. Assim, por exemplo, a demanda de um certo produto pode depender do preço do produto e do preço de um produto concorrente, os dois preços podem estar variando com o tempo e o objetivo pode ser o de determinar a taxa de variação da demanda com o tempo. Podemos resolver problemas deste tipo usando uma generalização da regra da cadeia

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}$$

demonstrada na Seção 2.4.

Regra da Cadeia para Funções de Duas Variáveis ■ Suponha que z seja uma função de x e y e que x e y sejam funções de t. Nesse caso, z também é função de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Observe que a expressão de $\dfrac{dz}{dt}$ é a soma de dois termos, cada um dos quais pode ser interpretado usando a regra da cadeia para funções de uma variável. Em particular,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \text{taxa de variação de } z \text{ com } t \text{ para } y \text{ constante}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \text{taxa de variação de } z \text{ com } t \text{ para } x \text{ constante}$$

De acordo com a regra da cadeia para funções de duas variáveis, a taxa de variação total de z com t é a soma destas duas taxas de variação "parciais". O exemplo a seguir ilustra o uso da regra da cadeia para funções de duas variáveis.

EXEMPLO 7.2.9

Uma loja de produtos naturais vende dois tipos de cápsulas vitamínicas, marca A e marca B. As pesquisas de mercado mostram que, se um vidro da marca A for vendido por x reais e um vidro da marca B for vendido por y reais, a demanda da marca A será

$$Q(x, y) = 300 - 20x^2 + 30y \quad \text{vidros por mês}$$

Estima-se que daqui a t meses o preço de um vidro da marca A será

$$x = 2 + 0{,}05t \quad \text{reais}$$

e o preço de um vidro da marca B será

$$y = 2 + 0{,}1\sqrt{t} \quad \text{reais}$$

Qual será a taxa de variação com o tempo da demanda da marca A daqui a 4 meses?

Solução

Estamos interessados em calcular $\dfrac{dQ}{dt}$ para $t = 4$. Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -40x(0{,}05) + 30(0{,}05t^{-1/2})$$

Para $t = 4$, $$x = 2 + 0{,}05(4) = 2{,}2$$

e, portanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -40(2,2)(0,05) + 30(0,05)(0,5) = -3,65$$

Assim, daqui a 4 meses a demanda da marca A estará diminuindo à taxa de 3,65 vidros por mês.

Como vimos na Seção 2.5, é possível usar incrementos para estimar a variação de uma função em conseqüência de uma pequena variação da variável independente. Em particular, se y é função de x, temos

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

onde Δx é uma pequena variação de x e Δy é a variação correspondente de y. Existe uma aproximação análoga para funções de duas variáveis, baseada na regra da cadeia.

Fórmula da Aproximação Incremental para Funções de Duas Variáveis ■ Suponha que z seja função de x e y. Se Δx é uma pequena variação de x e Δy uma pequena variação de y, a variação correspondente de z é dada por

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

As aproximações da análise marginal utilizadas nos Exemplos 7.2.4 e 7.2.5 envolviam incrementos unitários. A fórmula da aproximação incremental permite um uso mais abrangente das técnicas de análise marginal, como ilustra o Exemplo 7.2.10.

EXEMPLO 7.2.10

Em uma certa fábrica, a produção diária é $Q = 60K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, onde K representa o capital imobilizado em milhares de reais e L o volume de mão-de-obra em homens-horas por dia. No momento, o capital imobilizado é de R$ 900.000,00 e estão sendo usados 1.000 homens-horas. Estime a variação da produção resultante de um aumento de R$ 1.000,00 no capital imobilizado e um aumento de 2 no número de homens-horas por dia.

Solução

Aplicando a fórmula da aproximação incremental com $K = 900$, $L = 1.000$, $\Delta K = 1$ e $\Delta L = 2$, temos

$$\begin{aligned}\Delta Q &\approx \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L \\ &= 30K^{-1/2}L^{1/3}\,\Delta K + 20K^{1/2}L^{-2/3}\,\Delta L \\ &= 30\left(\frac{1}{30}\right)(10)(1) + 20(30)\left(\frac{1}{100}\right)(2) \\ &= 22 \text{ unidades}\end{aligned}$$

Assim, a produção aumentará de aproximadamente 22 unidades.

PROBLEMAS 7.2

Nos Problemas 1 a 16, calcule todas as derivadas parciais de primeira ordem da função dada.

1. $f(x, y) = 2xy^5 + 3x^2y + x^2$
2. $z = 5x^2y + 2xy^3 + 3y^2$
3. $z = (3x + 2y)^5$
4. $f(x, y) = (x + xy + y)^3$
5. $f(s, t) = \dfrac{3t}{2s}$
6. $z = \dfrac{t^2}{s^3}$

7. $z = xe^{xy}$

8. $f(x, y) = xye^{x}$

9. $f(x, y) = \dfrac{e^{2-x}}{y^2}$

10. $f(x, y) = xe^{x+2y}$

11. $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{y - x}$

12. $z = \dfrac{xy^2}{x^2y^3 + 1}$

13. $z = u \ln v$

14. $f(u, v) = u \ln uv$

15. $f(x, y) = \dfrac{\ln (x + 2y)}{y^2}$

16. $z = \ln\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

Nos Problemas 17 a 20, calcule as derivadas parciais $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ no ponto dado $P_0(x_0, y_0)$.

17. $f(x, y) = 3x^2 - 7xy + 5y^3 - 3(x + y) - 1$; em $P_0(-2, 1)$

18. $f(x, y) = (x - 2y)^2 + (y - 3x)^2 + 5$; em $P_0(0, -1)$

19. $f(x, y) = xe^{-2y} + ye^{-x} + xy^2$; em $P_0(0, 0)$

20. $f(x, y) = xy \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ln (2x - 3y)^2$; em $P_0(1, 1)$

Nos Problemas 21 a 26, calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem (incluindo as derivadas parciais mistas).

21. $f(x, y) = 5x^4y^3 + 2xy$

22. $f(x, y) = \dfrac{x + 1}{y - 1}$

23. $f(x, y) = e^{x^2y}$

24. $f(u, v) = \ln (u^2 + v^2)$

25. $f(s, t) = \sqrt{s^2 + t^2}$

26. $f(x, y) = x^2ye^{x}$

PRODUTOS SUBSTITUTOS E COMPLEMENTARES *Nos Problemas 27 a 32, são dadas funções de demanda de um par de produtos. Use derivadas parciais para determinar se os produtos são substitutos, complementares ou nem uma coisa nem outra.*

27. $D_1 = 500 - 6p_1 + 5p_2$; $D_2 = 200 + 2p_1 - 5p_2$

28. $D_1 = 1.000 - 0{,}02p_1^2 - 0{,}05p_2^2$; $D_2 = 800 - 0{,}001p_1^2 - p_1p_2$

29. $D_1 = 3.000 + \dfrac{400}{p_1 + 3} + 50p_2$; $D_2 = 2.000 - 100p_1 + \dfrac{500}{p_2 + 4}$

30. $D_1 = 2.000 + \dfrac{100}{p_1 + 2} - 25p_2$; $D_2 = 1.500 - \dfrac{p_2}{p_1 + 7}$

31. $D_1 = \dfrac{7p_2}{1 + p_1^2}$; $D_2 = \dfrac{p_1}{1 + p_2^2}$

32. $D_1 = 200p_1^{-1/2}p_2^{-1/2}$; $D_2 = 300p_1^{-1/2}p_2^{-3/2}$

EQUAÇÃO DE LAPLACE *Para que uma função $z = f(x, y)$ satisfaça a **equação de Laplace**, é preciso que $z_{xx} + z_{yy} = 0$. As funções que satisfazem esta equação desempenham um papel importante em vários campos da física, especialmente na eletricidade e no magnetismo. Nos Problemas 33 a 36, verifique se a função dada satisfaz a equação de Laplace.*

33. $z = x^2 - y^2$

34. $z = xy$

35. $z = xe^{y} - ye^{x}$

36. $z = [(x - 1)^2 + (y + 3)^2]^{-1/2}$

37. ANÁLISE MARGINAL Em uma certa fábrica, a produção diária é $Q(K, L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L o volume de mão-de-obra em homens-horas. O capital imobilizado atual é de R$ 900.000,00 e o volume de mão-de-obra é de 1.000 homens-horas por dia. Use os métodos de análise marginal para estimar o efeito de um investimento adicional de R$ 1.000,00 sobre a produção diária se o volume de mão-de-obra permanecer constante.

38. PRODUTIVIDADE MARGINAL Um fabricante estima que a produção anual de uma certa fábrica é dada por

$$Q(K, L) = 30K^{0,3}L^{0,7}$$

unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão-de-obra em homens-horas.

a. Determine a produtividade marginal do capital, Q_K, e a produtividade marginal da mão-de-obra, Q_L, para um capital imobilizado de R$ 630.000,00 e um volume de mão-de-obra de 830 homens-horas.

b. Para aumentar rapidamente a produtividade, o fabricante deve aumentar o investimento ou a mão-de-obra?

39. PRODUTIVIDADE MARGINAL A produtividade de um certo país é dada por

$$Q(K, L) = 90K^{1/3}L^{2/3}$$

unidades, onde K é o capital imobilizado em milhões de reais e L é o volume da mão-de-obra em milhares de homens-horas.

a. Determine a produtividade marginal do capital, Q_K, e a produtividade marginal da mão-de-obra, Q_L, para um capital imobilizado de R$ 5.495.000.000,00 ($K = 5.495{,}00$) e um volume de mão-de-obra de 4.587.000 homens-horas ($L = 4.587$).

b. Para que a produtividade aumente o mais depressa possível, o governo do país deve estimular o aumento dos investimentos ou da mão-de-obra?

40. ANÁLISE MARGINAL O lucro diário de um varejista com a venda de duas marcas de suco de caju é

$$P(x, y) = (x - 30)(70 - 5x + 4y) + (y - 40)(80 + 6x - 7y)$$

centavos, onde x é o preço por garrafa do primeiro suco e y é o preço por garrafa do segundo. No momento, o primeiro suco está sendo vendido por 50 centavos a garrafa e o segundo por 52 centavos a garrafa. Use os métodos de análise marginal para estimar qual será a mudança do lucro diário se o varejista aumentar em 1 centavo o preço da garrafa do segundo suco e mantiver inalterado o preço do primeiro.

41. HEMODINÂMICA Quanto menor a resistência à vazão dos vasos sangüíneos, menor a energia despendida pelo coração para bombear o sangue. De acordo com uma das leis de Poiseuille,* a resistência à vazão em um vaso sangüíneo é dada pela expressão

$$F(L, r) = \frac{kL}{r^4}$$

onde L é o comprimento do vaso, r é o raio do vaso e k é uma constante que depende da viscosidade do sangue.

a. Calcule F, $\dfrac{\partial F}{\partial L}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ para $L = 3{,}17$ cm e $r = 0{,}085$ cm. Deixe a resposta em função de k.

b. Suponha que o vaso do item (a) seja alongado e estreitado de tal forma que o comprimento fique 20% maior e o raio 20% menor. Como estas mudanças afetam a vazão $F(L, r)$? Como afetam os valores de $\dfrac{\partial F}{\partial L}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial r}$?

42. DEMANDA A demanda mensal de uma certa marca de torradeiras é dada por uma função $f(x, y)$, onde x é o investimento em propaganda (em milhares de reais) e y é o preço unitário das torradeiras (em reais). O que significam, do ponto de vista econômico, as derivadas parciais f_x e f_y? Qual o valor esperado para os sinais destas derivadas em circunstâncias econômicas normais?

43. DEMANDA Um revendedor de bicicletas constatou que, se as bicicletas de 10 marchas forem vendidas por x reais a unidade e o preço da gasolina for y centavos o litro, o número de bicicletas vendidas por mês será dado por

$$F(x, y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4(0{,}1y + 3)^{3/2}$$

No momento, as bicicletas estão sendo vendidas por R\$ 324,00 e a gasolina custa R\$ 2,20 o litro. Use os métodos de análise marginal para determinar a variação da demanda de bicicletas de 10 marchas se o preço da gasolina diminuir em 1 centavo por litro e o preço das bicicletas não for alterado.

44. ÁREA SUPERFICIAL DO CORPO HUMANO Como vimos no Problema 35 da Seção 7.1, a área superficial de uma pessoa é dada pela expressão empírica

$$S(W, H) = 0{,}0072W^{0{,}425}H^{0{,}725}$$

onde W (kg) e H (cm), são, respectivamente, o peso e a altura da pessoa. No momento, uma certa criança pesa 34 kg e tem 120 cm de altura.

a. Calcule as derivadas parciais $S_W(34, 120)$ e $S_H(34, 120)$ e interprete-as como taxas de variação.

b. Estime qual será a variação da área superficial se a criança engordar 1 kg e sua altura permanecer inalterada.

45. EMBALAGENS Uma lata de refrigerante é um cilindro de altura H e raio R; o volume da lata é dado por $V = \pi R^2 H$. Uma certa lata tem 12 cm de altura e 3 cm de raio. Use os métodos do cálculo para estimar a variação de volume se o raio for aumentado de 1 cm e altura mantida em 12 cm.

46. EMBALAGENS A superfície da lata de refrigerante do Problema 35 tem uma área $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. Use os métodos do cálculo para estimar a variação da área da superfície da lata:

a. Se o raio aumentar de 3 para 4 cm e a altura permanecer constante em 12 cm.

b. Se a altura diminuir de 12 para 11 cm e a altura permanecer constante em 3 cm.

47. DEMANDA Duas marcas rivais de cortadores de grama motorizados são vendidas na mesma cidade. Os cortadores da primeira marca custam x reais e os da segunda marca, y reais. A demanda de cortadores da primeira marca é dada por uma função $D(x, y)$.

a. Como a demanda de cortadores da primeira marca será provavelmente afetada por um aumento de x? Como será afetada por um aumento de y?

b. Responda ao item (a) em termos dos sinais das derivadas parciais de D.

c. Se $D(x, y) = a + bx + cy$, o que se pode dizer a respeito dos sinais dos coeficientes b e c para que as conclusões dos itens (a) e (b) sejam válidas?

48. FÍSICO-QUÍMICA Segundo a **lei dos gases ideais**, $PV = nRT$, onde n é o número de moles de um gás, P é a pressão exercida pelo gás, V é o volume do gás, T é a temperatura do gás e R é uma constante, conhecida como **constante dos gases ideais**. Calcule o valor do produto

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}$$

49. CARDIOLOGIA Para estimar a quantidade de sangue que passa por um dos pulmões de um paciente, os cardiologistas usam a expressão empírica

$$P(x, y, u, v) = \frac{100xy}{xy + uv}$$

onde P é uma porcentagem da quantidade total de sangue, x é a quantidade de dióxido de carbono que sai do pulmão, y é a diferença entre as quantidades de dióxido de carbono que entram e saem do pulmão, u é a quantidade de dióxido de carbono que sai do outro pulmão e v é a diferença entre as quantidades de dióxido de carbono que entram e saem do outro pulmão.

Como a principal função do pulmão é remover o dióxido de carbono do sangue e carregá-lo com oxigênio, a diferença entre as quantidades de dióxido de carbono que entram e saem do pulmão é uma medida da eficiência com que o órgão executa esta função. (A medida deste parâmetro é executada por um instrumento conhecido como **capnógrafo**.)

Calcule as derivadas parciais P_x, P_y, P_u e P_v e explique o que significam em termos fisiológicos.

---

*E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, p. 279.

50. CIRCUITO ELÉTRICO Em um circuito elétrico com dois resistores de resistências R_1 e R_2 ligados em paralelo, a resistência total R é dada pela expressão

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Mostre que

$$R_1 \frac{\partial R}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial R}{\partial R_2} = R$$

51. CIRCULAÇÃO SANGÜÍNEA A passagem de sangue de uma artéria para um capilar é dada pela expressão

$$F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4}\sqrt{y - z} \quad \text{cm}^3/\text{s}$$

onde c é uma constante positiva, x é o diâmetro do capilar, y é a pressão na artéria e z é a pressão no capilar. Qual é a expressão da taxa de variação da vazão de sangue em função da pressão no capilar, supondo que a pressão na artéria e o diâmetro do capilar permaneçam constantes? Esta taxa é crescente ou decrescente?

52. PRODUTIVIDADE MARGINAL A produção Q de uma fábrica depende do valor K do capital imobilizado e do volume L da mão-de-obra disponível. Qual é o significado, em termos econômicos, da derivada parcial de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$?

53. PRODUTIVIDADE MARGINAL Em uma certa fábrica, a produção é $Q = 120K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L é o volume de mão-de-obra em homens-horas.

a. Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ e explique o que significa em termos econômicos.

b. Determine o sinal da derivada parcial de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$ e explique o que significa em termos econômicos.

54. LEI DOS RETORNOS DECRESCENTES Em geral, a produção diária Q de uma fábrica depende do valor K do capital imobilizado e do volume L da mão-de-obra disponível. De acordo com a **lei dos retornos decrescentes**, em certas circunstâncias existe um valor L_0 tal que a produção marginal da mão-de-obra é crescente para $L < L_0$ e decrescente para $L > L_0$.

a. Enuncie a lei dos retornos decrescentes em termos do sinal de uma derivada parcial de segunda ordem.

b. Leia a respeito do princípio dos retornos decrescentes em livros de economia e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito dos fatores econômicos que podem ser responsáveis por este fenômeno.

55. Estima-se que a produção semanal de uma certa fábrica é dada por

$$Q(x, y) = 1.175x + 483y + 3{,}1x^2y - 1{,}2x^3 - 2{,}7y^2$$

unidades, onde x é o número de operários especializados e y é o número de operários não-especializados que trabalham na fábrica. No momento, a fábrica emprega 37 operários especializados e 71 não-especializados.

a. Entre com a função de produção em uma calculadora como

```
1,175X + 483Y + 3.1(X^2)*Y
     − 1.2(X^3) − 2.7(Y^2)
```

Entre com 37 como X e 71 como Y e calcule o valor de $Q(37, 71)$. Faça o mesmo para $Q(38, 71)$ e $Q(37, 72)$.

b. Entre na calculadora com a derivada parcial $Q_x(x, y)$ e calcule o valor de $Q_x(37, 71)$. Use o resultado para estimar a variação da produção se a fábrica admitir mais um operário especializado. Compare esta variação estimada com a variação real, dada pela diferença entre $Q(38, 71) - Q(37, 71)$.

c. Use a derivada parcial $Q_y(x, y)$ para estimar a variação da produção se a fábrica admitir mais um operário não-especializado. Compare esta variação estimada com a variação real, dada pela diferença entre $Q(37, 72) - Q(37, 71)$.

56. Repita o Problema 53 para a função de produção

$$Q(x, y) = 1.731x + 925y + x^2y - 2{,}7x^2 - 1{,}3y^{3/2}$$

e valores iniciais $x = 43$ e $y = 85$.

Os Problemas 57 a 71 envolvem a regra da cadeia para derivadas parciais ou a fórmula da aproximação por incrementos para funções de duas variáveis.

Nos Problemas 57 a 62, use a regra da cadeia para determinar $\dfrac{dz}{dt}$. *Expresse a resposta em termos de x, y e t.*

57. $z = 2x + 3y;\ x = t^2,\ y = 5t$

58. $z = x^2y;\ x = 3t + 1,\ y = t^2 - 1$

59. $z = \dfrac{3x}{y};\ x = t,\ y = t^2$

60. $z = x^{1/2}y^{1/3};\ x = 2t,\ y = 2t^2$

61. $z = xy;\ x = e^{2t},\ y = e^{-3t}$

62. $z = \dfrac{x + y}{x - y};\ x = t^3 + 1,\ y = 1 - t^2$

63. PRODUÇÃO Usando x horas de mão-de-obra especializada e y horas de mão-de-obra não-especializada, um fabricante é capaz de produzir $Q(x, y) = 10xy^{1/2}$ unidades. No momento, 30 horas de mão-de-obra especializada e 36 horas de mão-de-obra não-especializada estão sendo usadas. Suponha que o fabricante reduza de 3 horas a quantidade de mão-de-obra especializada e aumente de 5 horas a quantidade de mão-de-obra não-especializada. Use os métodos do cálculo para determinar o efeito aproximado destas mudanças sobre a produção.

64. DEMANDA Um revendedor de automóveis determina que se os carros híbridos que podem funcionar com gasolina e eletricidade forem vendidos por x reais e o preço da gasolina for y reais o litro, aproximadamente H carros híbridos serão vendidos por mês, onde

$$H(x, y) = 2.500 - 19x^{1/2} + 6(0{,}1y + 11)^{3/2}$$

O revendedor determina também que daqui a t meses os carros híbridos serão vendidos por

$$x(t) = 34.000 + 700t$$

reais e que o preço da gasolina será

$$y(t) = 220 + 10(3t)^{1/2}$$

centavos por litro. Qual será a taxa de variação com o tempo da demanda mensal de carros híbridos daqui a 3 meses? A demanda estará aumentando ou diminuindo?

65. DEMANDA A demanda de um certo produto é

$$Q(x, y) = 200 - 10x^2 + 20xy$$

unidades por mês, onde x é o preço do produto e y é o preço de um produto concorrente. Estima-se que daqui a t meses o preço do produto será

$$x(t) = 10 + 0{,}5t$$

reais, enquanto o preço do produto concorrente será

$$y(t) = 12{,}8 + 0{,}2t^2$$

reais.

a. Qual será a taxa de variação da demanda do produto com o tempo daqui a 4 meses?

b. Qual será a taxa de variação percentual $100Q'(t)/Q(t)$ da demanda do produto com o tempo daqui a 4 meses?

66. PRODUÇÃO Em uma certa fábrica, quando o capital imobilizado é K milhares de reais e L homens-horas de mão-de-obra são usados, a produção diária é $Q = 120K^{1/2}L^{1/3}$ unidades. O capital imobilizado no momento é de R\$ 400.000,00 ($K = 400$) e está aumentando à taxa de R\$ 9.000,00 por dia, enquanto 1.000 homens-horas estão sendo usados e a mão-de-obra está diminuindo à taxa de 4 homens-horas por dia. Qual é a taxa de aumento atual da produção? A produção está aumentando ou diminuindo?

67. PRODUÇÃO A produção de uma certa fábrica é

$$Q(x, y) = 0{,}08x^2 + 0{,}12xy + 0{,}03y^2$$

unidades por dia, onde x é o número de horas de mão-de-obra especializada e y o número de horas de mão-de-obra não-especializada. No momento, são usadas diariamente 80 horas de mão-de-obra especializada e 200 horas de mão-de-obra não-especializada. Use os métodos do cálculo para estimar a variação da produção se forem usadas mais $\frac{1}{2}$ hora de mão-de-obra especializada e 2 horas de mão-de-obra não-especializada por dia.

68. VENDAS A VAREJO O lucro diário do dono de uma mercearia com a venda de duas marcas de suco de laranja é

$$P(x, y) = (x - 30)(70 - 5x + 4y) + (y - 40)(80 + 6x - 7y)$$

centavos, onde x é o preço por garrafa da primeira marca e y é o preço por garrafa da segunda, ambos em centavos. No momento, o preço da garrafa é de 50 centavos para a primeira marca e de 52 centavos para a segunda. Use os métodos do cálculo para estimar a variação do lucro diário se o preço da primeira marca for aumentado em 1 centavo e o preço da segunda for aumentado em 2 centavos.

69. VENDAS O dono de uma editora estima que se investir x milhares de reais na produção e y milhares de reais em publicidade, aproximadamente $Q(x, y) = 20x^{3/2}y$ exemplares de um novo livro serão vendidos. A idéia inicial é investir R\$ 36.000,00 na produção e R\$ 25.000,00 em publicidade. Use os métodos do cálculo para estimar de que forma as vendas serão afetadas se a quantia investida na produção for aumentada em R\$ 500,00 e a quantia investida em publicidade for reduzida em R\$ 1.000,00.

70. PAISAGISMO Um jardim retangular de 30 metros de frente e 40 metros de profundidade é cercado por uma calçada de cimento com 0,8 metro de largura. Use os métodos do cálculo para estimar a área da calçada.

71. EMBALAGENS Uma lata de refrigerante tem H centímetros (cm) de altura e um raio de R cm. O custo do material da lata é de 0,0005 centavos por cm² e o refrigerante custa 0,001 centavo por cm³.

a. Escreva a função $C(R, H)$ que expressa o custo de uma lata cheia de refrigerante. (Você vai precisar das expressões de volume e de área de superfície dadas nos Problemas 45 e 46.)

b. As latas têm atualmente 12 cm de altura e 3 cm de raio. Use os métodos do cálculo para estimar o efeito sobre o custo de um aumento de 0,3 cm no raio e uma diminuição de 0,2 cm na altura.

72. INCLINAÇÃO DE UMA CURVA DE NÍVEL Suponha que $y = h(x)$ seja uma função derivável de x e que $f(x, y) = C$, onde C é uma constante. Use a regra da cadeia (com x assumindo o papel de t) para mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Esta relação mostra que a inclinação em qualquer ponto (x, y) da curva de nível $F(x, y) = C$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

73. Use a relação obtida no Problema 72 para determinar a inclinação da curva de nível

$$x^2 + xy + y^3 = 1$$

no ponto $(-1, 1)$. Qual é a equação da reta tangente à curva de nível neste ponto?

74. Use a relação obtida no Problema 72 para determinar a inclinação da curva de nível

$$x^2y + 2y^3 - 2e^{-x} = 14$$

no ponto $(0, 2)$. Qual é a equação da reta tangente à curva de nível neste ponto?

75. UTILIDADE Suponha que a utilidade para um consumidor de x unidades de um produto e y unidades de um segundo produto seja dada pela função de utilidade $U(x, y) = (x + 1)(y + 2)$. O consumidor atualmente possui $x = 25$ unidades do primeiro produto e $y = 8$ unidades do segundo. Use os métodos do cálculo para estimar o número de unidades do primeiro produto que o consumidor pode trocar por 1 unidade do segundo produto sem que a utilidade total seja afetada.

SEÇÃO 7.3 Otimização de Funções de Duas Variáveis

Suponha que um fabricante produza dois modelos de DVD player, o modelo de luxo e o modelo padrão, e que o custo total para produzir x unidades do modelo de luxo e y unidades do modelo padrão seja dado pela função $C(x, y)$. Como determinar o nível de produção $x = a$ e $y = b$ para o qual o custo é mínimo? Suponha que a produção de uma certa fábrica seja dada por uma função $Q(K, L)$, onde K é a capital imobilizado e L o volume da mão-de-obra. Para que valores $K = K_0$ e $L = L_0$ a produção será máxima?

Na Seção 3.4, aprendemos a usar a derivada $f'(x)$ para determinar os valores máximos e mínimos da uma função de uma variável $f(x)$; nesta seção, vamos discutir o uso de métodos semelhantes no caso de funções de duas variáveis, $f(x, y)$. Começamos com uma definição.

Extremos Relativos ■ Dizemos que uma função $f(x, y)$ possui um **máximo relativo** em um ponto $P(a, b)$ do domínio de f se $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) situados no interior de um disco circular com centro no ponto P. Analogamente, se $f(c, d) \leq f(x, y)$ para todos os pontos (x, y) situados no interior de um disco circular com centro em um ponto $Q(c, d)$, $f(x, y)$ possui um **mínimo relativo** no ponto Q.

Em termos geométricos, existe um máximo relativo de $f(x, y)$ no ponto $P(a, b)$ se a superfície $z = f(x, y)$ possui um "pico" no ponto $(a, b, f(a, b))$, ou seja, se o ponto $(a, b, f(a, b))$ é pelo menos tão alto quanto qualquer ponto próximo. Da mesma forma, existe um mínimo relativo de $f(x, y)$ no ponto $Q(c, d)$ se o ponto $(c, d, f(c, d))$ está no fundo de uma "depressão", ou seja, se o ponto $(c, d, f(c, d))$ é pelo menos tão baixo quanto qualquer ponto próximo. A função $f(x, y)$ da Figura 7.11, por exemplo, possui um máximo relativo no ponto $P(a, b)$ e um mínimo relativo no ponto $Q(c, d)$.

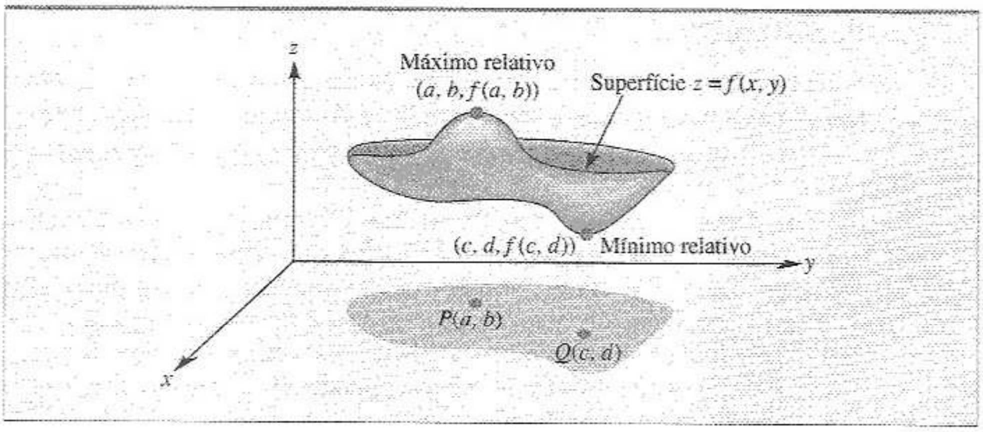
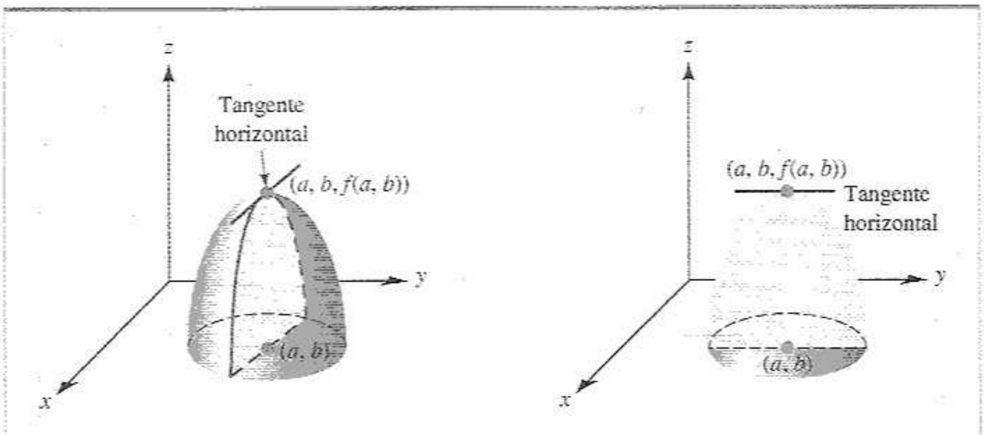


FIGURA 7.11 Extremos relativos da função $f(x, y)$.

Pontos Críticos

Os pontos (a, b) do domínio de $f(x, y)$ para os quais $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$ são chamados de **pontos críticos** de f. Como os números críticos das funções de uma variável, estes pontos críticos desempenham um papel importante no estudo dos máximos e mínimos relativos.

Para ter uma idéia da relação que existe entre os pontos críticos e os extremos relativos, suponha que $f(x, y)$ possua um máximo relativo no ponto (a, b). Nesse caso, a curva formada pela interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano vertical $y = b$ possui um máximo relativo e, portanto, uma tangente horizontal no ponto $x = a$ (Figura 7.12a). Como a inclinação desta tangente é dada pela derivada parcial $f_x(a, b)$, devemos ter necessariamente $f_x(a, b) = 0$. Do mesmo modo, a curva formada pela interseção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano vertical $x = a$ possui um máximo relativo e, portanto, uma tangente horizontal no ponto $y = b$ (Figura 7.12b), de modo que $f_y(a, b) = 0$. Isto mostra que um ponto no qual uma função de duas variáveis possui um máximo relativo ou um mínimo relativo deve ser necessariamente um ponto crítico.



(a) Para $y = b$, a inclinação $f_x(a, b) = 0$

(b) Para $x = a$, a inclinação $f_y(a, b) = 0$

FIGURA 7.12 As derivadas parciais são nulas em um extremo relativo.

Segue uma descrição mais precisa da situação.

Pontos Críticos e Extremos Relativos ■ Um ponto (a, b) do domínio de uma função $f(x, y)$ no qual as derivadas f_x e f_y existem é chamado de *ponto crítico* de f se

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(a, b) = 0$$

Quando as derivadas parciais de primeira ordem de f existem em todos os pontos de uma região R do plano xy, os extremos relativos de f em R só podem ocorrer em pontos críticos.

Pontos de Sela

Embora todos os extremos relativos de uma função devam ocorrer em pontos críticos, os pontos críticos não são necessariamente extremos relativos. Assim, por exemplo, se $f(x, y) + y^2 - x^2$,

$$f_x(x, y) = -2x \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 2y$$

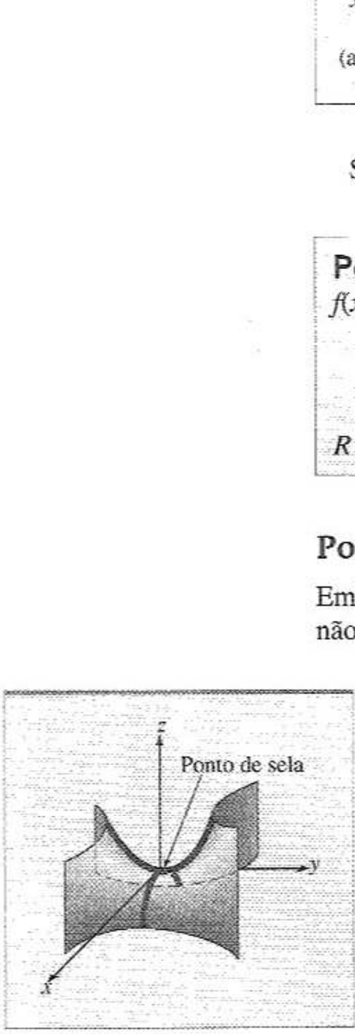


FIGURA 7.13 A superfície $z = y^2 - x^2$ com um ponto de sela no ponto $(0, 0)$.

e, portanto, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Assim, a origem $(0, 0)$ é um ponto crítico de $f(x, y)$ e a superfície $z = y^2 - x^2$ possui tangentes horizontais na origem tanto na direção do eixo x como na direção do eixo y. Entretanto, a interseção da superfície com o plano xz (no qual $y = 0$) é a parábola $z = -x^2$, cuja concavidade é para baixo, enquanto a interseção com o plano yz (no qual $x = 0$) é a parábola $z = y^2$, cuja concavidade é para cima. Isto significa que, na origem, a superfície $z = y^2 - x^2$ possui um *máximo relativo* quando observada "na direção x" e um *mínimo relativo* quando observada "na direção y".

Em vez de possuir um "pico" ou uma "depressão" no ponto crítico $(0, 0)$, a superfície $z = y^2 - x^2$ tem a forma de uma "sela", como mostra a Figura 7.13, e por esta razão é chamada de **superfície de sela**. Para que um ponto crítico seja um extremo relativo, é preciso que o extremo seja do mesmo tipo em *todas as direções*. Um ponto crítico (como a origem neste exemplo) que é um máximo relativo em uma direção e um mínimo relativo em outra direção é chamado de **ponto de sela**.

Teste das Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Vamos apresentar a seguir um método, baseado nas derivadas parciais de segunda ordem, para determinar se um ponto crítico é um máximo relativo, ou mínimo relativo ou um ponto de sela. Este método é uma extensão do teste da derivada segunda para funções de uma variável, apresentado na Seção 3.2.

Teste das Derivadas Parciais de Segunda Ordem

Seja $f(x, y)$ uma função de x e y cujas derivadas parciais f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} e f_{xy} existem, e seja $D(x, y)$ a função

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

(continua)

1º passo: Determine todos os pontos críticos de $f(x, y)$, ou seja, todos os pontos (a, b) tais que

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y(a, b) = 0$$

2º passo: Para cada ponto crítico (a, b) determinado no item 1, calcule o valor de $D(a, b)$.

3º passo: Se $D(a, b) < 0$, existe um **ponto de sela** em (a, b).

4º passo: Se $D(a, b) > 0$, calcule $f_{xx}(a, b)$.
Se $f_{xx}(a,b) > 0$, existe um **mínimo relativo** em (a, b).
Se $f_{xx}(a,b) < 0$, existe um **máximo relativo** em (a, b).

Se $D = 0$, o teste não pode ser aplicado; f pode possuir um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela no ponto (a, b).

Observe que só existe um ponto de sela no ponto crítico (a, b) quando o parâmetro D do teste das derivadas parciais de segunda ordem é negativo. Quando D é positivo, existe um máximo relativo ou um mínimo relativo *em todas as direções*. Para verificar qual destas possibilidades é a verdadeira, basta nos concentrarmos em uma direção (a direção x, digamos) e usarmos o sinal da derivada parcial de segunda ordem f_{xx} exatamente da mesma forma como a derivada segunda é usada no teste da derivada segunda para funções de uma variável, discutido no Capítulo 3: $f(x, y)$ é

$$\text{um mínimo relativo se } f_{xx}(a, b) > 0$$
$$\text{um máximo relativo se } f_{xx}(a, b) < 0$$

As conclusões do teste das derivadas parciais de segunda ordem estão resumidas na tabela a seguir.

Sinal de D	Sinal de f_{xx}	Comportamento em (a, b)
+	+	Mínimo relativo
+	−	Máximo relativo
−		Ponto de sela

A demonstração do teste das derivadas parciais de segundo ordem está além do escopo deste livro e será omitida. Os Exemplos 7.3.1 a 7.3.3 ilustram o uso do teste.

5 EXPLORE!

Leia o Exemplo 7.3.1. Entre com $f(x, y) = x^2 + y^2$ no editor de equações como Y1 = X^2 + L1^2, onde L1 = {−1, −0.6, 0, 0.8, 1.2}. Plote estas curvas usando uma janela decimal [−3, 3]1 por [−1, 5]1 e o estilo que mostra um ponto com um rastro, observando a ordem em que as curvas aparecem, pois representam seções retas da função para os valores particulares de y que constam da lista L1. Descreva suas observações.

EXEMPLO 7.3.1

Determine todos os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e classifique cada um como um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela.

Solução

Como

$$f_x = 2x \qquad \text{e} \qquad f_y = 2y$$

o único ponto crítico de f é o ponto $(0, 0)$. Para verificar qual é a natureza deste ponto, usamos as derivadas parciais de segunda ordem

$$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 2 \qquad \text{e} \qquad f_{xy} = 0$$

para obter

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - 0^2 = 4$$

Assim, $D(x, y) = 4$ para *qualquer* ponto (x, y) e, em particular,

$$D(0, 0) = 4 > 0$$

Isto significa que f possui um extremo relativo no ponto $(0, 0)$. Além disso, como

$$f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$$

sabemos que o extremo relativo no ponto $(0, 0)$ é um mínimo. Apenas a título de ilustração, a Figura 7.14 mostra o gráfico de f.

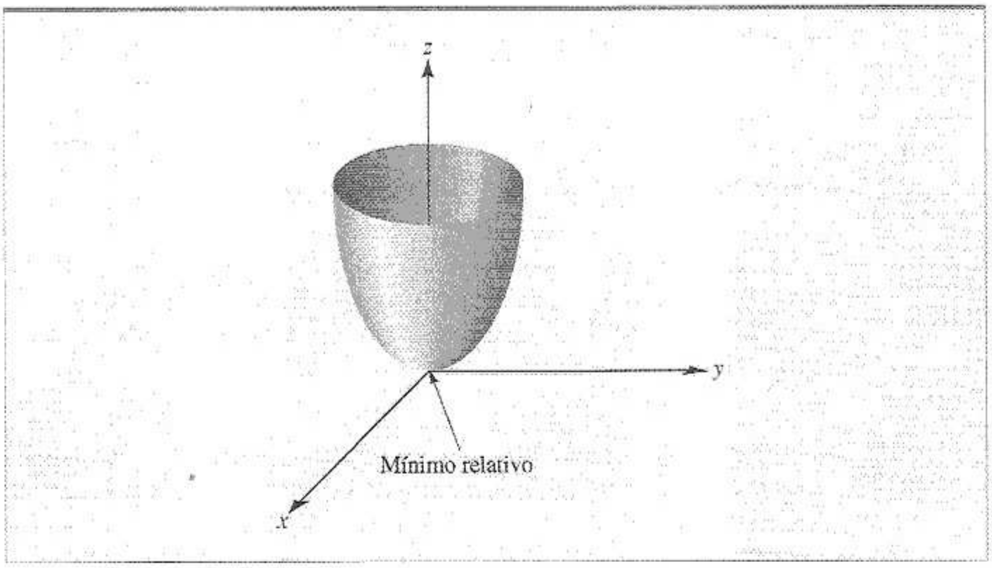


FIGURA 7.14 A superfície $z = x^2 + y^2$ com um mínimo relativo no ponto (0, 0).

EXEMPLO 7.3.2

Determine todos os pontos críticos da função $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$ e classifique cada um como um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela.

Solução

Como

$$f_x = 12 - 3x^2 \qquad \text{e} \qquad f_y = -8y$$

podemos obter os pontos críticos resolvendo o sistema de equações

$$\begin{aligned} 12 - 3x^2 &= 0 \\ -8y &= 0 \end{aligned}$$

De acordo com a segunda equação, $y = 0$; de acordo com primeira,

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 12 \\ x &= 2 \quad \text{ou} \quad -2 \end{aligned}$$

Assim, existem dois pontos críticos, (2, 0) e (−2, 0).

Para determinar a natureza destes pontos, usamos as derivadas de segunda ordem

$$f_{xx} = -6x \qquad f_{yy} = -8 \qquad \text{e} \qquad f_{xy} = 0$$

para formar a expressão

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x)(-8) - 0 = 48x$$

Aplicando o teste das derivadas parciais de segunda ordem aos dois pontos críticos, obtemos

$$D(2, 0) = 48(2) = 96 > 0 \qquad \text{e} \qquad f_{xx}(2, 0) = -6(2) = -12 < 0$$

e

$$D(-2, 0) = 48(-2) = -96 < 0$$

o que significa que existe um máximo relativo em (2, 0) e um ponto de sela em (−2, 0). Estes resultados aparecem na tabela a seguir.

Ponto crítico (a, b)	Sinal de $D(a, b)$	Sinal de $f_{xx}(a, b)$	Comportamento em (a, b)
(2, 0)	+	−	Máximo relativo
(−2, 0)	−		Ponto de sela

Resolver o sistema de equações $f_x = 0$ e $f_y = 0$ para determinar os pontos críticos raramente é tão simples como nos Exemplos 7.3.1 e 7.3.2. O Exemplo 7.3.3 dá uma idéia melhor das dificuldades envolvidas. Antes de prosseguir, talvez seja conveniente o leitor consultar a Revisão de Álgebra no final do livro, na qual é discutida a resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas.

EXEMPLO 7.3.3

Determine todos os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$ e classifique cada um como um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela.

Solução

Como

$$f_x = 3x^2 + 6y \qquad \text{e} \qquad f_y = -3y^2 + 6x$$

podemos determinar os pontos críticos de f resolvendo o sistema de equações

$$3x^2 + 6y = 0 \qquad \text{e} \qquad -3y^2 + 6x = 0$$

Lembrete

Lembre-se de que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ e, portanto, $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ Como a equação $x^2 + 2x + 4 = 0$ não possui soluções reais (o que pode ser constatado usando a equação de Báskara), a única solução real de $x^3 - 8 = 0$ é $x = 2$.

Explicitando y na primeira equação, obtemos $y = \dfrac{-x^2}{2}$. Substituindo y por este valor na segunda equação, temos

$$-3\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + 6x = 0$$

$$-\frac{3x^4}{4} + 6x = 0$$

$$-x(x^3 - 8) = 0$$

As soluções desta equação são $x = 0$ e $x = 2$. Estas são as coordenadas x dos pontos críticos de f. Para obter as coordenadas y correspondentes, basta substituir estes valores de x na equação $y = \dfrac{-x^2}{2}$ (ou em uma das equações originais). Para $x = 0$, $y = 0$; para $x = 2$, $y = -2$. Isto significa que os pontos críticos de f são $(0, 0)$ e $(2, -2)$.

As derivadas parciais de segunda ordem de f são

$$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = -6y \qquad \text{e} \qquad f_{xy} = 6$$

Assim,

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -36xy - 36 = -36(xy + 1)$$

Como

$$D(0, 0) = -36[(0)(0) + 1] = -36 < 0$$

chegamos à conclusão de que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela. Como

$$D(2, -2) = -36[2(-2) + 1] = 108 > 0$$

e

$$f_{xx}(2, -2) = 6(2) = 12 > 0$$

chegamos à conclusão de que o ponto $(2, -2)$ é um mínimo relativo. Estes resultados estão resumidos na tabela a seguir.

Ponto crítico (a, b)	$D(a, b)$	$f_{xx}(a, b)$	Comportamento em (a, b)
$(0, 0)$	$-$		Ponto de sela
$(2, -2)$	$+$	$+$	Mínimo relativo

Problemas Práticos de Otimização

No Exemplo 7.3.4, vamos usar a teoria dos extremos relativos para resolver um problema de otimização na área da economia. Na verdade, estaremos interessados em determinar o máximo *absoluto* de uma certa função. Acontece, porém, que o máximo absoluto e o máximo *relativo* desta função coincidem.

Na verdade, na maioria das aplicações da otimização de funções de duas variáveis às ciências sociais e biológicas, os extremos absolutos coincidem com os extremos relativos. Por esta razão, a teoria dos extremos absolutos de funções de duas variáveis não será discutida neste livro e *o leitor poderá supor que os extremos relativos que encontrar como soluções de problemas práticos de otimização serão também extremos absolutos.*

EXEMPLO 7.3.4

O único supermercado de uma pequena cidade do interior trabalha com duas marcas de suco de laranja, uma marca local que custa no atacado 30 centavos a garrafa e uma marca nacional muito conhecida que custa no atacado 40 centavos a garrafa. O dono do supermercado estima que, se cobrar x centavos pela garrafa da marca local e y centavos pela garrafa da marca nacional, venderá $70 - 5x + 4y$ garrafas da marca local e $80 + 6x - 7y$ garrafas da marca nacional por dia. Por quanto o dono do supermercado deve vender as duas marcas de suco de laranja para maximizar o lucro?

Solução

Como

$$\begin{pmatrix}\text{Lucro}\\ \text{total}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{lucro com a venda}\\ \text{da marca local}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{lucro com a venda}\\ \text{da marca nacional}\end{pmatrix}$$

o lucro diário com a venda de suco de laranja é dado pela função

$$f(x, y) = \underbrace{\underbrace{(70 - 5x + 4y)}_{\textit{latas vendidas}} \cdot \underbrace{(x - 30)}_{\textit{lucro por lata}}}_{\textbf{\textit{marca local}}} + \underbrace{\underbrace{(80 + 6x - 7y)}_{\textit{latas vendidas}} \cdot \underbrace{(y - 40)}_{\textit{lucro por lata}}}_{\textbf{\textit{marca nacional}}}$$

$$= -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5.300$$

Calculamos as derivadas parciais

$$f_x = -10x + 10y - 20 \qquad \text{e} \qquad f_y = 10x - 14y + 240$$

e igualamos estas derivadas a zero para obter

$$-10x + 10y - 20 = 0 \qquad \text{e} \qquad 10x - 14y + 240 = 0$$

ou

$$-x + y = 2 \qquad \text{e} \qquad 5x - 7y = -120$$

Resolvemos este sistema de equações para obter

$$x = 53 \qquad \text{e} \qquad y = 55$$

Assim, (53, 55) é o único ponto crítico de f.

O passo seguinte consiste em aplicar o teste das derivadas parciais de segunda ordem. Como

$$f_{xx} = -10 \qquad f_{yy} = -14 \qquad \text{e} \qquad f_{xy} = 10$$

obtemos

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-10)(-14) - (10)^2 = 40$$

Como

$$D(53, 55) = 40 > 0 \qquad \text{e} \qquad f_{xx}(53, 55) = -10 < 0$$

a conclusão é que f possui um máximo (relativo) para $x = 53$, $y = 55$. Em outras palavras, o dono do supermercado pode maximizar o lucro vendendo a marca local de suco de laranja por 53 centavos a garrafa e a marca nacional por 55 centavos a garrafa.

EXEMPLO 7.3.5

Um funcionário do setor de planejamento da Distribuidora Tabajara verifica que as lojas dos três clientes mais importantes da distribuidora estão localizadas nos pontos $A(1, 5)$, $B(0, 0)$ e $C(8, 0)$, onde os valores

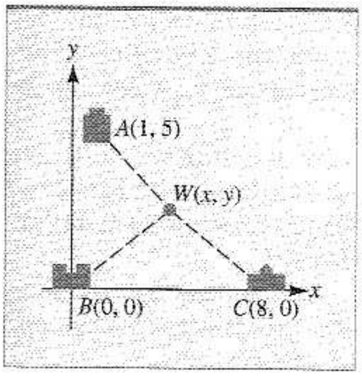


FIGURA 7.15 Localizações dos clientes A, B e C e do depósito W.

estão em quilômetros. Em que ponto $W(x, y)$ deve ser instalado um depósito para que a soma dos quadrados das distâncias do ponto W aos pontos A, B e C seja mínima? (Veja a Figura 7.15.)

Solução

A soma dos quadrados das distâncias de W aos pontos A, B e C é dada pela função

$$\underbrace{S(x, y)}_{\substack{\text{soma dos quadrados}\\ \text{das distâncias}}} = \underbrace{[(x-1)^2 + (y-5)^2]}_{\substack{\text{quadrado da distância}\\ \text{de } W \text{ a } A}} + \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\substack{\text{quadrado da distância}\\ \text{de } W \text{ a } B}} + \underbrace{[(x-8)^2 + y^2]}_{\substack{\text{quadrado da distância}\\ \text{de } W \text{ a } C}}$$

Para minimizar $S(x, y)$, começamos por calcular as derivadas parciais

$$S_x = 2(x-1) + 2x + 2(x-8) = 6x - 18$$
$$S_y = 2(y-5) + 2y + 2y = 6y - 10$$

Igualando S_x e S_y a zero, temos

$$6x - 18 = 0$$
$$6y - 10 = 0$$

ou $x = 3$ e $y = \dfrac{5}{3}$. Como $S_{xx} = 6$, $S_{xy} = 0$ e $S_{yy} = 6$, temos

$$D = S_{xx}S_{yy} - S_{xy}^2 = (6)(6) - 0^2 = 36 > 0$$

e

$$S_{xx}\left(3, \frac{5}{3}\right) = 6 > 0$$

Assim, o ponto procurado é o ponto $W\left(3, \dfrac{5}{3}\right)$.

PROBLEMAS | 7.3

Nos Problemas 1 a 20, determine quais são os pontos críticos da função dada e classifique cada um como máximo relativo, mínimo relativo ou ponto de sela.

1. $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$

2. $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$

3. $f(x, y) = xy$

4. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14y$

5. $f(x, y) = \dfrac{16}{x} + \dfrac{6}{y} + x^2 - 3y^2$

6. $f(x, y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$

7. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$

8. $f(x, y) = (x-1)^2 + y^3 - 3y^2 - 9y + 5$

9. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$

10. $f(x, y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7$

11. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

12. $f(x, y) = (x-4)\ln(xy)$

13. $f(x, y) = x^3 - 4xy + y^3$

14. $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 4}$

15. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2-6y)}$

16. $f(x, y) = 2x^4 + x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 2y + 5$

17. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1}$

18. $f(x, y) = xye^{-\left(\frac{16x^2+9y^2}{288}\right)}$

19. $f(x, y) = x\ln\left(\dfrac{y^2}{x}\right) + 3x - xy^2$

20. $f(x, y) = 4xy - 2x^4 - y^2 + 4x - 2y$

21. VENDAS A VAREJO Uma loja de camisetas de basquete vende dois modelos, um assinado por Michael Jordan e outro por Shaquille O'Neal. O dono da loja compra os dois modelos por R$ 2,00 por camisa e estima que, se as camisetas Jordan forem vendidas por x reais a unidade e as camisetas O'Neal por y reais a unidade, os clientes comprarão $40 - 50x + 40y$ camisetas Jordan e $20 + 60x - 70y$ camisetas O'Neal por dia. Quanto o dono da loja deverá cobrar pelas camisas para obter o maior lucro possível?

22. **PREÇOS** A companhia telefônica está lançando dois novos tipos de sistemas de comunicações para executivos que pretende vender a grandes empresas. Estima-se que, se o preço de um dos sistemas for x centenas de reais e do outro for y centenas de reais, serão vendidos $40 - 8x + 5y$ sistemas do primeiro tipo e $50 + 9x - 7y$ do segundo. Se o custo de fabricação do primeiro tipo de sistema é de R$ 1.000,00 e o custo de fabricação do segundo de R$ 3.000,00, quanto a companhia deve cobrar pelos sistemas para obter o maior lucro possível?

23. **EMBALAGENS** Um carpinteiro deseja construir um caixote retangular com um volume de 4 m³. Três diferentes materiais serão usados. O material para os lados do caixote custa R$ 8,00 o metro quadrado, o material para o fundo custa R$ 5,00 o metro quadrado e o material para a tampa custa R$ 3,00 o metro quadrado. Quais são as dimensões do caixote mais barato?

24. **PECUÁRIA** Um fazendeiro deseja cercar um pasto retangular que fica na margem de um rio. O pasto deve ter uma área de 6.400 m² e não será necessário cercar o lado limitado pelo rio. Determine as dimensões do pasto para que o comprimento da cerca seja mínimo.

25. **VENDAS A VAREJO** Uma fábrica produz x unidades do produto A e y unidades do produto B. O preço do produto A é $p(x) = 100 - x$ reais e o do produto B é $q(y) = 100 - y$ reais. A função de custo conjunto dos produtos é $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Quais devem ser os valores de x e y para que o lucro seja máximo?

26. **VENDAS A VAREJO** Repita o Problema 25 para o caso em que $p = 20 - 5x$, $q = 4 - 2y$ e $C = 2xy + 4$.

27. **RESPOSTA A ESTÍMULOS** Considere um experimento no qual um paciente executa uma tarefa enquanto está sendo submetido a dois estímulos diferentes (um som e uma luz, por exemplo). No caso de estímulos fracos, o desempenho melhora, mas quando os estímulos aumentam de intensidade, começam a distrair a atenção do paciente e o desempenho piora. Em um certo experimento no qual o paciente é submetido a x unidades do estímulo A e y unidades do estímulo B, o desempenho de um paciente é dado por uma função da forma

$$f(x, y) = C + xye^{1-x^2-y^2}$$

onde C é uma constante positiva. Quantas unidades de cada estímulo produzem o melhor desempenho possível?

28. **ECOLOGIA** A aceitabilidade social de uma indústria freqüentemente envolve uma comparação entre as vantagens comerciais do empreendimento e seu impacto ambiental. Assim, por exemplo, uma fábrica de papel gera empregos e oferece um produto útil à sociedade, mas pode poluir o ambiente. Suponha que a aceitabilidade social de uma certa indústria seja dada pela função

$$D(x, y) = (16 - 6x)x - (y^2 - 4xy + 40)$$

com $x \geq 0$ e $y \geq 0$, onde x é uma medida da vantagem comercial (produtos oferecidos e empregos criados) e y é uma medida dos danos causados ao ambiente (poluição). A indústria é considerada desejável se $D \geq 0$ e indesejável se $D < 0$.

a. Para que valores de x e y a aceitabilidade social da indústria é máxima? Interprete o resultado. É possível que esta indústria seja desejável, dependendo dos valores de x e y?

b. A função que aparece no item (a) é artificial, mas a idéia não. Leia a respeito da questão da ética na indústria e escreva um ensaio sobre o modo como você acredita que as decisões devem ser tomadas.*

29. **FÍSICA DE PARTÍCULAS** A energia do estado fundamental de uma partícula de massa m confinada em uma caixa retangular de dimensões x, y e z é dada por

$$E(x, y, z) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

onde k é uma constante física. Se o volume da caixa satisfaz a equação $xyz = V_0$, onde V_0 é uma constante, determine os valores de x, y e z para os quais a energia do estado fundamental é mínima.

30. **DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS** Um fabricante pretende vender um novo produto por R$ 150,00 a unidade e estima que se investir x mil reais em desenvolvimento e y mil reais em propaganda, os consumidores comprarão $\dfrac{320y}{y+2} + \dfrac{160x}{x+4}$ unidades do produto. Se o custo de fabricação do produto é de R$ 50,00 a unidade, quanto deve gastar o fabricante em desenvolvimento e em propaganda para que o lucro seja máximo? [*Sugestão:* Lucro = (número de unidades)(preço unitário − custo unitário) − (investimento total em desenvolvimento e propaganda).]

31. **POLÍTICA DE VENDAS** Um fabricante com direitos de exclusividade em relação a um novo e sofisticado modelo de máquina industrial pretende vender um número limitado das máquinas no mercado interno e no mercado externo. O preço de mercado das máquinas depende do número de máquinas fabricadas. (Se um número pequeno de máquinas for colocado à venda, a competição entre os possíveis compradores fará o preço subir.) Estima-se que, se o fabricante colocar à venda x máquinas no mercado interno e y máquinas no mercado externo, as máquinas serão vendidas por $60 - \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{20}$ milhares de reais no mercado interno e pelo equivalente a $50 - \dfrac{y}{10} + \dfrac{x}{20}$ milhares de reais no mercado externo. Se o custo unitário de fabricação das máquinas é de R$ 10.000,00, qual deve ser o número de máquinas colocadas à venda no mercado interno e no mercado externo para que o lucro seja o maior possível?

32. **POLÍTICA DE VENDAS** Um fabricante com direitos de exclusividade em relação a uma nova máquina industrial pretende vender um número limitado das máquinas e estima que se x máquinas forem colocadas à venda no mercado interno e y máquinas forem colocadas à venda no mercado externo, as máquinas serão vendidas por $150 - \dfrac{x}{6}$ mil reais no mercado interno e pelo equivalente a $100 - \dfrac{y}{20}$ mil reais no mercado externo.

*Um bom lugar para começar é o artigo de K.R. Stollery "Environmental Controls in Extractive Industries", *Land Economics*, Vol. 61, 1985, p. 169.

a. Quantas máquinas o fabricante deve colocar à venda no país para que o lucro nas transações do mercado interno seja o maior possível?

b. Quantas máquinas o fabricante deve colocar à venda no exterior para que o lucro nas transações do mercado externo seja o maior possível?

c. Quantas máquinas o fabricante deve colocar à venda nos dois mercados para que o lucro *total* seja o maior possível?

d. A relação entre as respostas dos itens (a), (b) e (c) é mera coincidência? Justifique sua resposta. Existe uma relação semelhante no caso do Problema 31? Qual a diferença entre os dois problemas sob este aspecto?

33. PLANEJAMENTO URBANO Quatro pequenas cidades em uma região rural estão dispostas a se associar para construir uma repetidora de televisão. Se as cidades estão localizadas nos pontos $(-5, 0)$, $(1, 7)$, $(9, 0)$ e $(0, -8)$ de um sistema retangular de coordenadas, no qual as distâncias são medidas em quilômetros, em que ponto $S(a, b)$ deve ser instalada a repetidora para que a soma dos quadrados das distâncias entre a repetidora e as quatro cidades seja a menor possível?

34. MANUTENÇÃO Quatro poços de petróleo estão localizados nos pontos $(-300, 0)$, $(-100, 500)$, $(0, 0)$ e $(400{,}300)$ de um sistema retangular de coordenadas, no qual as distâncias são medidas em metros. Em que ponto $M(a, b)$ deve ser instalado um galpão de manutenção para que a soma dos quadrados das distâncias entre o galpão e os quatro poços seja a menor possível?

35. GENÉTICA Formas alternativas de um mesmo gene são chamadas de *alelos*. Três alelos, A, B e O, determinam os tipos sanguíneos humanos, A, B, O e AB. Suponha que p, q e r sejam as proporções de A, B e O em uma certa população, de modo que $p + q + r = 1$. Nesse caso, de acordo com a lei de Hardy-Weinberg da genética, a proporção de indivíduos na popopulação que possuem dois alelos diferentes é dada por $P = 2pq + 2pr + 2rq$. Qual é o maior valor possível de P?

36. APRENDIZADO Em um experimento de aprendizado, uma pessoa tem x minutos para examinar uma lista de fatos. Em seguida, a lista é retirada e a pessoa tem y minutos para se preparar para um exame baseado nos fatos da lista. Suponha que os resultados mostrem que o número de acertos é dado pela expressão

$$S(x, y) = -x^2 + xy + 10x - y^2 + y + 15$$

a. Qual é o número de acertos de uma pessoa que faz o exame "a frio" (ou seja, sem se preparar)?

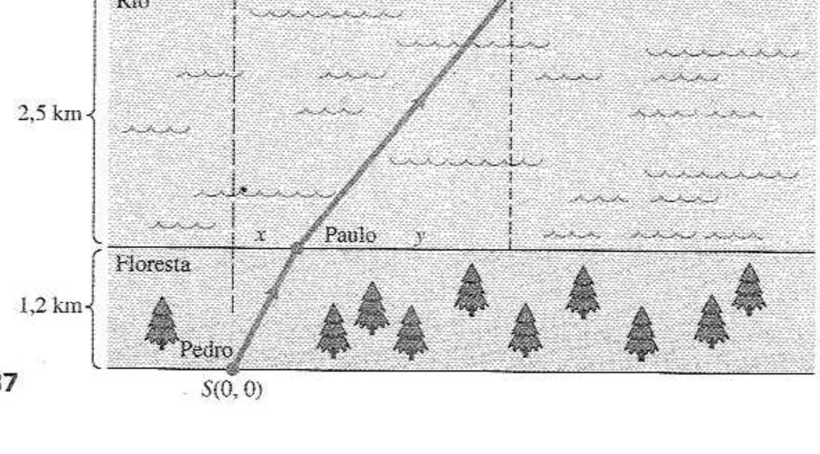
b. Quanto tempo uma pessoa deve passar se preparando para obter o maior número possível de acertos? Qual é este número?

37. Pedro, Paulo e Maria estão participando de uma corrida de revezamento. Pedro deve atravessar uma floresta e chegar à margem de um rio, onde passará o bastão para Pedro. Pedro deve remar até a margem oposta. Finalmente, Maria deve correr ao longo da margem até a linha de chegada. A figura mostra o percurso completo. As equipes partem do ponto S e devem chegar ao ponto F, mas Paulo e Maria podem se posicionar em qualquer lugar ao longo da margem para receber o bastão.

a. Suponha que Pedro consiga atravessar a floresta a 2 km/h, Paulo consiga remar a 4 km/h e Maria consiga correr a 6 km/h. Onde Paulo e Maria devem receber o bastão para que a equipe complete o percurso no menor tempo possível? Qual é este tempo?

b. Os maiores adversários de Pedro, Paulo e Maria são Roberto, Carolina e Alice. Se Roberto consegue atravessar a floresta a 1,7 km/h, Carolina consegue remar a 3,5 km/h e Alice consegue correr a 6,3 km/h, qual das duas equipes vai chegar na frente? Qual vai ser a diferença?

c. Escreva uma história de espionagem baseada nas idéias matemáticas deste problema.

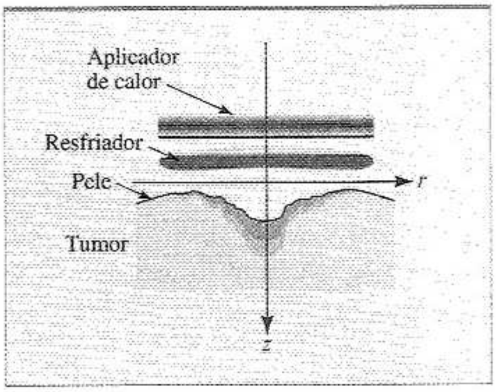


PROBLEMA 37

38. ONCOLOGIA Tumores malignos que não podem ser tratados por métodos convencionais como cirurgia e quimioterapia às vezes respondem a um método conhecido como **hipertermia**, que envolve a aplicação de calor extremo ao tumor usando emissões de microondas.* Um tipo particular de fonte de microondas usada neste tipo de terapia produz uma densidade de energia absorvida que decai exponencialmente com a distância. Mais especificamente, a temperatura em um ponto situado a r unidades do eixo central do tumor e a z unidades da superfície do tumor é dada por uma expressão da forma

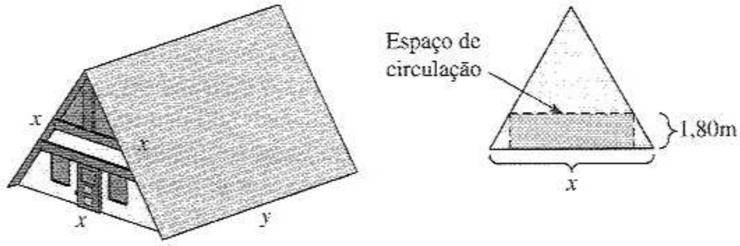
$$T(r, z) = Ae^{-pr^2}(e^{-qz} - e^{-sz})$$

onde A, p, q e r são constantes positivas que dependem das propriedades do tumor e da fonde de microondas. A que distância da superfície do tumor a temperatura é máxima? Expresse a resposta em termos de A, p, q e r.



PROBLEMA 38

39. ARQUITETURA O *espaço de circulação* de uma moradia é o volume da região no interior de uma moradia na qual uma pessoa de 1,80 m de altura pode caminhar ereta. Uma casa de campo tem y metros de comprimento e uma seção reta em forma de triângulo equilátero com x metros de lado, como mostra a figura. Se a área da superfície externa da casa (teto e fachadas dianteira e traseira) deve ter 45 m², quais são os valores de x e y para os quais o espaço de circulação é máximo?



PROBLEMA 39

40. PADRÕES DAS ASAS DAS BORBOLETAS Há muitos anos que os belos padrões das asas das borboletas vêm sendo objeto de curiosidade e estudos científicos. Os modelos matemáticos usados para investigar estes padrões muitas vezes envolvem a concentração de um composto morfogênico (substância química que produz mudanças). Em um modelo para estudar padrões circulares,* um composto morfogênico é liberado em um ponto da asa e a concentração do composto t dias mais tarde é dada por

$$S(r, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\left(\gamma kt + \frac{r^2}{4t}\right)} \qquad t > 0$$

onde r é o raio da região da asa afetada pela substância e k e γ são constantes positivas.

a. Determine um valor de t_m tal que $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$. Mostre que a função $S_m(t)$, formada a partir de $S(r, t)$ mantendo r constante, possui um máximo relativo em $t = t_m$. Isto equivale a dizer que a função de duas variáveis $S(r, t)$ possui um máximo relativo?

b. Seja $M(r)$ o máximo determinado no item (a), ou seja, $M(r) = S(r, t_m)$. Escreva uma expressão para M em termos de $z = (1 + 4\gamma kr^2)^{1/2}$.

c. Acontece que $M(z)$ é exatamente a função adequada para analisar os padrões circulares nas asas de borboleta. Leia as páginas 461 a 468 do livro citado neste problema e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito do uso de uma combinação de biologia e matemática para estudar os padrões das asas das borboletas.

41. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$. Mostre que f *não possui* um mínimo relativo no ponto crítico $(0, 0)$, embora possua um mínimo relativo em $(0, 0)$ tanto na direção x como na direção y. [*Sugestão:* considere a direção definida pela reta $y = x$, ou seja, substitua y por x na expressão de f e analise a função de x resultante.]

Nos Problemas 42 a 45, determine as derivadas parciais f_x e f_y e use uma calculadora para determinar os pontos críticos da função dada.

42. $f(x, y) = (x^2 + 3y - 5)e^{-x^2-2y^2}$

43. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy + 7y^2}{x \ln y}$

44. $f(x, y) = 6x^2 + 12xy + y^4 + x - 16y - 3$

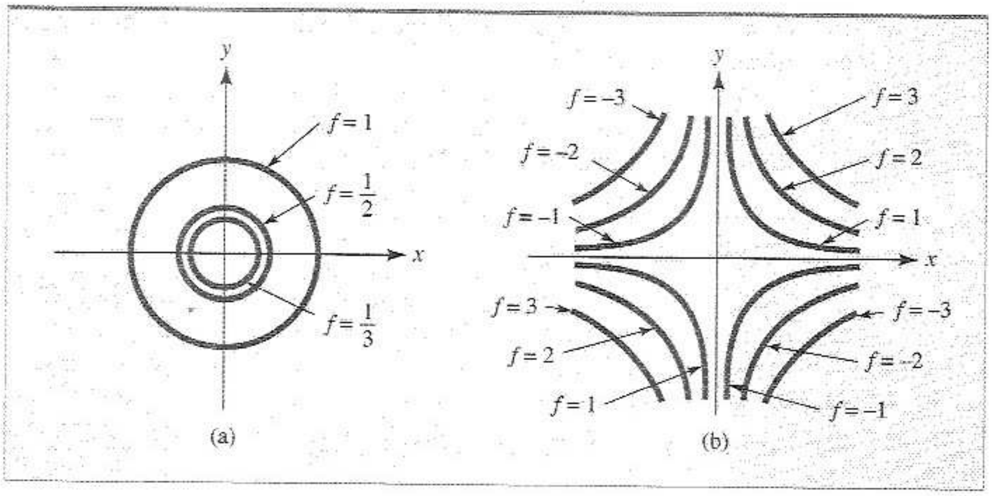
45. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2(11y - 18)$

*As idéias destes problema se baseiam no artigo de Leah Edelstein-Keshet, "Heat Therapy for Tumors", *UMAP Modules 1991: Tools for Teaching*, Lexington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1992, pp. 73-101.

*J.D. Murray, *Mathematical Biology*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1993, pp. 461-468.

46. CURVAS DE NÍVEL Às vezes, é possível classificar os pontos críticos de uma função observando suas curvas de nível. Determine a natureza do ponto crítico de f em $(0, 0)$ para os dois casos mostrados na figura.

PROBLEMA 46



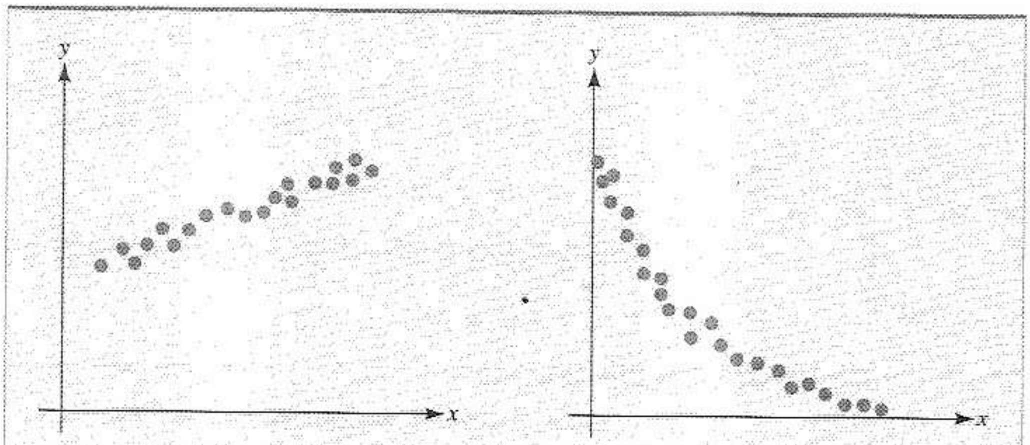
SEÇÃO 7.4 O Método dos Mínimos Quadrados

O leitor deve ter observado que, em vários exemplos deste livro, alguns dos quais baseados em pesquisas publicadas em revistas científicas, os resultados de medidas experimentais são modelados por funções matemáticas. Talvez tenha se perguntado de que forma os cientistas chegaram a essas funções. Uma das formas de associar uma função a um fenômeno físico é colher pontos experimentais, registrá-los em um gráfico e descobrir a função que "melhor se ajusta" aos pontos, de acordo com um certo critério matemático. Vamos agora apresentar um método que se baseia nesta idéia, conhecido como **método dos mínimos quadrados**, que já foi mencionado no Exemplo 1.3.7 da Seção 1.3, quando falamos do ajuste de uma reta a dados sobre o índice de desemprego.

O Método dos Mínimos Quadrados

Suponha que estejamos interessados em encontrar uma função $y = f(x)$ que se ajuste razoavelmente bem a um certo conjunto de dados. O primeiro passo é escolher o tipo de função que vamos usar. Às vezes isto pode ser feito a partir de uma análise teórica do fenômeno que está sendo estudado; outras vezes, é melhor partir de uma observação dos dados disponíveis. A Figura 7.16 mostra dois conjuntos de dados; um gráfico como este é chamado de **gráfico de pontos**. Na Figura 7.16a, os pontos estão aproximadamente em linha reta, o que sugere o uso de uma função linear da forma $y = mx + b$. Na Figura 7.16b, porém, os pontos parecem seguir uma curva exponencial, de modo que uma função da forma $y = Ae^{-kx}$ seria mais apropriada.

FIGURA 7.16 Dois gráficos de pontos.



(a) Distribuição de dados aproximadamente linear

(b) Distribuição de dados aproximadamente exponencial

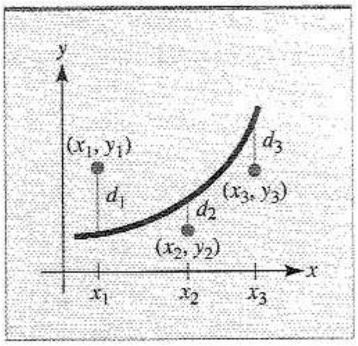


FIGURA 7.17 Soma dos quadrados das distâncias verticais $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$.

Uma vez escolhido o tipo de função, o passo seguinte é determinar a função em particular, do tipo escolhido, que "melhor se ajusta" ao conjunto de pontos. Uma forma conveniente de medir o grau de ajuste de uma curva a uma série de pontos é calcular a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos e a curva. Na Figura 7.17, por exemplo, calcularíamos a soma $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$. Quanto melhor o ajuste da curva, menor o valor da soma; a curva para a qual esta soma é mínima é considerada o melhor ajuste aos dados de acordo com o **critério dos mínimos quadrados**.

O uso do critério dos mínimos quadrados para ajustar uma função linear a um conjunto de pontos é ilustrado no Exemplo 7.4.1. O cálculo envolve a técnica para minimizar uma função de duas variáveis que foi discutida na Seção 7.3.

EXEMPLO 7.4.1

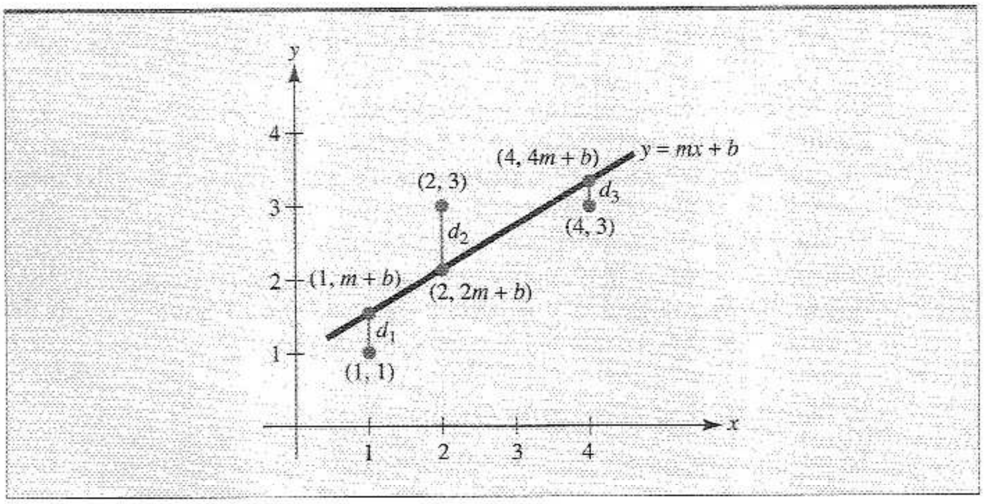
Use o critério dos mínimos quadrados para obter a equação da reta que melhor se ajusta aos pontos (1, 1), (2, 3) e (4, 3).

Solução

Como mostra a Figura 7.18, a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os três pontos dados e a reta $y = mx + b$ é

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = (m + b - 1)^2 + (2m + b - 3)^2 + (4m + b - 3)^2$$

FIGURA 7.18 Minimização da soma $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$.



Como esta soma depende dos coeficientes m e b que definem a reta, ela pode ser considerada uma função $S(m, b)$ das variáveis m e b. O objetivo, portanto, é determinar os valores de m e b que minimizam a função

$$S(m, b) = (m + b - 1)^2 + (2m + b - 3)^2 + (4m + b - 3)^2$$

Para isso, igualamos a zero as derivadas parciais $\frac{\partial S}{\partial m}$ e $\frac{\partial S}{\partial b}$, o que nos dá

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 2(m + b - 1) + 4(2m + b - 3) + 8(4m + b - 3)$$
$$= 42m + 14b - 38 = 0$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2(m + b - 1) + 2(2m + b - 3) + 2(4m + b - 3)$$
$$= 14m + 6b - 14 = 0$$

Resolvendo o sistema de equações

$$42m + 14b = 38$$
$$14m + 6b = 14$$

obtemos a solução

$$m = \frac{4}{7} \qquad \text{e} \qquad b = 1$$

É possível demonstrar que o ponto crítico $(m, b) = \left(\frac{4}{7}, 1\right)$ realmente minimiza a função $S(m, b)$, o que significa que

$$y = \frac{4}{7}x + 1$$

é a equação da reta que melhor se ajusta aos três pontos dados.

A Reta de Mínimos Quadrados

A reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos de acordo com o critério dos mínimos quadrados é chamada de **reta de mínimos quadrados**. (O termo **reta de regressão** também é usado, especialmente em trabalhos de estatística.) Generalizando o método adotado no Exemplo 7.4.1, podemos obter expressões para a inclinação m e o ponto b de interseção com o eixo y da reta de mínimos quadrados para um conjunto de n pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. As expressões envolvem somatórios das coordenadas dos pontos. Todos os somatórios vão de $j = 1$ a $j = n$; para simplificar a notação, os índices são omitidos. Assim, por exemplo, Σx é usado para indicar $\sum_{j=1}^{n} x_j$.

Reta de Mínimos Quadrados ■ A equação da reta de mínimos quadrados para n pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ é $y = mx + b$, onde

$$m = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

6 EXPLORE!

Uma calculadora pode ser usada para preparar e mostrar as listas e somatórios necessários para calcular os coeficientes de uma reta de mínimos quadrados. Usando os dados do Exemplo 7.4.2, coloque os valores de x em L1, os valores de y em L2 e escreva L3 = L1*L2 e L4 = L1². Use a rotina de soma da calculadora para obter os totais por coluna necessários para calcular a inclinação e a interseção com o eixo y usando as fórmulas que aparecem antes do Exemplo 7.4.2.

EXEMPLO 7.4.2

Use as expressões gerais para determinar a reta de mínimos quadrados no caso dos pontos (1, 1), (2, 3) e (4, 3) do Exemplo 7.4.1.

Solução

Os somatórios podem ser calculados da seguinte forma:

x	y	xy	x^2
1	1	1	1
2	3	6	4
4	3	12	16
$\Sigma x = 7$	$\Sigma y = 7$	$\Sigma xy = 19$	$\Sigma x^2 = 21$

Usando as expressões com $n = 3$, temos

$$m = \frac{3(19) - 7(7)}{3(21) - (7)^2} = \frac{4}{7} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{21(7) - 7(19)}{3(21) - (7)^2} = 1$$

E, portanto, a equação da reta de mínimos quadrados é

$$y = \frac{4}{7}x + 1$$

Previsões Usando Mínimos Quadrados

A reta (ou curva) que melhor se ajusta aos dados conhecidos pode ser usada para fazer previsões, como ilustra o Exemplo 7.4.3.

EXEMPLO 7.4.3

Um funcionário da secretaria de uma escola de engenharia compilou os seguintes dados relativos aos coeficientes de rendimento dos alunos no Ciclo Básico e no Ciclo Profissional:

CR do CB	**2,0**	**2,5**	**3,0**	**3,0**	**3,5**	**3,5**	**4,0**	**4,0**
CR do CP	1,5	2,0	2,5	3,5	2,5	3,0	3,0	3,5

Determine por mínimos quadrados a equação da reta que melhor se ajusta a estes dados e use-a para prever o CR no Ciclo Profissional de um aluno que obteve um CR de 3,7 no Ciclo Básico.

Solução

Chamamos de x o CR do Ciclo Básico e y o CR do Ciclo Profissional e dispomos os cálculos da seguinte forma:

x	y	xy	x^2
2,0	1,5	3,0	4,0
2,5	2,0	5,0	6,25
3,0	2,5	7,5	9,0
3,0	3,5	10,5	9,0
3,5	2,5	8,75	12,25
3,5	3,0	10,5	12,25
4,0	3,0	12,0	16,0
4,0	3,5	14,0	16,0
$\Sigma x = 25{,}5$	$\Sigma y = 21{,}5$	$\Sigma xy = 71{,}25$	$\Sigma x^2 = 84{,}75$

Usando as expressões de m e b para a reta de mínimos quadrados com $n = 8$, temos

$$m = \frac{8(71{,}25) - 25{,}5(21{,}5)}{8(84{,}75) - (25{,}5)^2} \approx 0{,}78$$

e

$$b = \frac{84{,}75(21{,}5) - 25{,}5(71{,}25)}{8(84{,}75) - (25{,}5)^2} \approx 0{,}19$$

A equação da reta de mínimos quadrados é portanto

$$y = 0{,}78x + 0{,}19$$

Para prever o CR de um aluno cujo CR no Ciclo Básico foi de 3,75, basta fazer $x = 3{,}7$ na equação da reta de mínimos quadrados, o que nos dá

$$y = 0{,}78(3{,}7) + 0{,}19 \approx 3{,}08$$

A conclusão é que o CR do aluno no Ciclo Profissional será provavelmente da ordem de 3,1.

A Figura 7.19 mostra os dados do problema e a reta de mínimos quadrados $y = 0{,}78x + 0{,}19$. Na prática, é aconselhável plotar os pontos experimentais *antes* de tentar ajustar uma reta a estes pontos. Simplesmente observando o gráfico, é possível dizer se uma linha reta constitui uma aproximação razoável para os pontos experimentais ou se é melhor usar outro tipo de função.

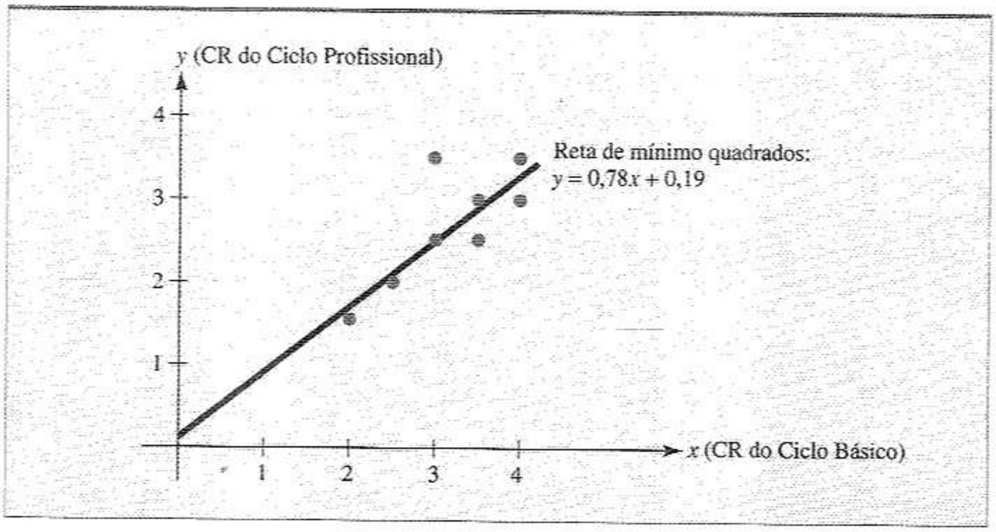


FIGURA 7.19 Reta de mínimos quadrados do Exemplo 7.4.3.

Ajustes Não-lineares

Nos Exemplos 7.4.1, 7.4.2 e 7.4.3, o critério dos mínimos quadrados foi usado para ajustar uma função linear a um conjunto de dados. O mesmo método pode ser usado, com modificações apropriadas, para ajustar aos dados de funções não-lineares. Um tipo de método de ajuste modificado é ilustrado no Exemplo 7.4.4.

7 EXPLORE!

Algumas calculadoras científicas podem ajustar várias funções não-lineares a uma lista de pontos experimentais. Entre com os dados de produção e preço de demanda do Exemplo 7.4.4 nas listas L1 e L2, respectivamente. Em seguida, determine e plote a equação não-linear que melhor se ajusta a estes dados, usando a tecla STAT PLOT da forma discutida na seção Introdução às Calculadoras.

EXEMPLO 7.4.4

Um fabricante coleta uma série de dados relativos ao nível de produção x (em centenas de unidades) de um certo produto em função do preço de demanda p (em reais por unidade) pelo qual todas as x unidades serão vendidas:

k	Produção x (centenas de unidades)	Preço de demanda p (reais)
1	6	743
2	10	539
3	17	308
4	22	207
5	28	128
6	35	73

a. Plote os dados em um gráfico de pontos, com o nível de produção no eixo x e o preço de demanda p no eixo y.

b. Observe que o gráfico de pontos do item (a) sugere que a função de demanda é exponencial. Modifique o método dos mínimos quadrados para determinar a curva da forma $p = Ae^{mx}$ que melhor se ajusta aos dados da tabela.

c. Use a função de demanda exponencial determinada no item (b) para prever a receita que o fabricante deve esperar se produzir 4.000 unidades ($x = 40$).

Solução

a. O gráfico de pontos aparece na Figura 7.20.

b. Tomando os logaritmos de ambos os membros da equação $p = Ae^{mx}$, temos

Lembrete

Lembre-se de que
$\ln (ab) = \ln a + \ln b$

$$\begin{aligned} \ln p &= \ln(Ae^{mx}) \\ &= \ln A + \ln(e^{mx}) && \textit{regra do produto para logaritmos} \\ &= \ln A + mx && \ln e^{u} = u \end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma $y = mx + b$, com $y = \ln p$ e $b = \ln A$. Assim, para encontrar a curva da forma $p = Ae^{mx}$ que melhor se ajusta aos pontos dados (x_k, p_k) para $k = 1,...,6$, primeiro determi-

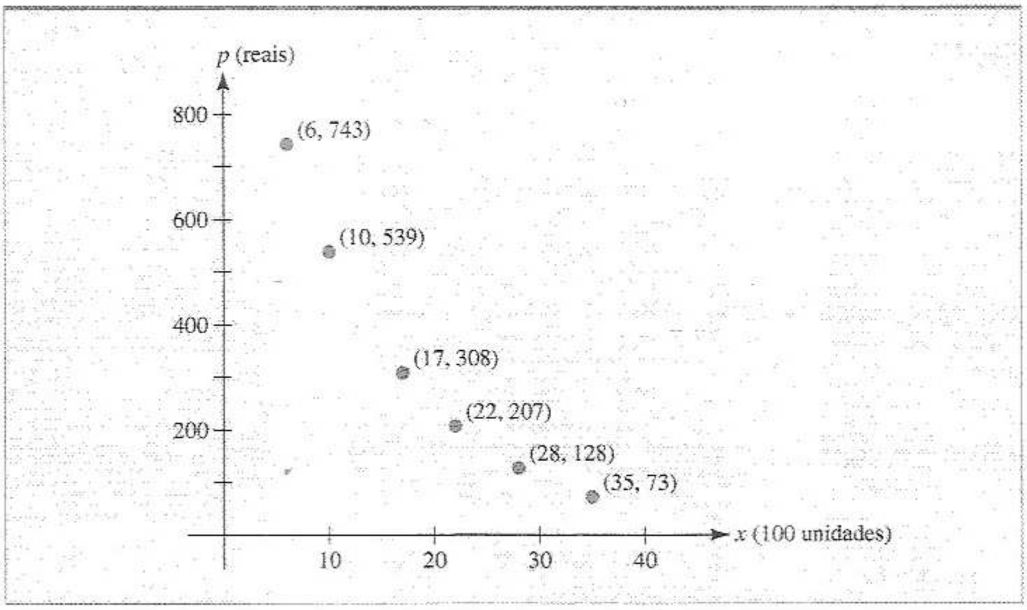


FIGURA 7.20 Gráfico de pontos para os dados do Exemplo 7.4.4.

namos a reta de mínimos quadrados $y = mx + b$ para os pontos $(x_k, \ln p_k)$. Dispomos os cálculos da seguinte forma:

k	x_k	p_k	$y_k = \ln p_k$	$x_k y_k$	x_k^2
1	6	743	6,61	39,66	36
2	10	539	6,29	62,90	100
3	17	308	5,73	97,41	289
4	22	207	5,33	117,26	484
5	28	128	4,85	135,80	784
6	35	73	4,29	150,15	1.225
	$\Sigma x = 118$		$\Sigma y = 33{,}10$	$\Sigma xy = 603{,}18$	$\Sigma x^2 = 2.918$

Usando a expressão dos mínimos quadrados, obtemos:

$$m = \frac{6(603{,}18) - (118)(33{,}10)}{6(2.918) - (118)^2} = -0{,}08$$

e

$$b = \frac{2.918(33{,}10) - (118)(603{,}18)}{6(2.918) - (118)^2} = 7{,}09$$

o que significa que a equação da reta de mínimos quadrados é

$$y = -0{,}08x + 7{,}09$$

Finalmente, voltando à curva exponencial $p = Ae^{mx}$, lembramos que $\ln A = b$ e, portanto,

$$\ln A = b = 7{,}09$$
$$A = e^{7{,}09} = 1.200$$

Assim, a função exponencial que melhor se ajusta aos dados de demanda é

$$p = Ae^{mx} = 1.200e^{-0{,}08x}$$

c. Usando a função de demanda exponencial $p = 1.200e^{-0{,}08x}$ obtida no item (b), descobrimos que se $x = 40$ (centenas de) unidades forem produzidas, serão todas vendidas a um preço unitário de

$$p = 1.200e^{-0{,}08(40)} = \text{R\$}48{,}91$$

Assim, se 4.000 ($x = 40$) unidades forem produzidas, a receita gerada será

$$R = xp(x) = (4.000 \text{ unidades})(\text{R\$}48{,}91 \text{ por unidade}) = \text{R\$}195.659{,}00$$

O processo ilustrado no Exemplo 7.4.4 é, às vezes, chamado de **regressão log-linear**. A curva da forma $y = Ax^k$ que melhor se ajusta a um conjunto de dados pode ser obtida usando a regressão log-linear. O método geral é descrito no Problema 32, no qual é usado para confirmar a validade de uma expressão mencionada no ensaio Para Pensar do Capítulo 1.

O método dos mínimos quadrados também pode ser usada para ajustar outras funções não-lineares a um conjunto de dados. Assim, por exemplo, para determinar a função quadrática $y = Ax^2 + Bx + C$, cuja curva melhor se ajusta a um certo conjunto de dados, procederíamos como no Exemplo 7.4.1, minimizando a soma dos quadrados das distâncias verticais entre a curva da função e os pontos dados. Estes cálculos são muito trabalhosos e, em geral, são executados com o auxílio de um computador ou calculadora.

PROBLEMAS | 7.4

Nos Problemas 1 a 4, plote os pontos dados e use o método do Exemplo 7.4.1 para determinar a reta de mínimos quadrados correspondente.

1. (0, 1), (2, 3), (4, 2)

2. (1, 1), (2, 2), (6, 0)

3. (1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)

4. (1, 5), (2, 4), (3, 2), (6, 0)

Nos Problemas 5 a 12, plote os pontos dados e use a expressão geral para determinar a reta de mínimos quadrados correspondente.

5. (1, 2), (2, 2), (2, 3), (5, 5)

6. (−4, −1), (−3, 0), (−1, 0), (0, 1), (1, 2)

7. (−2, 5), (0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 1)

8. (−6, 2), (−3, 1), (0, 0), (0, −3), (1, −1), (3, −2)

9. (0, 1), (1; 1,6), (2,2; 3), (3,1; 3.9), (4, 5)

10. (3; 5,72), (4; 5,31), (6,2; 5,12), (7,52; 5,32), (8,03; 5,67)

11. (−2,1; 3,5), (−1,3; 2,7), (1,5; 1,3), (2,7; −1,5)

12. (−1,73; −4,33), (0,03; −2,19), (0,93; 0,15), (3,82; 1,61)

Nos Problemas 13 a 16, modifique o método dos mínimos quadrados, como no Exemplo 7.4.4, para determinar a curva da forma $y = Ae^{mx}$ *que melhor se ajusta aos pontos dados.*

13. (1; 15,6), (3; 17), (5; 18,3), (7; 20), (10; 22,4)

14. (5; 9,3), (10; 10,8), (15; 12,5), (20; 14,6), (25, 17)

15. (2; 13,4), (4; 9), (6; 6), (8; 4), (10; 2,7)

16. (5; 33,5), (10; 22,5), (15, 15), (20, 10), (25; 6,8), (30; 4,5)

17. MATRÍCULAS Nos últimos 4 anos, a secretaria de uma universidade compilou os dados a seguir (em unidades de 1.000) relativos ao número de catálogos pedidos por estudantes do ensino médio até 1º de dezembro e ao número de pedidos de matrícula recebidos até 1º de março.

Catálogos pedidos	**4,5**	**3,5**	**4,0**	**5,0**
Pedidos de matrícula	1,0	0,8	1,0	1,5

a. Plote os dados em um gráfico.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use a reta de mínimos quadrados para prever o número de pedidos de matrícula até 1º de março se 4.800 catálogos forem pedidos até 1º de dezembro.

18. VENDAS As vendas anuais de uma empresa (em unidades de 1 bilhão de reais) durante os primeiros 5 anos de funcionamento aparecem na tabela a seguir.

Ano	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Vendas	0,9	1,5	1,9	2,4	3,0

a. Plote os dados em um gráfico.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use a reta de mínimos quadrados para prever quais serão as vendas da empresa no sexto ano.

19. DEMANDA E RECEITA Um fabricante compila os dados que aparecem na tabela a seguir relativos ao nível x de produção (em centenas de unidades) de uma certa mercadoria e ao preço de demanda p (em reais por unidade) para o qual todas as unidades serão vendidas.

Produção x (centenas de unidades)	5	10	15	20	25	30	35
Preço de demanda p (reais)	44	38	32	25	18	12	6

a. Plote os dados em um gráfico.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use a equação obtida no item (b) para prever qual será a receita do fabricante se produzir 4.000 unidades ($x = 40$).

20. USO DE DROGAS A tabela a seguir mostra, para quatro anos diferentes, a porcentagem de estudantes americanos na última série do ensino médio que experimentaram cocaína pelo menos uma vez durante a vida.

Ano	1991	1993	1995	1997	1999
Porcentagem dos que usaram cocaína ao menos uma vez	6,0	4,9	7,0	8,2	9,5

FONTE: The White House Office of National Drug Control Policy, "2002 National Drug Control Strategy" (http://www.whitehousedrugpolicy.gov).

a. Plote os dados em um gráfico, com o número de anos após 1991 no eixo x e a porcentagem de usuários de cocaína no eixo y.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use a reta obtida no item (b) para estimar a porcentagem dos estudantes que experimentaram cocaína pelo menos uma vez durante a vida entre os que estavam na última série do segundo grau no ano de 2005.

21. COMPARECIMENTO ÀS URNAS No dia da eleição, a votação em um certo estado começa às 8 h. A cada duas horas, um membro da mesa verifica que porcentagem dos eleitores inscritos já votou. Os dados até as 18 h são os seguintes:

Hora	10:00	12:00	2:00	4:00	6:00
Comparecimento (%)	12	19	24	30	37

a. Plote os dados em um gráfico.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados. (Chame de x o número de horas após 8 h.)
c. Use a reta obtida no item (b) para prever que porcentagem dos eleitores inscritos terá votado até as 20 h, hora de encerramento da votação.

22. DEMOGRAFIA A tabela a seguir mostra a população dos Estados Unidos (em milhões de habitantes), a cada dez anos, no período de 1950 a 2000.

Ano	1950	1960	1970	1980	1990	2000
População	150,7	179,3	203,2	226,5	248,7	291,4

FONTE: U.S. Census Bureau (http://www.census.gov).

a. Determine a reta de mínimos quadrados $y = mt + b$ para estes dados, onde y é a população dos Estados Unidos t décadas após 1950.
b. Use a reta obtida no item (b) para prever a população dos Estados Unidos no ano de 2010.

23. DEMOGRAFIA Modifique o método dos mínimos quadrados do Exemplo 7.4.4 para determinar a função da forma $P(t) = Ae^{rt}$ que melhor se ajusta aos dados do Problema 22, onde $P(t)$ é a população dos Estados Unidos t décadas após 1950.
a Qual é a taxa de crescimento percentual da população dos Estados Unidos?
b. Use a função $P(t)$ para prever a população dos Estados Unidos no ano de 2010.

24. SAÚDE PÚBLICA Em um estudo de cinco regiões industriais, um pesquisador obteve os seguintes dados em relação ao número de unidades de um certo poluente no ar e a incidência (por 100.000 pessoas) de uma certa doença:

Unidades do poluente	3,4	4,6	5,2	8,0	10,7
Incidência da doença	48	52	58	76	96

a. Plote os dados em um gráfico.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use o resultado do item (b) para estimar a incidência da doença em uma região onde a poluição do ar é de 7,3 unidades.

25. ANÁLISE DE INVESTIMENTOS Joana tem vários tipos diferentes de investimentos, cujo valor total $V(t)$ (em milhares de reais) no início do t-ésimo ano após a moça começar a investir aparece na tabela a seguir, para $1 \le t \le 10$:

Ano, t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor de todos os investimentos, $V(t)$	57	60	62	65	62	65	70	75	79	85

a. Modifique o método dos mínimos quadrados, como no Exemplo 7.4.4, para determinar a função da forma $V(t) = Ae^{rt}$ que melhor se ajusta aos dados. Qual é a taxa anual de juros, capitalizados continuamente, que equivale ao crescimento do montante?
b. Use a função obtida no item (a) para prever o valor total dos investimentos no início do 20º ano após Joana começar a investir.
c. Joana estima que vai precisar de R$ 300.000,00 para se aposentar. Use a função obtida no item (a) para determinar quantos anos são necessários para que atinja este objetivo.
d. Um amigo de Joana, Marcos McGuyver, examina os cálculos da moça e exclama: "Que perda de tempo! Você pode obter os valores de A e r na função $V(t) = Ae^{rt}$ simplesmente tomando os valores $V(1) = 57$ e $V(10) = 85$ e usando um pouquinho de álgebra!" Determine os valores de A e r usando o método proposto por Marcos e comente a respeito dos méritos relativos dos dois métodos.

26. POUPANÇA E CONSUMO A tabela a seguir mostra a poupança e o consumo nos Estados Unidos (em bilhões de dólares) no período de 1996-2001.

Ano	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Poupança	5.677,7	5.968,2	6.355,6	6.627,4	7.120,0	7.393,2
Consumo	5.237,5	5.529,3	5.856,0	6.246,5	6.683,7	6.967,0

FONTE: U.S. Department of Commerce, Bureau of Economic Analysis, "Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product" (http://www.dea.doc.gov).

a. Plote os dados em um gráfico, com a poupança no eixo x e o consumo no eixo y.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use o resultado do item (b) para prever o consumo correspondente a uma poupança de 8 bilhões de dólares.
d. Escreva um ensaio de pelo menos dez linhas a respeito da relação entre poupança e consumo.

27. MERCADO DE AÇÕES A tabela a seguir mostra o valor do índice Dow Jones Industrial Average (DJIA) no encerramento do primeiro dia do pregão dos anos indicados.

Ano	1990	1992	1996	1998	2001	2002
DJIA	2.810	3.172	5.177	7.965	10.646	10.073

FONTE: Dow Jones (http://www.djindexes.com).

a. Plote os dados em um gráfico, com o número de anos após 1990 no eixo x e o DJIA no eixo y.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. O que a reta de mínimos quadrados prevê para o DJIA no primeiro dia do pregão de 2003? Use a Internet para descobrir qual foi o valor de fechamento do DJIA nesse dia (2 de janeiro de 2003) e compare com o valor previsto.
d. Escreva um ensaio de pelo menos 10 linhas a respeito da possibilidade de prever o comportamento futuro da bolsa de valores usando um modelo matemático.

28. PREÇO DA GASOLINA A tabela a seguir mostra o preço médio por galão (em cents) da gasolina comum sem chumbo nos Estados Unidos, a intervalos de 3 anos, no período de 1988 a 2003.

Ano	1988	1991	1994	1997	2000	2003
Preço (cents por galão)	95	114	111	123	151	159

FONTE: U.S. Department of Energy (http://www.eia.doe.gov).

a. Plote os dados em um gráfico, com o número de anos após 1988 no eixo x e o preço médio da gasolina no eixo y.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Qual é a previsão do preço da gasolina comum sem chumbo para o ano de 2006?

29. **PRODUTO DOMÉSTICO BRUTO** A tabela a seguir mostra o produto doméstico bruto (PDB) da China (em bilhões de yuan) no período de 1996-2001.

Ano	1996	1997	1998	1999	2000	2001
PDB	6.788	7.446	7.835	8.191	8.940	9.593

FONTE: Site do governo chinês (http://www.china.org.cn).

a. Determine a reta de mínimos quadrados $y = mt + b$ para estes dados, onde y é o PDB da China t anos após 1996.
b. Use o resultado do item (a) para estimar o aumento do PDB da China em 2005.

30. **COLÔNIA DE BACTÉRIAS** Um biólogo que estuda o crescimento de uma colônia de bactérias mede a população de hora em hora e obtém os seguintes resultados:

Tempo, t (horas)	1	2	3	4	5	6	7	8
População, $P(t)$ (milhares)	280	286	292	297	304	310	316	323

a. Plote os dados em um gráfico. O gráfico de pontos sugere que o aumento da população é linear ou exponencial?
b. Se você acha que o gráfico de pontos do item (a) sugere que o crescimento é linear, determine a função da forma $P(t) = mt + b$ que melhor se ajusta aos dados. Se você acha que o gráfico de pontos sugere que crescimento é exponencial, modifique o método dos mínimos quadrados, como no Exemplo 7.4.4, para determinar a função da forma $P(t) = Ae^{kt}$ que melhor se ajusta aos dados.
c. Use a função obtida do item (b) para estimar o tempo necessário para que a população chegue a 400.000 bactérias. Se a população é de 280.000 bactérias, qual o tempo necessário para que a população atinja o dobro deste valor?

31. **DISSEMINAÇÃO DA AIDS** A tabela a seguir mostra o número de casos conhecidos de AIDS nos Estados Unidos de acordo com o ano em que foram registrados, a intervalos de 4 anos.

Ano	1980	1984	1988	1992	1996	2000
Casos conhecidos de AIDS	99	6.360	36.064	79.477	61.109	42.156

FONTE: World Health Organization e Nações Unidas (http://www.unaids.org).

a. Plote os dados em um gráfico com o tempo t (anos após 1980) no eixo x.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use o resultado do item (b) para estimar o número de novos casos de AIDS em 2005.
d. Você acha que a reta de mínimos quadrados se ajusta bem aos dados? Se a resposta for negativa, escreva um ensaio de pelo menos dez linhas explicando qual das curvas a seguir se ajusta melhor aos dados:
   1. (polinômio do segundo grau) $y = At^2 + Bt + C$
   2. (polinômio do terceiro grau) $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$
   3. (exponencial) $y = Ae^{kt}$
   4. (potência-exponencial) $y = Ate^{kt}$

   (Talvez seja interessante reler o ensaio Para Pensar do Capítulo 3, no qual é realizada uma análise semelhante para o número de mortes provocadas pela AIDS.)

32. **ALOMETRIA** A determinação das relações entre as dimensões de várias partes de um mesmo organismo é um tópico de interesse em um ramo da biologia chamado de *alometria*.* (Veja o ensaio Para Pensar do Capítulo 1.) Um biólogo observa que a altura h e a envergadura w dos chifres de um alce, ambas em centímetros (cm), estão relacionadas como indicado na tabela:

*Roger V. Jean, "Differential Growth, Huxley's Allometric Formula, and Sigmoid Growth", *UMAP Modules 1983: Tools for Teaching*, Lexington, MA: Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1984.

Altura, h (cm)	Envergadura dos chifres, w (cm)
87,9	52,4
95,3	60,3
106,7	73,1
115,4	83,7
127,2	98,0
135,8	110,2

a. Para cada ponto (h, w) da tabela, plote o ponto $(\ln h, \ln w)$ em um gráfico. Observe que, de acordo com o gráfico de pontos, parece existir uma relação linear entre $y = \ln w$ e $x = \ln h$.

b. Determine a reta de mínimos quadrados $y = mx + b$ para os dados $(\ln h, \ln w)$ obtidos no item (a).

c. Determine os valores de constantes a e c tais que $w = ah^c$. [*Sugestão:* faça $y = \ln w$ e $x = \ln h$, como no item (a), para a reta de mínimos quadrados obtida no item (b).]

33. ALOMETRIA A tabela a seguir mostra o peso C da garra grande de um caranguejo-violinista e o peso W do restante do corpo do caranguejo, ambos em miligramas (mg).

Peso do corpo, W (mg)	**57,6**	**109,2**	**199,7**	**300,2**	**355,2**	**420,1**	**535,7**	**743,3**
Peso da garra, C (mg)	5,3	13,7	38,3	78,1	104,5	135,0	195,6	319,2

a. Para cada ponto (W, C) da tabela, plote o ponto $(\ln W, \ln C)$ em um gráfico. Observe que, de acordo com o gráfico de pontos, parece existir uma relação linear entre $y = \ln C$ e $x = \ln W$.

b. Determine a reta de mínimos quadrados $y = mx + b$ para os dados $(\ln W, \ln C)$ obtidos no item (a).

c. Determine os valores de constantes a e k tais que $C = aW^k$. [*Sugestão:* faça $y = \ln C$ e $x = \ln W$, como no item (a), para a reta de mínimos quadrados obtida no item (b).]

SEÇÃO 7.5 Otimização com Restrições: Método dos Multiplicadores de Lagrange

Em muitos problemas práticos, uma função de duas variáveis deve ser otimizada com certas **restrições**. Uma editora, por exemplo, obrigada a respeitar um orçamento de R$ 60.000,00 para o lançamento de um novo livro, pode ter necessidade de decidir qual é a melhor forma de dividir este dinheiro entre a produção e a propaganda de modo a maximizar as vendas do livro. Chamando de x a quantia destinada à produção, y a quantia destinada à propaganda e $f(x, y)$ o número de livros vendidos, a editora gostaria de maximizar a função de vendas $f(x, y)$ com a restrição de que $x + y =$ R$ 60.000,00.

Para visualizar o que significa o processo de otimização de uma função de duas variáveis com restrições, pense na função como uma superfície no espaço tridimensional e na restrição (que é uma equação envolvendo x e y) como uma curva no plano xy. Quando procuramos o máximo ou mínimo de uma função com uma dada restrição, estamos limitando nossa busca à parte da superfície que está diretamente acima da curva que representa a restrição. O ponto mais alto desta parte da superfície é o máximo com a restrição e o ponto mais baixo é o mínimo com a restrição (Figura 7.21).

Já vimos alguns problemas de otimização com restrições no Capítulo 3, como o Exemplo 3.5.1 da Seção 3.5. A técnica que usamos no Capítulo 3 para resolver este tipo de problema consistiu em reduzi-lo a um problema de uma única variável explicitando uma das variáveis da equação que expressava a restrição e substituindo a expressão resultante na função a ser otimizada. Esta técnica só pode ser usada quando é possível explicitar uma das variáveis, o que nem sempre acontece na prática. Nesta seção, vamos discutir uma técnica muito mais versátil, conhecida como **método dos multiplicadores de Lagrange**, na qual a introdução de uma *terceira* variável (o multiplicador) permite resolver problemas de otimização com restrições sem explicitar uma das variáveis da equação que expressa a restrição.

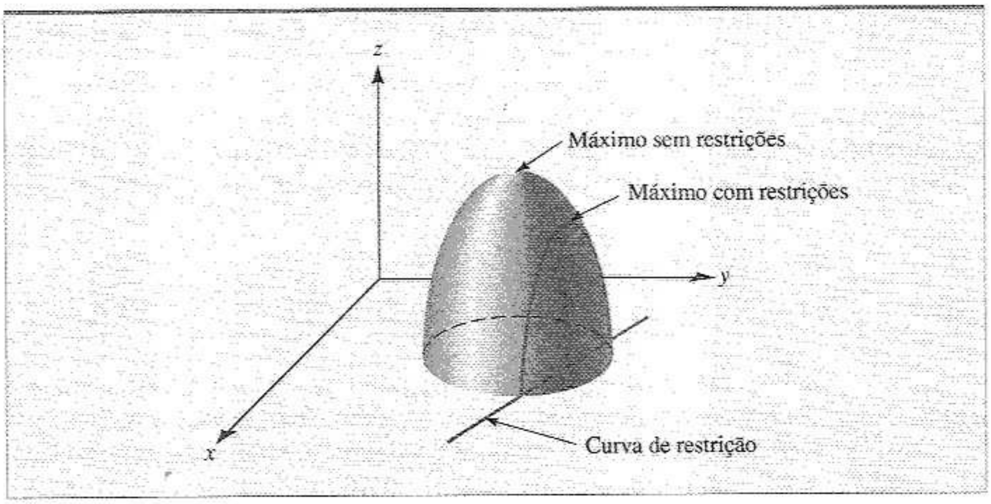


FIGURA 7.21 Extremos com restrições e sem restrições.

Mais especificamente, o método dos multiplicadores de Lagrange se baseia no fato de que todo extremo relativo de uma função $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = k$ deve ocorrer em um ponto crítico da função

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k]$$

onde λ é uma nova variável (o **multiplicador de Lagrange**). Para determinar os pontos críticos de F, calculamos as derivadas parciais

$$F_x = f_x - \lambda g_x \qquad F_y = f_y - \lambda g_y \qquad F_\lambda = -(g - k)$$

e resolvemos o sistema de equações $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$:

$$\begin{aligned} F_x &= f_x - \lambda g_x = 0 &\quad \text{ou} \quad& f_x = \lambda g_x \\ F_y &= f_y - \lambda g_y = 0 &\quad \text{ou} \quad& f_y = \lambda g_y \\ F_\lambda &= -(g - k) = 0 &\quad \text{ou} \quad& g = k \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos $f(a, b)$ nos pontos críticos (a, b) de F.

> NOTA O método dos multiplicadores de Lagrange diz apenas que os extremos com restrições devem ocorrer em pontos críticos da função $F(x, y)$. O método não pode ser usado para mostrar que os extremos existem ou para determinar se um certo ponto crítico (a, b) corresponde a um máximo com restrições, um mínimo com restrições ou nem um máximo nem um mínimo. Entretanto, *para as funções consideradas neste livro, podemos supor que, se f possui um máximo (mínimo) com restrições, será dado pelo maior (menor) dos valores críticos $f(a, b)$.* ■

Segue um resumo do método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o maior e o menor valor de uma função de duas variáveis sujeita a uma restrição.

O Método dos Multiplicadores de Lagrange

1° passo (*formulação*): Determinar o maior (ou menor) valor de $f(x, y)$ com a restrição de que $g(x, y) = k$, supondo que este valor extremo exista.

2º passo: Calcular as derivadas parciais f_x, f_y, g_x e g_y e determinar todos os números $x = a$, $y = b$ e λ que satisfaçam o sistema de equações

$$\begin{aligned} f_x(a, b) &= \lambda g_x(a, b) \\ f_y(a, b) &= \lambda g_y(a, b) \\ g(a, b) &= k \end{aligned}$$

Estas são as *equações de Lagrange*.

3º passo: Calcular o valor de f em cada ponto (a, b) que satisfaz o sistema de equações do 2º passo.

4° passo (*interpretação*): Se $f(x, y)$ possui um valor máximo (mínimo) com a restrição de que $g(x, y) = k$, este será o maior (menor) dos valores obtidos no 3º passo.

Uma justificativa geométrica do método dos multiplicadores é apresentada no final desta seção. No Exemplo 7.5.1, o método é usado para resolver o problema do Exemplo 3.5.1 da Seção 3.5.

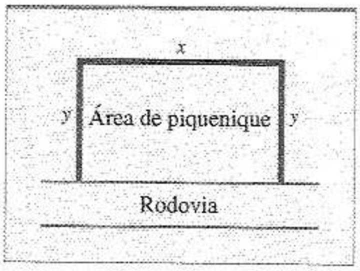


FIGURA 7.22 Área de piquenique retangular.

EXEMPLO 7.5.1

O departamento de estradas de rodagem está planejando construir uma área de piquenique para motoristas à beira de uma rodovia movimentada. O terreno deve ser retangular, com uma área de 5.000 metros quadrados, e ser cercado nos três lados que não dão para a rodovia. Qual o menor comprimento da cerca necessária para a obra?

Solução

Vamos chamar os lados da área de piquenique de x e y, como na Figura 7.22, e de f o comprimento da cerca. Nesse caso,

$$f(x, y) = x + 2y$$

O objetivo é minimizar f com a restrição de que a área deve ser de 5.000 metros quadrados, isto é,

$$g(x, y) = xy = 5.000$$

Vamos calcular as derivadas parciais

$$f_x = 1 \qquad f_y = 2 \qquad g_x = y \qquad \text{e} \qquad g_y = x$$

para obter as três equações de Lagrange

$$1 = \lambda y \qquad 2 = \lambda x \qquad \text{e} \qquad xy = 5.000$$

Combinando as duas primeiras equações, obtemos

$$\lambda = \frac{1}{y} \qquad \text{e} \qquad \lambda = \frac{2}{x}$$

Como $y \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{x} \qquad \text{ou} \qquad x = 2y$$

Fazendo $x = 2y$ na terceira equação de Lagrange, temos

$$2y^2 = 5.000 \qquad \text{ou} \qquad y = \pm 50$$

Finalmente, fazendo $y = 50$ na equação $x = 2y$, obtemos $x = 100$. Isto significa que $x = 100$ e $y = 50$ são os valores que minimizam a função $f(x, y) = x + 2y$ com a restrição de que $xy = 5.000$. Assim, a área de piquenique deve ter 100 metros de comprimento (ao longo da estrada), 50 metros de largura e pode ser cercada com $100 + 50 + 50 = 200$ metros de cerca.

EXEMPLO 7.5.2

Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = xy$ com a restrição de que $x^2 + y^2 = 8$.

Solução

Vamos fazer $g(x, y) = x^2 + y^2$ e usar as derivadas parciais

$$f_x = y \qquad f_y = x \qquad g_x = 2x \qquad \text{e} \qquad g_y = 2y$$

para obter as três equações de Lagrange

$$y = 2\lambda x \qquad x = 2\lambda y \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = 8$$

Como as três equações não têm solução a menos que x e y sejam diferentes de zero (o leitor sabe explicar por quê?), podemos escrever as duas primeiras equações na forma

$$2\lambda = \frac{y}{x} \qquad \text{e} \qquad 2\lambda = \frac{x}{y}$$

e portanto $$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \qquad \text{ou} \qquad x^2 = y^2$$

Fazendo $x^2 = y^2$ na terceira equação, obtemos

$$2x^2 = 8 \qquad \text{ou} \qquad x = \pm 2$$

Se $x = 2$, a equação $x^2 = y^2$ leva a $y = 2$ ou $y = -2$; se $x = -2$, a equação $x^2 = y^2$ também leva a $y = 2$ ou $y = -2$. Assim, os quatro pontos em que podem ocorrer extremos com restrições são $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ e $(-2, -2)$. Como

$$f(2, 2) = f(-2, -2) = 4 \qquad \text{e} \qquad f(2, -2) = f(-2, 2) = -4$$

temos que, se $x^2 + y^2 = 8$, o valor máximo de $f(x, y)$ é 4, que ocorre nos pontos $(2, 2)$ e $(-2, -2)$, e o valor mínimo é -4, que ocorre nos pontos $(2, -2)$ e $(-2, 2)$.

Para praticar, resolva o problema usando os métodos do Capítulo 3.

NOTA Nos Exemplos 7.5.1 e 7.5.2, as duas primeiras equações de Lagrange foram usadas para eliminar a nova variável λ; em seguida, a expressão resultante foi substituída na equação da restrição. Na maioria dos problemas de otimização com restrições, esta seqüência de operações leva rapidamente à solução desejada. ■

Multiplicadores de Lagrange para Funções de Três Variáveis

O método dos multiplicadores de Lagrange pode ser estendido a problemas de otimização envolvendo funções de mais duas variáveis e mais de uma restrição. Assim, por exemplo, para otimizar a função $f(x, y, z)$ com a restrição de que $g(x, y, z) = k$, temos que resolver o sistema de equações

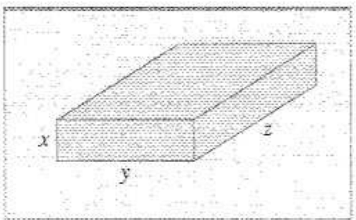
$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad \text{e} \qquad g = k$$

Segue um exemplo envolvendo este tipo de otimização com restrições.

EXEMPLO 7.5.3

Pretende-se construir uma caixa com materiais que custam R$ 1,00 por centímetro quadrado para o fundo, R$ 2,00 por centímetro quadrado para os lados e R$ 5,00 por centímetro quadrado para a tampa. Se o volume total deve ser de 96 cm³, quais devem ser as dimensões da caixa para que o custo do material seja mínimo?

Solução



Seja x a altura da caixa, y a largura e z o comprimento, como na figura ao lado. Nesse caso, o volume da caixa é $V = xyz$ e o custo do material é dado por

$$C = \underbrace{1yz}_{\textit{fundo}} + \underbrace{2(2xy + 2xz)}_{\textit{lados}} + \underbrace{5yz}_{\textit{tampa}} = 6yz + 4xy + 4xz$$

Estamos interessados em minimizar a função $C = 6yz + 4xy + 4xz$ com a restrição de que $V = xyz = 96$. As equações de Lagrange são

$$\begin{aligned} C_x &= \lambda V_x \qquad \text{ou} \qquad 4y + 4z = \lambda(yz) \\ C_y &= \lambda V_y \qquad \text{ou} \qquad 6z + 4x = \lambda(xz) \\ C_z &= \lambda V_z \qquad \text{ou} \qquad 6y + 4x = \lambda(xy) \end{aligned}$$

e $xyz = 96$. Explicitando λ nas três primeiras equações, temos

$$\frac{4y + 4z}{yz} = \frac{6z + 4x}{xz} = \frac{6y + 4x}{xy} = \lambda$$

Multiplicando as expressões por xyz, obtemos

$$\begin{aligned} 4xy + 4xz &= 6yz + 4yx \\ 4xy + 4xz &= 6yz + 4xz \\ 6yz + 4yx &= 6yz + 4xz \end{aligned}$$

Este sistema de equações pode ser simplificado cancelando termos comuns nos dois lados de cada equação para obter

$$4xz = 6yz$$
$$4xy = 6yz$$
$$4yx = 4xz$$

Dividindo ambos os membros da primeira equação por z, ambos os membros da segunda por y e ambos os membros da terceira por x, obtemos

$$4x = 6y \qquad \text{e} \qquad 4x = 6z \qquad \text{e} \qquad 4y = 4z$$

e portanto $y = \frac{2}{3}x$ e $z = \frac{2}{3}x$. Finalmente, substituímos estas expressões na equação da restrição, $xyz = 96$, para obter

$$x\left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}x\right) = 96$$
$$\frac{4}{9}x^3 = 96$$
$$x^3 = 216 \qquad \text{e portanto} \qquad x = 6$$

donde
$$y = z = \frac{2}{3}(6) = 4$$

Assim, o custo é mínimo quando a caixa tem 6 centímetros de comprimento, 4 centímetros de largura e 4 centímetros de altura.

Maximização da Utilidade

A *função de utilidade* $U(x, y)$ é usada para medir o grau de satisfação ou *utilidade* para o consumidor de possuir x unidades de um certo produto e y unidades de outro. O Exemplo 7.5.4 ilustra o uso do método dos multiplicadores de Lagrange para determinar quantas unidades de cada produto o consumidor deve comprar para maximizar a utilidade sem exceder uma determinada quantia.

EXEMPLO 7.5.4

Um consumidor tem R$ 600,00 para gastar em dois produtos, o primeiro dos quais custa R$ 20,00 e o segundo, R$ 30,00. A utilidade para o consumidor de possuir x unidades do primeiro produto e y unidades do segundo é dada pela **função de utilidade de Cobb-Douglas** $U(x, y) = 10x^{0,6}y^{0,4}$. Quantas unidades de cada produto o consumidor deve comprar para que a utilidade seja a maior possível?

Solução

O gasto total com a compra de x unidades do primeiro produto e y unidades do segundo é $20x + 30y$. Como o consumidor dispõe apenas de R$ 600,00 para gastar, o objetivo é maximizar a função $U(x, y)$ com a restrição de que $20x + 30y = 600$.

As três equações de Lagrange são

$$6x^{-0,4}y^{0,4} = 20\lambda \qquad 4x^{0,6}y^{-0,6} = 30\lambda \qquad \text{e} \qquad 20x + 30y = 600$$

As duas primeiras equações nos dão

$$\frac{6x^{-0,4}y^{0,4}}{20} = \frac{4x^{0,6}y^{-0,6}}{30} = \lambda$$
$$9x^{-0,4}y^{0,4} = 4x^{0,6}y^{-0,6}$$
$$9y = 4x \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{4}{9}x$$

Fazendo $y = \frac{4}{9}$ na terceira equação, obtemos

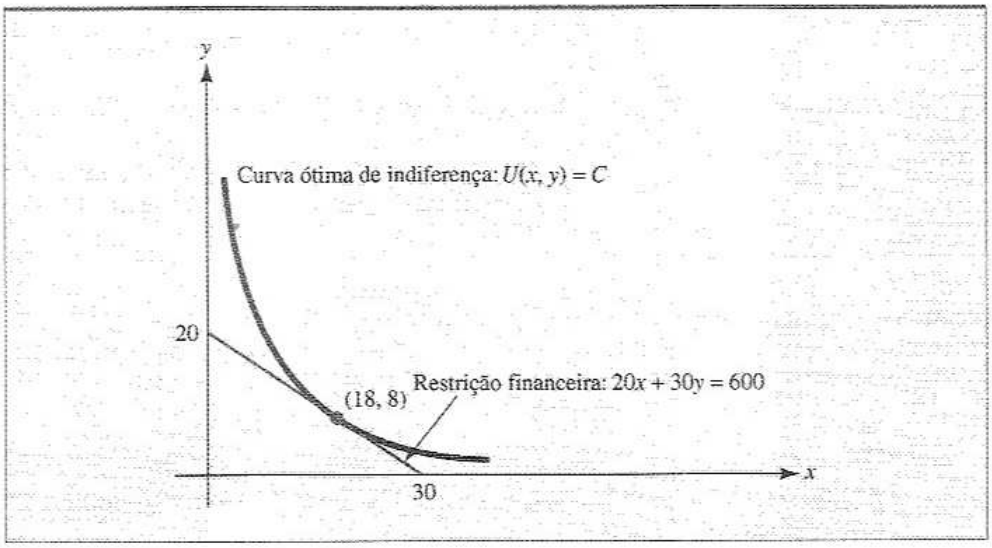
$$20x + 30\left(\frac{4}{9}x\right) = 600$$
$$\left(\frac{300}{9}\right)x = 600$$

E, portanto,

$$x = 18 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{4}{9}(18) = 8$$

Assim, para que a utilidade seja a maior possível, o consumidor deve comprar 18 unidades do primeiro produto e 8 unidades do segundo.

FIGURA 7.23 Restrição financeira e curva ótima de indiferença.



Como vimos na Seção 7.1, as curvas de nível de uma função de utilidade são chamadas de *curvas de indiferença*. O gráfico da Figura 7.23 mostra a relação entre a curva ótima de indiferença $U(x, y) = C$, onde $C = U(18, 8)$, e a restrição financeira $20x + 30y = 600$.

Distribuição de Recursos

Uma classe importante de problemas de economia e finanças diz respeito à distribuição de recursos com restrições. Segue um exemplo no qual as vendas devem ser maximizadas com uma restrição nos gastos.

EXEMPLO 7.5.5

Uma editora dispõe de R$ 60.000,00 para investir na produção e propaganda de um novo livro. Estima-se que se forem gastos x mil reais na produção e y reais em propaganda, aproximadamente $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ exemplares do livro serão vendidos. Quanto a editora deve investir na produção e quanto deve investir em propaganda para que o número de exemplares vendidos seja o maior possível?

Solução

O objetivo é maximizar a função $f(x,y) = 20x^{3/2}y$ com a restrição de que $g(x, y) = 60$, onde $g(x, y) = x + y$. As equações de Lagrange correspondentes são

$$30x^{1/2}y = \lambda \qquad 20x^{3/2} = \lambda \qquad \text{e} \qquad x + y = 60$$

De acordo com as duas primeiras equações, temos

$$30x^{1/2}y = 20x^{3/2}$$

Como f certamente não passa por um máximo em $x = 0$, podemos supor que $x \neq 0$ e dividir ambos os membros desta equação por $30x^{1/2}$ para obter

$$y = \frac{2}{3}x$$

Substituindo esta expressão na terceira equação de Lagrange, obtemos

$$x + \frac{2}{3}x = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{5}{3}x = 60$$

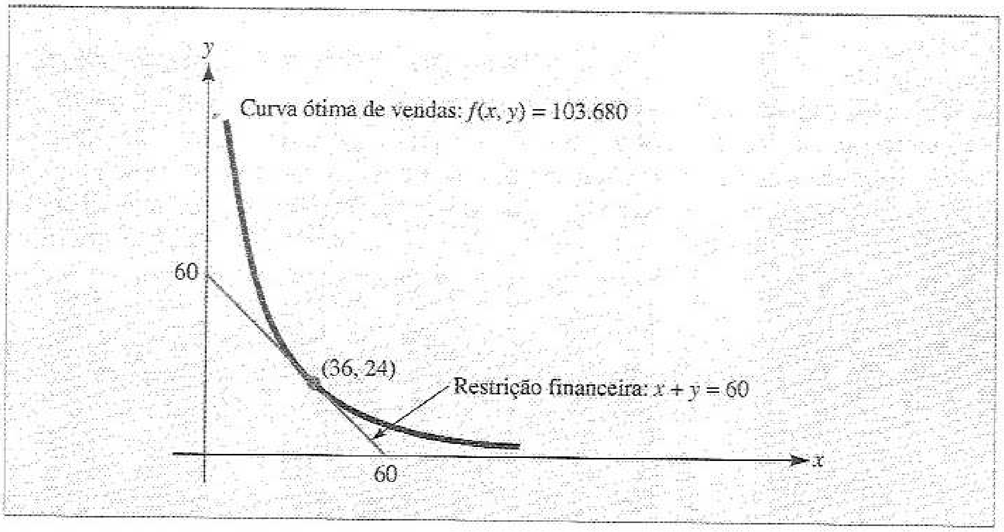
E, portanto,

$$x = 36 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{2}{3}(36) = 24$$

Assim, para maximizar as vendas, a editora deve investir R$ 36.000,00 na produção do livro e R$ 24.000,00 em propaganda. Neste caso, aproximadamente $f(36, 24) = 103.680$ exemplares do livro serão vendidos.

A Figura 7.24 mostra a relação entre a curva ótima de vendas $f(x, y) = C$, onde $C = f(36, 24)$, e a restrição financeira $x + y = 60$.

FIGURA 7.24 Restrição financeira e curva ótima de vendas.



Significado do Multiplicador de Lagrange

A maioria dos problemas de otimização com restrições pode ser resolvida pelo método dos multiplicadores de Lagrange sem que haja necessidade de calcular o valor de λ, *o multiplicador de Lagrange*. Em alguns problemas, porém, é interessante obter o valor de λ, já que o parâmetro possui uma interpretação física interessante.

O Multiplicador de Lagrange ■ Se M é o valor máximo (ou mínimo) de $f(x, y)$ com a restrição de que $g(x, y) = k$, o multiplicador de Lagrange λ é a taxa de variação de M em relação a k, ou seja,

$$\lambda = \frac{dM}{dk}$$

Assim, λ é a variação de M produzida por uma variação unitária de k.

EXEMPLO 7.5.6

A editora do Exemplo 7.5.5 recebe R$ 61.000,00 em vez de R$ 60.000,00 para gastar na produção e propaganda do novo livro. Estime o efeito deste acréscimo de R$ 1.000,00 sobre as vendas do livro.

Solução

No Exemplo 7.5.5, para determinar o valor máximo M de $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ com a restrição de que $x + y = 60$, resolvemos as três equações de Lagrange

$$30x^{1/2}y = \lambda \qquad 20x^{3/2} = \lambda \qquad \text{e} \qquad x + y = 60$$

para obter $x = 36$ e $y = 24$. Para determinar λ, substituímos estes valores de x e y na primeira ou na segunda equação de Lagrange. Usando a segunda equação, obtemos

$$\lambda = 20(36)^{3/2} = 4.320$$

o que significa que as vendas aumentarão de aproximadamente 4.320 exemplares (de 103.680 para 108.000) se a verba aumentar de 1 unidade, de 60 para 61 milhares de reais.

Justificativa do Método dos Multiplicadores de Lagrange

Embora uma demonstração rigorosa do método dos multiplicadores de Lagrange esteja fora do escopo deste livro, existe uma demonstração geométrica que o leitor provavelmente achará interessante. Ela se baseia no fato de que a tangente à curva de nível $F(x, y) = C$ em cada ponto (x, y) é dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

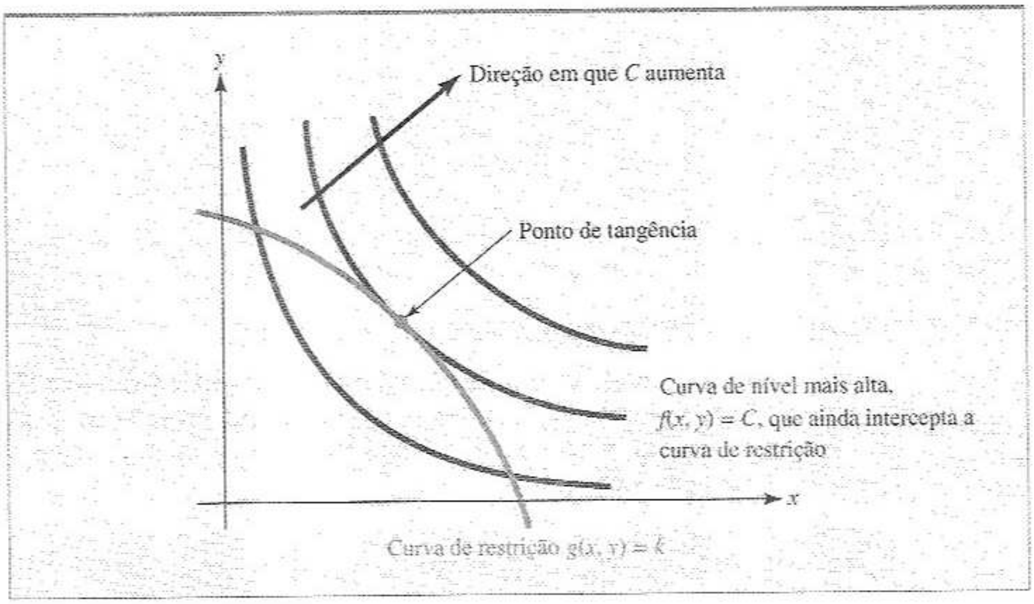
contanto que $F_y \neq 0$ (veja o Problema 72 da Seção 7.2). Os Problemas 52 e 53 ilustram o uso desta relação.

Considere agora o seguinte problema de otimização com restrições:

$$\text{Maximizar } f(x, y) \text{ com a restrição de que } g(x, y) = k$$

Geometricamente, isto significa que é preciso encontrar a curva de nível mais elevada de f que intercepta a curva da restrição, $g(x, y) = k$. Como mostra a Figura 7.25, a interseção crítica ocorre no ponto em que a curva da restrição é tangente a uma curva de nível, ou seja, no ponto em que a inclinação da curva da restrição $g(x, y) = k$ é igual à inclinação da curva de nível $f(x, y) = C$.

FIGURA 7.25 Curvas de nível e a curva de restrição.



De acordo com a expressão proposta no início desta discussão, temos

$$\text{Inclinação da curva de restrição} = \text{Inclinação da curva de nível}$$

$$-\frac{g_x}{g_y} = -\frac{f_x}{f_y}$$

ou seja,

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$$

Chamando de λ esta razão, temos

$$\frac{f_x}{g_x} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{f_y}{g_y} = \lambda$$

o que nos dá as duas primeiras equações de Lagrange

$$f_x = \lambda g_x \quad \text{e} \quad f_y = \lambda g_y$$

A terceira equação de Lagrange,

$$g(x, y) = k$$

expressa simplesmente o fato de que o ponto de tangência está sobre a curva da restrição.

PROBLEMAS 7.5

Nos Problemas 1 a 16, use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o extremo pedido. Suponha que o extremo exista.

1. Determine o valor máximo da função $f(x, y) = xy$ com a restrição de que $x + y = 1$.

2. Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = xy$ com a restrição de que $x^2 + y^2 = 1$.

3. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Determine o valor mínimo de $f(x, y)$ com a restrição de que $xy = 1$.

4. Seja $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Determine o valor mínimo de $f(x, y)$ com a restrição de que $2x + y = 22$.

5. Determine o valor mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ com a restrição de que $x^2 + y^2 = 4$.

6. Seja $f(x, y) = 8x^2 - 24xy + y^2$. Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y)$ com a restrição de que $8x^2 + y^2 = 1$.

7. Seja $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$. Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y)$ com a restrição de que $x^2 + y^2 = 1$.

8. Determine o valor máximo da função $f(x, y) = xy^2$ com a restrição de que $x + y^2 = 1$.

9. Seja $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$. Determine o valor mínimo da função $f(x, y)$ com a restrição de que $x + y = 15$.

10. Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 2y + 7$. Determine o valor mínimo da função $f(x, y)$ com a restrição de que $4x^2 + 4xy = 1$.

11. Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = e^{xy}$ com a restrição de que $x^2 + y^2 = 4$.

12. Determine o valor máximo da função $f(x, y) = \ln(xy^2)$ com a restrição de que $2x^2 + 3y^2 = 8$ para $x > 0$ e $y > 0$.

13. Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = xyz$ com a restrição de que $x + 2y + 3z = 24$.

14. Determine os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x + 3y - z$ com a restrição de que $z = 2x^2 + y^2$.

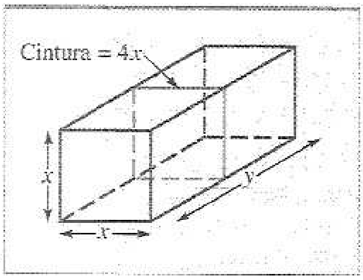
15. Seja $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$. Determine os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ com a restrição de que $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

16. Determine o valor mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ com a restrição de que $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

17. **PECUÁRIA** Um fazendeiro precisa cercar um pasto retangular na margem de um rio. A área do pasto é de 3.200 metros quadrados e não é necessário cercar o lado limitado pelo rio. Determine as dimensões do pasto para que o comprimento total da cerca seja mínimo.

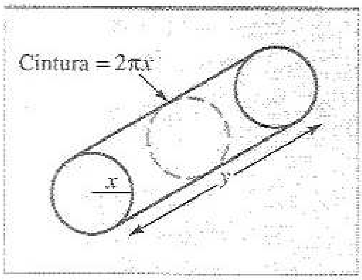
18. **PECUÁRIA** Um fazendeiro dispõe de 320 metros de cerca para cercar um pasto retangular. Que dimensões deve escolher para que o pasto tenha a maior área possível?

19. **TARIFAS POSTAIS** De acordo com o regulamento do correio americano, a soma da cintura com o comprimento de um pacote não pode exceder 108 polegadas no caso de uma remessa de quarta classe. Qual é o maior volume de um pacote retangular com dois lados quadrados para que possa ser enviado como uma remessa de quarta classe? (Veja a figura.)



PROBLEMA 19

20. **TARIFAS POSTAIS** Repita o Problema 19 para o caso de um pacote cilíndrico. (O volume de um cilindro de raio R e altura H é $\pi R^2 H$.)



PROBLEMA 20

21. **EMBALAGENS** Use o fato de que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico para determinar as dimensões de uma lata de refrigerante de 330 mL construída com a menor quantidade possível de metal. (Lembre-se de que o volume de um cilindro de raio r e altura h é $\pi r^2 h$, a circunferência de um círculo de raio r é $2\pi r$ e a área de um círculo de raio r é πr^2.)

22. **EMBALAGENS** Um recipiente cilíndrico tem capacidade para 65π mL de suco de laranja. O custo por centímetro quadrado para fabricar a tampa e fundo de metal é duas vezes maior que o custo por centímetro quadrado para fabricar o lado de papelão. Quais são as dimensões da lata mais barata? (Veja as observações do Problema 21.)

23. **DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS** Um fabricante dispõe de R\$ 8.000,00 para investir no desenvolvimento e na propaganda de um novo produto. Estima-se que, se x milhares de reais forem gastos em desenvolvimento e y milhares de reais em propaganda, as vendas atingirão $f(x, y) = 50x^{1/2}y^{3/2}$ unidades. Quanto o fabricante deve gastar em desenvolvimento e quanto deve gastar em propaganda para que o número de unidades vendidas seja o maior possível?

24. **DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS** Quando x milhares de reais são investidos em mão-de-obra e y milhares de dólares são investidos em equipamentos, a produção de uma certa fábrica é $Q(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$ unidades. Se o dono da fábrica dispõe de R\$ 120.000,00 quanto deve investir em mão-de-obra e quanto deve investir em equipamentos para que a produção seja a maior possível?

25. **ANÁLISE MARGINAL** Use λ, o multiplicador de Lagrange, para estimar qual será a variação da produção máxima da fábrica do Problema 24 se a quantia disponível para investimentos em mão-de-obra e equipamentos aumentar em R$ 1.000,00.

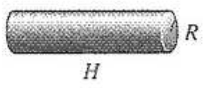
26. ÁREA SUPERFICIAL DO CORPO HUMANO Como vimos no Problema 35 da Seção 7.1, uma expressão empírica que relaciona a área superficial de uma criança ao seu peso é

$$S(W, H) = 0{,}0072W^{0{,}425}H^{0{,}725}$$

onde W é o peso em quilogramas e H é a altura em centímetros. Suponha que durante um curto período de tempo, Maria perca peso enquanto está crescendo, de tal forma que $W + H = 160$. Com esta restrição, quais devem ser o peso e a altura para que a área superficial do corpo de Maria seja a maior possível?

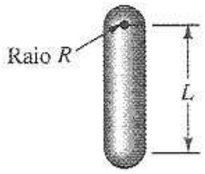
Nos Problemas 27 e 28, o leitor precisa saber que um cilindro fechado de raio R e comprimento L tem um volume $V = \pi R^2 L$ e a área da superfície é $S = 2\pi RL + 2\pi R^2$. O volume de um hemisfério de raio R é $V = \dfrac{2}{3}\pi R^3$ e a área da superfície é $S = 2\pi R^2$.

27. MICROBIOLOGIA Uma bactéria tem a forma de um bastão cilíndrico. Se o volume da bactéria é constante, qual a relação entre o raio R e o comprimento H para que a área da superfície seja mínima?



PROBLEMA 27

28. MICROBIOLOGIA Uma bactéria tem a forma de um bastão cilíndrico com duas calotas hemisféricas nas extremidades. Se o volume da bactéria é constante, qual a relação entre o raio R e o comprimento L para que a área da superfície seja mínima?



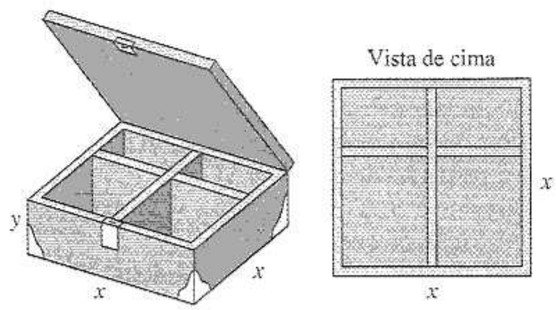
PROBLEMA 28

29. ÓPTICA De acordo com a fórmula das lentes delgadas da óptica, a distância focal L de uma lente delgada está relacionada à distância do objeto d_0 e à distância da imagem d_i através da relação

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{L}$$

Se L é constante, qual a distância máxima $s = d_0 + d_i$ entre o objeto e a imagem?

30. EMBALAGENS Uma caixa de jóias é construída dividindo uma caixa de base quadrada em quatro compartimentos, como mostra a figura. A caixa deve ter um volume de 800 cm³. Determine as dimensões para que a área total (incluindo a tampa, o fundo, os lados e as divisões internas) seja mínima. Observe que nada foi dito a respeito da localização das divisões internas. Por quê?



PROBLEMA 30

31. EMBALAGENS Suponha que o material usado para fazer a tampa da caixa do Problema 30 custe duas vezes mais que o material usado para fazer o fundo e os lados e três vezes mais que o material usado para fazer as divisões internas. Determine as dimensões da caixa para que o custo total seja mínimo.

32. ESPIONAGEM Depois de se livrar dos capangas de Scélérat (Problema 62 da Seção 6.3), nosso espião entra em uma casa à procura do inimigo. Quando a porta é fechada bruscamente e a temperatura começa a aumentar, ele percebe, tarde demais, que se encontra na temida sala quente de Scélérat. Procurando desesperadamente uma forma de escapar, percebe que as paredes têm a forma da circunferência $x^2 + y^2 = 60$. Caminhando para o centro da sala e apertando o botão do detector de temperatura do relógio de pulso, verifica que a temperatura em cada ponto da sala é dada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 5x + 15y + 130$$

De acordo com o relatório de um informante, existe uma porta oculta em algum ponto das paredes da sala. Deve estar situada no ponto mais frio da parede, mas onde fica este ponto? Qual é a temperatura da sala neste local?

33. FÍSICA DE PARTÍCULAS A energia do estado fundamental de uma partícula de massa m confinada em uma caixa retangular de dimensões x, y e z é dada por

$$E(x, y, z) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

onde k é uma constante física. O Problema 29 da Seção 7.3 consistia em determinar os valores de x, y e z para os quais a energia do estado fundamental é mínima, com a restrição de que o volume da caixa tem um valor fixo $V_0 = xyz$. Resolva o mesmo problema de otimização com restrições usando o método dos multiplicadores de Lagrange.

34. CONSTRUÇÃO CIVIL Uma construção retangular deve ser executada com materiais que custam R$ 31,00 o metro quadrado para o teto, R$ 27,00 o metro quadrado para os dois lados e o fundo e R$ 55,00 para a fachada. Se o volume é de 16.000 metros quadrados, quais devem ser as dimensões para que o custo dos materiais usados seja mínimo?

35. CONSTRUÇÃO CIVIL Um galpão retangular deve ser construído com materiais que custam R$ 15,00 o metro quadrado para o teto, R\$ 12,00 o metro quadrado para os dois lados e R\$ 20,00 o metro quadrado para a frente. Quais são as dimensões do maior galpão (em volume) que pode ser construído por R\$ 8.000,00?

36. DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS Um fabricante pretende vender um novo produto por R\$ 150,00 a unidade e estima que se gastar x mil reais em desenvolvimento e y mil reais em propaganda, $\dfrac{320y}{y+2}+\dfrac{160x}{x+4}$ unidades serão vendidas. O custo de fabricação do produto é R\$ 50,00 a unidade. Se o fabricante dispõe de R\$ 8.000,00 para investir em desenvolvimento e propaganda, como deve aplicar este dinheiro para que o lucro seja máximo? [*Sugestão:* lucro = (número de unidades)(preço unitário − custo unitário) − custo total com desenvolvimento e propaganda.]

37. ANÁLISE MARGINAL Suponha que o fabricante do Problema 36 decida investir R\$ 8.100,00 em vez de R\$ 8.000,00 no desenvolvimento e propaganda do novo produto. Use λ, o multiplicador de Lagrange, para estimar qual será o efeito desta mudança sobre o maior lucro possível.

38. DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS ILIMITADOS

a. Caso disponha de um suprimento ilimitado de fundos, quanto o fabricante do Problema 36 deve gastar em desenvolvimento e quanto deve gastar em propaganda para que o lucro seja o maior possível? [*Sugestão*: use os métodos da Seção 7.3.]

b. Suponha que o problema de distribuição de recursos do item (a) seja resolvido pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Qual é o valor de λ, o multiplicador da Lagrange, que corresponde ao orçamento ótimo? Explique a resposta à luz da interpretação de λ como dM/dk.

c. A resposta do item (b) sugere outro método para resolver o problema proposto no item (a). Resolva o problema usando este novo método.

39. UTILIDADE Um consumidor dispõe de R\$ 280,00 para gastar em dois produtos, o primeiro dos quais custa R\$ 2,00 a unidade e o segundo R\$ 5,00 a unidade. A utilidade para o consumidor de x unidades do primeiro produto e y unidades do segundo é dada por $U(x, y) = 100x^{0,25}y^{0,75}$.

a. Quantas unidades de cada produto o consumir deve comprar para maximizar a utilidade?

b. Calcule o multiplicador de Lagrange λ e o interprete em termos econômicos. (No contexto da maximização da utilidade, λ é chamado de **utilidade marginal do dinheiro**.)

40. UTILIDADE Um consumidor dispõe de k reais para gastar em dois produtos, o primeiro dos quais custa a reais a unidade e o segundo b reais a unidade. A utilidade para o consumidor de x unidades do primeiro produto e y unidades do segundo é dada pela função de utilidade de Cobb-Douglas $U(x, y) = x^\alpha y^\beta$, onde $0 < \alpha < 1$ e $\alpha + \beta = 1$. Mostre que a utilidade será a maior possível quando $x = \dfrac{k\alpha}{a}$ e $y = \dfrac{k\beta}{b}$.

41. Como varia a utilidade máxima calculada no Problema 40 quando a quantia disponível, k, aumenta de 1 real?

Nos Problemas 42 a 44, $Q(x, y)$ é uma função de produção, onde x e y representam unidades de mão-de-obra e capital, respectivamente. Se os custos unitários da mão-de-obra e do capital são dados por p e q, respectivamente, $px + qy$ representa o custo total da produção.

42. CUSTO MÍNIMO Use os multiplicadores de Lagrange para mostrar que para um nível constante de produção c, o custo total é mínimo para

$$\frac{Q_x}{p} = \frac{Q_y}{q} \qquad \text{e} \qquad Q(x, y) = c$$

contanto que Q_x e Q_y não sejam ambos nulos e p e q sejam diferentes de zero. (Este problema é conhecido como **problema do custo mínimo** e a solução é chamada de **combinação de insumos para o custo mínimo**.)

43. ORÇAMENTO FIXO Mostre que os insumos x e y que maximizam o nível de produção $Q(x, y)$, com a restrição de que o custo total seja k, satisfazem à equação

$$\frac{Q_x}{p} = \frac{Q_y}{q} \qquad \text{com } px + qy = k$$

(Suponha que p e q sejam diferentes de 0.) Este problema é conhecido como **problema do orçamento fixo**.

44. CUSTO MÍNIMO Mostre que para um nível fixo de produção $Ax^\alpha y^\beta = k$, onde k é uma constante e α e β são positivos com $\alpha + \beta = 1$, a função de custo $C(x, y) = px + qy$ é minimizada para

$$x = \frac{k}{A}\left(\frac{\alpha q}{\beta p}\right)^\beta,\ y = \frac{k}{A}\left(\frac{\beta p}{\alpha q}\right)^\alpha$$

PRODUÇÃO DE ESC *Uma função de produção de elasticidade de substituição constante (ESC) tem a forma geral*

$$Q(K, L) = A[\alpha K^{-\beta} + (1 - \alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta}$$

onde K é o capital imobilizado, L é o volume de mão-de-obra e A, α e β são constantes tais que $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ e $\beta > -1$. Os Problemas 45 a 47 tratam deste tipo de função de produção.

45. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para maximizar a função de produção de ESC

$$Q = 55[0{,}6K^{-1/4} + 0{,}4L^{-1/4}]^{-4}$$

com a restrição

$$2K + 5L = 150$$

46. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para maximizar a função de produção de ESC

$$Q = 50[0{,}3K^{-1/5} + 0{,}7L^{-1/5}]^{-5}$$

com a restrição

$$5K + 2L = 140$$

47. Mostre que uma função de produção de ESC

$$Q(K, L) = A[\alpha K^{-\beta} + (1 - \alpha)L^{-\beta}]^{-1/\beta}$$

satisfaz a relação $Q(sK, sL) = sQ(K, L)$ para qualquer constante s. Em outras palavras, uma função deste tipo possui *retornos constantes de escala*. (Lembre-se de que no Problema 51 da Seção 7.1 foi mostrado que as funções de produção de Cobb-Douglas apresentam esta propriedade.)

48. INDÚSTRIA AEROESPACIAL Uma sonda espacial tem a forma da superfície

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

onde x, y e z estão em pés. Quando a sonda penetra de volta na atmosfera terrestre, começa a se aquecer de tal forma que a temperatura em cada ponto $P(x, y, z)$ da superfície é dada por

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

onde T é a temperatura em graus Fahrenheit. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o ponto mais quente e o ponto mais frio da superfície da sonda. Quais são as temperaturas nestes pontos?

49. Use os multiplicadores de Lagrange para determinar os possíveis pontos de máximo e mínimo da parte da superfície $z = x - y$ para a qual $y = x^5 + x - 2$. Use uma calculadora gráfica para plotar a curva $y = x^5 + x - 2$ e as curvas de nível da superfície $f(x, y) = x - y$ e mostre que os pontos encontrados não representam máximos e mínimos relativos. O que é possível concluir a partir desta observação?

50. GERENCIAMENTO DE REJEITOS Um estudo realizado em um depósito de rejeitos revelou que o solo estava contaminado em uma região que podia ser descrita aproximadamente como o interior da elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

onde x e y estão expressas em quilômetros. O responsável pelo depósito pretende construir um muro circular para delimitar toda a área poluída.

a. Se o escritório do depósito fica no ponto $S(1, 1)$, qual é o raio da menor circunferência de centro em S que contém toda a região poluída? [*Sugestão*: Como o quadrado da distância entre o ponto $S(1, 1)$ e o ponto $P(x, y)$ é dado pela função

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

a distância pedida pode ser calculada minimizando $f(x, y)$ com uma certa restrição.]

b. Leia a respeito do gerenciamento de rejeitos e escreva um ensaio de pelo menos dez linhas sobre o gerenciamento de aterros sanitários e outros tipos de depósitos de rejeitos.*

*Um excelente estudo de caso pode ser encontrado em M.D. LaGrega, P.L. Buckingham and J.C. Evans, *Hazardous Waste Management*, New York: McGraw-Hill, 1994, pp. 946-955.

51. ANÁLISE MARGINAL Seja $P(K, L)$ uma função de produção, onde K e L representam o capital e a mão-de-obra necessários para um certo processo de fabricação. Suponha que estejamos interessados em maximizar $P(K, L)$ com uma certa restrição de custo $C(K, L) = A$, onde A é uma constante. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para mostrar que o nível ótimo de produção é aquele para o qual

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial K}}{\dfrac{\partial C}{\partial K}} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial L}}{\dfrac{\partial C}{\partial L}}$$

ou seja, é aquele para o qual a razão entre a produtividade marginal do capital e o custo marginal do capital é igual à razão entre a produtividade marginal da mão-de-obra e o custo marginal da mão-de-obra.

52. Seja $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$.

a. Se $F(x, y) = k$, onde k é uma constante, use o método de derivação implícita discutido no Capítulo 2 para determinar $\dfrac{dy}{dx}$.

b. Calcule as derivadas parciais F_x e F_y e mostre que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

53. Repita o Problema 52 para a função

$$F(x, y) = xe^{xy^2} + \frac{y}{x} + x \ln (x + y)$$

Nos Problemas 54 a 57, use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o máximo ou mínimo indicado. O leitor poderá necessitar de uma calculadora ou de um computador para encontrar as raízes de uma equação.

54. Maximize a função $f(x, y) = e^{x-y} - x \ln (y/x)$ com a restrição de que $x + y = 4$.

55. Minimize a função $f(x, y) = \ln(x + 2y)$ com a restrição de que $xy + y = 5$.

56. Minimize a função $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{xy} + \dfrac{1}{y^2}$ com a restrição de que $x + 2y = 7$.

57. Maximize $f(x, y) = xe^{x^2-y}$ com a restrição de que $x^2 + 2y^2 = 1$.

SEÇÃO 7.6 Integrais Duplas

Nos Capítulos 5 e 6, integramos uma função de uma variável, $f(x)$, invertendo o processo de derivação. Um processo semelhante pode ser usado para integrar uma função de duas variáveis $f(x, y)$. Entretanto, como duas variáveis estão envolvidas, integramos $f(x, y)$ mantendo uma das variáveis fixas e integrando em relação à outra. Assim, por exemplo, para calcular a integral parcial $\int_1^2 xy^2 dx$, integramos em relação a x usando o teorema fundamental do cálculo e tratando y como uma constante:

$$\int_1^2 xy^2\, dx = \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(2)^2y^2\right] - \left[\frac{1}{2}(1)^2y^2\right] = \frac{3}{2}y^2$$

Da mesma forma, para calcular $\int_{-1}^{1} xy^2dx$, integramos em relação a y e tratamos x como uma constante:

$$\int_{-1}^{1} xy^2\,dy = x\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=1}$$

$$= \left[x\left(\frac{1}{3}(1)^3\right)\right] - \left[x\left(\frac{1}{3}(-1)^3\right)\right] = \frac{2}{3}x$$

Ao integrar uma função $f(x, y)$ em relação a x, obtemos uma função apenas de y, que pode, então, ser integrada como uma função de uma variável. O resultado é a chamada **integral repetida**, $\int\left[\int f(x, y)dx\right]dy$. Da mesma forma, a integral repetida $\int\left[\int f(x, y)dy\right]dx$ é obtida integrando primeiro em relação a y, considerando x como uma constante, e depois em relação a x. Assim, por exemplo,

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2} xy^2\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\frac{3}{2}y^2\,dy = \frac{1}{2}y^3\Bigg|_{y=-1}^{y=1} = 1$$

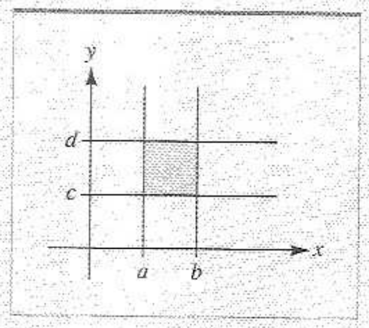
e

$$\int_{1}^{2}\left(\int_{-1}^{1} xy^2\,dy\right)dx = \int_{1}^{2}\frac{2}{3}x\,dx = \frac{1}{3}x^2\Bigg|_{x=1}^{x=2} = 1$$

Observe que neste exemplo as duas integrais repetidas têm o mesmo valor; isto acontece para todas as integrais repetidas consideradas neste livro. A integral dupla de $f(x, y)$ em uma região retangular do plano xy pode ser definida da seguinte forma em termos de uma integral repetida:

Integral Dupla em uma Região Retangular ■ A **integral dupla** $\iint_R f(x, y)\,dA$ na região retangular

$$R\colon a \le x \le b,\ c \le y \le d$$



é dada pelo valor comum das duas integrais repetidas

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx \qquad \text{e} \qquad \int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right]dy$$

ou seja,

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx = \int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right]dy$$

O Exemplo 7.6.1 ilustra o cálculo deste tipo de integral dupla.

EXEMPLO 7.6.1

Calcule a integral dupla

$$\iint_R xe^{-y}\,dA$$

onde R é a região retangular $-2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 5$:
a. integrando primeiro em relação a x
b. integrando primeiro em relação a y

Solução

a. Integrando primeiro em relação a x:

$$\begin{aligned}\iint_R xe^{-y}\,dA &= \int_0^5 \left(\int_{-2}^1 xe^{-y}\,dx\right)dy \\ &= \int_0^5 \frac{1}{2}x^2e^{-y}\Big|_{x=-2}^{x=1} dy \\ &= \int_0^5 \frac{1}{2}e^{-y}[(1)^2 - (-2)^2]dy = \int_0^5 -\frac{3}{2}e^{-y}dy \\ &= -\frac{3}{2}(-e^{-y})\Big|_{y=0}^{y=5} = \frac{3}{2}(e^{-5} - e^0) = \frac{3}{2}(e^{-5} - 1)\end{aligned}$$

b. Integrando primeiro em relação a y:

$$\begin{aligned}\iint_R xe^{-y}\,dA &= \int_{-2}^1 \left(\int_0^5 xe^{-y}\,dy\right)dx \\ &= \int_{-2}^1 x(-e^{-y})\Big|_{y=0}^{y=5} dx = \int_{-2}^1 [-x(e^{-5} - e^0)]\,dx \\ &= \left[-(e^{-5} - 1)\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right]\Big|_{x=-2}^{x=1} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-5} - 1)[(1)^2 - (-2)^2] = \frac{3}{2}(e^{-5} - 1)\end{aligned}$$

No Exemplo 7.6.1, a ordem de integração não faz diferença: não só os cálculos levam ao mesmo resultado, mas as integrações têm praticamente o mesmo grau de dificuldade. Entretanto, a ordem, às vezes, é importante, como ilustra o Exemplo 7.6.2.

EXEMPLO 7.6.2

Calcule a integral dupla

$$\iint_R xe^{xy}\,dA$$

onde R é a região retangular $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$.

Solução

Se calcularmos a integral na ordem

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\,dx\right)dy$$

teremos que usar o método da integração por partes para calcular a primeira integral:

$$u = x \qquad dv = e^{xy}\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{y}e^{xy}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{xy}\,dx &= \frac{x}{y}e^{xy}\Big|_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 \frac{1}{y}e^{xy}\,dx \\ &= \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2}\right)e^{xy}\Big|_{x=0}^{x=2} = \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}\right)e^{2y} - \left(\frac{-1}{y^2}\right)\end{aligned}$$

Nesse caso, a segunda integração se torna

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}\right)e^{2y} + \frac{1}{y^2}\right] dy$$

E agora? Alguma idéia?

Por outro lado, se integrarmos primeiro em relação a y, as duas integrações serão triviais:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 xe^{xy}\, dy\right) dx = \int_0^2 \frac{xe^{xy}}{x}\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 (e^x - 1)\, dx = (e^x - x)\Bigg|_{x=0}^{x=2}$$

$$= (e^2 - 2) - e^0 = e^2 - 3$$

Integrais Duplas em Regiões Não-retangulares

Nos exemplos anteriores a região de integração é um retângulo, mas integrais duplas também podem ser definidas em regiões não-retangulares. Antes disso, porém, vamos apresentar um método eficiente para descrever algumas dessas regiões em termos de desigualdades.

Retas Verticais como Limites

A região R da Figura 7.26 é limitada abaixo pela curva $y = g_1(x)$, acima pela curva $y = g_2(x)$ e dos lados pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Esta região pode ser descrita pelas desigualdades

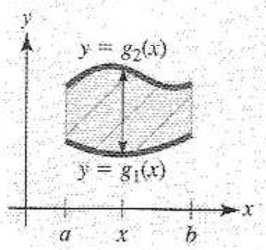
$$R\colon a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

A primeira desigualdade especifica o intervalo de variação de x, enquanto a segunda indica os limites superior e inferior de R para cada valor de x pertencente ao intervalo. Em palavras:

R é a região tal que, para cada x entre a e b,
y varia de $g_1(x)$ a $g_2(x)$.

Este método para descrever uma região é ilustrado no Exemplo 7.6.3.

FIGURA 7.26 Retas verticais como limites. A região $R\colon a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$.



EXEMPLO 7.6.3

Seja R a região entre a curva $y = x^2$ e a reta $y = 2x$. Use desigualdades para descrever R em termos de uma região limitada por retas verticais.

Solução

Começamos com um esboço da curva e da reta, como o da Figura 7.27. Identificamos a região R e resolvemos o sistema de equações $y = x^2$ e $y = 2x$ para determinar os pontos de interseção. Observe que na região R a variável x assume todos os valores entre $x = 0$ e $x = 2$ e que para cada um desses valores de x a região é limitada abaixo pela curva $y = x^2$ e acima pela reta $y = 2x$. Assim, a região R pode ser descrita pelas desigualdades

$$0 \leq x \leq 2 \qquad \text{e} \qquad x^2 \leq y \leq 2x$$

8 EXPLORE!

Plote a região para a qual a integral dupla está sendo calculada no Exemplo 7.6.3. Entre com $y = x^2$ em Y1 e $y = 2x$ em Y2 do editor de equações e plote usando uma janela [−0.15, 2.2] por [−0.5, 4.5]1. Use TRACE ou a rotina para determinar interseções da calculadora e localizar os pontos de interseção de Y1 e Y2. Use a rotina para plotar retas verticais da calculadora e mostrar os limites da integração.

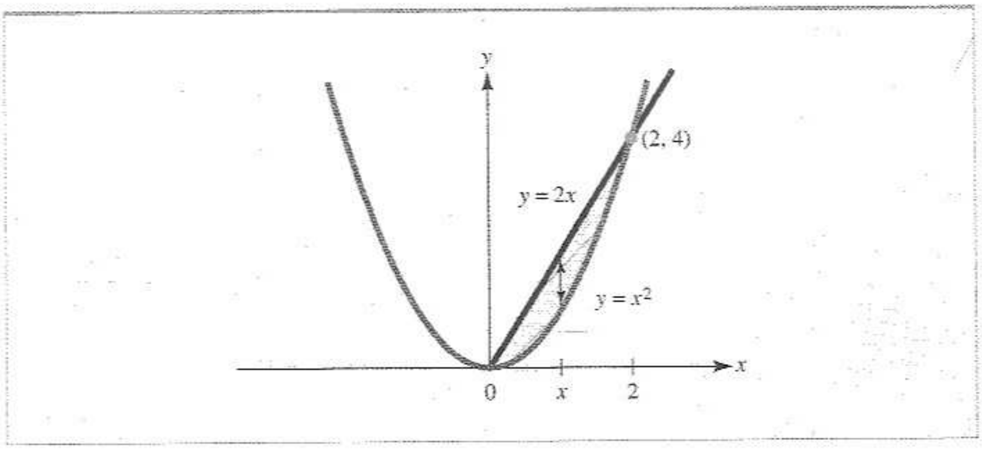


FIGURA 7.27 A região R entre $y = x^2$ e $y = 2x$ limitada por retas verticais. R: $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 2x$.

Retas Horizontais como Limites

A região R da Figura 7.28 é limitada à esquerda pela curva $x = h_1(y)$, à direita pela curva $x = h_2(y)$, abaixo pela reta horizontal $y = c$ e acima pela reta $y = d$. Esta região pode ser descrita pelo par de desigualdades

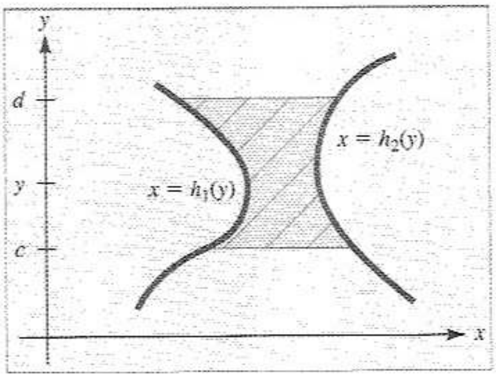
$$R\colon c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

A primeira desigualdade especifica o intervalo de variação de y, enquanto a segunda indica os limites esquerdo ("traseiro") e direito ("dianteiro") de R para cada valor de y pertencente ao intervalo. Em palavras:

R é a região tal que para cada y entre c e d,
x varia de $h_1(y)$ a $h_2(y)$.

Este método para descrever uma região é ilustrado no Exemplo 7.6.4 para a mesma região descrita usando retas verticais como limites no Exemplo 7.6.3.

FIGURA 7.28 Retas horizontais como limites. A região R: $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$.



EXEMPLO 7.6.4

Descreva a região R limitada pela curva $y = x^2$ e pela reta $y = 2x$ em termos de uma região limitada por retas horizontais.

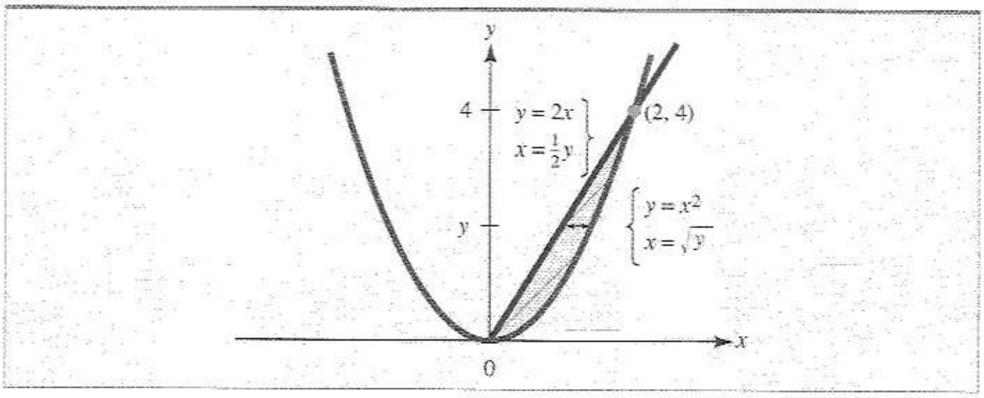
Solução

Como no Exemplo 7.6.3, fazemos um esboço da região e determinamos os pontos de interseção entre a reta e a curva, mas desta vez usamos retas horizontais para limitar a região (Figura 7.29).

Na região R, a variável y assume todos os valores entre $y = 0$ e $y = 4$. Para cada um desses valores de y, a região é limitada abaixo à esquerda pela reta $y = 2x$ e à direita pela curva $y = x^2$. Como a equação da reta pode ser escrita na forma $x = \dfrac{1}{2}x$ e a equação da curva na forma $x = \sqrt{y}$, as desigualdades que descrevem a região R usando retas horizontais como limites são

$$0 \leq y \leq 4 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}$$

FIGURA 7.29 A região R entre $y = x^2$ e $y = 2x$ limitada por retas horizontais. R: $0 \leq y \leq 4$, $\frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}$.



Para calcular uma integral dupla em uma região R usando retas verticais ou horizontais como limites, escrevemos uma integral dupla cujos limites de integração vêm das desigualdades que descrevem a região. Segue uma descrição mais precisa da forma como os limites de integração são determinados.

Limites de Integração para Integrais Duplas ■ Se a região R pode ser descrita pelas desigualdades

$$a \leq x \leq b \qquad \text{e} \qquad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

temos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

Se a região R pode ser descrita pelas desigualdades

$$c \leq y \leq d \qquad \text{e} \qquad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

temos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

EXEMPLO 7.6.5

Seja I a integral dupla

$$I = \int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx\, dy$$

a. Faça um esboço da região de integração e escreva a integral com a ordem de integração invertida.
b. Calcule I usando as duas ordens de integração.

Solução

a. Comparando I com a forma geral para a ordem $dx\, dy$, vemos que a região de integração é

$$R: \underbrace{0 \leq y \leq 1}_{\substack{\text{limites externos} \\ \text{de integração}}}, \quad \underbrace{0 \leq x \leq y}_{\substack{\text{limites internos} \\ \text{de integração}}}$$

Assim, se y é um número no intervalo $0 \leq y \leq 1$, para cada valor de y a região R se estende de $x = 0$ à esquerda até $x = y$ à direita. A região é o triângulo que aparece na Figura 7.30a. Como se pode ver na Figura 7.30b, a mesma região R pode ser descrita tomando, para cada valor de x no intervalo $0 \leq x \leq 1$, um intervalo limitado abaixo por $y = x$ e acima por $y = 1$. Em termos de desigualdades, isto significa que

$$R: 0 \leq x \leq 1, \; x \leq y \leq 1$$

E, portanto, a integral pode ser escrita na forma

$$I = \int_0^1 \int_x^1 y^2 e^{xy}\, dy\, dx$$

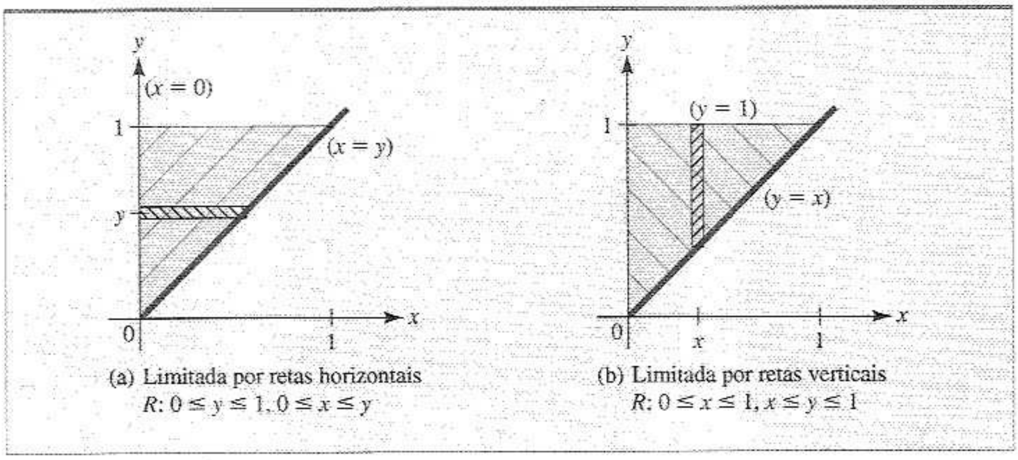


FIGURA 7.30 A região de integração para $I = \int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx\, dy$.

b. Vamos apresentar apenas o cálculo de I usando a ordem de integração dada. Para praticar, o leitor pode calcular I usando a outra ordem de integração.

$$\int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(y e^{xy} \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy \qquad \textit{já que} \int e^{xy}\, dx = \frac{1}{y} e^{xy}$$

$$= \int_0^1 (y e^{y^2} - y)\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} e - 1$$

Aplicações das Integrais Duplas

Vamos agora apresentar algumas aplicações das integrais duplas que, na verdade, não são mais que generalizações de aplicações já conhecidas de integrais definidas de funções de uma variável. Mais especificamente, vamos mostrar que a integração dupla pode ser usada para calcular áreas, volumes e valores médios.

Área de uma Região de um Plano

A área de uma região R do plano xy pode ser calculada através de uma integral dupla em R da função constante $f(x, y) = 1$.

Fórmula da Área ■ A área de uma região R do plano xy é dada pela expressão

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\, dA$$

Para ter uma idéia de como funciona a fórmula da área, considere a região elementar R da Figura 7.31, que é limitada acima pela curva $y = g_2(x)$ e abaixo pela curva $y = g_1(x)$ e se estende de $x = a$ até $x = b$.

De acordo com a fórmula da área,

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\, dA$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \left[y \Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \right] dx$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

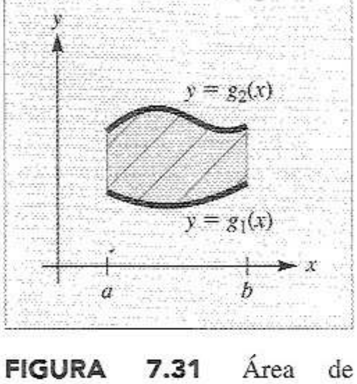


FIGURA 7.31 Área de $R = \iint_R 1\, dA$.

que é exatamente a expressão da área entre duas curvas a que chegamos na Seção 5.4. O exemplo a seguir ilustra o uso da fórmula da área.

EXEMPLO 7.6.6

Determine a área a região R limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

9 EXPLORE!

Determine a área da região R usando a rotina de integração numérica de sua calculadora para calcular $\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$. Explique por que o resultado obtido é o mesmo do Exemplo 7.6.6.

Solução

A região aparece na Figura 7.32. Usando a fórmula da área, temos:

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\,dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} 1\,dy\,dx$$

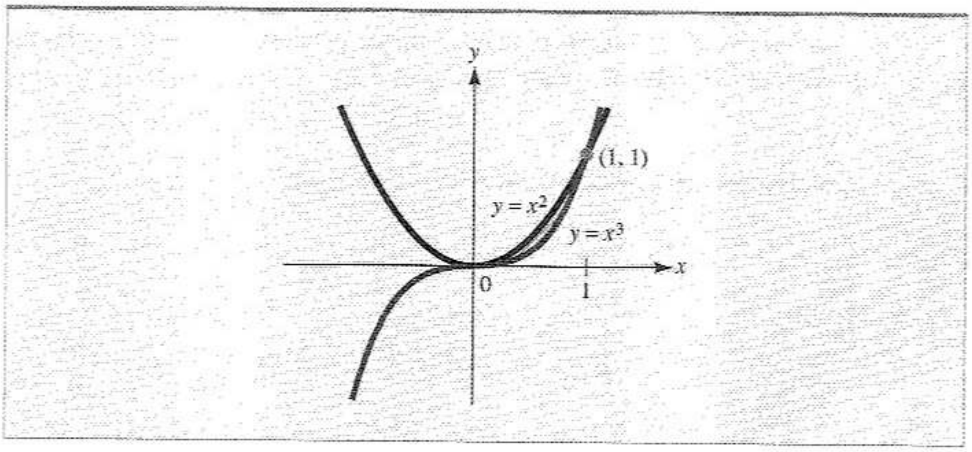
$$= \int_0^1 \left(y \Big|_{y=x^3}^{y=x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right] \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{12}$$

FIGURA 7.32 A região limitada por $y = x^2$ e $y = x^3$.



O Volume como uma Integral Dupla

Vimos na Seção 5.3 que a área da região sob a curva $y = f(x)$ em um intervalo $a \leq x \leq b$, onde $f(x)$ é contínua e $f(x) \geq 0$, é dada por $A = \int_a^b f(x)\,dx$. Um raciocínio semelhante para uma função contínua, não-negativa, de duas variáveis, $f(x, y)$, leva a uma fórmula para o volume como uma integral dupla.

O Volume como uma Integral Dupla ■ Se $f(x, y)$ é contínua e $f(x, y) \geq 0$ na região retangular R, a região tridimensional sob a superfície $z = f(x, y)$ que se estende a toda a região R tem um volume dado por

$$V = \iint_R f(x, y)\,dA$$

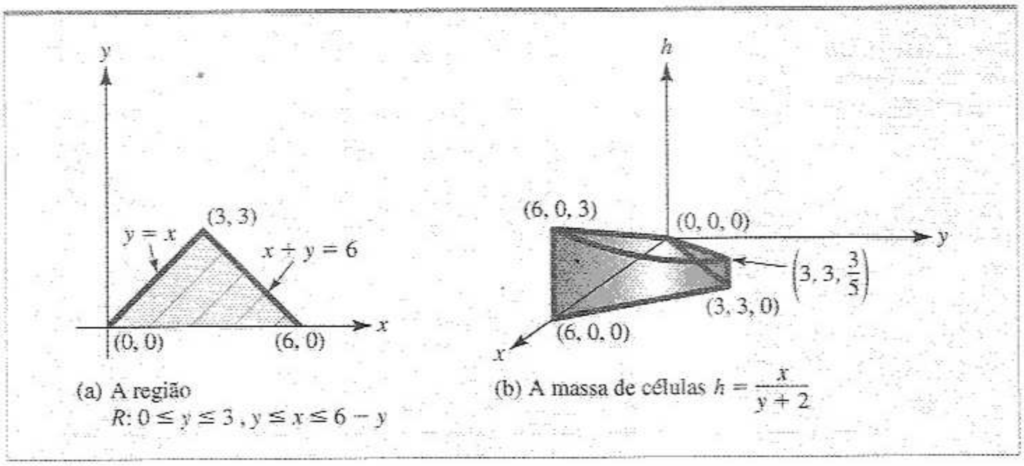
EXEMPLO 7.6.7

Uma massa de células cobre o fundo triangular de um recipiente de vértices (0, 0), (6, 0) e (3, 3) até uma altura $h(x, y) = \dfrac{x}{y+2}$ em todos os pontos (x, y) da região, onde todas as dimensões estão em centímetros. Qual é o volume total ocupado pelas células?

Solução

O volume é dado pela integral dupla $V = \iint_R h(x, y)\, dA$, onde R é a região triangular mostrada na Figura 7.33.

FIGURA 7.33 Volume de uma massa de células.



Observe que, como esta região é limitada pelo eixo x ($y = 0$) e pelas retas $x = y$ e $x + y = 6$, pode ser descrita da seguinte forma:

$$R\colon 0 \le y \le 3,\ y \le x \le 6 - y$$

Assim, o volume ocupado pelas células é dado por

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_y^{6-y} \frac{x}{y+2}\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \frac{1}{y+2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_y^{6-y} dy \\
&= \int_0^3 \frac{1}{2(y+2)}\left[(6-y)^2 - y^2\right] dy = \int_0^3 \frac{1}{2(y+2)}\left[36 - 12y\right] dy \\
&= \int_0^3 \left[-6 + \left(\frac{60}{2y+4}\right)\right] dy \qquad \textit{dividindo } 2y + 4 \textit{ por } -12y + 36 \\
&= -6y + 30 \ln |2y + 4| \Big|_0^3 \\
&= [-6(3) + 30 \ln(2(3) + 4)] - [-6(0) + 30 \ln(0 + 4)] \\
&\approx 9{,}489
\end{aligned}$$

Assim, o volume ocupado pelas células é aproximadamente 9,5 cm³.

Valor Médio de uma Função $f(x, y)$

Como vimos na Seção 5.4, o valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $a \le x \le b$ é dado pela expressão

$$\text{VM} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Assim, para calcular o valor médio de uma função de uma variável em um intervalo dado, temos que integrar a função neste intervalo e dividir o resultado pela largura do intervalo. No caso de uma função de duas variáveis, o método é semelhante: para calcular o valor médio de uma função de duas variáveis $f(x, y)$ em uma região retangular R, integramos a função na região R e dividimos o resultado pela área de R.

Fórmula do Valor Médio ■ O valor médio da função $f(x, y)$ na região retangular R é dado pela expressão

$$\text{VM} = \frac{1}{\text{área de } R}\iint_R f(x, y)\,dA$$

EXEMPLO 7.6.8

Em uma certa fábrica, a produção é dada pela função de produção de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = 50K^{3/5}L^{2/5}$$

onde K é o investimento em milhares de reais e L é o volume de mão-de-obra em homens-horas. O investimento mensal varia de R$ 10.000,00 a R$ 12.000,00 e o volume de mão-de-obra utilizado em um mês varia entre 2.800 e 3.000 homens-horas. Determine a produção mensal média da fábrica.

Solução

A produção média da fábrica é dada pelo valor médio de $Q(K, L)$ na região retangular R definida pelas desigualdades $10 \le K \le 12$ e $2.800 \le L \le 3.200$. A área da região é dada por

$$\begin{aligned} A = \text{área de } R &= (12 - 10) \times (3.200 - 2.800) \\ &= 800 \end{aligned}$$

E, portanto, a produção média é

$$\begin{aligned} \text{VM} &= \frac{1}{800}\iint_R 50K^{3/5}L^{2/5}dA \\ &= \frac{1}{800}\int_{2.800}^{3.200}\left(\int_{10}^{12} 50K^{3/5}L^{2/5}dK\right)dL \\ &= \frac{1}{800}\int_{2.800}^{3.200} 50L^{2/5}\left(\frac{5}{8}K^{8/5}\right)\Bigg|_{K=10}^{K=12} dL \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)\int_{2.800}^{3.200} L^{2/5}(12^{8/5} - 10^{8/5})\,dL \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)(12^{8/5} - 10^{8/5})\left(\frac{5}{7}L^{7/5}\right)\Bigg|_{L=2.800}^{L=3.200} \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right)(12^{8/5} - 10^{8/5})[(3.200)^{7/5} - (2.800)^{7/5}] \\ &\approx 5.181,23 \end{aligned}$$

Assim, a produção média é de aproximadamente 5.200 unidades.

PROBLEMAS 7.6

Calcule as integrais duplas dos Problemas 1 a 18.

1. $\int_0^1\int_1^2 x^2y\,dx\,dy$

2. $\int_1^2\int_0^1 x^2y\,dy\,dx$

3. $\int_0^{\ln 2}\int_{-1}^0 2xe^y\,dx\,dy$

4. $\int_2^3\int_{-1}^1 (x + 2y)\,dy\,dx$

5. $\int_1^3\int_0^1 \frac{2xy}{x^2 + 1}\,dx\,dy$

6. $\int_0^1\int_0^1 x^2e^{xy}\,dy\,dx$

7. $\int_0^4 \int_{-1}^1 x^2 y \, dy \, dx$

8. $\int_0^1 \int_1^5 y\sqrt{1-y^2} \, dx \, dy$

9. $\int_2^3 \int_1^2 \frac{x+y}{xy} \, dy \, dx$

10. $\int_1^2 \int_2^3 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) dy \, dx$

11. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx$

12. $\int_0^1 \int_1^5 xy\sqrt{1-y^2} \, dx \, dy$

13. $\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2x + y) \, dx \, dy$

14. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2xy \, dy \, dx$

15. $\int_0^1 \int_0^4 \sqrt{xy} \, dy \, dx$

16. $\int_0^1 \int_x^{2x} e^{y-x} \, dy \, dx$

17. $\int_1^e \int_0^{\ln x} xy \, dy \, dx$

18. $\int_0^3 \int_{y^2/4}^{\sqrt{10-y^2}} xy \, dx \, dy$

Nos Problemas 19 a 24, use desigualdades para descrever R em termos de limites verticais e horizontais.

19. R é a região limitada por $y = x^2$ e $y = 3x$.

20. R é a região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

21. R é o retângulo de vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(-1, 2)$.

22. R é o triângulo de vértices $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 0)$.

23. R é a região limitada por $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = e$.

24. R é a região limitada por $y = e^x$, $y = 2$ e $x = 0$.

Nos Problemas 25 a 36, determine o valor da integral dupla dada para a região R especificada.

25. $\iint_R 3xy^2 \, dA$, onde R é o retângulo limitado pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$ e $y = 0$.

26. $\iint_R (x + 2y) \, dA$, onde R é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$.

27. $\iint_R xe^y \, dA$, onde R é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

28. $\iint_R 48xy \, dA$, onde R é a região limitada por $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

29. $\iint_R (2y - x) \, dA$, onde R é a região limitada por $y = x^2$ e $y = 2x$.

30. $\iint_R 12x \, dA$, onde R é a região limitada por $y = x^2$ e $y = 6 - x$.

31. $\iint_R (2x + 1) \, dA$, onde R é o triângulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

32. $\iint_R 2x \, dA$, onde R é a região limitada por $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$ e $x = 2$.

33. $\iint_R \frac{1}{y^2 + 1} \, dA$, onde R é o triângulo limitado pelas retas $y = \frac{1}{2}x$, $y = -x$ e $y = 2$.

34. $\iint_R e^{y^3} \, dA$, onde R é a região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ e $x = 0$.

35. $\iint_R 12x^2 e^{y^2} \, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada por $y = x^3$ e $y = x$.

36. $\iint_R y \, dA$, onde R é a região limitada por $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = e$.

Nos Problemas 37 a 44, faça um esboço da região de integração da integral dada e escreva uma integral equivalente com a ordem de integração invertida.

37. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y) \, dy \, dx$

38. $\int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) \, dx \, dy$

39. $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx$

40. $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \, dy$

41. $\int_1^{e^2} \int_{\ln x}^2 f(x, y) \, dy \, dx$

42. $\int_0^{\ln 3} \int_{e^x}^3 f(x, y) \, dy \, dx$

43. $\int_{-1}^1 \int_{x^2+1}^2 f(x, y) \, dy \, dx$

44. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) \, dx \, dy$

Nos Problemas 45 a 54, use uma integral dupla para determinar a área de R.

45. R é o triângulo de vértices $(-4, 0)$, $(2, 0)$ e $(2, 6)$.

46. R é o triângulo de vértices $(0, -1)$, $(-2, 1)$ e $(2, 1)$.

47. R é a região limitada por $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = 2x$.

48. R é a região limitada por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

49. R é a região limitada por $y = x^2 - 4x + 3$ e o eixo x.

50. R é a região limitada por $y = x^2 + 6x + 5$ e o eixo x.

51. R é a região limitada por $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = e$.

52. R é a região limitada por $y = x$, $y = \ln x$, $y = 0$ e $y = 1$.

53. R é a região do primeiro quadrante limitada por $y = 4 - x^2$, $y = 3x$ e $y = 0$.

54. R é a região limitada por $y = \frac{16}{x}$, $y = x$ e $x = 8$.

Nos Problemas 55 a 64, determine o volume do sólido sob a superfície $z = f(x, y)$ e sobre a região R dada.

55. $f(x, y) = 6 - 2x - 2y$; $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$

56. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$; $R: -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2$

57. $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$; $R: 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 3$

58. $f(x, y) = e^{x+y}$; $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \ln 2$

59. $f(x, y) = xe^{-y}$; $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$

60. $f(x, y) = (1 - x)(4 - y)$; $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 4$

61. $f(x, y) = 2x + y$; R é limitada por $y = x$, $y = 2 - x$, e $y = 0$.

62. $f(x, y) = e^{y^2}$; R é limitada por $x = 2y$, $x = 0$, e $y = 1$.

63. $f(x, y) = x + 1$; R é limitada por $y = 8 - x^2$ e $y = x^2$.

64. $f(x, y) = 4xe^y$; R é limitada por $y = 2x$, $y = 2$, e $x = 0$.

Nos Problemas 65 a 72, determine o valor médio da função $f(x, y)$ na região dada R.

65. $f(x, y) = xy(x - 2y)$; $R: -2 \le x \le 3, -1 \le y \le 2$

66. $f(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$; $R: 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 3$

67. $f(x, y) = xye^{x^2y}$; $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$

68. $f(x, y) = \dfrac{\ln x}{xy}$; $R: 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3$

69. $f(x, y) = 6xy$; R é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 1)$.

70. $f(x, y) = e^{x^2}$; R é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

71. $f(x, y) = x$; R é a região limitada por $y = 4 - x^2$ e $y = 0$.

72. $f(x, y) = e^x y^{-1/2}$; R é a região limitada por $x = \sqrt{y}$, $y = 0$, e $x = 1$.

Nos Problemas 73 a 76, calcule o valor da integral dupla na região especificada R. Escolha a ordem de integração que for mais conveniente.

73. $\displaystyle\iint_R \frac{\ln(xy)}{y}\,dA$; $R: 1 \le x \le 3, 2 \le y \le 5$

74. $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\,dA$; $R: -1 \le x \le 1, 1 \le y \le 2$

75. $\displaystyle\iint_R x^3e^{x^2y}\,dA$; $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

76. $\displaystyle\iint_R e^{x^3}\,dA$; $R: \sqrt{y} \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

77. PRODUÇÃO Em uma certa fábrica, a produção Q está relacionada aos insumos x e y pela expressão

$$Q(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3$$

Se $0 \le x \le 5$ e $0 \le y \le 7$, qual é a produção média da fábrica?

78. PRODUÇÃO Um vendedor de bicicletas observou que, se bicicletas de 10 marchas são vendidas por x reais e o preço da gasolina é y centavos o litro, aproximadamente

$$Q(x, y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4(0{,}1y + 3)^{3/2}$$

bicicletas são vendidas por mês. Se em um mês típico o preço das bicicletas varia entre R$ 289,00 e R$ 324,00 e o preço da gasolina varia entre R$ 2,30 e R$ 2,50 quantas bicicletas serão vendidas, em média, por mês?

79. LUCRO MÉDIO Um fabricante estima que, quando x unidades de uma certa mercadoria são vendidas no mercado interno e y unidades são exportadas, o lucro é dado por

$$P(x, y) = (x - 30)(70 + 5x - 4y) + (y - 40)(80 - 6x + 7y)$$

centenas de reais. Se as vendas mensais no mercado interno variam entre 100 e 125 unidades e as vendas mensais no exterior variam entre 70 e 89 unidades, qual é o lucro médio mensal?

80. RESPOSTA MÉDIA A ESTÍMULOS Em um experimento de psicologia, x unidades do estímulo A e y unidades do estímulo B são aplicadas a um indivíduo cujo desempenho em uma certa tarefa é medido pela função

$$P(x, y) = 10 + xye^{1-x^2-y^2}$$

Suponha que x varie de 0 a 1 enquanto y varie de 0 a 3. Qual é a resposta média do indivíduo aos estímulos?

81. ALTITUDE MÉDIA Um mapa de um pequeno parque municipal é um quadriculado limitado pelas retas $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ e $y = 3$, no qual as distâncias estão em quilômetros. A altitude de cada ponto (x, y) do parque em relação ao nível do mar é dada por

$$E(x, y) = 90(2x + y^2) \text{ metros}$$

Determine a altitude média do parque.

82. VALOR DE UM TERRENO O mapa de um bairro é um quadriculado no qual as retas são paralelas a duas avenidas que se cruzam no centro do bairro. Cada ponto do bairro é definido neste quadriculado por coordenadas (x, y), para $-10 \leq x \leq 10$, $-8 \leq y \leq 8$, com x e y em quilômetros. Suponha que o valor da terra no ponto (x, y) seja V milhares de reais, onde

$$V(x, y) = (250 + 17x)e^{-0{,}01x-0{,}05y}$$

Estime o valor de um terreno que ocupe a região retangular $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$.

83. VALOR DE UM TERRENO Repita o Problema 82 para

$$V(x, y) = (300 + x + y)e^{-0{,}01x}$$

e a região $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

84. VALOR DE UM TERRENO Repita o Problema 82 para

$$V(x, y) = 400xe^{-y}$$

e a região R: $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$.

85. ÁREA SUPERFICIAL DO CORPO HUMANO De acordo com o Problema 35 da Seção 7.1, a área superficial do corpo de uma criança pode ser estimada pela fórmula empírica

$$S(W, H) = 0{,}0072W^{0{,}425}H^{0{,}725}$$

onde W é o peso da criança em quilogramas, H é a altura da criança em centímetros e a área superficial S é medida em metros quadrados.

a. Determine o valor médio da função $S(W, H)$ na região

$$R: 3{,}2 \leq W \leq 80,\ 38 \leq H \leq 180$$

b. Uma criança pesa 3,2 kg e tem 38 cm ao nascer; quando se torna adulta, tem um peso estável de 80 kg e uma altura de 180 cm. O valor médio do item (a) pode ser interpretado como o valor médio da área superficial da pessoa durante a vida? Justifique sua resposta.

86. ARQUITETURA Um edifício deve ter um teto curvo acima de uma base retangular. Em relação a um sistema de coordenadas retangulares, a base é a região retangular $-30 \leq x \leq 30$, $-20 < y < 20$, onde x e y estão em metros. A altura do teto acima de cada ponto (x, y) da base é dada por

$$h(x, y) = 12 - 0{,}003x^2 - 0{,}005y^2$$

a. Determine o volume do edifício.

b. Determine a altura média do telhado.

87. EMBALAGENS Uma embalagem deve ter a forma de um sólido limitado acima pela superfície

$$z = 20 - x^2 - y^2$$

abaixo pelo plano xy e dos lados pelo plano $y = 0$ e pelo cilindro parabólico $y = 4 - x^2$, onde x, y e z estão em metros. Determine o volume da embalagem.

88. EMBALAGENS Uma caixa de jóias tem a forma de um sólido limitado acima pelo plano

$$3x + 4y + 2z = 12$$

abaixo pelo plano xy e dos lados pelos planos $x = 0$ e $y = 0$, onde x, y e z estão em centímetros. Determine o volume da caixa.

89. CONTÁGIO É razoável supor que a probabilidade de que uma pessoa com uma doença infecciosa contagie outras pessoas em um lugar público é uma função $f(s)$ da distância s entre as pessoas. Suponha que as pessoas infectadas estejam distribuídas uniformemente em uma região retangular R do plano xy. Nesse caso, a probabilidade de que uma pessoa situada na origem (0, 0) seja infectada é proporcional ao índice de exposição E, dado pela integral dupla

$$E = \iint_R f(s)\, dA$$

onde $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância entre os pontos (0, 0) e (x, y). Determine o valor de E para o caso em que

$$f(s) = 1 - \frac{s^2}{9}$$

e R é a região quadrada

$$R: -2 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2$$

Nos Problemas 90 a 92, use uma integral dupla para determinar a grandeza pedida. Caso seja necessário, use a rotina de integração numérica de uma calculadora para encontrar o valor da integral.

90. Determine a área da região limitada acima pela curva (elipse) $4x^2 + 3y^2 = 7$ e abaixo pela parábola $y = x^2$.

91. Determine o volume do sólido limitado acima pela curva da função $f(x, y) = x^2e^{-xy}$ e abaixo pela região retangular R: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$.

92. Determine o valor médio de $f(x, y) = xy \ln(y/x)$ na região retangular limitada pelas retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ e $y = 3$.

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

Função de duas variáveis: $z = f(x, y)$ (Seção 7.1)
Convenção de domínio (Seção 7.1)
Função de produção de Cobb-Douglas (Seção 7.1)
Sistema de coordenadas tridimensional (Seção 7.1)
Curva de nível: $f(x, y) = C$ (Seção 7.1)
Mapa topográfico (Seção 7.1)
Utilidade (Seção 7.1)
Curva de indiferença (Seção 7.1)
Derivadas parciais de $z = f(x, y)$: (Seção 7.2)

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Produtividade marginal (Seção 7.2)
Produtos complementares e substitutos (Seção 7.2)
Derivadas parciais de segunda ordem: (Seção 7.2)

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Igualdade de derivadas parciais mistas de segunda ordem:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Regra da cadeia para derivadas parciais: (Seção 7.2)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Fórmula da Aproximação Incremental para Funções de Duas Variáveis $z = f(x, y)$:

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

Máximo relativo; mínimo relativo; ponto de sela (Seção 7.3)
Ponto crítico: $f_x = f_y = 0$ (Seção 7.3)
Teste das derivadas parciais de segunda ordem em um ponto crítico (a,b): (Seção 7.3)
Seja $D(a, b) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$.
Se $D < 0$, existe um ponto de sela em (a, b).
Se $D > 0$ e $f_{xx} < 0$, existe um máximo relativo em (a, b).
Se $D > 0$ e $f_{xx} > 0$, existe um mínimo relativo em (a, b).
Se $D = 0$, o teste não pode ser aplicado.
Gráfico de pontos (Seção 7.4)
Critério dos mínimos quadrados (Seção 7.4)
Reta de mínimos quadrados: $y = mx + b$, onde

$$m = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

Regressão log-linear (Seção 7.4)
Método dos multiplicadores de Lagrange: (Seção 7.5)
Para determinar os valores extremos de $f(x, y)$ com a restrição de que $g(x, y) = k$, resolvemos o sistema de equações

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad \text{e} \qquad g = k$$

O multiplicador de Lagrange (Seção 7.5)

$\lambda = \dfrac{dM}{dk}$, onde M é o máximo ou mínimo de $f(x, y)$ com a restrição de que $g(x, y) = k$.

Integral dupla (Seção 7.6)
na região R: $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\right] dx$$

na região R: $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\right] dy$$

A área da região R no plano xy é

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\,dA$$

O volume sob a superfície $z = f(x, y)$ para um retângulo R no qual $f(x, y) \ge 0$ é $\iint_R f(x, y)\,dA$ (Seção 7.6)
Volume médio de $f(x, y)$ para um retângulo R: (Seção 7.6)

$$\text{VM} = \frac{1}{\text{área de } R}\iint_R f(x, y)\,dA$$

Verificação do Capítulo 7

1. Em cada caso, primeiro descreva o domínio da função dada e depois calcule as derivadas parciais f_x, f_y, f_{xx} e f_{yx}.

a. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - 3y^4$

b. $f(x, y) = \dfrac{2x + y}{x - y}$

c. $f(x, y) = e^{2x-y} + \ln(y^2 - 2x)$

2. Descreva as curvas de nível das seguintes funções:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2$

b. $f(x, y) = x + y^2$

3. Em cada caso, determine todos os pontos críticos da função dada $f(x, y)$ e use o teste das derivadas parciais de segunda ordem para classificar cada ponto como um máximo relativo, um mínimo relativo ou nem uma coisa nem outra.

a. $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 6x^2 - 6y^2 + 5$

b. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 4y$

c. $f(x, y) = xy - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}$

4. Use o método os multiplicadores de Lagrange para determinar os seguintes extremos com restrições:

a. O menor valor de $f(x, y) = x^2 + y^2$ com a restrição de que $x + 2y = 4$.

b. O maior e o menor valor da função $f(x, y) = xy^2$ com a restrição de que $2x^2 + y^2 = 6$.

5. Calcule o valor das seguintes integrais duplas:

a. $\int_{-1}^{3}\int_{0}^{2} x^3 y\,dx\,dy$ b. $\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} x^2 e^{xy}\,dx\,dy$

c. $\int_{1}^{2}\int_{1}^{y} \frac{y}{x}\,dx\,dy$ d. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{2-x} xe^{-y}\,dy\,dx$

6. **PRODUTIVIDADE MARGINAL** Uma empresa produz $Q(K, L) = 120K^{3/4}L^{1/4}$ centenas de unidades de uma certa mercadoria quando o capital imobilizado é K milhares de reais e o volume de mão-de-obra é L homens-horas. Determine a produtividade marginal do capital Q_K e a produtividade marginal da mão-de-obra Q_L quando o capital imobilizado é de R$ 1.296.000,00 e o volume de mão-de-obra de 20.736 homens-horas.

7. **UTILIDADE** Geraldo acaba de receber R$ 300,00 de presente de aniversário e pretende gastar o dinheiro em DVDs e videogames. Para ele, a utilidade (satifação) associada à compra de x DVDs e y videogames é

$$U(x, y) = \ln(x^2\sqrt{y})$$

Se cada DVD custa R$ 20,00 e cada videogame custa R$ 30,00, quantos DVDs e quantos videogames Geraldo deve comprar para que a utilidade seja a maior possível?

8. **MEDICINA** Uma certa doença pode ser tratada administrando pelo menos 70 unidades do medicamento C, mas este remédio pode produzir graves efeitos colaterais. Em busca de uma alternativa menos arriscada, um médico decide usar os medicamentos A e B, que não produzem efeitos colaterais se a dose combinada dos dois remédios for menor que 60 unidades. O médico determina que, quando x unidades do medicamento A e y unidades do medicamento B são administradas a um paciente, o efeito é equivalente ao de administrar E unidades do medicamento C, onde

$$E = 0{,}05(xy - 2x^2 - y^2 + 95x + 20y)$$

Para que doses dos medicamentos A e B o nível equivalente E do medicamento C é máximo? Se o médico administrar doses adequadas dos medicamentos A e B, será possível tratar a doença sem efeitos colaterais?

9. **TEMPERATURA MÉDIA** Uma placa fina de metal no plano xy é aquecida de tal forma que a temperatura no ponto (x, y) é T °C, onde

$$T(x, y) = 10ye^{-xy}$$

Determine a temperatura média em uma região retangular da placa para a qual $0 \le x \le 2$ e $0 \le y \le 1$.

10. **LUCRO** A tabela a seguir mostra o lucro anual de uma empresa (em milhões de reais) nos primeiros 5 anos de funcionamento.

Ano	1	2	3	4	5
Lucro (milhões de reais)	1,03	1,52	2,03	2,41	2,84

a. Plote estes dados em um gráfico.
b. Determine a equação da reta de mínimos quadrados.
c. Use o resultado do item (b) para estimar o lucro anual da empresa no sexto ano de funcionamento.

Problemas de Revisão

Nos Problemas 1 a 5, determine as derivadas parciais f_x e f_y.

1. $f(x, y) = 2x^3y + 3xy^2 + \dfrac{y}{x}$
2. $f(x, y) = (xy^2 + 1)^5$
3. $f(x, y) = xye^{xy}$
4. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2x + y}$
5. $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{xy}{x + 3y}\right)$

6. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} e f_{yx} das funções dadas.

a. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy^2$
b. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
c. $f(x, y) = x \ln y$

7. Em uma certa fábrica, a produção diária é de aproximadamente $40K^{1/3}L^{1/2}$ unidades, onde K é o capital imobilizado em milhares de reais e L o volume de mão-de-obra em homens-horas. No momento, o capital imobilizado é de R$ 125.000,00 e o volume de mão-de-obra de 900 homens-horas por dia. Use os métodos de análise marginal para estimar o efeito de um aumento de R$ 1.000,00 no capital imobilizado sobre a produção diária se o volume de mão-de-obra permanecer constante.

8. Na economia, a produtividade marginal da mão-de-obra é a taxa de variação da produção Q com a mão-de-obra L para um valor fixo do capital imobilizado K. Segundo uma lei da economia, em certas circunstâncias, a produtividade marginal da mão-de-obra aumenta quando o capital imobilizado aumenta. Expresse esta lei em termos matemáticos usando uma derivada parcial de segunda ordem.

9. Para cada uma das funções, trace a curvas de nível indicada.

a. $f(x, y) = x^2 - y; f = 2, f = -2$
b. $f(x, y) = 6x + 2y; f = 0, f = 1, f = 2$

10. Para cada uma das funções, determine a inclinação da curva de nível especificada no ponto dado.

a. $f(x, y) = x^2 - y^3; f = 2; x = 1$
b. $f(x, y) = xe^y; f = 2; x = 2$

11. **ANÁLISE MARGINAL** Usando x operários especializados e y operários não-especializados, uma fábrica produz $Q(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$ unidades por dia. No momento, a fábrica emprega 10 operários especializados e 40 operários não-

especializados e pretende contratar mais 1 operário especializado. Use os métodos do cálculo para estimar qual deverá ser a mudança no número de operários não-especializados para que a produção continue a mesma.

Nos Problemas 12 a 15, determine todos os pontos críticos da função dada e use o teste das segundas derivadas parciais para classificá-los como um máximo relativo, um mínimo relativo ou um ponto de sela.

12. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$

13. $f(x, y) = x^2 + y^3 + 6xy - 7x - 6y$

14. $f(x, y) = 3x^2y + 2xy^2 - 10xy - 8y^2$

15. $f(x, y) = xe^{2x^2+5xy+2y^2}$

16. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar o(s) máximo(s) e mínimo(s) relativo(s) da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$ com a restrição de que $x^2 + y^2 = 4$.

17. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para provar que, de todos os retângulos com um dado perímetro, o quadrado é o que possui a maior área.

18. DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS Um fabricante pretende vender um novo produto por R$ 350,00 a unidade e estima que se gastar x mil reais com desenvolvimento e y reais com propaganda, os consumidores comprarão aproximadamente $\dfrac{250y}{y+2} + \dfrac{100x}{x+5}$ unidades do produto. Se o custo de fabricação do produto é de R$ 150,00 por unidade, quanto o fabricante deve investir em desenvolvimento e quanto deve investir em propaganda para que o lucro seja o maior possível? Suponha que o fabricante disponha de um suprimento ilimitado de fundos.

19. DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS Suponha que o fabricante do Problema 18 disponha apenas de R$ 11.000,00 para investir no novo produto. Quanto deve investir em desenvolvimento e quanto deve investir em propaganda para que o lucro seja o maior possível?

20. DISTRIBUIÇÃO DE RECURSOS Suponha que o fabricante do Problema 19 decida investir R$ 12.000,00 em vez de R$ 11.000,00 no novo produto. Use λ, o multiplicador de Lagrange, para estimar o efeito desta mudança sobre o lucro máximo possível.

21. Seja $f(x, y) = \dfrac{12}{x} + \dfrac{18}{y} + xy$, onde $x > 0$, $y > 0$. Como é possível afirmar que f possui um mínimo na região $x > 0$, $y > 0$? Determine a localização deste mínimo.

Nos Problemas 22 a 29, calcule a integral dupla dada, mudando, se necessário, a ordem de integração.

22. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-2}^0 (2x + 3y)\,dy\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 e^{-x-y}\,dy\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 x\sqrt{1 - y}\,dx\,dy$

25. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 xe^{2y}\,dy\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{6xy^2}{x^2 + 1}\,dy\,dx$

27. $\displaystyle\int_1^e \int_1^e \ln(xy)\,dy\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} x(y - 1)^2\,dy\,dx$

29. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x e^{y/x}\,dy\,dx$

Nos Problemas 30 e 31, calcule a integral dupla dada na região especificada R.

30. $\displaystyle\iint_R 6x^2y\,dA$, onde R é o retângulo que tem como vértices os pontos $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$ e $(-1, 3)$.

31. $\displaystyle\iint_R (x + 2y)\,dA$, onde R é o retângulo limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = -2$ e $y = 2$.

32. Calcule o volume sob a superfície $z = 2xy$ e acima do retângulo que tem como vértices os pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$ e $(2, 3)$.

33. Calcule o volume sob a superfície $z = xe^{-y}$ e acima do retângulo formado pelas retas $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$ e $y = 3$.

34. Determine o valor médio da função $f(x, y) = xy^2$ na região retangular que tem como vértices os pontos $(-1, 3)$, $(-1, 5)$, $(2, 3)$ e $(2, 5)$.

35. Encontre três números positivos, x, y e z tais que $x + y + z = 20$ e o produto $P = xyz$ seja o maior possível. [*Sugestão:* Use o fato de que $z = 20 - x - y$ para expressar P como uma função de apenas duas variáveis.]

36. Encontre três números positivos, x, y e z, tais que $2x + 3y + z = 60$ e a soma $S = x^2 + y^2 + z^2$ seja a menor possível. (Veja a sugestão do Problema 35.)

37. Determine a distância mais curta entre a origem e a superfície $y^2 - z^2 = 10$. [*Sugestão:* Expresse a distância $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ entre a origem e um ponto (x, y, z) da superfície em termos das variáveis x e y e minimize o *quadrado* da função resultante.]

38. Plote os pontos $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 2)$ e $(4, 3)$ e use derivadas parciais para determinar a reta de mínimos quadrados correspondente.

39. VENDAS O chefe do departamento de marketing de uma empresa compilou os seguintes dados mensais (em milhares de reais) sobre as despesas com propaganda e as vendas de um determinado produto:

Propaganda	3	4	7	9	10
Vendas	78	86	138	145	156

a. Plote os dados em um gráfico.
b. Determine a reta de mínimos quadrados.
c. Use o resultado do item (b) para prever o valor das vendas em um mês se forem gastos R$ 5.000,00 com propaganda.

40. UTILIDADE Suponha que a utilidade para um consumidor de x unidades de um produto e y unidades de um segundo produto seja dada pela função de utilidade $U(x, y) = x^3y^2$. O consumidor possui no momento $x = 5$ unidades do primeiro produto e $y = 4$ unidades do segundo. Use os métodos do cálculo para estimar quantas unidades do segundo produto o consumidor poderia trocar por 1 unidade do primeiro produto sem que a utilidade total fosse afetada.

41. DEMANDA DO CONSUMIDOR Uma loja de tintas vende duas marcas de tinta acrílica. Os dados indicam que, se uma lata de um quarto da primeira tinta é vendida por x reais e uma lata de um quarto da segunda é vendida por y reais, a demanda da primeira marca é Q latas por mês, onde

$$Q(x, y) = 200 - 10x^2 + 20y$$

Estima-se que daqui a t meses o preço de uma lata da primeira marca será $x(t) = 5 + 0{,}02t$ reais e o preço de uma lata da segunda será $y(t) = 6 + 0{,}4\sqrt{t}$ reais. Qual será a taxa de variação com o tempo da demanda da primeira marca de tinta daqui a 9 meses?

42. RESFRIAMENTO DO CORPO DE UM ANIMAL A diferença entre a temperatura da superfície do corpo de um animal e a temperatura do ar nas vizinhanças produz uma transferência de energia por convecção. O coeficiente de convecção h é dado por

$$h = \frac{kV^{1/3}}{D^{2/3}}$$

onde V é a velocidade do vento, D é o diâmetro do corpo do animal e k é uma constante.

a. Determine as derivadas parciais h_V e h_D. Interprete estas derivadas como taxas de variação.

b. Calcule a razão $\dfrac{h_V}{h_D}$.

43. DEMANDA DO CONSUMIDOR Suponha que, quando maçãs são vendidas por x centavos o quilo e os padeiros ganham y reais por hora, o preço da torta de maçã em uma certa rede de supermercados é

$$p(x, y) = \frac{1}{4}x^{1/3}y^{1/2}$$

reais. Suponha também que daqui a t meses o preço das maçãs será

$$x = 129 - \sqrt{8t}$$

centavos o quilo e o salário dos padeiros será

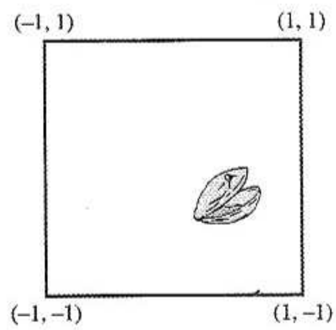
$$y = 15{,}60 + 0{,}2t$$

reais por hora. Se a rede de supermercados pode vender $Q = 4.184/p$ tortas por semana quando o preço da torta é p reais, qual será a taxa de variação da demanda semanal Q de tortas daqui a 2 meses?

44. Arnaldo, o mexilhão friorento, é o mexilhão mais inteligente do mundo. Arnaldo detesta o frio e usando o sistema de coordenadas dos crustáceos, que aprendeu com um caranguejo que passava, verificou que nos pontos (x, y) do fundo do mar a temperatura (em °C) é dada por

$$T(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 2y + 1$$

O mundo de Arnaldo é constituído por uma região retangular do fundo do mar que tem como vértices os pontos $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$. Como tem muita dificuldade para se mover, pretende permanecer onde está enquanto a temperatura média da região permanecer acima de 5°C. Arnaldo fica onde está ou é obrigado a se mudar?



PROBLEMA 44

45. POLUIÇÃO DO AR Em uma certa fábrica, a quantidade de poluição do ar gerada por dia é medida pela função $Q(E, T) = 125E^{2/3}T^{1/2}$, onde E é o número de empregados e T é a temperatura média no horário de trabalho. No momento, existem $E = 151$ empregados e a temperatura média é $T = 10$°C. Se a temperatura média está caindo à taxa de 0,21°C por dia e o número de empregados está aumentando à taxa de 2 por mês, use os métodos do cálculo para estimar o efeito dessas variações sobre a taxa de variação da poluição com o tempo. Expresse a resposta em unidades por dia. Suponha que o mês tenha 22 dias úteis.

46. POPULAÇÃO Um demógrafo constrói um reticulado para descrever a localização das moradias em um bairro de uma grande cidade. Em relação a este reticulado, a densidade populacional no ponto (x, y) é dada por

$$f(x, y) = 1 + 3y^2$$

centenas de pessoas por quilômetro quadrado, onde x e y estão em quilômetros. Um conjunto habitacional ocupa a região R limitada pela curva $y^2 = 4 - x$ e o eixo y $(x = 0)$. Qual é a população da região R?

47. POLUIÇÃO Existem duas fontes de poluição do ar que afetam a saúde de uma certa comunidade. As autoridades sanitárias determinaram que, em um ponto situado a r quilômetros da fonte A e a s quilômetros da fonte B, existem

$$N(r, s) = 40e^{-r/2}e^{-s/3}$$

unidades de poluição. Um conjunto habitacional está situado em uma região R para a qual

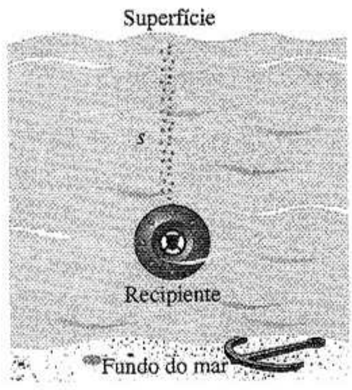
$$2 \le r \le 3 \qquad \text{e} \qquad 1 \le s \le 2$$

Qual é a poluição total no interior da região R?

48. REJEITOS NUCLEARES O lixo radioativo às vezes é colocado em recipientes hermeticamente fechados e lançado no mar. É importante que os recipientes não atinjam uma velocidade suficiente para se romperem ao se chocarem com o fundo do mar. Suponha que, enquanto o recipiente afunda, esteja sujeito a uma força de arraste que é proporcional à velocidade. Nesse caso, é possível demonstrar que a distância $s(W, t)$ percorrida por um recipiente de peso W após um tempo t é dada pela expressão

$$s(W, t) = \left(\frac{W - B}{k}\right)t + \frac{W(W - B)}{k^2 g}\left[e^{-(kgt/W)} - 1\right]$$

onde B é a força (constante) de empuxo, k é a constante de arraste e $g = 9{,}8$ m/s² é a aceleração da gravidade.



PROBLEMA 48

a. Calcule $\frac{\partial s}{\partial W}$ e $\frac{\partial s}{\partial t}$. Interprete estas derivadas como taxas de variação. É possível que uma delas seja nula?

b. Para um peso fixo, a velocidade do recipiente é $\frac{\partial s}{\partial t}$. Suponha que o recipiente se parta se a velocidade que possui ao se chocar com o fundo do mar for maior que 10 m/s. Se $B = 1.983$ newtons e $k = 0{,}597$ kg/s, qual a maior profundidade na qual se pode lançar com segurança um recipiente de peso $W = 2.417$ newtons?

c. Leia a respeito do problema dos rejeitos radioativos. Você acha que é melhor se desfazer dos rejeitos enterrando-os ou lançando-os ao mar? Justifique sua resposta em um ensaio de pelo menos dez linhas.

49. PRODUÇÃO Para uma função de produção dada por $Q = x^a y^b$, onde $a > 0$ e $b > 0$, mostre que

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = (a + b)Q$$

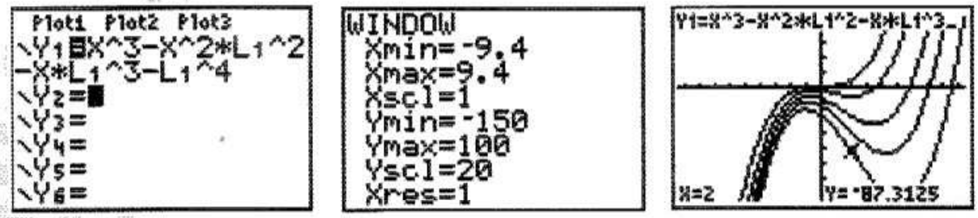
Em particular, se $b = 1 - a$ com $0 < a < 1$, temos

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = Q$$

ATUALIZAÇÃO DO EXPLORE!

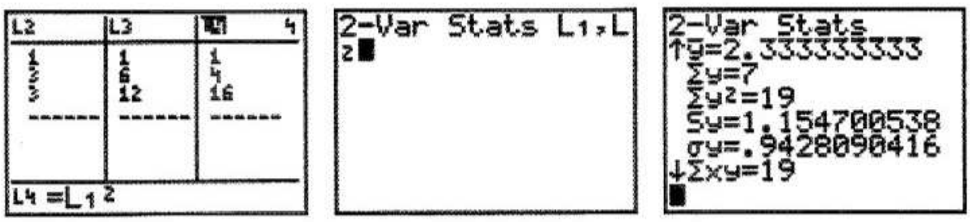
Solução do Exercício
EXPLORE! 1

Entre com $f(x, y) = x^3 - x^2y^2 - xy^3 - y^4$ em Y1 como X^3 − X^2*L1^2 − X^2*L1^3 − L1^4, onde L1 é a lista de valores {0, 1.5, 2.0, 2.25, 2.5}. Plote usando a janela decimal modificada [−9.4, 9.4]1 por [−150, 100]20. Aperte a tecla **TRACE** e posicione o cursor em $x = 2$ para observar os diferentes valores de Y = $f(x$, L1) associados aos diferentes valores de L1. Quanto maior o valor de L1, menor (mais negativo) o valor de Y em $x = 2$.

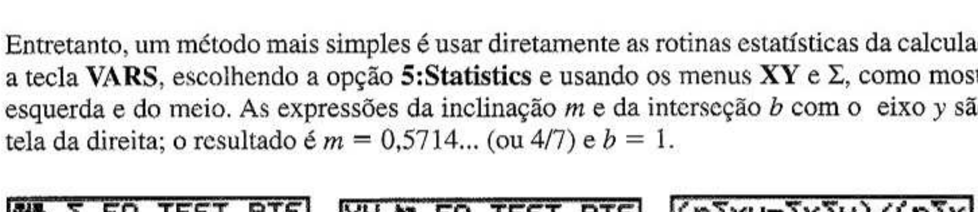


Solução do Exercício
EXPLORE! 6

Usando os dados do Exemplo 7.4.2, coloque os valores de x em L1 e os valores de y em L2. Escreva L3 = L1*L2 e L4 = L1² para ver as listas de valores. Para obter todas as somas necessárias para aplicar as fórmulas da inclinação m e da interseção b com o eixo y, aperte a tecla **STAT**, desloque o cursor para a direita até **CALC**, escolha a opção **2:2-Var Stats** e entre com L1 e L2, como mostra a tela do meio. Apertando **ENTER** e deslocando o cursor para cima e para baixo nesta tela é possível obter todas as somas desejadas, como mostra a tela da direita.

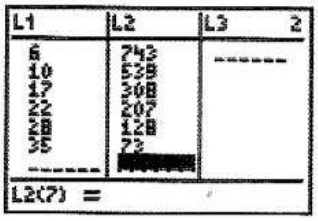


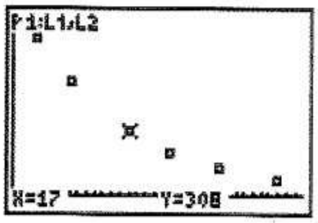
Entretanto, um método mais simples é usar diretamente as rotinas estatísticas da calculadora, apertando a tecla **VARS**, escolhendo a opção **5:Statistics** e usando os menus **XY** e Σ, como mostram as telas da esquerda e do meio. As expressões da inclinação m e da interseção b com o eixo y são calculadas na tela da direita; o resultado é m = 0,5714... (ou 4/7) e b = 1.



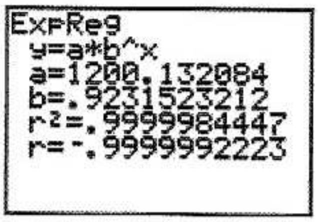
Solução do Exercício EXPLORE! 7

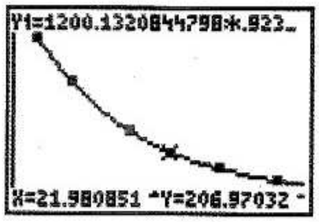
Usando os dados do Exemplo 7.4.4, entre com os valores de nível de produção e preço de demanda nas listas L1 e L2, respectivamente. Usando a tecla **STAT PLOT** da forma discutida na seção Introdução às Calculadoras, obtenha um gráfico de pontos como o que aparece na tela do meio, que lembra a curva de uma função exponencial com um expoente negativo. Aperte **STAT**, mova o cursor para a direita até **CALC** e escolha a opção **0:ExpReg**, indicando as listas e função desejadas. Mais especificamente, escreva **ExpReg L1,L2,Y1** antes de apertar a última tecla. Lembre-se de que o símbolo Y1 é obtido através da seqüência de teclas **VARS**, **Y-VARS**, **1:Function**, **1:Y1**.





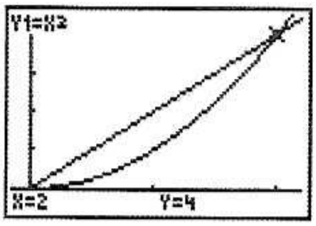
A forma da equação exponencial é $Y = a*b^x$ e obtemos $a = 1.200$, $b = 0{,}92315$. Fazendo $b^x = e^{mx}$, obtemos $m = -0{,}079961$, ou seja, $0{,}92315 = e^{-0{,}079961}$. Apertando **ZOOM**, **9:ZoomStat**, obtemos a tela da direita, que mostra um ajuste quase perfeito aos dados de uma curva exponencial cuja equação é $Y = 1.200(0{,}92315)^x = 1200e^{(-0{,}079961)x}$. Esta equação coincide com a solução mostrada. Escolhendo o modelo de Regressão Exponencial, executamos uma regressão log-linear sem que houvesse necessidade de calcular os logaritmos das variáveis nível de produção e preço de demanda.

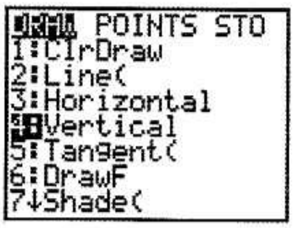


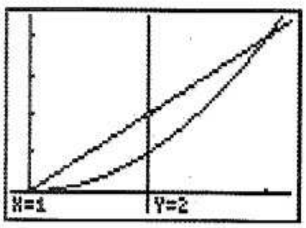


Solução do Exercício EXPLORE! 8

Leia o Exemplo 7.6.3. Entre com $y = x^2$ em Y1 e $y = 2x$ em Y2 do editor de equações e plote usando uma janela [−0.15, 2.2]1 por [−0.5, 4,5]1. Os pontos de interseção de Y e Y2 podem ser facilmente localizados usando **TRACE** e **ZOOM**. As retas verticais a serem usadas como limites podem ser especificadas usando a tecla **DRAW (2nd PRGM)**, opção **4:Vertical**. Movendo as retas verticais para a direita ou para a esquerda é possível assinalar partes da área entre Y1 e Y2, que correspondem a possíveis limites de integração.







PARA PENSAR

MODELANDO A DIFUSÃO DE POPULAÇÕES

Em 1905, cinco ratos almiscarados foram acidentalmente libertados perto de Praga, na atual República Tcheca. Com o tempo, a população de ratos almiscarados cresceu e se espalhou, como mostra a Figura 1. Na figura, as curvas rotuladas com datas são curvas de nível de eqüipopulação mínima, ou seja, curvas que ligam pontos nos quais podia ser encontrado um pequeno número de ratos almiscarados no ano indicado. Assim, por exemplo, a curva para 1920 mostra que naquele ano os ratos já haviam chegado a Viena. Uma dispersão de população como esta pode ser estudada usando modelos matemáticos baseados em *equações diferenciais parciais*, ou seja, equações que envolvem funções de duas ou mais variáveis e suas derivadas parciais. Vamos examinar um destes modelos e verificar até que ponto pode ser usado para descrever a dispersão dos ratos almiscarados.

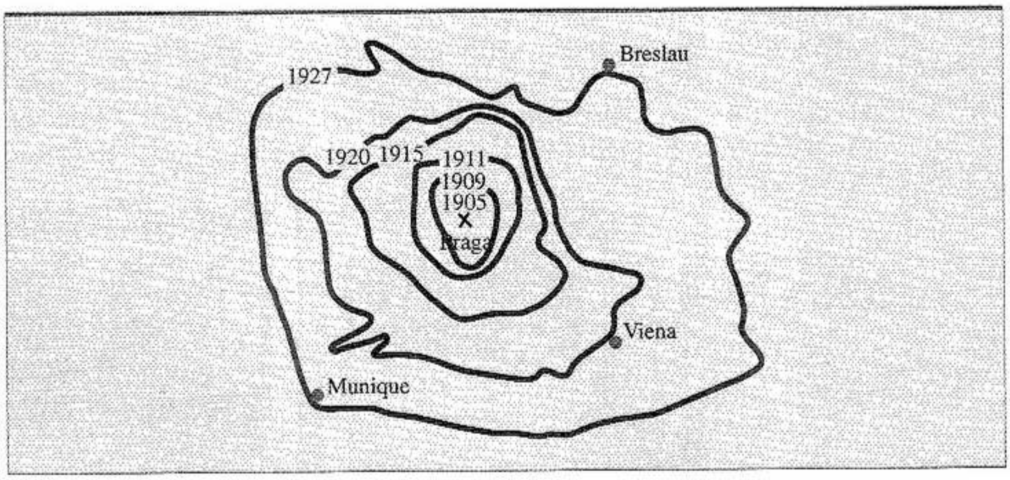


FIGURA 1 Curvas de eqüipopulação da população de ratos almiscarados na Europa.
FONTE: Leah Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, Boston: McGraw-Hill, 1988, p. 439.

O modelo que vamos discutir se baseia na **equação de difusão**, uma equação diferencial parcial extremamente versátil com importantes aplicações na física, biologia e economia. *Difusão* é o nome usado para o processo pelo qual partículas se espalham enquanto colidem entre si e mudam aleatoriamente de direção depois de serem introduzidas em um certo local. Suponha que as partículas possam se mover apenas em uma certa direção (por estarem confinadas ao interior de um tubo estreito, por exemplo). Nesse caso, $C(x, t)$, a concentração de partículas no instante t a uma distância de x unidades da fonte (ponto de inserção) satisfaz a equação de difusão unidimensional

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

onde α é uma constante positiva chamada de coeficiente de difusão. Analogamente, a equação de difusão bidimensional

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$$

é usada para modelar a dispersão de partículas que se movem aleatoriamente em um plano, onde $C(x, y, t)$ é a concentração de partículas no ponto (x, y) no instante t.

Os biólogos têm usado a equação de difusão para modelar a dispersão de organismos vivos, tanto plantas como animais. Vamos examinar um destes modelos, proposto por J. G. Skellam. Suponha que, em um certo instante ($t = 0$), um organismo seja introduzido em um ponto (conhecido como "fonte") no qual anteriormente não existia. Skellam supôs que a população do organismo se dispersa a partir da fonte de duas formas:

a. Crescendo exponencialmente com uma taxa de reprodução constante r.
b. Movendo-se ao acaso no plano xy, com a fonte na origem.

Com base nestas hipóteses, ele modelou a dispersão da população usando a equação de difusão bidimensional modificada

$$(1)\quad \frac{\partial N}{\partial t} = \underbrace{D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right)}_{\substack{\textit{expansão por} \\ \textit{movimento} \\ \textit{aleatório}}} + \underbrace{rN}_{\substack{\textit{crescimento} \\ \textit{exponencial} \\ \textit{por reprodução}}}$$

onde $N(x, y, t)$ é a densidade populacional no ponto (x, y) no instante t, e D é uma constante positiva, conhecida como coeficiente de dispersão, que é análoga ao coeficiente de difusão.

É possível mostrar que uma solução da equação de Skellam é a função

$$(2)\quad N(x, y, t) = \frac{M}{4\pi Dt} e^{rt-(x^2+y^2)/(4Dt)}$$

onde M é o número de indivíduos inicialmente introduzidos na fonte (veja Exercício 5). A *taxa assintótica de expansão da população*, V, é a distância entre locais com a mesma densidade populacional em anos sucessivos; é possível provar que, no modelo de Skellam,

$$(3)\quad V = \sqrt{4rD}$$

(veja a Exercício 4). Da mesma forma, a *taxa de crescimento intríseco*, r, pode ser estimada usando dados sobre o crescimento de populações existentes e o coeficiente de dispersão, D, pode ser estimado usando a expressão

$$(4)\quad D \approx \frac{2A^2(t)}{\pi t}$$

onde $A(t)$ é a distância média percorrida pelos organismos no instante t.

O modelo de Skellam tem sido usado para estudar a dispersão de muitos organismos, como carvalhos, besouros, borboletas e outros. Como ilustração da aplicação do modelo, vamos voltar à população de ratos almiscarados na Europa Central, mencionada no primeiro parágrafo e representada na Figura 1. Os estudos mostraram que r, a taxa de crescimento intrínseco da população de ratos almiscarados, não foi maior que 1,1 ao ano e que D, o coeficiente de dispersão, não ultrapassou 230 km²/ano. Em conseqüência, a solução do modelo de Skellam expressa pela Equação (2) prevê que a distribuição de ratos almiscarados, nas melhores circunstâncias para a espécie, é dada por

$$(5)\quad N(x, y, t) = \frac{5}{4\pi(230)t} e^{1,1t-(x^2+y^2)/(920t)}$$

onde (x, y) é o ponto x km a leste e y km ao norte do ponto de introdução, perto de Praga, e t é o tempo em anos (após 1905). De acordo com a Equação (3), a taxa máxima de expansão da população é

$$V = \sqrt{4rD} = \sqrt{4(1,1)(230)} \approx 31,8 \text{ km/ano}$$

que é um pouco maior que a taxa observada de 25,4 km/ano.

A demonstração da equação de difusão pode ser encontrada em muitos livros sobre equações diferenciais e também no livro de Edward Batschelet *Introduction to Mathematics for Life Scientists,* 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, pp. 392-395. O modelo de Skellam e algumas variações são discutidos no livro de Leah Edelstein-Kesher *Mathematical Models in Biology*, Boston: McGraw-Hill, 1988, pp. 436-441. É importante enfatizar que a equação de difusão modificada, Equação (1), possui outras soluções além da Equação (2). A solução de equações diferenciais parciais costuma ser muito difícil; em muitos casos, o melhor que se pode fazer é encontrar soluções com certas formas específicas. Estas soluções podem, então, ser aplicadas a problemas práticos, como o da expansão dos ratos almiscarados.

Exercícios

1. Mostre que $C(x, t) = \dfrac{M}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x^2/4Dt)}$ satisfaz a equação de difusão

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

calculando as derivadas parciais e substituindo-as na equação.

2. Que relação deve haver entre os coeficientes a e b para que $C(x, t) = e^{ax+bt}$ seja uma solução da equação de difusão

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

3. Uma população de organismos se expande ao longo de uma linha unidimensional de acordo com a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN$$

Mostre que a função $N(x,t) = \dfrac{M}{2\sqrt{\pi D t}} e^{rt-(x^2/4Dt)}$ é uma solução desta equação diferencial parcial, onde M é a população de organismos em $x = 0$ no instante $t = 0$.

4. Mostre que, nas curvas de nível de densidade populacional constante, ou seja, nas curvas da forma $N(x, t) = A$, onde A é uma constante, a razão x/t é dada por

$$\frac{x}{t} = \pm\left[4rD - \frac{2D}{t}\ln t - \frac{4D}{t}\ln\left(\sqrt{2\pi D}\,\frac{A}{M}\right)\right]^{1/2}$$

Usando esta expressão, é possível mostrar que $\dfrac{x}{t} \approx \pm 2\sqrt{rD}$, o que nos dá uma fórmula para a taxa de expansão da população.

5. Mostre que $N(x, y, t) = \dfrac{M}{4\pi D t} e^{rt-(x^2+y^2)/(4Dt)}$ é uma solução da equação diferencial parcial

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) + rN$$

6. Use a Equação (5), obtida a partir do modelo de Skellam, para calcular a densidade populacional dos ratos almiscarados em 1925 em uma localidade 50 km ao norte e 50 km a oeste do ponto de introdução (fonte), perto de Praga.
7. Use o modelo de Skellam para escrever uma função que expresse a densidade populacional da borboleta *Pieris rapae* se o maior coeficiente de difusão observado é de 129 km^2/ano e a maior taxa de crescimento intrínseco observada é de 31,5/ano. Qual é a maior taxa de expansão populacional prevista? Como este valor se compara com a maior taxa de expansão populacional observada, que é de 170 km/ano?
8. Nesta pergunta, vamos usar uma abordagem alternativa para analisar o problema dos ratos almiscarados à luz do modelo de Skellam. Como vimos, a taxa de crescimento intrínseco da população de ratos almiscarados foi $r = 1{,}1$ e a taxa máxima de dispersão observada foi $V = 25{,}4$.
   a. Use estes valores de r e V na Equação (3) para estimar o coeficiente de dispersão D.
   b. Fazendo $r = 1{,}1$ na Equação (2) e usando o valor de D calculado no item (a), calcule a densidade populacional dos ratos almiscarados em 1925 em uma localidade 50 km ao norte e 50 km a oeste do ponto de introdução (fonte), perto de Praga. Compare a resposta com a da Pergunta 6.
   c. Use a Equação (4) para estimar a distância média A entre a população de ratos almiscarados e sua fonte em 1925.

Referências

D. A. Andow, P. M. Kareiva, Simon A. Levin e Akira Okubo, "Spread of Invading Organisms", *Landscape Ecology*, Vol. 4, nos. 2/3, 1990, pp. 177-188.

Leah Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, Boston: McGraw-Hill, 1988.

J. G. Skellam, "The Formulation and Interpretation of Mathematical Models of Diffusionary Processes in Population Biology", in *The Mathematical Theory of the Dynamics of Biological Populations*, editado por M. S. Bartlett e R. W. Hiorns, New York: Academic Press, 1973, pp. 63-85.

J. G. Skellam, "Random Dipersal in Theoretical Populations", *Biometrika*, Vol. 28, 1951, pp. 196-218.

APÊNDICE | A

REVISÃO DE ÁLGEBRA

SEÇÃO A1 | Uma Breve Revisão de Álgebra

Existem muitas técnicas da álgebra elementar que são usadas no cálculo. Este apêndice apresenta uma revisão de algumas destas técnicas. Vamos começar com uma discussão dos sistemas de numeração.

Os Números Reais

Número inteiro é qualquer número do conjunto ...3, 2, 1, 0, −1, −2, −3... Assim, por exemplo, 875, −15 e −83 são números inteiros, enquanto $\frac{2}{3}$, 8,71 e $\sqrt{2}$ não são números inteiros.

Número racional é um número que pode ser expresso como uma razão $\frac{a}{b}$ entre dois números inteiros, com $b \neq 0$. Assim, por exemplo, $\frac{2}{3}, \frac{8}{5}$ e $\frac{-4}{7}$ são números racionais, como também

$$-6\frac{1}{2} = \frac{-13}{2} \qquad \text{e} \qquad 0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Todo número inteiro é um número racional, já que pode ser expresso como a razão entre o próprio número e o número 1. Quando expressos em forma decimal, os números racionais podem ter um número finito de casas decimais ou casas decimais que se repetem indefinidamente. Eis alguns exemplos:

$$\frac{5}{8} = 0{,}625 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}33\ldots \qquad \text{e} \qquad \frac{13}{11} = 1{,}181818\ldots$$

Um número que não pode ser expresso como uma razão entre dois números inteiros é chamado de **número irracional**. Assim, por exemplo,

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356 \qquad \text{e} \qquad \pi \approx 3{,}14159265$$

são números irracionais.

Os números racionais e irracionais formam o conjunto dos **números reais**, que podem ser representados geometricamente como pontos sobre uma **reta de números**, como mostra a Figura A.1.

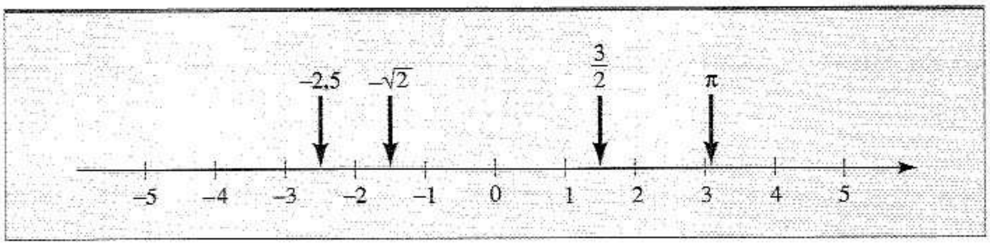


FIGURA A.1 A reta de números.

Desigualdades

Se a e b são números reais e a está à direita de b na reta de números, dizemos que ***a* é maior que *b*** e escrevemos $a > b$. Se a está à esquerda de b, dizemos que ***a* é menor que *b*** e escrevemos $a < b$ (Figura A.2). Por exemplo:

$$5 > 2 \qquad -12 < 0 \qquad \text{e} \qquad -8{,}2 < -2{,}4$$

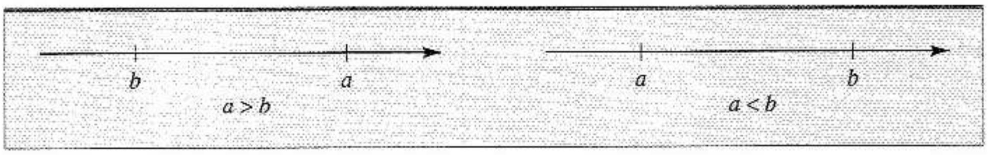


FIGURA A.2 Desigualdades.

Além disso,

$$\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$$

como podemos constatar observando que

$$\frac{6}{7} = \frac{48}{56} \qquad \text{e} \qquad \frac{7}{8} = \frac{49}{56}$$

O símbolo $\geq$ **significa maior ou igual a** e o símbolo $\leq$ significa **menor ou igual a**. Assim, por exemplo,

$$-3 \geq -4 \qquad -3 \geq -3 \qquad -4 \leq -3 \qquad \text{e} \qquad -4 \leq -4$$

Intervalos

Um conjunto de números reais que pode ser representado na reta de números por um segmento de reta é chamado de **intervalo**. As desigualdades podem ser usadas para descrever intervalos. Assim, por exemplo, o intervalo $a \leq x < b$ é formado por todos os números reais situados entre a e b, incluindo a e excluindo b. Este intervalo é mostrado na Figura A.3. Os números a e b são chamados de **extremidades** do intervalo. O sinal de colchete no ponto a indica que a faz parte do intervalo, enquanto o sinal de parêntese no ponto b indica que b não faz parte do intervalo.

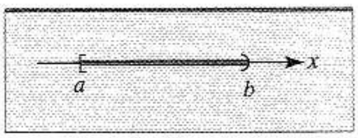


FIGURA A.3 O intervalo $a \leq x < b$.

Os intervalos podem ser finitos ou infinitos e podem ou não conter as extremidades. Todas as possibilidades estão representadas na Figura A.4, que mostra também a notação e a terminologia normalmente usadas.

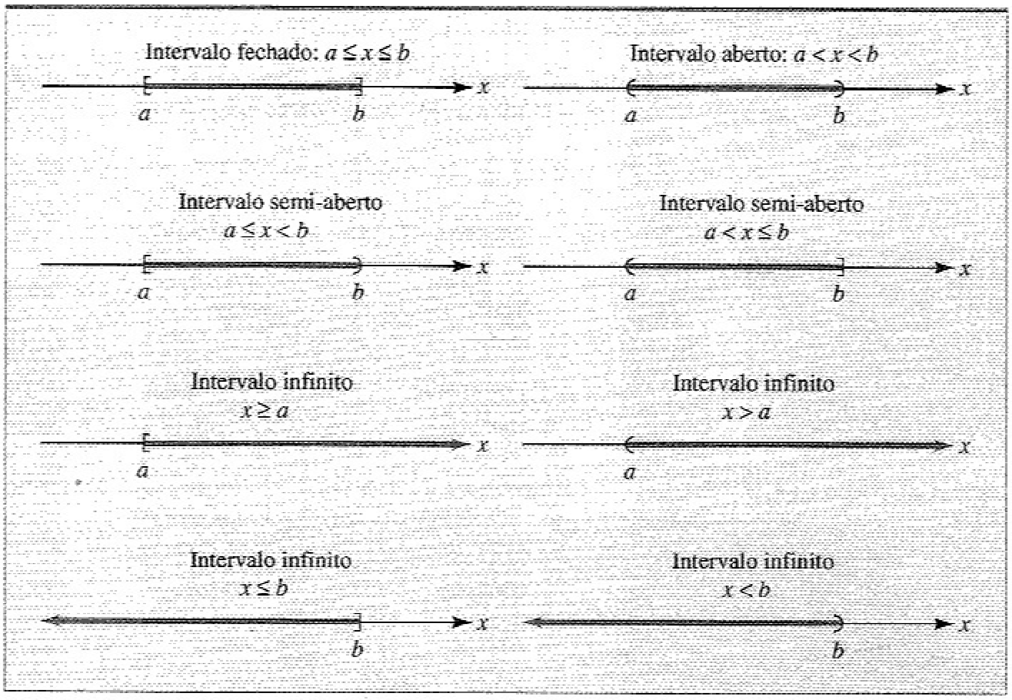
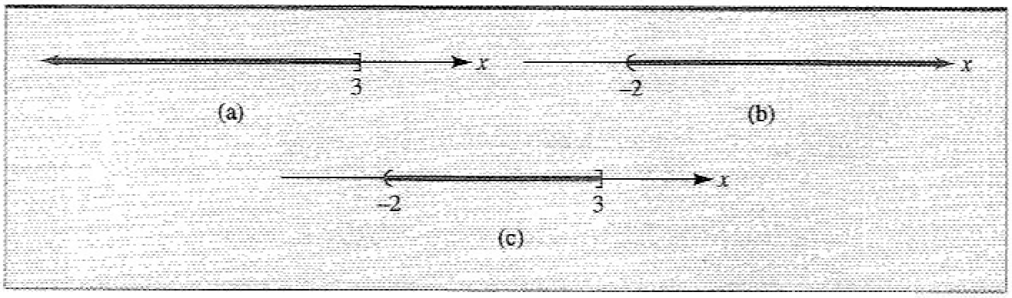


FIGURA A.4 Intervalos de números reais.

EXEMPLO A1.1

Use desigualdades para descrever os intervalos mostrados na figura.



Solução

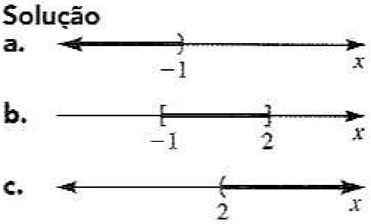
a. $x \le 3$ **b.** $x > -2$ **c.** $-2 < x \le 3$

EXEMPLO A1.2

Represente cada um dos intervalos a seguir como um segmento de reta em uma reta de números.

a. $x < -1$ **b.** $-1 \le x \le 2$ **c.** $x > 2$

Solução



Valor Absoluto

O **valor absoluto** de um número real x, representado pelo símbolo $|x|$, é a distância entre x e 0 na reta de números. Como a distância é um número não-negativo, $|x| \geq 0$. Assim, por exemplo,

$$|4| = 4 \qquad |-4| = 4 \qquad |0| = 0 \qquad |5 - 9| = 4 \qquad |\sqrt{3} - 3| = 3 - \sqrt{3}$$

Segue uma expressão geral para o valor absoluto.

Valor Absoluto ■ Para qualquer número real x, o valor absoluto de x é dado por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

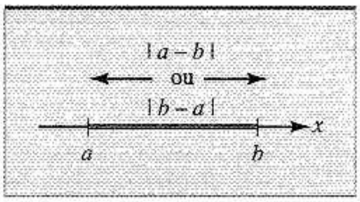


FIGURA A.5 A distância entre a e $b = |a - b|$.

Como mostra a Figura A.5, a distância entre dois números a e b é o valor absoluto da diferença entre os números, tomada em qualquer ordem.

EXEMPLO A1.3

Determine a distância entre -2 e 3 na reta de números.

Solução

A distância entre dois números é o valor absoluto da diferença entre eles. Assim,

$$\text{Distância} = |-2 - 3| = |-5| = 5$$

Esta situação está ilustrada na Figura A.6.

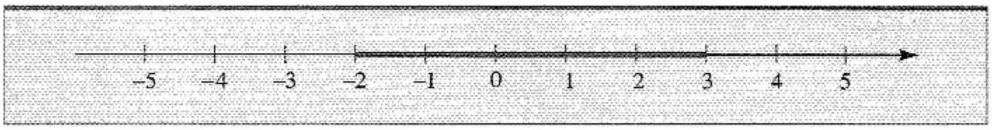


FIGURA A.6 Distância entre -2 e 3.

Valores Absolutos e Intervalos

A interpretação geométrica do valor absoluto como uma distância pode ser usada para simplificar certas desigualdades algébricas que envolvem valores absolutos. Segue um exemplo.

EXEMPLO A1.4

Determine o intervalo formado por todos os números reais x tais que $|x - 1| \leq 3$.

Solução

Em termos geométricos, os números x para os quais $|x - 1| \leq 3$ são aqueles cuja distância de 1 é menor ou igual a 3. Como mostra a Figura A.7, trata-se dos números que satisfazem a desigualdade $-2 \leq x \leq 4$.

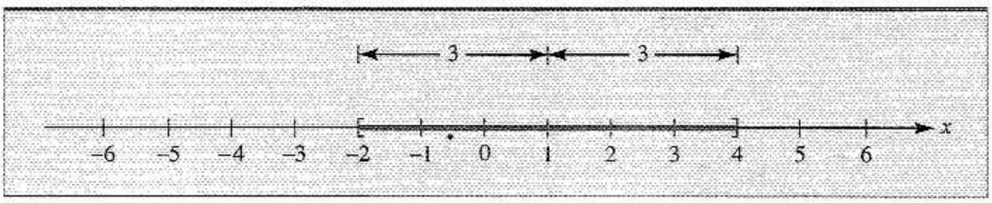


FIGURA A.7 O intervalo em que $|x - 1| \leq 3$ é $-2 \leq x \leq 4$.

Para determinar este intervalo algebricamente, sem recorrer à geometria, escrevemos a desigualdade $|x - 1| \leq 3$ na forma

$$-3 \leq x - 1 \leq 3$$

e somamos 1 a todos os termos para obter

$$-3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 3 + 1$$

ou

$$-2 \leq x \leq 4$$

Notação Exponencial

As regras a seguir definem a expressão a^x para $a > 0$ e qualquer valor racional de x.

Definição de a^x para $x \geq 0$ ■ Potências inteiras: se n é um número inteiro positivo, temos:

$$a^n = a \cdot a \cdots a$$

onde o produto $a \cdot a \cdots a$ contém n fatores.
Potências fracionárias: se n e m são números inteiros positivos, temos:

$$a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

onde $\sqrt[m]{\ }$ representa a raiz emésima positiva.

Potências negativas: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Potência zero: $a^0 = 1$

EXEMPLO A1.5

Determine os valores das expressões dadas, sem usar uma calculadora.

a. $9^{1/2}$ **b.** $27^{2/3}$ **c.** $8^{-1/3}$ **d.** $\left(\dfrac{1}{100}\right)^{-3/2}$ **e.** 5^0

Solução

a. $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$

b. $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
$= \sqrt[3]{(27)^2} = \sqrt[3]{729} = 9$

c. $8^{-1/3} = \dfrac{1}{8^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$

d. $\left(\dfrac{1}{100}\right)^{-3/2} = 100^{3/2} = (\sqrt{100})^3 = 10^3 = 1.000$

e. $5^0 = 1$

Lei dos Expoentes

Os expoentes obedecem às leis que se seguem.

Leis dos Expoentes ■ Para um número real x, temos:

Lei do produto: $a^r a^s = a^{r+s}$

Lei do quociente: $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ para $a \neq 0$

Lei da potência: $(a^r)^s = a^{rs}$

As leis dos expoentes são ilustradas nos Exemplos A1.6 e A1.7.

EXEMPLO A1.6

Determine os valores das expressões dadas, sem usar uma calculadora.

a. $(2^{-2})^3$ **b.** $\dfrac{3^3}{3^{1/3}(3^{2/3})}$ **c.** $2^{7/4}(8^{-1/4})$

Solução

a. $(2^{-2})^3 = 2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

b. $\dfrac{3^3}{3^{1/3}(3^{2/3})} = \dfrac{3^3}{3^{1/3+2/3}} = \dfrac{3^3}{3^1} = 3^2 = 9$

c. $2^{7/4}(8^{-1/4}) = 2^{7/4}(2^3)^{-1/4} = 2^{7/4}(2^{-3/4}) = 2^{7/4-3/4} = 2^1 = 2$

EXEMPLO A1.7

Determine o valor de n nas equações dadas.

a. $\dfrac{a^5}{a^2} = a^n$ **b.** $(a^n)^5 = a^{20}$

Solução

a. Como $\dfrac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$, $n = 3$.
b. Como $(a^n)^5 = a^{5n}$, $5n = 20$ e, portanto, $n = 4$.

Fatoração

Fatorar uma expressão é escrevê-la na forma de um produto de dois ou mais termos chamados de **fatores**. A fatoração é usada para simplificar expressões complicadas e para resolver equações e se baseia na lei distributiva para adições e multiplicações.

Lei Distributiva ■ Para três números reais quaisquer a, b e c,

$$ab + ac = a(b + c)$$

As técnicas de fatoração usadas neste livro são ilustradas nos Exemplos A1.8 a A1.10.

Fatoração de Termos Comuns

EXEMPLO A1.8

Fatore a expressão $3x^4 - 6x^3$.

Solução

Como $3x^3$ é um fator dos dois termos desta expressão, podemos usar a lei distributiva para escrever

$$3x^4 - 6x^3 = 3x^3(x - 2)$$

EXEMPLO A1.9

Simplifique a expressão $10(1 - x)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(1 - x)^3$.

Solução

O maior fator comum é $2(1 - x)^3(x + 1)^4$. Colocando este fator em evidência, obtemos:

$$10(1 - x)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(1 - x)^3 = 2(1 - x)^3(x + 1)^4[5(1 - x) + 4(x + 1)]$$

Como nenhuma outra fatoração é possível, executamos as multiplicações dos termos entre colchetes e combinamos os termos resultantes para obter

$$\begin{aligned}10(1-x)^4(x+1)^4+8(x+1)^5(1-x)^3 &= 2(1-x)^3(x+1)^4(5-5x+4x+4)\\ &= 2(1-x)^3(x+1)^4(9-x)\end{aligned}$$

Existem ocasiões no cálculo em que é preciso fatorar expressões que envolvem radicais ou expoentes fracionários. Segue um exemplo deste tipo de fatoração.

EXEMPLO A1.10

Fatore a expressão

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+1)+x^{2/3}$$

Solução

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+1)+x^{2/3} &= \frac{\frac{2}{3}(x+1)}{x^{1/3}}+x^{2/3}\\ &= \frac{\frac{2}{3}(x+1)+x^{2/3}(x^{1/3})}{x^{1/3}} && \textit{ponha os termos sobre o denominador comum } x^{1/3} \textit{ e simplifique}\\ &= \frac{\frac{2}{3}(x+1)+x}{x^{1/3}}=\frac{\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}}{x^{1/3}} && \textit{portanto } x^{2/3}x^{1/3}=x\\ &= \frac{1}{3}(5x+2)x^{-1/3}\end{aligned}$$

Simplificação de Frações por Fatoração e Cancelamento

O Exemplo A1.11 mostra como é possível combinar fatoração e cancelamento para simplificar certos tipos de frações que surgem freqüentemente no cálculo.

EXEMPLO A1.11

Simplifique a fração

$$\frac{4(x+3)^4(x-2)^2-6(x+3)^3(x-2)^3}{(x+3)(x-2)^3}$$

Solução

Em primeiro lugar, simplificamos o numerador para obter

$$\begin{aligned}\frac{4(x+3)^4(x-2)^2-6(x+3)^3(x-2)^3}{(x+3)(x-2)^3} &= \frac{2(x+3)^3(x-2)^2[2(x+3)-3(x-2)]}{(x+3)(x-2)^3}\\ &= \frac{2(x+3)^3(x-2)^2(2x+6-3x+6)}{(x+3)(x-2)^3}\\ &= \frac{2(x+3)^3(x-2)^2(12-x)}{(x+3)(x-2)^3}\end{aligned}$$

Em seguida, cancelamos o fator comum $(x+3)(x-2)^2$ no numerador e no denominador para obter

$$\frac{4(x+3)^4(x-2)^2-6(x+3)^3(x-2)^3}{(x+3)(x-2)^3}=\frac{2(x+3)^2(12-x)}{x-2}$$

Notação de Somatório

Somas da forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

aparecem nos Capítulos 5 e 6. Para descrever somas deste tipo, basta especificar o termo geral a_j e indicar que n termos desta forma devem ser somados, começando com o termo para o qual $j = 1$ e terminando com o termo para o qual $j = n$. É costume usar a letra grega Σ (sigma) para representar este tipo de soma, conhecido como **somatório**.

Notação de Somatório ■ O somatório dos números $a_1 \cdots a_n$ é dado por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

O uso da notação de somatório é ilustrado nos Exemplos A1.12 e A1.13.

EXEMPLO A1.12

Use a notação de somatório para representar as somas a seguir.

a. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$

b. $(1 - x_1)^2 \Delta x + (1 - x_2)^2 \Delta x + \cdots + (1 - x_{15})^2 \Delta x$

Solução

a. Esta é uma soma de 8 termos da forma j^2, começando com $j = 1$ e terminando com $j = 8$. Assim,

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = \sum_{j=1}^{8} j^2$$

b. O j-ésimo termo desta soma é $(1 - x_j)^2 \Delta x$. Assim,

$$(1 - x_1)^2 \Delta x + (1 - x_2)^2 \Delta x + \cdots + (1 - x_{15})^2 \Delta x = \sum_{j=1}^{15} (1 - x_j)^2 \Delta x$$

EXEMPLO A1.13

Calcule os valores dos somatórios.

a. $\sum_{j=1}^{4} (j^2 + 1)$

b. $\sum_{j=1}^{3} (-2)^j$

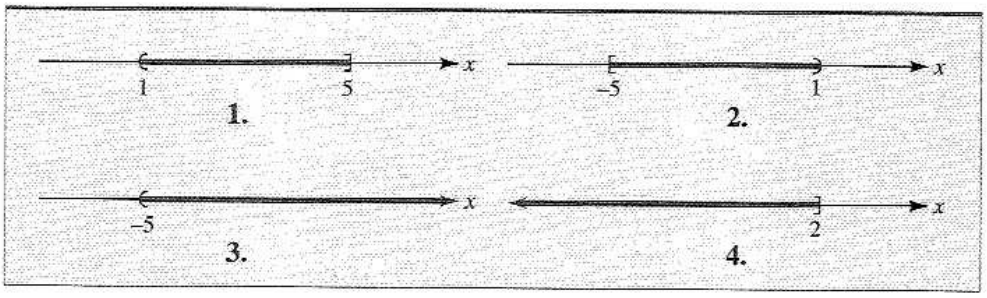
Solução

a.
$$\sum_{j=1}^{4} (j^2 + 1) = (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1)$$
$$= 2 + 5 + 10 + 17 = 34$$

b.
$$\sum_{j=1}^{3} (-2)^j = (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 = -2 + 4 - 8 = -6$$

PROBLEMAS | A1

INTERVALOS *Nos Problemas 1 a 4, use desigualdades para descrever o intervalo indicado.*



Nos Problemas 5 a 8, represente o intervalo dado como um segmento de reta em uma reta de números.

5. $x \geq 2$

6. $-6 \leq x < 4$

7. $-2 < x \leq 0$

8. $x > 3$

DISTÂNCIA *Nos Problemas 9 a 12, determine a distância na reta de números entre o par de números reais dado.*

9. 0 e -4

10. 2 e 5

11. -2 e 3

12. -3 e -1

VALOR ABSOLUTO E INTERVALOS *Nos Problemas 13 a 18, determine o(s) intervalo(s) formado(s) por todos os números reais x que satisfazem a desigualdade dada.*

13. $|z| \leq 3$

14. $|x - 2| \leq 5$

15. $|x + 4| \leq 2$

16. $|1 - x| < 3$

17. $|x + 2| \geq 5$

18. $|x - 1| > 3$

NOTAÇÃO EXPONENCIAL *Nos Problemas 19 a 26, determine o valor da expressão dada sem usar uma calculadora.*

19. 5^3

20. 2^{-3}

21. $16^{1/2}$

22. $36^{-1/2}$

23. $8^{2/3}$

24. $27^{-4/3}$

25. $\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}$

26. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2}$

Nos Problemas 27 a 34, determine o valor da expressão dada sem usar uma calculadora.

27. $\frac{2^5(2^2)}{2^8}$

28. $\frac{3^4(3^3)}{(3^2)^3}$

29. $\frac{2^{4/3}(2^{5/3})}{2^5}$

30. $\frac{5^{-3}(5^2)}{(5^{-2})^3}$

31. $\frac{2(16^{3/4})}{2^3}$

32. $\frac{\sqrt{27}\,(\sqrt{3})^3}{9}$

33. $[\sqrt{8}\,(2^{5/2})]^{-1/2}$

34. $[\sqrt{27}\,(3^{5/2})]^{1/2}$

Nos Problemas 35 a 42, determine o valor de n na equação dada. (Suponha que $a > 0$ e $a \neq 1$.)

35. $a^3a^7 = a^n$

36. $\frac{a^5}{a^2} = a^n$

37. $a^4a^{-3} = a^n$

38. $a^2a^n = \frac{1}{a}$

39. $(a^3)^n = a^{12}$

40. $(a^n)^5 = \frac{1}{a^{10}}$

41. $a^{3/5}a^{-n} = \frac{1}{a^2}$

42. $(a^n)^3 = \frac{1}{\sqrt{a}}$

SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES *Nos Problemas 43 a 54, fatore e simplifique a expressão o melhor que for possível.*

43. $x^5 - 4x^4$

44. $3x^3 - 12x^4$

45. $100 - 25(x - 3)$

46. $60 - 20(4 - x)$

47. $8(x + 1)^3(x - 2)^2 + 6(x + 1)^2(x - 2)^3$

48. $12(x + 3)^5(x - 1)^3 - 8(x + 3)^6(x - 1)^2$

49. $x^{-1/2}(2x + 1) + 4x^{1/2}$

50. $x^{-1/4}(3x + 5) + 4x^{3/4}$

51. $\dfrac{(x + 3)^3(x + 1) - (x + 3)^2(x + 1)^2}{(x + 3)(x + 1)}$

52. $\dfrac{3(x - 2)^2(x + 1)^2 - 2(x - 2)(x + 1)^3}{(x - 2)^4}$

53. $\dfrac{4(1 - x)^2(x + 3)^3 + 2(1 - x)(x + 3)^4}{(1 - x)^4}$

54. $\dfrac{6(x + 2)^5(1 - x)^4 - 4(x + 2)^6(1 - x)^3}{(x + 2)^8(1 - x)^2}$

NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO *Nos Problemas 55 a 58, calcule o valor do somatório.*

55. $\sum_{j=1}^{4}(3j + 1)$

56. $\sum_{j=1}^{5} j^2$

57. $\sum_{j=1}^{10}(-1)^j$

58. $\sum_{j=1}^{5} 2^j$

Nos Problemas 59 a 64, use a notação de somatório para representar a soma dada.

59. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

60. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30$

61. $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6$

62. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$

63. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

64. $x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$

65. ECOLOGIA A atmosfera acima de cada centímetro quadrado da superfície terrestre pesa 1 quilograma (kg).

a. Supondo que a Terra seja uma esfera de raio $R = 6.440$ km, use a expressão $S = 4\pi R^2$ para calcular a área da superfície terrestre e a massa total da atmosfera.

b. O oxigênio constitui aproximadamente 22% da massa da atmosfera e as plantas produzem aproximadamente $0{,}9 \times 10^{13}$ kg de oxigênio por ano. Se nenhum oxigênio fosse consumido pelas plantas e animais (nem por processos de combustão), quanto tempo seria necessário para acumular a massa de oxigênio que existe atualmente na atmosfera?*

*Adaptado de um problema de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, p. 31.

SEÇÃO A2 Fatoração de Polinômios e Solução de Sistemas de Equações

Um **polinômio** é uma expressão da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

onde n é um número inteiro não-negativo e $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais, conhecidos como **coeficientes** do polinômio. Se $a_n \neq 0$, dizemos que n é o **grau** do polinômio. Assim, por exemplo, $3x^5 - 7x^2 + 12$ é um polinômio de grau 5. Expressões polinomiais aparecem freqüentemente no cálculo, como exemplos e em aplicações práticas. Nesta seção, vamos estudar técnicas para fatorar polinômios e também discutir a solução de sistemas de equações polinomiais.

Fatoração de Polinômios com Coeficientes Inteiros

Muitos dos polinômios que surgem na prática têm coeficientes inteiros (ou estão relacionados de perto a polinômios que têm coeficientes inteiros). As técnicas para fatorar polinômios de coeficientes inteiros são ilustradas nos exemplos a seguir. Nesses exemplos, o objetivo é escrever o polinômio dado como um produto de polinômios de grau menor, também com coeficientes inteiros.

EXEMPLO A2.1

Fatore o polinômio $x^2 - 2x - 3$ usando coeficientes inteiros.

Solução

O objetivo é escrever o polinômio como um produto da forma

$$x^2 - 2x - 3 = (x + a)(x + b)$$

onde a e b são números inteiros. De acordo com a lei distributiva, temos:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Assim, temos que encontrar números inteiros a e b tais que

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + (a + b)x + ab$$

o que equivale a dizer que

$$a + b = -2 \qquad \text{e} \qquad ab = -3$$

Da lista

$$1, -3 \qquad \text{e} \qquad -1, 3$$

de pares de números inteiros cujo produto é -3, escolhemos $a = -3$ e $b = 1$ como o único par cuja soma é -2. Assim, temos:

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Para verificar que esta igualdade está correta, basta efetuar o produto do lado direito.

EXEMPLO A2.2

Fatore o polinômio $2x^2 + x - 10$ usando coeficientes inteiros.

Solução

Estamos interessados em determinar números inteiros a, b, c e d tais que

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 10 &= (ax + b)(cx + d) && \textit{lei distributiva} \\ &= (ac)x^2 + (bc + ad)x + (bd) \end{aligned}$$

Isto significa que devemos ter

$$\begin{aligned} ac &= 2 \\ bc + ad &= 1 \\ bd &= -10 \end{aligned}$$

Como a, b, c e d devem ser números inteiros, existe um número limitado de possibilidades, que são as seguintes:

4 escolhas possíveis para o par a, c: 2,1; 1, 2; −2,−1; 1, 2
8 escolhas possíveis para o par b, d: 2,−5; 5,−2; 1,−10; 10,−1; −2, 5; −5, 2; −1,10; −10,1

Existem $(4)(8) = 32$ modos possíveis de formar a expressão $bc + ad$. Descobrimos que a condição $bc + ad = 1$ é satisfeita para $a = 2$, $b = 5$, $c = 1$ e $d = -2$. Assim,

$$2x^2 + x - 10 = (2x + 5)(x - 2)$$

(Observe que a condição $bc + ad = 1$ também é satisfeita por $a = -2$, $b = -5$, $c = -1$ e $d = 2$. Por que não é necessário citar esta opção como uma segunda forma de fatorar o polinômio dado?

EXEMPLO A2.3

Fatore o polinômio $x^3 - 8$ usando coeficientes inteiros.

Solução

O fato de que $2^3 = 8$ significa que $x - 2$ deve ser um dos fatores desta expressão. Estamos, portanto, interessados em encontrar números inteiros a e b tais que

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + ax + b)$$

Como

$$(x - 2)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 2a)x - 2b$$

(o que o leitor pode facilmente verificar), o objetivo é encontrar números inteiros a e b tais que

$$a - 2 = 0 \qquad b - 2a = 0 \qquad \text{e} \qquad 2b = 8$$

Os únicos números inteiros que satisfazem estas condições são $a = 2$ e $b = 4$. Assim,

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

O leitor pode se convencer, examinando pares de números inteiros cujo produto é 4, que o polinômio $x^2 + 2x + 4$ não pode ser fatorado com coeficientes inteiros.

A Diferença de Dois Quadrados

Apresentamos a seguir uma expressão (que o leitor pode facilmente verificar por multiplicação) para fatorar a diferença de dois quadrados. Trata-se de uma expressão extremamente útil, que vale a pena memorizar.

Diferença de Dois Quadrados ■ Para dois números reais a e b quaisquer,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

O uso desta expressão é ilustrado no Exemplo A2.4.

EXEMPLO A2.4

Fatore o polinômio $x^5 - 4x^3$ usando coeficientes inteiros.

Solução

Em primeiro lugar, fatoramos x^3 para obter

$$x^5 - 4x^3 = x^3(x^2 - 4)$$

Em seguida, fatoramos $x^2 - 4$ (que é a diferença de dois quadrados) para concluir que

$$x^5 - 4x^3 = x^3(x + 2)(x - 2)$$

Solução de Equações por Fatoramento

As **soluções** de uma equação são os valores da variável que tornam a equação verdadeira. Assim, por exemplo, $x = 2$ é uma solução da equação

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

porque a substituição de x por 2 nos dá

$$2^3 - 6(2^2) + 12(2) - 8 = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$$

Nos Exemplos A2.5 e A2.6, vamos ver que a fatoração pode ser usada para resolver certas equações. A técnica se baseia no fato de que, se o produto de dois (ou mais) fatores é zero, pelo menos um dos fatores deve ser igual a zero. Assim, por exemplo, se $ab = 0$, $a = 0$ ou $b = 0$ (ou $a = b = 0$).

EXEMPLO A2.5

Resolva a equação $x^2 - 3x = 10$.

Solução

Em primeiro lugar, subtraímos 10 de ambos os membros para obter

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Em seguida, fatoramos o polinômio do lado esquerdo para obter

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

Como o produto $(x - 5)(x + 2)$ só pode ser zero se pelo menos um dos fatores for zero, as soluções são $x = 5$ (que anula o primeiro fator) e $x = -2$ (que anula o segundo fator).

EXEMPLO A2.6

Resolva a equação $1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$.

Solução

Reduzindo as frações do lado esquerdo ao mesmo denominador, obtemos

$$\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

e, portanto,

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2} = 0$$

Fatorando o polinômio do numerador, temos

$$\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = 0$$

Como uma fração é zero apenas se o numerador é zero e o denominador é *diferente* de zero, $x = -1$ e $x = 2$ são as soluções pedidas.

Solução de Equações do Segundo Grau

Uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{para } a \neq 0)$$

é chamada de **equação do segundo grau**. Uma equação do segundo grau pode ter no máximo duas soluções reais. Como vimos, uma das formas de obter as soluções é fatorar a equação. Quando os fatores não são óbvios ou quando a equação não pode ser fatorada, podemos usar uma fórmula especial para resolver equações do segundo grau, conhecida como **fórmula de Báskara**.

Fórmula de Báskara ■ As soluções da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\text{para } a \neq 0)$$

são dadas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O termo $b^2 - 4ac$ da fórmula de Báskara é chamado de **discriminante** da equação do segundo grau. Se o discriminante é positivo, a equação tem duas soluções reais, uma com o sinal $\pm$ da fórmula de Báskara substituído por $+$ e outra com o sinal $\pm$ substituído por $-$. Se o discriminante é nulo, a equação tem apenas uma solução real, já que a fórmula se reduz a $x = \frac{-b}{2a}$. Se o discriminante é negativo, a equação não tem soluções reais, já que não existem raízes quadradas reais de números negativos.

O uso da fórmula de Báskara é ilustrado nos Exemplos A2.7 a A2.9.

EXEMPLO A2.7

Resolva a equação $x^2 + 3x + 1 = 0$.

Solução

Trata-se de uma equação do segundo grau com $a = 1$, $b = 3$ e $c = 1$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \approx -0{,}38 \qquad \text{e} \qquad x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \approx -2{,}62$$

EXEMPLO A2.8

Resolva a equação $x^2 + 18x + 81 = 0$.

Solução

Trata-se de uma equação do segundo grau com $a = 1$, $b = 18$ e $c = 81$. Usando a fórmula de Báskara, descobrimos que o discriminante é zero e a única solução é

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{18}{2} = -9$$

EXEMPLO A2.9

Resolva a equação $x^2 + x + 1 = 0$.

Solução

Trata-se de uma equação do segundo grau com $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Como não existe uma raiz real de -3, a equação não possui soluções reais.

Sistema de Equações

Um conjunto de equações que devem ser resolvidas simultaneamente é chamado de **sistema de equações**. Alguns dos problemas de cálculo do Capítulo 7 envolvem a solução de sistemas de duas (ou mais) equações com duas (ou mais) incógnitas. Um exemplo típico é encontrar os números reais x e y que satisfazem o sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

O método para resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas consiste em eliminar (temporariamente) uma das variáveis, reduzindo, assim, o problema a uma única equação com uma variável, que pode, então, ser resolvida para obter o valor desta variável. Depois de obtido o valor de uma das variáveis, podemos substituí-lo em uma das equações originais e resolvê-la para obter o valor da outra variável.

As técnicas mais comuns de eliminação de variáveis são ilustradas nos Exemplos A2.10 e A2.11.

Eliminação por Multiplicação e Adição

EXEMPLO A2.10

Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 13 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

Solução

Para eliminar y, multiplicamos ambos os membros da primeira equação por 2 e ambos os membros da segunda equação por -3, fazendo com que o sistema se torne

$$\begin{aligned} 8x + 6y &= 26 \\ -9x - 6y &= -21 \end{aligned}$$

Em seguida, somamos as equações para obter

$$-x + 0 = 5 \qquad \text{ou} \qquad x = -5$$

Para obter o valor de y, fazemos $x = -5$ em uma das equações originais. Escolhendo a segunda equação, temos

$$3(-5) + 2y = 7 \qquad 2y = 22 \qquad \text{ou} \qquad y = 11$$

o que significa que a solução do sistema é $x = -5$ e $y = 11$.

Para verificar se a resposta está correta, fazemos $x = -5$ e $y = 11$ nas duas equações originais. No caso da primeira equação, obtemos:

$$4(-5) + 3(11) = -20 + 33 = 13$$

No caso da segunda equação, obtemos

$$3(-5) + 2(11) = -15 + 22 = 7$$

o que mostra que a solução está correta.

Eliminação por Substituição

EXEMPLO A2.11

Resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2y^2 - x^2 &= 14 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Solução

Explicitando x na segunda equação, obtemos

$$x = y + 1$$

e podemos substituir este valor na primeira equação para eliminar x. O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned} 2y^2 - (y + 1)^2 &= 14 \\ 2y^2 - (y^2 + 2y + 1) &= 14 \\ 2y^2 - y^2 - 2y - 1 &= 14 \\ y^2 - 2y - 15 &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$(y + 3)(y - 5) = 0$$

e, portanto,

$$y = -3 \qquad \text{ou} \qquad y = 5$$

Se $y = -3$, a segunda equação nos dá

$$x - (-3) = 1 \qquad \text{ou} \qquad x = -2$$

e se $y = 5$, a segunda equação nos dá

$$x - 5 = 1 \qquad \text{ou} \qquad x = 6$$

Assim, o sistema tem duas soluções,

$$x = 6, y = 5 \qquad \text{e} \qquad x = -2, y = -3$$

Para verificar se as respostas estão corretas, substituímos os dois pares de valores x, y na primeira equação. Para $x = 6$ e $y = 5$, obtemos

$$2(5^2) - 6^2 = 50 - 36 = 14$$

e para $x = -2$ e $y = -3$, obtemos

$$2(-3)^2 - (-2)^2 = 18 - 4 = 14$$

o que mostra que as soluções estão corretas.

PROBLEMAS | A2

FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS COM COEFICIENTES INTEIROS *Nos Problemas 1 a 14, fatore o polinômio dado usando coeficientes inteiros.*

1. $x^2 + x - 2$
2. $x^2 + 3x - 10$
3. $x^2 - 7x + 12$
4. $x^2 + 8x + 12$
5. $x^2 - 2x + 1$
6. $x^2 + 6x + 9$
7. $16x^2 - 25$
8. $3x^2 - x - 14$
9. $x^3 - 1$
10. $x^3 - 27$
11. $x^7 - x^5$
12. $x^3 + 2x^2 + x$
13. $2x^3 - 8x^2 - 10x$
14. $x^4 + 5x^3 - 14x^2$

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES POR FATORAÇÃO *Nos Problemas 15 a 30, resolva a equação dada pelo método de fatoração.*

15. $x^2 - 2x - 8 = 0$
16. $x^2 - 4x + 3 = 0$
17. $x^2 + 10x + 25 = 0$
18. $x^2 + 8x + 16 = 0$
19. $x^2 - 16 = 0$
20. $x^2 - 25 = 0$
21. $2x^2 + 3x + 1 = 0$
22. $x^2 - 2x + 1 = 0$
23. $4x^2 + 12x + 9 = 0$
24. $6x^2 + 7x - 3 = 0$
25. $1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} = 0$
26. $\frac{9}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 = 0$
27. $2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$
28. $\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 2 = 0$
29. $\frac{x}{x-2} - \frac{4}{x+3} - \frac{10}{x^2+x-6} = 0$
30. $\frac{x}{x+1} + \frac{3}{2x+3} - \frac{11x+10}{2x^2+5x+3} = 0$

FÓRMULA DE BÁSKARA *Nos Problemas 31 a 36, use a fórmula de Báskara para resolver a equação dada.*

31. $2x^2 + 3x + 1 = 0$
32. $-x^2 + 3x - 1 = 0$
33. $x^2 - 2x + 3 = 0$
34. $x^2 - 2x + 1 = 0$
35. $4x^2 + 12x + 9 = 0$
36. $x^2 + 12 = 0$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES *Nos Problemas 37 a 42, resolva o sistema de equações dado.*

37. $x + 5y = 13$
$3x - 10y = -11$
38. $2x - 3y = 4$
$3x - 5y = 2$
39. $5x - 4y = 12$
$2x - 3y = 2$
40. $3x^2 - 9y = 0$
$3y^2 - 9x = 0$
41. $2y^2 - x^2 = 1$
$x - 2y = 3$
42. $2x^2 - y^2 = -7$
$2x + y = 1$

SEÇÃO A3 Determinação de Limites com a Regra de L'Hôpital

Regra de L'Hôpital: Indeterminações do Tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

No traçado de curvas e outras aplicações do cálculo, é freqüentemente necessário calcular limites da forma

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

onde c é um número finito ou ∞. Se $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$, a regra do quociente para limites pode ser usada, mas se $f(x)$ e $g(x)$ tendem a 0 quando x tende a c, praticamente qualquer coisa pode acontecer. Assim, por exemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(1/x^3) - (1/x^2)}{1/x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{x^5 + x^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1}$$

apresentam esta propriedade, mas o limite da esquerda é 0, o limite do centro é ∞ e o limite da direita é $\frac{1}{3}$.

Limites como estes são chamados de **indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$**. Analogamente, limites de quocientes nos quais o numerador e o denominador aumentam indefinidamente quando $x \to c$ são chamados de **indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$**.

Existe um método geral para analisar indeterminações, que é conhecido como **regra de L'Hôpital**. De acordo com a regra, se a tentativa de determinar o limite de um quociente leva a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, basta calcular as derivadas do numerador e denominador e repetir o processo. Segue uma descrição mais simbólica do método.

> **Regra de L'Hôpital**
>
> Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$,
>
> $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$,
>
> $$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

O uso da regra de L'Hôpital é ilustrado nos Exemplos A3.1 a A3.3. Ao aplicar a regra de L'Hôpital, o leitor deve prestar atenção nos seguintes pontos:

1. A regra de L'Hôpital envolve a derivação do numerador e do denominador *separadamente*. Um engano comum é derivar a expressão completa usando a regra do quociente.
2. A regra de L'Hôpital se aplica apenas a quocientes cujos limites são indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Limites da forma $\frac{0}{\infty}$ e $\frac{\infty}{0}$ *não são* indeterminados: o primeiro é 0 e o segundo é ∞.

EXEMPLO A3.1

Calcule o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+1)^2}$$

Solução

Como se trata de uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, podemos aplicar a regra de L'Hôpital. O resultado é o seguinte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0$$

EXEMPLO A3.2

Calcule o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x - 3}{4x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 1}$$

Solução

Fazendo $x = 1$ no numerador e no denominador, vemos que se trata de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Poderíamos calcular este limite usando o método de fatoração apresentado no Capítulo 1, mas é muito mais fácil usar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x - 3}{4x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4 - 12x^3 + 5}{20x^4 + 6x^2 - 10x} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

EXEMPLO A3.3

Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+5}{x^2+3x-10}$.

Solução

Se aplicássemos cegamente a regra de L'Hôpital, o resultado seria o seguinte:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2x+3} = \frac{2}{7}$$

Entretanto, se o leitor usar uma calculadora para determinar o valor do quociente dado para um número muito próximo de 2 (2,0001, digamos), verá que o resultado é um número muito maior que $\frac{2}{7}$. Por quê? Na verdade, o resultado obtido aplicando a regra de L'Hôpital está errado, já que o limite proposto não é indeterminado. Fazendo $x = 2$, obtemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} = \frac{9}{0} = \infty$$

Limites que Envolvem e^x e $\ln x$

Em certos problemas práticos, precisamos calcular limites que envolvem e^x e $\ln x$. Às vezes, estes limites podem ser calculados diretamente, usando as fórmulas básicas

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

mas outros limites são indeterminados e exigem o uso da regra de L'Hôpital. Seguem dois exemplos.

EXEMPLO A3.4

Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Solução

Temos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Observe que este limite *não é* indeterminado e, portanto, a regra de L'Hôpital *não se aplica*. Se aplicarmos cegamente a regra de L'Hôpital, o resultado será o seguinte:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = 1$$

o que está *errado*! Este exemplo serve para lembrar que é *muito* importante verificar se estamos realmente lidando com uma indeterminação antes de aplicar a regra de L'Hôpital.

EXEMPLO A3.5

Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{3 - e^{x}}{x^2}$.

Solução

Este limite é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - e^{x}}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-e^{x}}{2x}$$

Como este novo limite também é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos novamente a regra de L'Hôpital para obter

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-e^{x}}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{-e^{x}}{2} = -\infty$$

e concluir que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - e^{x}}{x^2} = -\infty$$

Embora a regra de L'Hôpital se aplique apenas a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, outros tipos de indeterminação podem ser levantados combinando a regra de L'Hôpital com algumas manipulações algébricas. Este processo está ilustrado nos Exemplos A3.6 e A3.7.

EXEMPLO A3.6

Calcule $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \ln x$.

Solução

Este limite é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$, mas pode ser escrito como

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{1/\ln x} \quad \left(\text{da forma } \frac{0}{0}\right)$$

~~ou como~~

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{e^{x}} \quad \left(\text{da forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Aplicando a regra de L'Hôpital ao segundo quociente, que é mais simples, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = 0$$

Como ilustração final deste método, aqui está o limite que usamos na Seção 4.1 para definir o número e.

EXEMPLO A3.7

Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Solução

Este limite é uma indeterminação do tipo 1^∞. Para simplificar o problema, vamos fazer

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

e portanto

$$\ln y = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad (\infty \cdot 0)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln y &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} && \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{(-1/x^2)}{(1+1/x)}}{-1/x^2} && \textit{regra de L'Hôpital} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + 1/x} && \textit{simplificação algébrica} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Como $\ln y \to 1$, temos $y \to e^1 = e$. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

PROBLEMAS | A3

Nos Problemas 1 a 16, use a regra de L'Hôpital para calcular o limite dado se o limite for indeterminado.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x^2}{3x^4 + 2x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x-1)}{3x^3 + 2x - 5}$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x + 1}$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x - 5}{1 - 2x - x^3}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{(1/x) - (2/x^2)}{(1/x^3) + (2/x^2) - (3/x)}$

6. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^3 - 19x + 3}$

7. $\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1}$
[*Sugestão:* Use a regra de L'Hôpital duas vezes.]

8. $\lim_{x\to 1/2} \frac{-8x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{(2x-1)^3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$

11. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t}}{e^t}$

12. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln\sqrt{t}}{t}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{1/x}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

Termos, Símbolos e Fórmulas Importantes

Número inteiro (Seção A1)
Número racional (Seção A1)
Número irracional (Seção A1)
Número real (Seção A1)
Reta de números (Seção A1)
Desigualdade (Seção A1)
Intervalo (Seção A1)
Valor absoluto: (Seção A1)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Distância em uma reta de números (Seção A1)
Notação exponencial: (Seção A1)

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ termos}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (potência negativa)}$$

$$a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n} \text{ (potência fracionária)}$$

Leis dos expoentes: (Seção A1)

$$a^ra^s = a^{r+s} \text{ (lei do produto)}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \text{ (lei do quociente)}$$

$$(a^r)^s = a^{rs} \text{ (lei da potência)}$$

Fatoração (Seção A1)
Notação de somatório: (Seção A1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Polinômios:
Coeficientes de um polinômio (Seção A2)
Grau de um polinômio (Seção A2)
Leis de números usadas na fatoração:
Lei distributiva $ab + ac = a(b + c)$ (Seção A1)
Diferença de dois quadrados (Seção A2)
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Solução de equações por fatoração (Seção A2)
Fórmula de Báskara: (Seção A2)
As soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ para $a \neq 0$ são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O discriminante da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é $b^2 - 4ac$ (Seção A2)
Sistema de equações (Seção A2)
Solução de sistema de equações por eliminação (Seção A2)
Regra de L'Hôpital: (Seção A3)

$$\left(\text{tipo}\frac{0}{0}\right) \text{ Se } \lim_{x\to c} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to c} g(x) = 0,$$

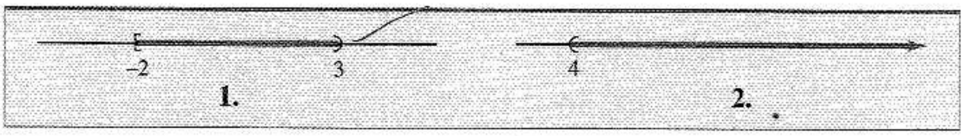
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\left(\text{tipo}\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ Se } \lim_{x\to c} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Problemas de Revisão

Nos Problemas 1 e 2, use desigualdades para descrever o intervalo dado.



Nos Problemas 3 a 6, represente o intervalo dado como um segmento de reta da reta de números.

3. $-3 \leq x < 2$

4. $-1 < x < 5$

5. $x \geq 1$

6. $2 \leq x < 7$

Nos Problemas 7 e 8, determine a distância na reta de números entre o par de números reais dado.

7. 0 e 3

8. -5 e -2

Nos Problemas 9 e 10, determine o(s) intervalo(s) formado(s) por todos os números reais x que satisfazem a desigualdade dada.

9. $|x-3| \leq 1$

10. $|2x+1| > 3$

Nos Problemas 11 a 20, determine o valor da expressão dada sem usar uma calculadora.

11. 3^5

12. 4^{-2}

13. $8^{2/3}$

14. $49^{-3/2}$

15. $\dfrac{4(32)^{3/4}}{(\sqrt{2})^3}$

16. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-5/2}$

17. $16^{3/2} + 27^{2/3}$

18. $\dfrac{2^{3/2}(4^{5/2})}{8^{2/3}}$

19. $\dfrac{\sqrt[3]{54}\,\sqrt[6]{2}}{\sqrt{8}}$

20. $\dfrac{\sqrt[3]{81}\,(6^{2/3})}{2^{4/3}}$

Nos Problemas 21 a 24, resolva a equação dada para determinar o valor de n (suponha que $a > 0$ e $a \neq 1$).

21. $a^{2/3}a^{1/2} = a^{3n}$

22. $\dfrac{a^3}{(\sqrt{a})^5} = a^{2n}$

23. $a^2a^{-5} = (a^n)^3$

24. $a^{2n}a^3 = a^{-7}$

Nos Problemas 25 a 28, calcule o valor do somatório dado.

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2k + 3$

26. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k+1)^2$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k^2 - k)$

28. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \left[\frac{k-1}{k+3}\right]^2$

Nos Problemas 29 e 30, expresse a soma dada na forma de um somatório.

29. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7}$

30. $3 + 12 + 27 + 48 + 75$

Nos Problemas 31 a 34, fatore a expressão dada.

31. $x^4 - 9x^2$

32. $x^3 + 3(x-12)$

33. $x^{16} - (2x)^4$

34. $2(x-3)^2(x+1) - 5(x-3)^3(2x)$

Nos Problemas 35 e 36, simplifique o quociente dado o máximo que for possível.

35. $\dfrac{x^2(x-1)^3 - 2x(x-1)^2}{x^2 - x - 2}$

36. $\dfrac{x(x+2)^4 - x^3(x+2)^2}{x^2 + 3x + 2}$

Nos Problemas 37 a 42, fatore o polinômio dado usando coeficientes inteiros.

37. $x^2 + 2x - 15$

38. $2x^2 + 5x - 3$

39. $4x^2 + 12x + 9$

40. $12x^2 + 5x - 3$

41. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

42. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

Nos Problemas 43 a 48, resolva a equação dada por fatoração.

43. $x^2 + 3x - 4 = 0$

44. $2x^2 - 3x - 2 = 0$

45. $x^2 + 14x + 49 = 0$

46. $x^2 - 64 = 0$

47. $1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

48. $4 + \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{12}{x}$

Nos Problemas 49 a 54, use a fórmula de Báskara para determinar todos os números reais x que satisfazem a equação dada.

49. $14x^2 - x - 3 = 0$

50. $24x^2 + x - 10 = 0$

51. $x^2 - 3x + 5 = 0$

52. $7x^2 + 3x - 2 = 0$

53. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

54. $2x^2 + 12x + 11 = 0$

Nos Problemas 55 a 58, resolva o sistema de equações dado.

55. $3x + 5y = -1$
$2x + 7y = 3$

56. $2x + y = 7$
$-x + 4y = 1$

57. $3x^2 - y^2 = -1$
$2x + y = 4$

58. $5x^2 - 2y^2 = 1$
$5x - 2y = 4$

Nos Problemas 59 a 64, use a regra de L'Hôpital para calcular o limite dado se o limite for indeterminado.

59. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^3 + x - 3}$

60. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{3x^3 - 7x + 10}$

61. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-2x}}{3 + 2e^{-2x}}$

62. $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-\sqrt{x}}$

63. $\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1)$

64. $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$

PARA PENSAR

PROBLEMA

Para viver confortavelmente, estima-se que uma pessoa precise de aproximadamente 60 m^2 para moradia, 40 m^2 para trabalhar, 50 m^2 para edifícios públicos e lazer, 90 m^2 para transporte (estradas, por exemplo) e 4.000 m^2 para produção de alimentos.

Exercícios

1. A Suíça tem aproximadamente 11.000 km^2 de espaço útil (terras habitáveis e aráveis). Quantas pessoas podem viver confortavelmente na Suíça? Verifique qual é a população atual da Suíça. Com base nestes números, a Suíça está superpovoada ou sua população ainda pode aumentar sem problemas?
2. Verifique qual é a população atual da Índia. De quanto espaço útil a Índia teria que dispor para acomodar confortavelmente sua população? Verifique qual é a área total da Índia. Ainda que toda a área da Índia pudesse ser aproveitada, haveria espaço suficiente para que a população vivesse confortavelmente?
3. O leitor provavelmente ouviu falar que a Índia está enfrentando um problema de superpopulação. Escolha outro país para o qual o problema não seja tão óbvio (Bolívia? Zimbabwe? San Marino?) e verifique se a população pode viver confortavelmente no país escolhido.

Fonte: Adaptado de um problema de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1979, p. 31. O leitor talvez se interesse em examinar os problemas de cálculo aplicado à biologia que aparecem nas páginas 31 a 33 no livro de Batschelet.

TABELAS

TABELA I Potências de e

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,00000	0,50	1,6487	0,60653	1,00	2,7183	0,36788
0,01	1,0101	0,99005	0,51	1,6653	0,60050	1,10	3,0042	0,33287
0,02	1,0202	0,98020	0,52	1,6820	0,59452	1,20	3,3201	0,30119
0,03	1,0305	0,97045	0,53	1,6989	0,58860	1,30	3,6693	0,27253
0,04	1,0408	0,96079	0,54	1,7160	0,58275	1,40	4,0552	0,24660
0,05	1,0513	0,95123	0,55	1,7333	0,57695	1,50	4,4817	0,22313
0,06	1,0618	0,94176	0,56	1,7507	0,57121	1,60	4,9530	0,20190
0,07	1,0725	0,93239	0,57	1,7683	0,56553	1,70	5,4739	0,18268
0,08	1,0833	0,92312	0,58	1,7860	0,55990	1,80	6,0496	0,16530
0,09	1,0942	0,91393	0,59	1,8040	0,55433	1,90	6,6859	0,14957
0,10	1,1052	0,90484	0,60	1,8221	0,54881	2,00	7,3891	0,13534
0,11	1,1163	0,89583	0,61	1,8404	0,54335	3,00	20,086	0,04979
0,12	1,1275	0,88692	0,62	1,8589	0,53794	4,00	54,598	0,01832
0,13	1,1388	0,87809	0,63	1,8776	0,53259	5,00	148,41	0,00674
0,14	1,1503	0,86936	0,64	1,8965	0,52729	6,00	403,43	0,00248
0,15	1,1618	0,86071	0,65	1,9155	0,52205	7,00	1096,6	0,00091
0,16	1,1735	0,85214	0,66	1,9348	0,51685	8,00	2981,0	0,00034
0,17	1,1853	0,84366	0,67	1,9542	0,51171	9,00	8103,1	0,00012
0,18	1,1972	0,83527	0,68	1,9739	0,50662	10,00	22026,5	0,00005
0,19	1,2092	0,82696	0,69	1,9937	0,50158			
0,20	1,2214	0,81873	0,70	2,0138	0,49659			
0,21	1,2337	0,81058	0,71	2,0340	0,49164			
0,22	1,2461	0,80252	0,72	2,0544	0,48675			
0,23	1,2586	0,79453	0,73	2,0751	0,48191			
0,24	1,2712	0,78663	0,74	2,0959	0,47711			
0,25	1,2840	0,77880	0,75	2,1170	0,47237			
0,26	1,2969	0,77105	0,76	2,1383	0,46767			
0,27	1,3100	0,76338	0,77	2,1598	0,46301			
0,28	1,3231	0,75578	0,78	2,1815	0,45841			
0,29	1,3364	0,74826	0,79	2,2034	0,45384			
0,30	1,3499	0,74082	0,80	2,2255	0,44933			
0,31	1,3634	0,73345	0,81	2,2479	0,44486			
0,32	1,3771	0,72615	0,82	2,2705	0,44043			
0,33	1,3910	0,71892	0,83	2,2933	0,43605			
0,34	1,4049	0,71177	0,84	2,3164	0,43171			
0,35	1,4191	0,70469	0,85	2,3396	0,42741			
0,36	1,4333	0,69768	0,86	2,3632	0,42316			
0,37	1,4477	0,69073	0,87	2,3869	0,41895			
0,38	1,4623	0,68386	0,88	2,4109	0,41478			
0,39	1,4770	0,67706	0,89	2,4351	0,41066			
0,40	1,4918	0,67032	0,90	2,4596	0,40657			
0,41	1,5068	0,66365	0,91	2,4843	0,40252			
0,42	1,5220	0,65705	0,92	2,5093	0,39852			
0,43	1,5373	0,65051	0,93	2,5345	0,39455			
0,44	1,5527	0,64404	0,94	2,5600	0,39093			
0,45	1,5683	0,63763	0,95	2,5857	0,38674			
0,46	1,5841	0,63128	0,96	2,6117	0,38289			
0,47	1,6000	0,62500	0,97	2,6379	0,37908			
0,48	1,6161	0,61878	0,98	2,6645	0,37531			
0,49	1,6323	0,61263	0,99	2,6912	0,37158			

TABELA II O Logaritmo Natural (Base *e*)

x	ln *x*	*x*	ln *x*	*x*	ln *x*	*x*	ln *x*
0,01	−4,60517	0,50	−0,69315	1,00	0,00000	1,5	0,40547
0,02	−3,91202	0,51	0,67334	1,01	0,00995	1,6	7000
0,03	0,50656	0,52	0,65393	1,02	0,01980	1,7	0,53063
0,04	0,21888	0,53	0,63488	1,03	0,02956	1,8	8779
		0,54	0,61619	1,04	0,03922	1,9	0,64185
0,05	−2,99573	0,55	0,59784	1,05	0,04879	2,0	9315
0,06	0,81341	0,56	0,57982	1,06	0,05827	2,1	0,74194
0,07	0,65926	0,57	0,56212	1,07	0,06766	2,2	8846
0,08	0,52573	0,58	0,54473	1,08	0,07696	2,3	0,83291
0,09	0,40795	0,59	0,52763	1,09	0,08618	2,4	7547
0,10	−2,30259	0,60	−0,51083	1,10	0,09531	2,5	0,91629
0,11	0,20727	0,61	0,49430	1,11	0,10436	2,6	5551
0,12	0,12026	0,62	0,47804	1,12	0,11333	2,7	9325
0,13	0,04022	0,63	0,46204	1,13	0,12222	2,8	1,02962
0,14	−1,96611	0,64	0,44629	1,14	0,13103	2,9	6471
0,15	0,89712	0,65	0,43078	1,15	0,13976	3,0	9861
0,16	0,83258	0,66	0,41552	1,16	0,14842	4,0	1,38629
0,17	0,77196	0,67	0,40048	1,17	0,15700	5,0	1,60944
0,18	0,71480	0,68	0,38566	1,18	0,16551	10,0	2,30258
0,19	0,66073	0,69	0,37106	1,19	0,17395		
0,20	−1,60944	0,70	−0,35667	1,20	0,18232		
0,21	0,56065	0,71	0,34249	1,21	0,19062		
0,22	0,51413	0,72	0,32850	1,22	0,19885		
0,23	0,46968	0,73	0,31471	1,23	0,20701		
0,24	0,42712	0,74	0,30111	1,24	0,21511		
0,25	0,38629	0,75	0,28768	1,25	0,22314		
0,26	0,34707	0,76	0,27444	1,26	0,23111		
0,27	0,30933	0,77	0,26136	1,27	0,23902		
0,28	0,27297	0,78	0,24846	1,28	0,24686		
0,29	0,23787	0,79	0,23572	1,29	0,25464		
0,30	−1,20397	0,80	−0,22314	1,30	0,26236		
0,31	0,17118	0,81	0,21072	1,31	0,27003		
0,32	0,13943	0,82	0,19845	1,32	0,27763		
0,33	0,10866	0,83	0,18633	1,33	0,28518		
0,34	0,07881	0,84	0,17435	1,34	0,29267		
0,35	−1,04982	0,85	−0,16252	1,35	0,30010		
0,36	0,02165	0,86	0,15032	1,36	0,30748		
0,37	−0,99425	0,87	0,13926	1,37	0,31481		
0,38	0,96758	0,88	0,12783	1,38	0,32208		
0,39	0,94161	0,89	0,11653	1,39	0,32930		
0,40	−0,91629	0,90	−0,10536	1,40	0,33647		
0,41	0,89160	0,91	0,09431	1,41	0,34359		
0,42	0,86750	0,92	0,08338	1,42	0,35066		
0,43	0,84397	0,93	0,07257	1,43	0,35767		
0,44	0,82098	0,94	0,06188	1,44	0,36464		
0,45	0,79851	0,95	0,05129	1,45	0,37156		
0,46	0,77653	0,96	0,04082	1,46	0,37844		
0,47	0,75502	0,97	0,03046	1,47	0,38526		
0,48	0,73397	0,98	0,02020	1,48	0,39204		
0,49	0,71335	0,99	0,01005	1,49	0,39878		

Respostas dos Problemas Ímpares, dos Problemas de Verificação do Capítulo e dos Problemas de Revisão Ímpares

CAPÍTULO 1 | Seção 1

1. $f(0) = -2; f(-2) = 0; f(1) = 6$

3. $g(-1) = -2;\ g(1) = 2;\ g(2) = \dfrac{5}{2}$

5. $h(2) = 2\sqrt{3};\ h(0) = 2;\ h(-4) = 2\sqrt{3}$

7. $f(1) = 1; f(5) = \dfrac{1}{27}; f(13) = \dfrac{1}{125}$

9. $f(1) = 0; f(2) = 2; f(3) = 2$

11. $f(-6) = 3; f(-5) = -4; f(16) = 4$

13. Sim

15. Não; $f(t)$ não é definida para $t > 1$

17. Todos os números x reais exceto $x = -2$

19. Todos os números x reais para os quais $x \geq -3$

21. Todos os números t reais para os quais $-3 < t < 3$

23. $f(g(x)) = 3x^2 + 14x + 10$

25. $f(g(x)) = x^3 + 2x^2 + 4x + 2$

27. $f(g(x)) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

29. $f(g(x)) = |x|$

31. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h$

33. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{-1}{x(x+h)}$

35. $f(g(x)) = \sqrt{1-3x};\ g(f(x)) = 1 - 3\sqrt{x};$
$f(g(x)) = g(f(x))$ para $x = 0$

37. $f(g(x)) = x;\ g(f(x)) = x;\ f(g(x)) = g(f(x))$ para todos os números x reais exceto $x = 1$ e $x = 2$.

39. $f(x - 2) = 2x^2 - 11x + 15$

41. $f(x - 1) = x^5 - 3x^2 + 6x - 3$

43. $f(x^2 + 3x - 1) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$

45. $f(x + 1) = \dfrac{x}{x+1}$

Nota: Nas respostas 47 a 51, as respostas podem variar.

47. $h(x) = x - 1;\ g(u) = u^2 + 2u + 3$

49. $h(x) = x^2 + 1;\ g(u) = \dfrac{1}{u}$

51. $h(x) = 2 - x;\ g(u) = \sqrt[3]{u} + \dfrac{4}{u}$

53. **a.** $f(2) = 46$
b. $f(2) - f(1) = 26$

55. **a.** $P(9) = \dfrac{97}{5}$; 19.400 habitantes
b. $P(9) - P(8) = \dfrac{1}{15}$; 67 habitantes
c. $P(t)$ tende para 20 (20.000 habitantes)

57. **a.** $v(0) = 25{,}344$ cm/s
b. $v(6 \times 10^{-3}) - 19{,}008$ cm/s

59. **a.** $s(8) = 5{,}8 \approx 6$ espécies
b. $s_2 = s_1\sqrt[3]{2}$
c. Aproximadamente 41.000 mil metros quadrados

61. **a.** Todos os números x reais exceto $x = 200$
b. Todos os números x reais para os quais $0 \leq x \leq 100$
c. $C(50) = 50$ milhões de reais
d. $C(100) - C(50) = 100$ milhões de reais
e. Se $C(x) = 37{,}5$ milhões, $x = 40\%$

63. **a.** $c(p(t)) = 4{,}2 + 0{,}08t^2$
b. $c(p(2)) = 4{,}52$ partes por milhão
c. 5 anos

65. **a.** $R(x) = -0{,}02x^2 + 29x;$
$P(x) = -1{,}45x^2 + 10{,}7x - 67$
b. $P(x) > 0$ para $2 < x < 5{,}38$

67. **a.** $R(x) = -0{,}5x^2 + 39x;$
$P(x) = -2x^2 + 29{,}8x - 67$
b. $P(x) > 0$ para $2{,}76 < x < 12{,}14$

69. **a.** $Q(p(t)) = \dfrac{4{,}374}{(0{,}04t^2 + 0{,}2t + 12)^2}$
b. $Q(p(10)) = 13{,}5$ quilogramas/semana
c. $t = 0$

71. Todos os números x reais exceto $x = 1$ e $x = -1{,}5$

73. $f(g(2, 3)) = 6{,}31$

75. a.

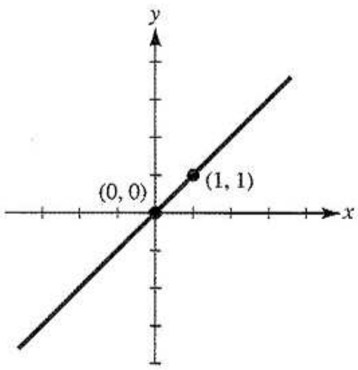
Nível de Instrução/Ano	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Sem segundo grau	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Segundo grau completo	1,45	1,41	1,52	1,48	1,53	1,48	1,42	1,47	1,52	1,45
Terceiro grau incompleto	1,63	1,63	1,68	1,62	1,70	1,68	1,63	1,72	1,76	1,67
Terceiro grau completo	2,48	2,55	2,74	2,72	2,64	2,54	2,51	2,73	2,83	2,76
Pós-graduação completa	3,65	3,80	4,35	4,10	4,04	4,08	3,92	3,95	4,20	3,85

b. 1,45; 1,67; 2,76; 3,85

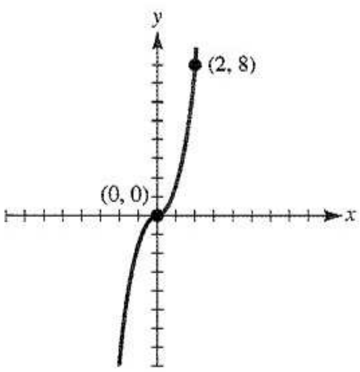
CAPÍTULO 1 | Seção 2

1. a. Função potência
b. Polinômio
c. Polinômio
d. Função racional

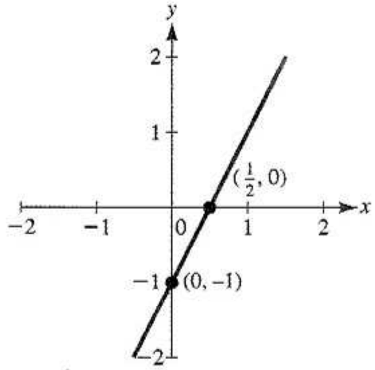
3. $f(x) = x$



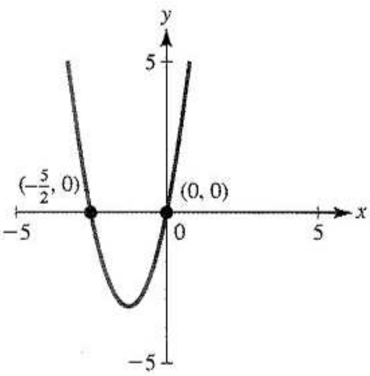
5. $f(x) = x^3$



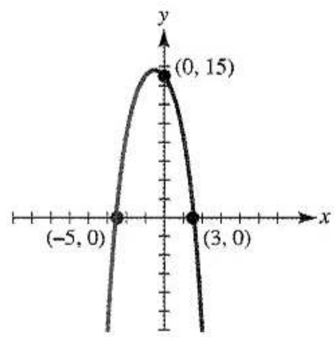
7. $f(x) = 2x - 1$



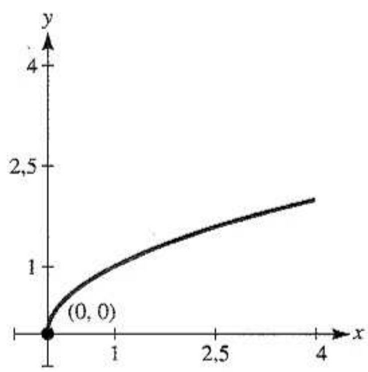
9. $f(x) = x(2x + 5)$



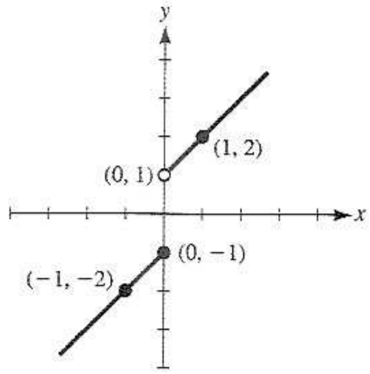
11. $f(x) = -x^2 - 2x + 15$



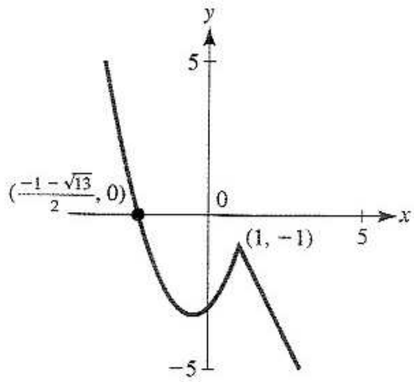
13. $f(x) = \sqrt{x}$



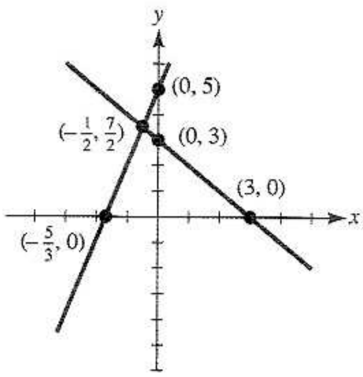
15. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{para } x \le 0 \\ x+1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$



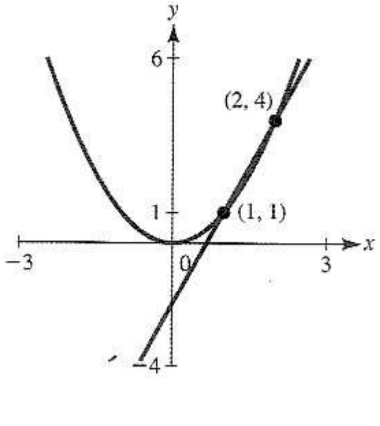
17. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{para } x < 1 \\ 1 - 2x & \text{para } x \ge 1 \end{cases}$



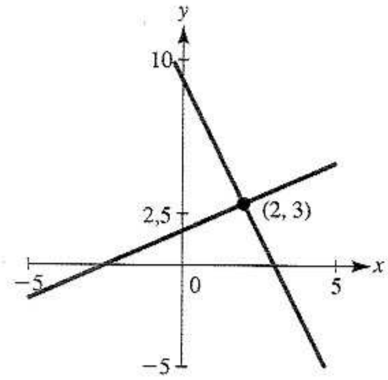
19. $y = 3x + 5$ e $y = -x + 3$; $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$



21. $y = x^2$ e $y = 3x - 2$; (2, 4) e (1, 1)



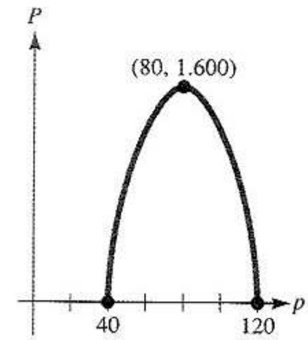
23. $3y - 2x = 5$ e $y + 3x = 9$; (2, 3)



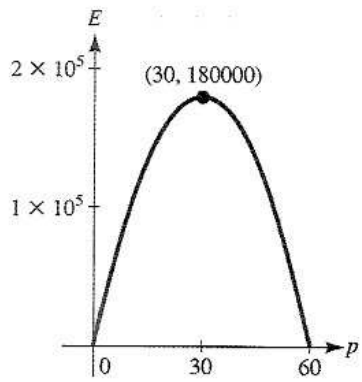
25. a. $(0, -1)$
b. $(1, 0)$
c. $f(x) = 3$ para $x = 4$
d. $f(x) = -3$ para $x = -2$

27. a. $(0, 2)$
b. $(-1, 0)$ e $(3{,}5; 0)$
c. $f(x) = 3$ para $x = 2$
d. $f(x) = -3$ para $x = 4$

29. $P(p) = (p - 40)(120 - p)$; o preço ótimo é R\$ 80,00



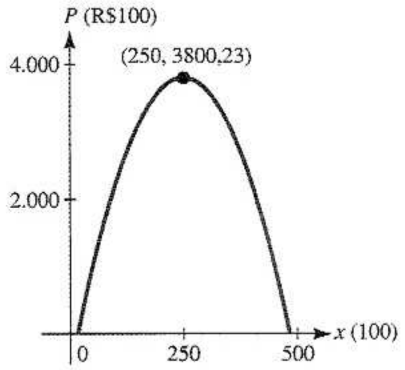
31. a. $E(p) = -200p^2 + 12.000p$



b. Os pontos em que a função $E(p)$ intercepta o eixo p representam os preços para os quais o gasto dos consumidores com o produto é nulo.

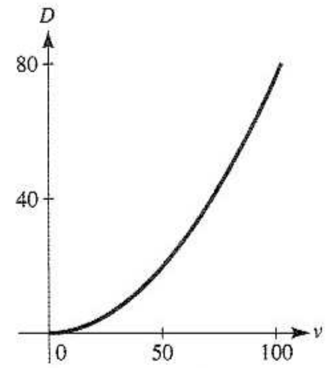
c. R\$ 30,00 por unidade

33. a. $P(x) = -0{,}07x^2 + 35x - 574{,}77$



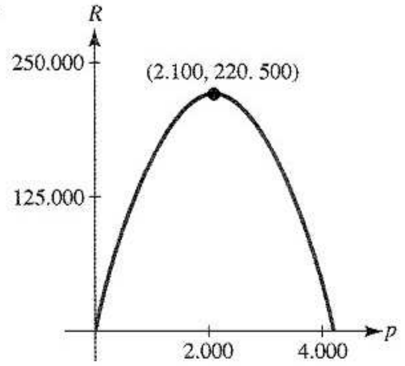
b. 25.000 unidades; R$ 25,50

35. $D(v) = 0{,}008v^2 + 0{,}028v$



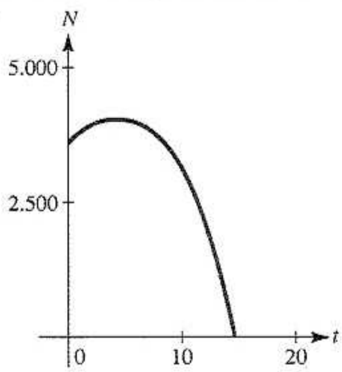
37. a. $R(p) = -0{,}05p^2 + 210p$

b.



c. R$ 2.100,00 por mês; R$ 220.500,00

39. a.



b. 3.967.000 de toneladas

c. 4,27 anos após 1990 (março de 1994)

d. Não, já que, de acordo com a expressão, as emissões seriam negativas a partir de dezembro de 2004.

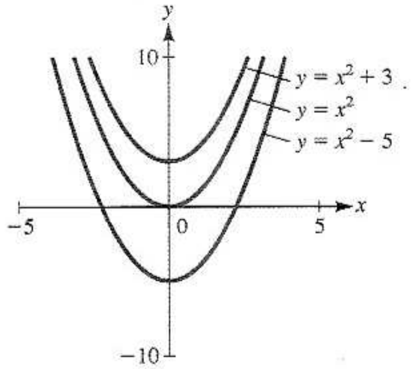
41. É uma função

43. Não é uma função

45. Existe mais de uma resposta correta.

47. a. O gráfico de $y = x^2 + 3$ é o gráfico de $y = x^2$ deslocado 3 unidades para cima.

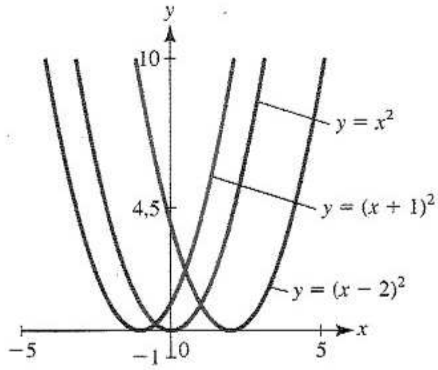
b.



c. O gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado $|c|$ unidades para cima se $c > 0$ ou para baixo se $c < 0$.

49. a. O gráfico de $y = (x - 2)^2$ é o gráfico de $y = x^2$ deslocado 2 unidades para a direita.

b.



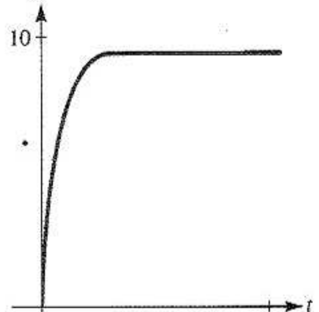
c. O gráfico de $g(x)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado $|c|$ unidades para a direita se $c > 0$ ou para a esquerda se $c < 0$.

51. a.

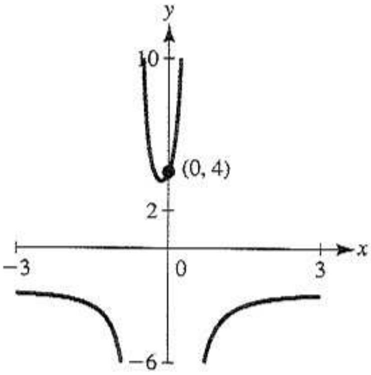
Dias de Treinamento	Cortadores por Dia
2	6
3	7,23
5	8,15
10	8,69
50	8,96

b. O número de cortadores montados por dia tende para 9.

c.

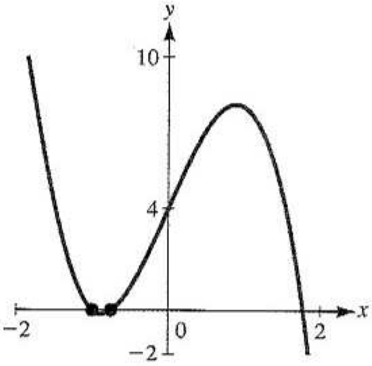


53.



$f(x)$ é definida para $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

55.



Pontos de interseção com o eixo x: -1; $-0{,}76$; $1{,}76$.

57. Um ponto (x, y) pertence à circunferência se a distância entre (x, y) e (a, b) é igual a R. Assim,

$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$

ou

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

CAPÍTULO 1 | Seção 3

1. $m = -\dfrac{7}{2}$

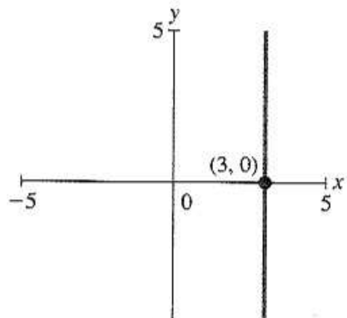
3. $m = -1$

5. m não é definida.

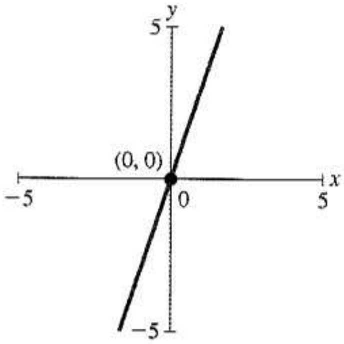
7. Inclinação: 2; interseção: $(0, 0)$; $y = 2x$

9. Inclinação: $\dfrac{5}{8}$; interseções: $(-4, 0)$ e $(0, \dfrac{5}{2})$; $y = \dfrac{5}{8}x + \dfrac{5}{2}$

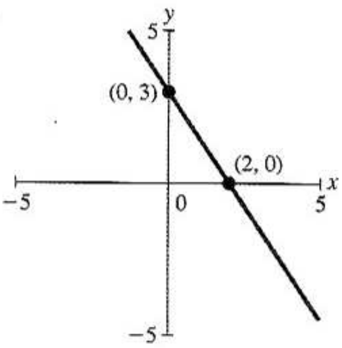
11. Inclinação: não é definida; interseção: $(3, 0)$



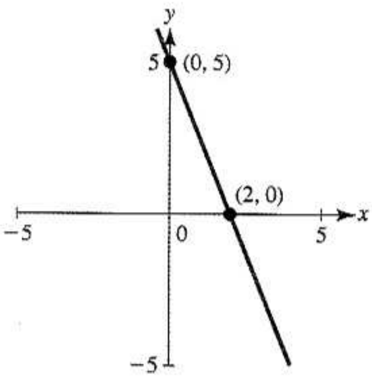
13. Inclinação: 3; interseção: $(0, 0)$



15. Inclinação: $-\dfrac{3}{2}$; interseções: $(2, 0)$ e $(0, 3)$



17. Inclinação: $-\dfrac{5}{2}$; interseções: $(2, 0)$ e $(0, 5)$



19. $y = x - 2$

21. $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

23. $y = 5$

25. $y = -x + 1$

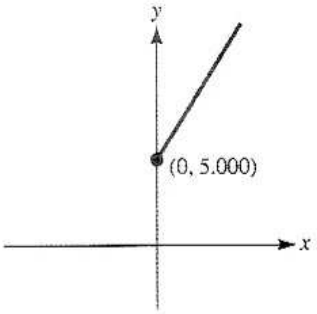
27. $y = \dfrac{-45}{52}x + \dfrac{43}{52}$

29. $y = 5$

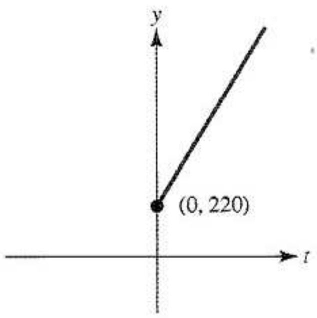
31. $y = -2x + 9$

33. $y = x + 2$

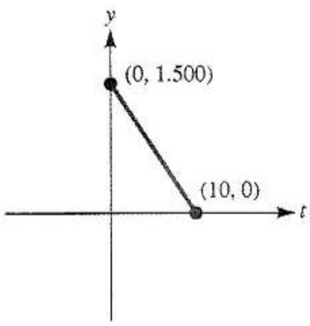
35. $y = C(x) = 60x + 5.000$



37. a. $y = f(t) = 35t + 220$ **b.** 325 **c.** 220

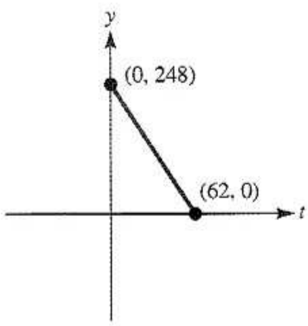


39. $f(t) = -150t + 1.500$

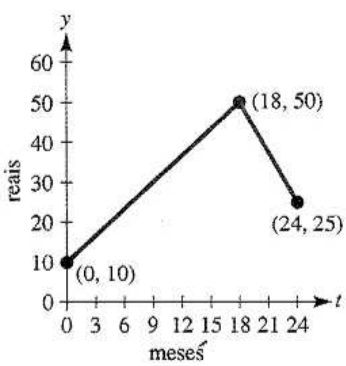


41. a. $y = f(t) = -4t + 248$

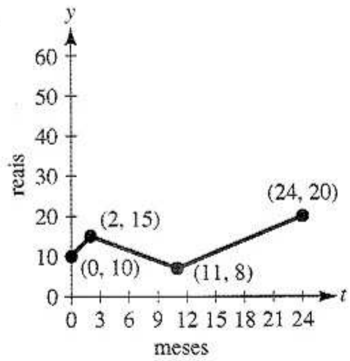
b. $f(8) = 216$ milhões de litros



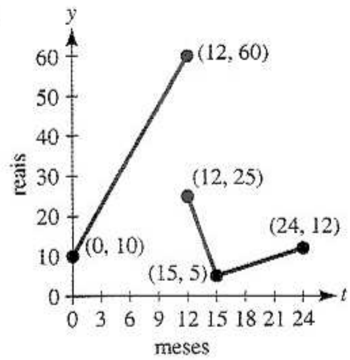
43. a.



b.



c.



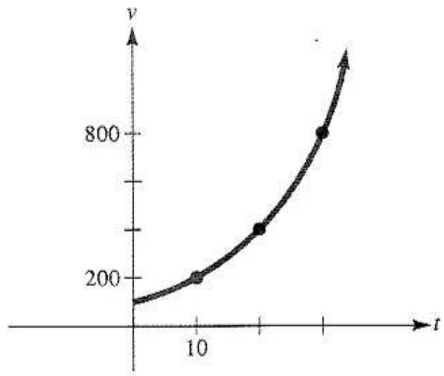
45. a. 95,5 cm
b. 15,4 anos
c. 50 cm; sim
d. 180 cm; sim

47. a. $F = \dfrac{9}{5}C + 32$

b. 59°F
c. 20°C
d. −40° Celsius = −40° Fahrenheit

49. a. $v(1930) = \$800$; $v(1990) = \$51.200$; $v(2000) = \$102.400$

b. Não, não é linear.

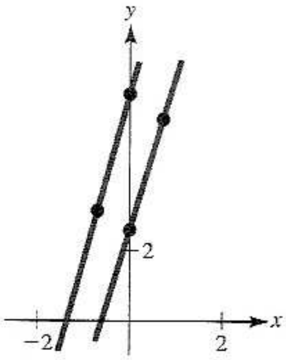


51. a. $y = -6(t - 1995) + 575$
b. 515
c. 2003

53. a. $B = \left(\dfrac{S - V}{N}\right)t + V$

b. R$ 30.800,00

55. As duas retas não são paralelas, já que possuem inclinações diferentes.

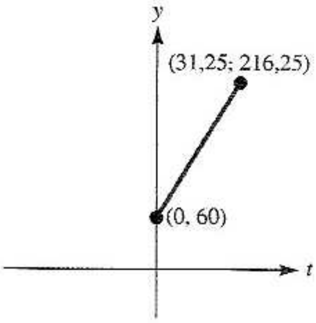


57. a.

Horas de uso	2	5	10	t
Preço total	R$ 70,00	R$ 85,00	R$ 110,00	$60 + 5t$

b. $y = 60 + 5t,\ t \geq 0$

c.



d. $60 + 5t = 216{,}25$; $t = 31{,}25$ horas (31 horas e 15 minutos)

59. Uma inclinação de $-0{,}389$ significa que o índice de desemprego diminuiu, em média, de 0,389% ao ano.

61. As retas L_1 e L_2 são perpendiculares; a inclinação de L_1 é $m_1 = b/a$ e a inclinação de L_2 é $m_2 = c/a$. No triângulo retângulo OAB, o comprimento de hipotenusa é $|AB| = |b - c|$, enquanto os comprimentos dos catetos são $|OA| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|OB| = \sqrt{a^2 + c^2}$. Assim, de acordo com o teorema de Pitágoras,

$$(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) = (b - c)^2$$
$$a^2 + b^2 + a^2 + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$$
$$2a^2 = -2bc$$
$$\frac{bc}{a^2} = -1$$
$$\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = -1$$
$$m_1 m_2 = -1$$

e portanto
$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

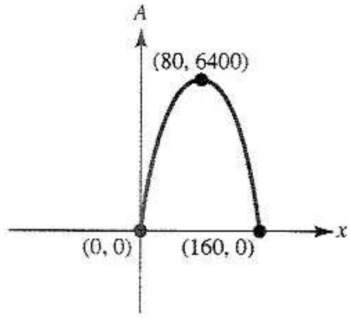
CAPÍTULO 1 | Seção 4

1. $A = 2w(500 - w)$

3. $P = x(18 - x)$

5. $R = x(35x + 15)$

7. $A = x(160 - x)$; 80 m por 80 m



9. $V = x\left(1.000 - \dfrac{x^2}{2}\right)$

11. $V = \pi r(60 - r^2)$

13. $C = 0{,}08\pi\left(r^2 + \dfrac{32}{r}\right)$

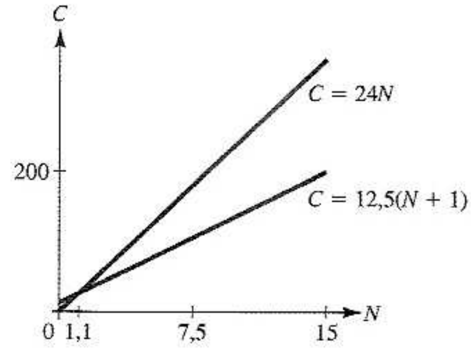
15. $R = kP$; R = taxa de aumento da população; P = tamanho da população.

17. $R = k(T_c - T_m)$; R = taxa de variação da temperatura; T_c = temperatura do corpo; T_m = temperatura do meio.

19. $R = kP(T - P)$; R = taxa de aumento do número de políticos envolvidos; P = número de políticos envolvidos; T = número total de políticos

21. $C = \dfrac{k_1}{R} + k_2R$; R = velocidade do caminhão

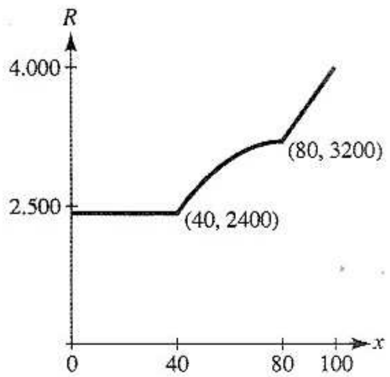
23.



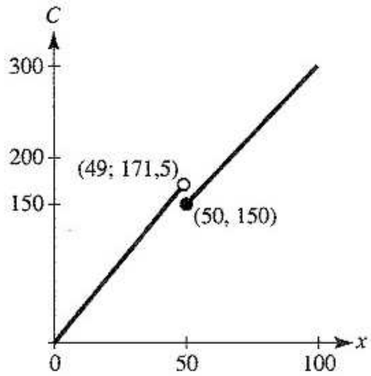
25. a. 95,2 mg

b. Como $0{,}0072(2W)^{0{,}425}(2H)^{0{,}725} = 0{,}0072\ (2)^{0{,}425}(W)^{0{,}425}(2)^{0{,}725}(H)^{0{,}725} = (2)^{0{,}425}(2)^{0{,}725}0{,}0072(W)^{0{,}425}(H)^{0{,}725} \approx 2{,}22\ [0{,}0072(W)^{0{,}425}(H)^{0{,}725}]$, a criança maior tem uma área superficial duas vezes maior que a da outra criança. Se S é multiplicada por 2,22 na expressão $C = \dfrac{SA}{1{,}7}$, C é multiplicada pelo mesmo fator.

27. $R(x) = \begin{cases} 2{,}400 & \text{para } 1 \le x \le 40 \\ x\left(80 - \dfrac{1}{2}x\right) & \text{para } 40 < x < 80 \\ 40x & \text{para } x \ge 80 \end{cases}$



29. a. $C(x) = \begin{cases} 3{,}50x & \text{para } x < 50 \\ 3x & \text{para } x \ge 50 \end{cases}$

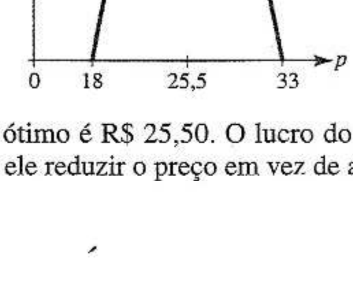


b. R$ 21,50

31. $V(x) = 4x - \dfrac{x^3}{3}$

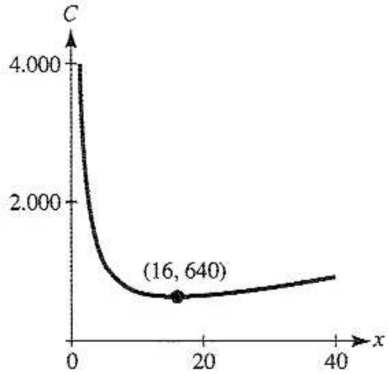
33. $A(x) = 8x + \dfrac{100}{x} + 57$

35. $P(p) = (33.000 - 1.000p)(p - 18)$



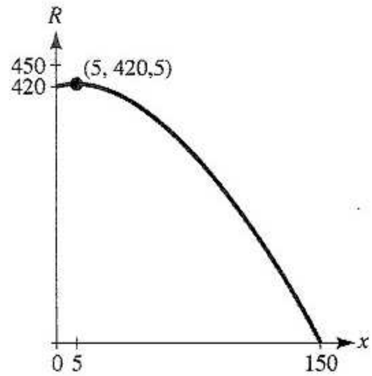
O preço ótimo é R$ 25,50. O lucro do fabricante será maior se ele reduzir o preço em vez de aumentá-lo.

37. $C(x) = 20x + \dfrac{5.120}{x}$



O número de máquinas é 16

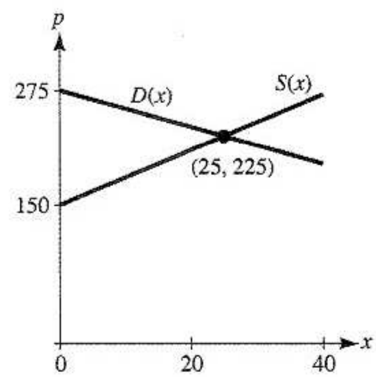
39. $R(x) = (3 - 0{,}02x)(140 + x)$, onde x é o número de dias a partir de 1.º de julho



O fazendeiro deve realizar a colheita no dia $x = 5$, que corresponde a 6 de julho

41. a. $x_e = 25$; $p_e = 225$

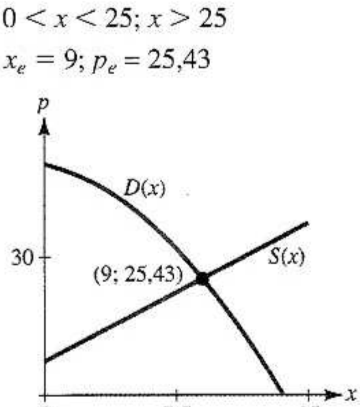
b.



c. $0 < x < 25$; $x > 25$

43. a. $x_e = 9$; $p_e = 25{,}43$

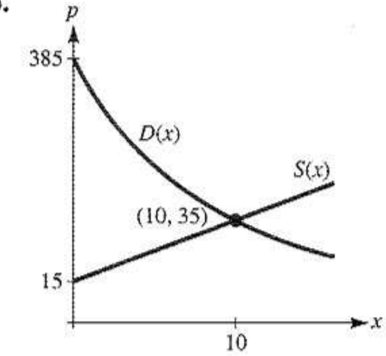
b.



c. $0 < x < 9$; $x > 9$

45. a. $x_e = 10; p_e = 35$

b.



c. $S(0) = 15$; quando o preço é menor que R$ 15,00, nenhuma unidade é produzida.

47. 2 horas e 45 minutos após a partida do segundo avião

49. Se $N \leq 6.000$ ou $N \geq 126.000$, a oferta da Editora A é mais vantajosa; se $6.000 < N < 126.000$, a oferta da Editora B é mais vantajosa.

51. $I = k\pi r^2$

53. $y = \dfrac{K_m}{R_m}x + \dfrac{1}{R_m}$

55. a.

x	2.000	4.000	6.000	8.000
$C(x)$	85.200	96.200	107.200	118.200

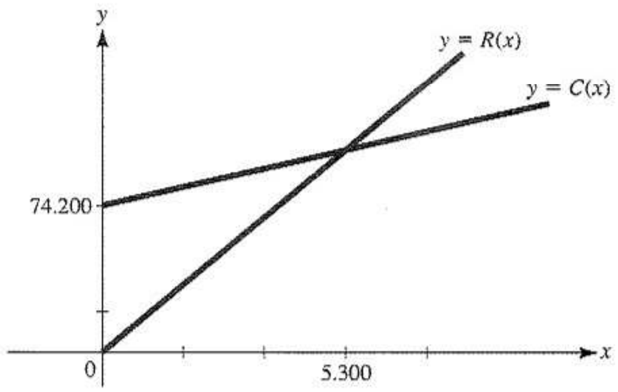
b.

x	2.000	4.000	6.000	8.000
$R(x)$	39.000	78.000	117.000	156.000

c. $C(x) = 5{,}5x + 74.200$

d. $R(x) = 19{,}5x$

e.



f. $C(x) = R(x) =$ R$ 103.350,00 para $x = 5.300$ livros

g. 4359 livros devem ser vendidos para que a editora tenha uma receita de R$ 85.000,00. Neste caso, a editora tem um prejuízo de R$ 13.174,00.

CAPÍTULO 1 | Seção 5

1. $\lim_{x \to a} f(x) = b$

3. $\lim_{x \to a} f(x) = b$

5. O limite não existe.

7. 4

9. 7

11. 16

13. $\dfrac{4}{7}$

15. O limite não existe.

17. 2

19. 7

21. $\dfrac{5}{3}$

23. 5

25. $\dfrac{1}{4}$

27. $+\infty; -\infty$

29. $-\infty; -\infty$

31. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}$

33. 0; 0

35. $+\infty; -\infty$

37. $1; -1$

39.

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	1,71	1,9701	1,997001		2,003001	2,0301	2,31

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$

41.

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	−17,29	−197,0299	−1.997,002999		2.003,003001	203,0301	23,31

$\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

43. $\lim_{x \to c} [2f(x) - 3g(x)] = 2(5) - 3(-2) = 16$

45. $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{5}{-2} = \dfrac{-5}{2}$

47. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{g(x)} = \sqrt{4} = 2$

49. 1,8 cm

51. a. $P(t) = \dfrac{\sqrt{9t^2 + 0{,}5t + 179}}{0{,}2t + 1.500}$ milhares de dólares por pessoa

b. $\lim_{t \to \infty} P(t) = 15.000$ dólares por pessoa

53. a. $\lim_{S \to \infty} I(S) = a$. Por maior que seja o tamanho da mordida, a necessidade de vigilância limita a ingestão de alimentos.

b. A resposta pode variar.

55. R$ 7,50; à medida que o número de unidades produzidas aumenta, a contribuição relativa do custo fixo para o custo médio se torna cada vez menor.

57. $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe

59. a. 0

b. $\dfrac{a_n}{b_m}$

c. $+\infty$ se a_n e b_m tiverem o mesmo sinal e $-\infty$ se a_n e b_m tiverem sinais diferentes

CAPÍTULO 1 | Seção 6

1. -2; 1; não existe

3. 2; 2; existe e é igual a 2

5. 39

7. 0

9. 0

11. $\frac{1}{4}$

13. 15; 0

15. Sim

17. Sim

19. Não

21. Não

23. Não

25. Sim

27. $f(x)$ é contínua para todos os números x reais.

29. $f(x)$ é contínua para qualquer número x real exceto $x = 2$.

31. $f(x)$ é contínua para qualquer $x \neq -1$.

33. $f(x)$ é contínua para qualquer $x \neq -3$ e 6.

35. $f(x)$ é contínua para qualquer $x \neq 0$ e 1.

37. $f(x)$ é contínua para todos os números x reais.

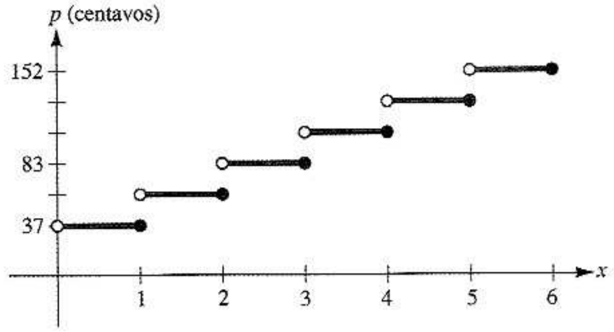
39. $f(x)$ é contínua para qualquer $x \neq 0$.

41. **a.** $W(20) \approx 3{,}8$
$W(50) = -7$

b. $v = 25$ milhas por hora [*Nota*: A outra solução, $v = 99$ milhas por hora, está fora do intervalo.]

c. W é contínua em $v = 4$ e em $v = 45$, supondo que $W(4)$ e $W(45)$ sejam arredondadas para uma casa decimal. A pequena diferença pode ser atribuída a uma imprecisão do modelo.

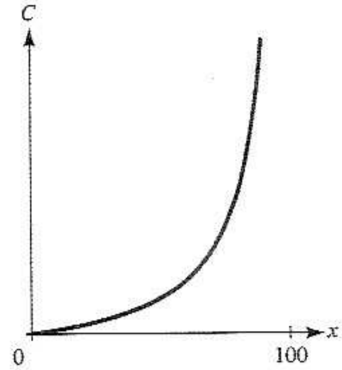
43. $p(x)$ é descontínua para $x = 1, 2, 3, 4$ e 5.



45. O gráfico é descontínuo em $t = 10$ e $t = 25$. Nessas ocasiões, Susana parou em um posto de gasolina e abasteceu o carro.

47. **a.** R$ 4.000,00; R$ 12.000,00

b.



c. $\lim_{x \to 100^-} C(x) = \infty$; não é possível remover toda a poluição.

49. **a.** $C(0) \approx 0{,}333$; $C(100) \approx 7{,}179$

b. Porque a função $C(x)$ não é contínua no intervalo $0 \leq x \leq 100$, já que $C(80)$ não é definido.

51. $A = 6$

53. $f(x)$ é contínua no intervalo aberto $0 < x < 1$. $f(x)$ é contínua em todos os pontos do intervalo fechado $0 \leq x \leq 1$ exceto $x = 0$.

55. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x-8} + 9x^{2/3} - 29$. $f(x)$ é contínua no intervalo $0 \leq x \leq 8$, $f(0) = -31 < 0$ e $f(8) = 7 > 0$. De acordo com a propriedade do valor intermediário, $f(x)$ para algum valor de x no intervalo $0 < x < 8$.

57. **a.** $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, mas a função não é contínua em $x = 2$.

b. não existe e, portanto, $f(x)$ não é contínua em $x = -2$.

59. Em cada hora, o ponteiro dos minutos começa atrás do ponteiro das horas e termina na frente. Assim, deve haver um momento no qual os dois ponteiros estão alinhados.

CAPÍTULO 1 | Verificação

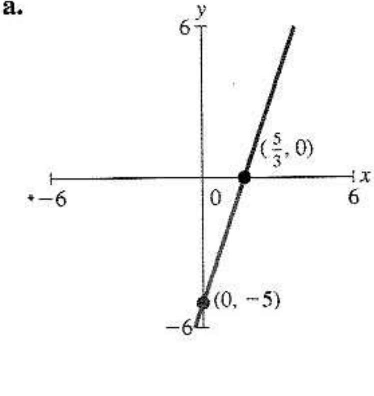
1. Todos os números x reais tais que $-2 < x < 2$

2. $g(h(x)) = \frac{2x+1}{4x+5}$; $x \neq -\frac{1}{2}$

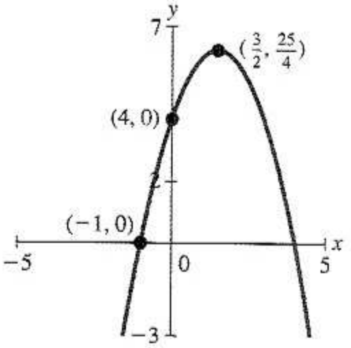
3. **a.** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b. $y = 2x - 3$

4. **a.**



b.



5. **a.** 2

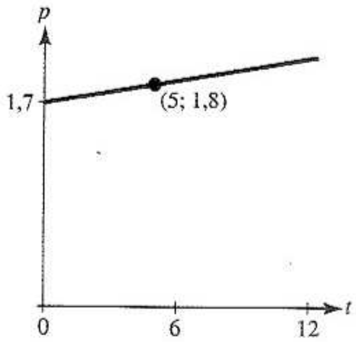
b. 4

c. 1

d. $-\infty$

6. $f(x)$ não é contínua em $x = 1$.

7. **a.** $p(t) = 0{,}02t + 1{,}7$

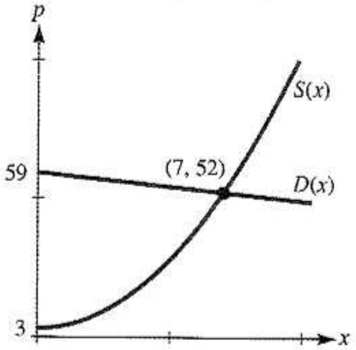


b. R$ 1,70 o litro

c. R$ 1,88 o litro

8. **a.** $A = 3$, $B = -1$; R$ 52,00

b.



c. −R$ 26,00; R$ 54,00

9. **a.** $t = 9$

b. Como a função $g(t) = f(t) - 10$ é contínua, $g(1) = -2$ e $g(7) = 6$, de acordo com a propriedade do valor intermediário, $g(t) = 0$ ou $f(t) = 10$ em algum instante entre $t = 1$ e $t = 7$.

10. $M = 2{,}5D + 0{,}2$; 0,2%

CAPÍTULO 1 | Problemas de Revisão

1. **a.** Todos os números x reais

b. Todos os números x reais exceto $x = 1$ e $x = -2$

c. Todos os números x reais para os quais $|x| \geq 3$

3. **a.** $g(h(x)) = x^2 - 4x + 4$

b. $g(h(x)) = \dfrac{1}{2x + 5}$

c. $g(h(x)) = \sqrt{-2x - 3}$

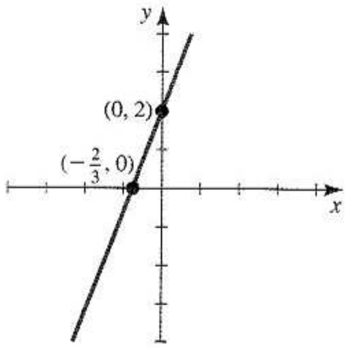
5. *Nota*: As respostas podem variar.

a. $g(u) = u^5$; $h(x) = x^2 + 3x + 4$

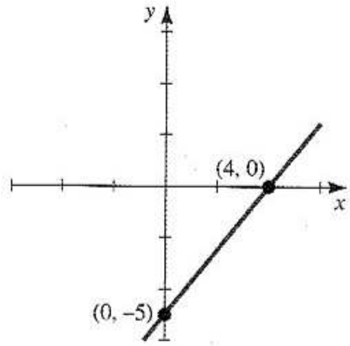
b. $g(u) = (u - 1)^2 + \dfrac{5}{2u^3}$; $h(x) = 3x + 2$

7. $c = -4$

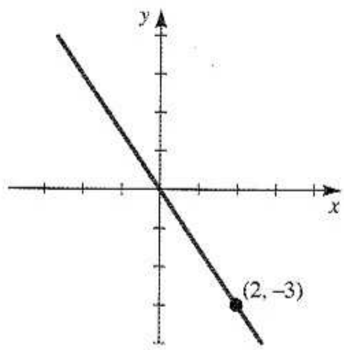
9. **a.** $m = 3, b = 2$



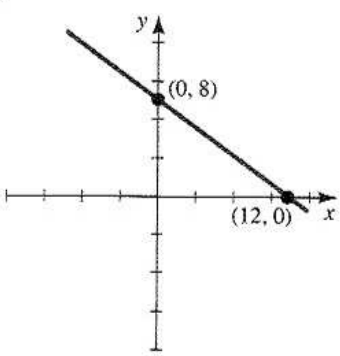
b. $m = \dfrac{5}{4}, b = -5$



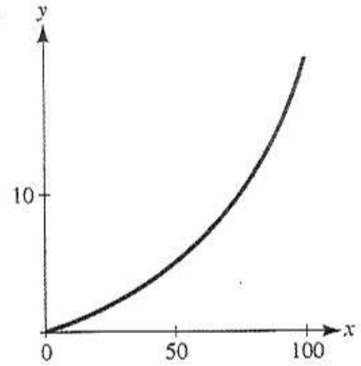
c. $m = -\dfrac{3}{2}, b = 0$



d. $m = -\dfrac{2}{3}, b = 8$



11. **a.**

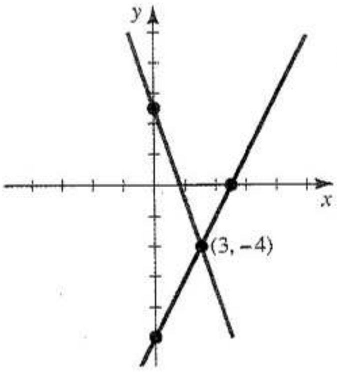


b. 5 semanas

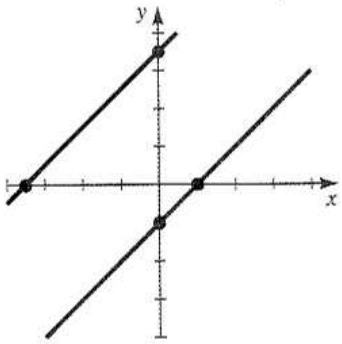
c. 20 semanas

13. $V = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 = \frac{S^{3/2}}{6\sqrt{\pi}}$; V é multiplicado por $2^{3/2}$.

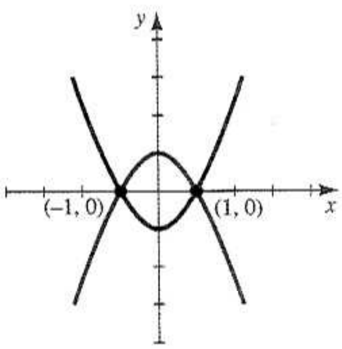
15. **a.** $(3, -4)$



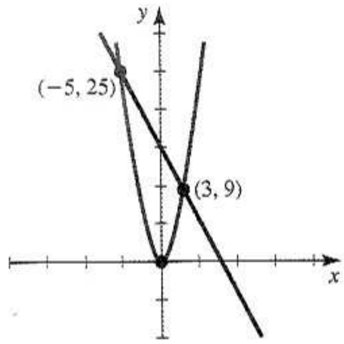
b. Não há interseção



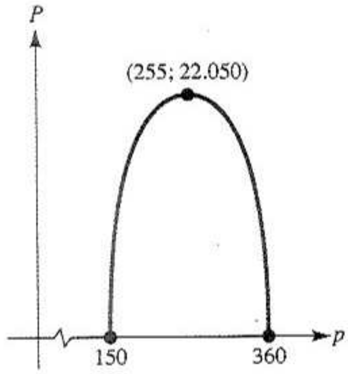
c. $(1,0)$ e $(-1,0)$



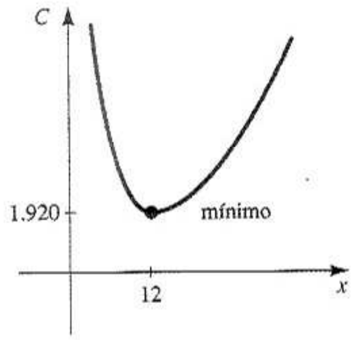
d. $(3, 9)$ e $(-5, 25)$



17. $P(p) = 2(360 - p)(p - 150)$; o preço ótimo de venda é p = R$ 255,00



19. Se forem utilizadas x máquinas, $C(x) = 80x + \frac{11.520}{x}$



Para minimizar o custo, a empresa deve usar 12 máquinas.

21. **a.** 150 unidades

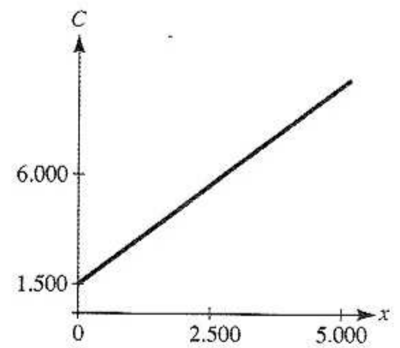
b. lucro de R$ 1.500,00

c. 180 unidades

23. $y = k(N - x)$, onde y é o número de fatos lembrados por unidade de tempo, k é uma constante, N é o número total de fatos e x é o número de fatos que já foram lembrados.

25. $C = 60x + (2\pi - 6)x^2$

27. $C(x) = 1.500 + 2x$ para $0 \leq x \leq 5.000$



$C(x)$ é contínua para $0 \leq x \leq 5.000$.

29. O proprietário deve escolher o Plano A se $V < 30.000$, o Plano B se $V > 30.000$ e qualquer dos dois planos se $V = 30.000$.

31. $\dfrac{3}{2}$

33. -12

35. O limite não existe.

37. 0

39. $-\infty$

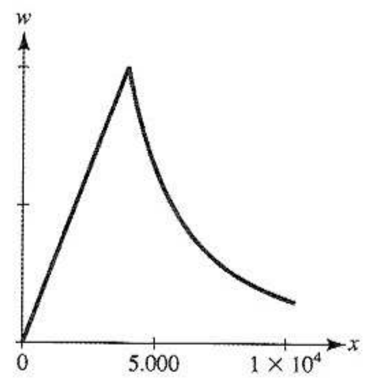
41. 0

43. 0

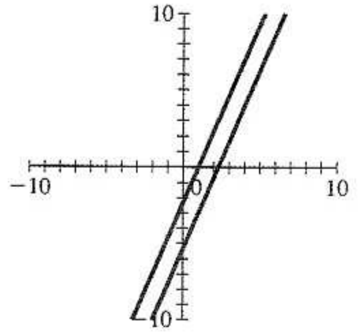
45. A função não é contínua para $x = -3$.

47. A função é contínua para todos os números x reais.

49. $A = \dfrac{B}{(4.000)^3}$

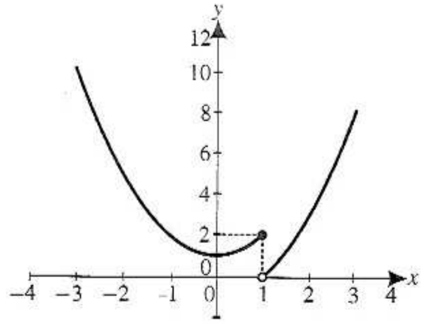


51.



Não, porque $\dfrac{21}{45} \neq \dfrac{654}{279}$.

53.



A função é descontínua em $x = 1$.

55. O limite existe e é 0.

CAPÍTULO 2 | Seção 1

1. $f'(x) = 5$; $m = 5$

3. $f'(x) = 4x - 3$; $m = -3$

5. $g'(t) = -\dfrac{2}{t^2}$; $m = -8$

7. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $m = \dfrac{1}{6}$

9. $f'(x) = 2x$; $y = 2x - 1$

11. $f'(x) = -2$; $y = -2x + 7$

13. $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$; $y = 2x + 4$

15. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $y = \dfrac{1}{2}x + 2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = 0$

19. $f'(x) = 1 - 2x$; $f'(-1) = 3$

21. $\dfrac{dy}{dx} = 2x - 2$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$

23. **a.** $m_{\text{sec}} = 3{,}31$
b. $m_{\text{tan}} = 3$

25. **a.** $m_{\text{sec}} = 1{,}5$
b. $m_{\text{tan}} = 2$

27. **a.** $\text{taxa}_{\text{méd}} = \dfrac{-13}{16}$
b. $\text{taxa}_{\text{ins}} = -1$

29. **a.** $\text{taxa}_{\text{méd}} = 4$
b. $\text{taxa}_{\text{ins}} = 8$

31. **a.** A taxa média de variação de temperatura entre t_0 e $t_0 + h$ horas após a meia-noite. A taxa instantânea de variação de temperatura t_0 horas após a meia-noite.

b. A taxa média de variação da concentração de álcool no sangue entre t_0 e $t_0 + h$ horas após a ingestão. A taxa instantânea de variação da concentração de álcool no sangue t_0 horas após a ingestão.

c. A taxa média de variação da taxa de juros entre t_0 e $t_0 + h$ anos após o ano 2000. A taxa instantânea de variação da taxa de juros t_0 anos após o ano 2000.

RESPOSTAS

33. $V'(30) \approx \dfrac{65-50}{50-30} = \dfrac{3}{4}$; tende a 0

35. Aproximadamente $-0{,}009$°C/metro; aproximadamente 0°C/metro

37. **a.** $P = (120 - q)q - 20q$
b. R$ 80,00 a unidade
c. R$ 60,00 a unidade; aumentando

39. **a.** $P'(x) = 4.000(17 - 2x)$
b. $P'(x) = 0$ para $x = \dfrac{17}{2}$ ou 850 unidades. Para este nível de produção, o lucro não está aumentando nem diminuindo.

41. **a.** R$ 5,94 a unidade
b. R$ 5,90 a unidade; aumentando

45. **a.** 0,0211 mm por mm de mercúrio
b. 0,022 mm por mm de mercúrio; aumentando
c. 72,22 mm de mercúrio. Para esta pressão, o diâmetro da aorta não está aumentando nem diminuindo.

47. **a.** O gráfico de $y = x^2 - 3$ é o gráfico de $y = x^2$ deslocado 3 unidades para baixo. Assim, as duas curvas têm a mesma inclinação para qualquer valor de x e a mesma derivada, que é $y' = 2x$.
b. $y' = 2x$

49. **a.** $\dfrac{dy}{dx} = 2x$; $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$
b. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3$; $\dfrac{dy}{dx} = 27x^{26}$

51. Para $x > 0$, temos $f(x) = x$ e

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-(x)}{h} = 1$$

e para $x < 0$, temos $f(x) = -x$ e

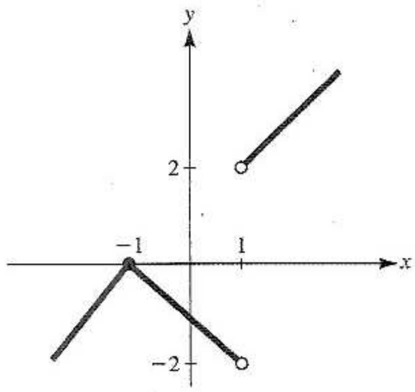
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)-(-x)}{h} = -1$$

Entretanto, a derivada para $x = 0$ seria

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

que não existe, já que os dois limites unilaterais em $x = 0$ não são iguais (o limite pela esquerda é -1 e o limite pela direita é $+1$).

53. Como $f(x)$ não é contínua em $x = 1$, não é derivável nesse ponto.



55.

h	$-0{,}02$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0	0,001	0,01	0,02
$x + h$	3,83	3,84	3,849	3,85	3,851	3,86	3,87
$f(x)$	4,37310	4,37310	4,37310	4,37310	4,37310	4,37310	4,37310
$f(x+h)$	4,35192	4,36251	4,37204	4,37310	4,37415	4,38368	4,39426
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	1,059	1,059	1,059	não existe	1,059	1,058	1,058

CAPÍTULO 2 | Seção 2

1. $\dfrac{dy}{dx} = -4x^{-5}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = 0$

5. $\dfrac{dy}{dr} = 2\pi r$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

9. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-9}{2\sqrt{t^3}}$

11. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 2$

13. $f'(x) = 9x^8 - 40x^7 + 1$

15. $f'(x) = -0{,}06x^2 + 0{,}3$

17. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-1}{t^2} - \dfrac{2}{t^3} + \dfrac{1}{2\sqrt{t^3}}$

19. $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}$

21. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{2}x^{1/2} - \dfrac{2}{3x^3} + \dfrac{1}{3}$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{2}{3x^{1/3}} - \dfrac{1}{4x^{3/2}} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{4}{x^2}$

27. $y = 10x + 2$

29. $y = -\dfrac{1}{16}x + 2$

31. $y = x + 3$

33. $y = -4x - 1$

35. $y = 3x - 3$

37. $y = -3x + \dfrac{22}{3}$

39. $f'(-1) = -5$

41. $f'(1) = -\dfrac{3}{2}$

43. $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

45. **a.** 0,2 parte por milhão por ano
b. 0,15 parte por milhão
c. 0,4 parte por milhão

47. **a.** $f'(x) = -6$
b. Que a nota média seria a mesma todo ano; que a nota média está diminuindo de ano para ano.

49. **a.** $T'(0) =$ R\$ 40,00 por ano
b. R\$ 480,00

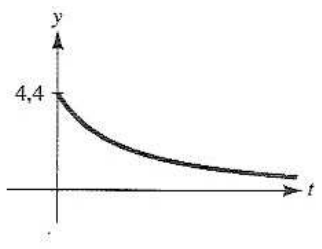
51. 2.435 pessoas por dia, aproximadamente.

53. **a.** $C(x) = 1{,}9x + \dfrac{7.280}{x}$
b. $C'(40) = -2{,}65$; diminui

55. $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{6x^2 - 10x}{2x^3 - 5x^2 + 4}$; $\dfrac{f'(1)}{f(1)} = -4$

57. **a.** R\$ 10.800,00 por ano
b. 17,53%

59. **a.** $f(t) = \dfrac{100(2.000)}{45.000 + 2.000t} = \dfrac{200}{45 + 2t}$



b. 17,53%
c. A taxa de variação percentual tende a zero.

61. $P'(x) = 2 + 6x^{1/2}$
a. $P'(9) = 20$ pessoas por mês
b. 0,39%

63. **a.** $T'(t) = -204{,}21t^2 + 61{,}96t + 12{,}52$
b. $T'(0) = 12{,}52$, aumentando; $T'(0{,}713) = -47{,}12$, diminuindo
c. $t = 0{,}442$ dias ou 10,61 horas; $T(0{,}442) = 42{,}8°\text{C}$, que é a temperatura máxima durante o período.

65. **a.** $v(t) = 6t + 2$; $a(t) = 6$
b. A partícula não está estacionária em nenhum instante.

67. **a.** $v(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8$; $a(t) = 12t^2 - 24t$
b. $t = 1,\ 1+\sqrt{3}$

69. **a.** 9,8 m/s
b. 39,2 m/s
c. −9,8 m/s
d. −29,4 m/s

71. $a = -1, b = 5, c = 0$

73. $(f + g)'(x)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

75. **a.** 150 dólares por tonelada de carbono
b. 0,2% por dólar

CAPÍTULO 2 | Seção 3

1. $f'(x) = 12x - 1$

3. $\dfrac{dy}{du} = -300u - 20$

5. $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(6x^5 - 12x^3 + 4x + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$

9. $f'(t) = \dfrac{-(t^2 + 2)}{(t^2 - 2)^2}$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{(x+5)^2}$

13. $f'(x) = \dfrac{11x^2 - 10x - 7}{(2x^2 + 5x - 1)^2}$

15. $f'(x) = \dfrac{2(x^2 + 2x + 4)}{(x+1)^2}$

17. $f'(x) = 10(2 + 5x)$

19. $g'(t) = \dfrac{4\sqrt{t^5} + 20\sqrt{t^3} - 2t + 5}{2\sqrt{t}\,(2t + 5)^2}$

21. $y = 17x - 4$

23. $y = 3x + 2$

25. $y = -\dfrac{11}{2}x + \dfrac{19}{2}$

27. $(1, -4), (-1, 0)$

29. $(0, 1), \left(-2, -\dfrac{1}{3}\right)$

31. (5, 0), (3, 108), (0, 0)

33. -18

35. 4

37. $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}$

39. $y = \dfrac{1}{31}(-x - 371)$

41. **a.–d.** $y' = \dfrac{9 - 4x}{x^4}$

43. $f''(x) = 8x^3 - 24x + 18$

45. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4}{3x^3} + \dfrac{\sqrt{2}}{4x^{3/2}} - \dfrac{1}{8x^{5/2}}$

47. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 + 30x + 12$

49. **a.** $S'(2) = 378{,}07$

b. As vendas tendem para um valor limite de R$ 6.666,67.

51. **a.** $P'(5) = \dfrac{1.900}{441} \approx 4{,}3\%$ por semana, aumentando.

b. A longo prazo, $P(t)$ tende a 100% e a taxa de variação tende a zero.

53. **a.** $P'(16) \approx -0{,}631$; diminuindo

b. Aumentando para $0 < x < 10$; diminuindo para $x > 10$.

55. **a.** $R(t) = -3t^2 + 16t + 15$

b. 10 unidades por hora ao quadrado

57. **a.** $v(t) = 15t^4 - 15t^2$; $a(t) = 60t^3 - 30t$

b. $a(t) = 0$ para $t = 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

59. **a.** $v(t) = -3t^2 + 14t + 1$
$a(t) = -6t + 14$

b. $a(t) = 0$ para $t = \dfrac{7}{3}$

61. **a.** 9,8 metros por minuto

b. 9,83 metros

63. **a.** $S = \dfrac{2}{3}KM - M^2$

b. $\dfrac{dS}{dM} = \dfrac{2}{3}K - 2M$ representa a taxa de variação da sensibilidade em relação à quantidade de medicamento presente no sangue.

65. **a.** $a(t) = 9{,}8$

b. $a(t)$ é constante.

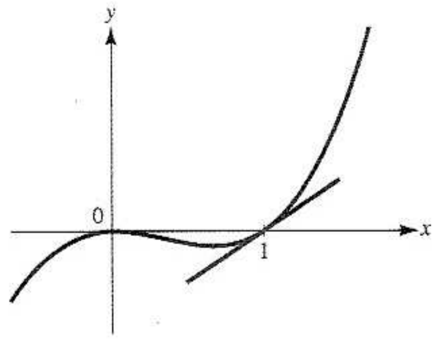
c. O corpo está acelerando para baixo.

67. $\dfrac{3}{8x^{5/2}} + \dfrac{3}{x^4}$

69. **a.** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{fg}{h}\right) = \dfrac{hfg' + hf'g - fgh'}{h^2}$

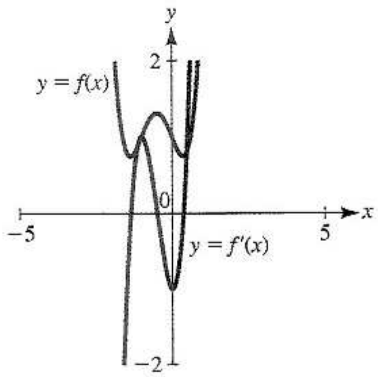
b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^3 + 51x^2 + 70x - 33}{(3x + 5)^2}$

73.



$f'(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = \dfrac{2}{3}$.

75.



Os pontos em que $f'(x)$ intercepta o eixo x são $x = -0{,}5$, $x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}366$ e $x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx -1{,}366$. Os pontos em que $f'(x)$ intercepta o eixo x são os pontos em que $f'(x) = 0$ e, portanto, os pontos em que a tangente à curva de $f(x)$ é horizontal, o que corresponde aos máximos e mínimos de $f(x)$.

CAPÍTULO 2 | Seção 4

1. $\dfrac{dy}{dx} = 6(3x - 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^3}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{(x^2 - 9)^{3/2}}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

11. -160

13. $\dfrac{2}{3}$

15. -16

17. $f'(x) = 8(2x + 1)^3$

19. $f'(x) = 8x^2(x^5 - 4x^3 - 7)^7(5x^2 - 12)$

21. $f'(t) = \dfrac{-2(5t - 3)}{(5t^2 - 6t + 2)^2}$

23. $g'(x) = \dfrac{-4x}{(4x^2 + 1)^{3/2}}$

25. $f'(x) = \dfrac{24x}{(1 - x^2)^5}$

27. $h'(s) = \dfrac{15(1 + \sqrt{3s})^4}{2\sqrt{3s}}$

29. $f'(x) = (x + 2)^2(2x - 1)^4(16x + 17)$

31. $G'(x) = -\dfrac{5}{2}(3x + 1)^{-1/2}(2x - 1)^{-3/2}$

33. $f'(x) = \dfrac{(x + 1)^4(9 - x)}{(1 - x)^5}$

35. $f'(y) = \dfrac{5 - 6y}{(1 - 4y)^{3/2}}$

37. $y = -48x - 32$

39. $y = -12x + 13$

41. $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$

43. $x = 0; x = -1; x = -\dfrac{1}{2}$

45. $x = -\dfrac{2}{3}$

47. $x = 2$

49. $f'(x) = 6(3x + 5)$

51. $f''(x) = 180(3x + 1)^3$

53. $\dfrac{d^2h}{dt^2} = 80(t^2 + 5)^6(3t^2 + 1)$

55. $f''(x) = (1 + x^2)^{-3/2}$

57. **a.** R\$ 2.295,00 por ano
b. 10,4% por ano

59. **a.** -12 libras por dólar
b. $(-12)(0,5) = -6$ libras por semana; diminuindo

61. A demanda mensal estará diminuindo a uma taxa de 12%.

63. **a.** $L'(w) = 0,65w^{1,6}$; $L'(60) = 455$ mm/kg
b. Um tigre de 100 dias pesa $w(100) = 24$ kg e tem $L(24) = 969$ mm de comprimento. Pela regra da cadeia, $L'(A) = L'(w)w'(A) = (0,65w^{1,6})(0,21)$ e, portanto, para $A = 100$ e $w = 24$ temos $L'(100) = (0,65)(0,21)(24)^{1,6} \approx 22,1$.

Assim, o comprimento do tigre está aumentando à razão de 22,1 mm por dia.

65. **a.** R\$ 64.000,00; 8.000 unidades
b. 6.501 unidades por mês; aumentando

67. **a.** 6 horas por dia; R\$ 16.000,00
b. $-$R\$ 968,00 por mês; diminuindo

69. **a.** $V'(T) = 0,41(-0,02T + 0,4)$
b. $m'(V) = \dfrac{0,39}{(1 + 0,09V)^2}$
c. $V(10) = 2,6732$ cm^3; 0,02078 g/°C

71. **a.** $\dfrac{dT}{dL} = \dfrac{a(3L - 2b)}{2\sqrt{L - b}}$

73. **a.** $v(t) = \dfrac{3}{2}(1 - 2t)(3 + t - t^2)^{1/2}$

$a(t) = \dfrac{24t^2 - 24t - 33}{4(3 + t - t^2)^{1/2}}$

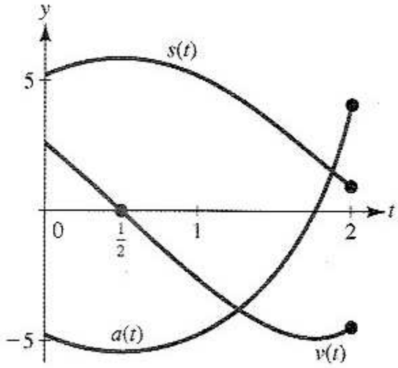
b. $t = \dfrac{1}{2}, 2; s\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13\sqrt{13}}{8} \approx 5,86$

$a\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-3\sqrt{13}}{2} \approx -5,41$

c. $a(t) = 0$ para $t = \dfrac{2 + \sqrt{26}}{4} \approx 1,775$

$s(1,775) \approx 2,07$; $v(1,775) \approx -4,875$

d.



e. O corpo está freando para $0 \leq t < 0,5$ e para $1,775 < t \leq 2$.

75. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[h(x)h(x)] = h(x)\dfrac{dh(x)}{dx} + \dfrac{dh(x)}{dx}h(x)$

$= 2h(x)\dfrac{dh(x)}{dx}$

77. $f'(1) \approx 0,2593, f'(-3) \approx -0,4740$; uma tangente horizontal em $x = 0, f(x) \approx 2,687$.

CAPÍTULO 2 | Seção 5

1. **a.** $C'(x) = \dfrac{2}{5}x + 4$; $R'(x) = 9 - \dfrac{x}{2}$
b. $C'(3) =$ R\$ 5,20
c. $C(4) - C(3) =$ R\$ 5,40
d. $R'(3) =$ R\$ 7,50
e. $R(4) - R(3) =$ R\$ 7,25

3. **a.** $C'(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$; $R'(x) = -3x^2 - 8x + 80$
b. $C'(3) = 4$
c. $C(4) - C(3) \approx 4,33$
d. $R'(3) = 29$
e. $R(4) - R(3) = 15$

5. **a.** $C'(x) = \dfrac{x}{2}$; $R'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 3}{(1 + x)^2}$
b. $C'(3) =$ R\$ 1,50
c. $C(4) - C(3) =$ R\$ 1,75

d. $R'(3) = \frac{33}{16} = \text{R\$ } 2{,}06$

e. $R(4) - R(3) = \text{R\$ } 2{,}05$

7. 2,1

9. $\frac{100f'(4)}{f(4)}(0{,}3) \approx 0{,}20$; 20%

11. a. $C'(3) = \text{R\$ } 499{,}70$

b. $C(4) - C(3) = \text{R\$ } 500{,}20$

13. a. R\$ 241,00

b. R\$ 244,00

15. 200

17. A receita diminuirá de aproximadamente R\$ 150,80.

19. A produção diária aumentará de aproximadamente 8 unidades.

21. 5,12%

23. A produção diária aumentará de aproximadamente 825 unidades.

25. 0,2 unidade

27. $\frac{3c}{|c - b|}$

29. 46,67%

31. 0,0385 m

33. A reta tangente em $x = x_0$ é $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Fazendo $y = 0$ e $x = x_1$, obtemos $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$ $\Rightarrow x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Repetindo o processo n vezes, temos $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

35. 3,82070437; 1,61179338

37. a. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} =$

$x_n - 3x_n = -2x_n$

b. Porque para qualquer valor de x_0 diferente de zero os termos da série $x_0, -2x_0, 4x_0, \ldots$ aumentam em valor absoluto.

CAPÍTULO 2 | Seção 6

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$

3. a. $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+2} = \frac{-[3/(x+2)]}{x+2}$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(x+2)^2}$

5. a. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x+2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

7. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2y^2}{2y(1 + 2x)}$

13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 1}{1 - x}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(2x + y)^2} - 2$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 5x(x^2 + 3y^2)^4}{15y(x^2 + 3y^2)^4 - x}$

21. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

23. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

25. $y = \frac{13}{12}x + \frac{11}{12}$

27. (a) Nenhum

(b) (9,0)

29. (a) Nenhum

(b) Nenhum

31. a. $(1, -2), (-1, 2)$

b. $(-2, 1), (2, -1)$

33. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3y^2 - x^2}{9y^3} = \frac{-5}{9y^3}$

35. $\Delta y \approx -1{,}704$

37. $\frac{dx}{dt} = 1{,}74$ ou 174 unidades por mês

39. 0,476 cm^3 por mês

41. $\frac{dr}{dt} = 20$ mm/min

43. $\frac{dx}{xt} = 0{,}15419$ ou 15,419 unidades por mês

45. a. 14,04

b. $-9{,}87$

47. $\frac{dK}{dt} = \frac{-2}{5}(\text{R\$ } 1.000) = -\text{ R\$ } 400{,}00$ por semana

49. 1 m/s

51. $\Delta y \approx 0{,}566$ unidades

53. Como $v = \frac{KR^2}{L}$ = constante no eixo central da artéria $(r = 0)$, temos

$$0 = v'(t) = K\left[\frac{2R}{L}R' - \frac{R^2}{L^2}L'\right]$$

Assim,

$$\frac{2R}{L}R' = \frac{R^2}{L^2}L'$$
$$\frac{L'}{L} = 2\frac{R'}{R}$$

e, portanto, a taxa de variação relativa de L é duas vezes maior que a de R.

55. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2yy'}{b^2} = 0$; $2b^2x + 2a^2yy' = 0$,

$y' = -\dfrac{2b^2x}{2a^2y} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. Em $P(x_0, y_0)$, $m = \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

e, portanto, a equação da reta tangente é

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$
$$a^2yy_0 - a^2y_0^2 = -b^2xx_0 + b^2x_0^2$$
$$b^2xx_0 + a^2yy_0 = b^2x_0^2 + a^2y_0^2$$
$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$
$$= 1$$

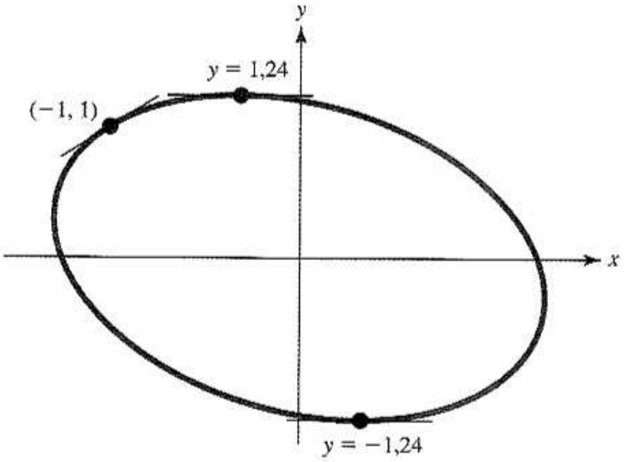
já que $P(x_0, y_0)$ está sobre a curva e portanto satisfaz a equação da curva.

57. Seja $= x^{r/s}$; nesse caso $y^s = x^r$ e $sy^{s-1}\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$,

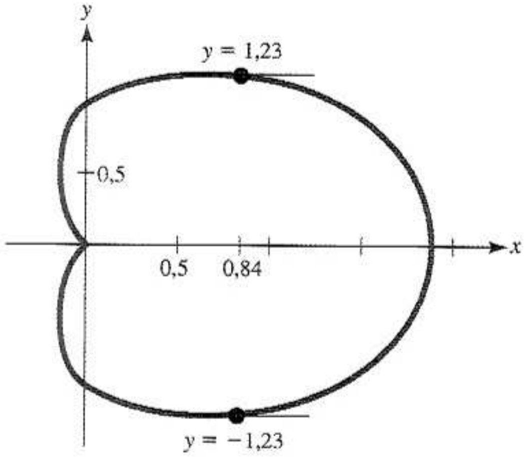
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{rx^{r-1}}{sy^{s-1}}$. Como $y^{s-1} = \dfrac{y^s}{x^{r/s}} = \dfrac{x^r}{x^{r/s}}$, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{s}\cdot x^{r-1}\cdot\frac{x^{r/s}}{x^r}$$
$$= \frac{r}{s}\cdot x^{r-1+r/s-r}$$
$$= \frac{r}{s}\cdot x^{r/s-1}$$

59. As retas tangentes horizontais são $y = 1{,}24$ e $y = -1{,}24$



61. As retas tangentes horizontais são $y = 1{,}23$ e $y = -1{,}23$.



CAPÍTULO 2 | Verificação

1. **a.** $\dfrac{dy}{dx} = 12x^3 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{10}{x^3}$

   b. $\dfrac{dy}{dx} = -15x^4 + 39x^2 - 2x - 4$

   c. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-10x^2 + 10x + 1}{(1 - 2x)^2}$

   d. $\dfrac{dy}{dx} = (9x - 6)(3 - 4x + 3x^2)^{1/2}$

2. $f''(t) = 24t + 8$
3. $y = -4x$
4. $\dfrac{3}{8}$
5. **a.** 58 dólares por ano

   b. 2,98%

6. **a.** $v(t) = 6t^2 - 6t$; $a(t) = 12t - 6$

   b. Parado: $t = 0$ e $t = 1$; avançando: $0 < t < 1$; recuando: $1 < t < 2$.

   c. 6

7. **a.** $C'(5) = 5{,}4$(R\$ 100,00) = R\$ 540,00

   b. $C(6) - C(5) = 5{,}44$(R\$ 100,00) = R\$ 544,00

8. A produção aumenta de aproximadamente $\dfrac{75.000}{7}$ unidades
9. 0,001586 m^2 por semana
10. $\dfrac{8}{3}$%

CAPÍTULO 2 | Problemas de Revisão

1. $f'(x) = 2x - 3$
3. $f'(x) = 24x^3 - 21x^2 + 2$
5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-14x}{(3x^2 + 1)^2}$
7. $f'(x) = 10(20x^3 - 6x + 2)(5x^4 - 3x^2 + 2x + 1)^9$

9. $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{5}{2\sqrt{3x^3}}$

11. $f'(x) = 3\sqrt{6x+5} + \dfrac{9x+3}{\sqrt{6x+5}}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-7}{2(3x+2)^2}\sqrt{\dfrac{3x+2}{1-2x}}$

15. $y = -x - 1$

17. $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

19. **a.** 87,5%
b. -400%
c. -100%

21. **a.** 2
b. $\dfrac{3}{2}$
c. $\dfrac{27}{320}$

23. **a.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5}{3}$
b. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2y}{x}$
c. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 10(2x+3y)^4}{15(2x+3y)^4}$
d. $\dfrac{dy}{dx} = -\left[\dfrac{1 + 10y^3(1-2xy^3)^4}{4 + 30xy^2(1-2xy^3)^4}\right]$

25. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6y^2 - 9x^2}{4y^3} = \dfrac{-9}{2y^3}$

27. **a.** 75.000 por ano
b. 0 por ano

29. **a.** $v(t) = \dfrac{-2(t+4)(t-3)}{(t^2+12)^2}$,
$a(t) = \dfrac{2(2t^3 + 3t^2 - 72t - 12)}{(t^2+12)^3}$. O corpo está avançando para $0 < t < 3$, recuando para $3 < t < 4$ e freando em todo o intervalo $0 < t < 4$.
b. $\dfrac{11}{42}$

31. **a.** A produção aumentará de aproximadamente 12.000 unidades.
b. A produção aumentará de 12.050 unidades.

33. A produção diminuirá de aproximadamente 5.000 unidades por dia.

35. A poluição aumentará aproximadamente 10%.

37. **a.** 0,2837 indivíduo por quilômetro quadrado.
b. 2,41 milhões de habitantes
c. 55 anos; 60,67 animais por ano

39. 1,5%

41. **a.** $\dfrac{dF}{dC} = \dfrac{-kD^2}{2\sqrt{A-C}}$; F diminui quando C aumenta
b. $\dfrac{50}{A-C}\%$

43. $425{,}25 \le A \le 479{,}53$; a precisão é de 6%

45. $100\dfrac{\Delta Q}{Q} \approx 0{,}67\%$

47. $6{,}59 \le V \le 7{,}89$; a precisão é de 9%

49. 2 torradeiras por mês

51. 10,7%

53. 5,4 s; 70,4 m

55. **a.** R$ 195,00 por mês
b. $-$R$ 16,00 por mês ao quadrado
c. $-$R$ 8,00 por mês
d. $-$R$ 8,75 por mês

57. $-$R$ 99,00 por mês

59. 456 cm³

61. 0,9 m/s

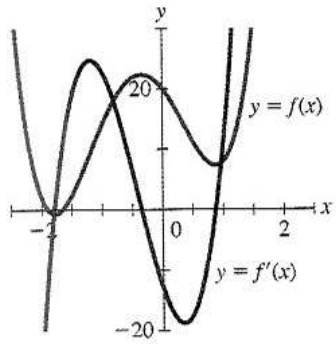
63. 2,25 m/s

65. 1,069 m/s

67. 0,48 m/s²

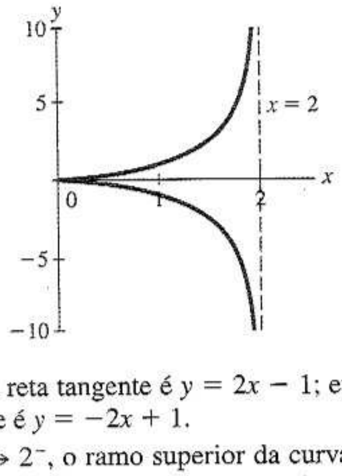
69. A taxa de variação percentual tende a zero, já que se $y = mx + b$, $\dfrac{100y'}{y} = \dfrac{100m}{mx+b}$, que tende a 0 quando x tende a ∞.

71.



$x = -1{,}78; -0{,}35; 0{,}88$

73. **a.**



b. Em $(1, 1)$, a reta tangente é $y = 2x - 1$; em $(1, -1)$, a reta tangente é $y = -2x + 1$.
c. Quando $x \to 2^-$, o ramo superior da curva cresce sem limite ($y \to \infty$) enquanto o ramo inferior diminui sem limite ($y \to -\infty$).
d. Sim; a reta $y = 0$ (eixo x) é uma tangente (dupla) da curva na origem.

CAPÍTULO 3 | Seção 1

1. $f'(x) > 0$ para $-2 < x < 2$; $f'(x) < 0$ para $x < -2$ e $x > 2$

3. $f'(x) > 0$ para $x < -4$ e $0 < x < 2$; $f'(x) < 0$ para $-4 < x < -2$, $-2 < x < 0$ e $x > 2$

5. B

7. D

9. $f(x)$ é crescente para $x > 2$ e decrescente para $x < 2$.

11. $f(x)$ é crescente para $x < -1$ e $x > 1$ e decrescente para $-1 < x < 1$.

13. $g(t)$ é crescente para $t < 0$ e $t > 4$ e decrescente para $0 < t < 4$.

15. $f(t)$ é crescente para $0 < t < 2$ e $t > 2$ e decrescente para $t < -2$ e $-2 < t < 0$.

17. $h(u)$ é crescente para $-3 < u < 0$ e decrescente para $0 < u < 3$.

19. $F(x)$ é crescente para $x < -3$ e $x > 3$ e decrescente para $-3 < x < 0$ e $0 < x < 3$.

21. $f(x)$ é crescente para $x > 1$ e decrescente para $0 < x < 1$.

23. $x = 0, 1$; $(0, 2)$ é um mínimo relativo; $(1, 3)$ não é máximo nem mínimo.

25. $x = -1$; $(-1, 3)$ não é máximo nem mínimo.

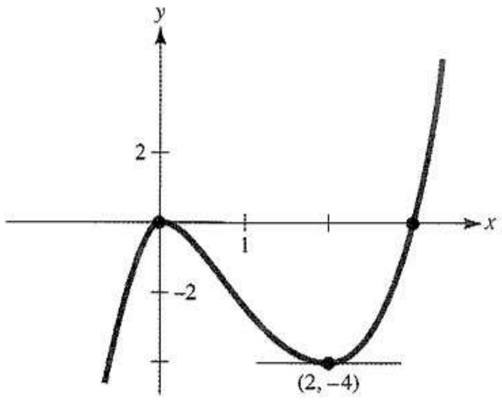
27. $x = 1$; $(1, 0)$ não é máximo nem mínimo.

29. $t = -\sqrt{3},\ \sqrt{3}$; $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ é um mínimo relativo; $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ é um máximo relativo.

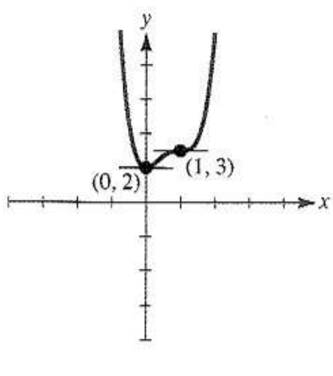
31. $t = -2, 0, 1, 4$; $(0, 0)$ é um máximo relativo; $\left(4, \frac{8}{9}\right)$ é um mínimo relativo; a função não existe em $t = -2$ e $t = 1$.

33. $t = -1, 0, 1$l; $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são mínimos relativos; $(0, 1)$ é um máximo relativo.

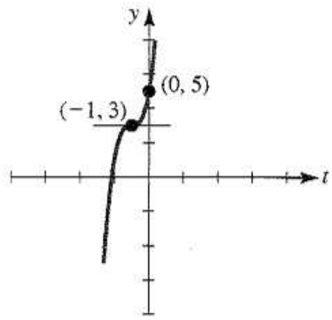
35.



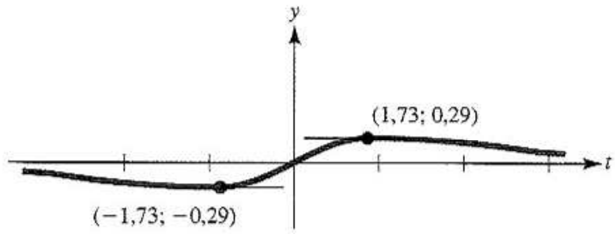
37.



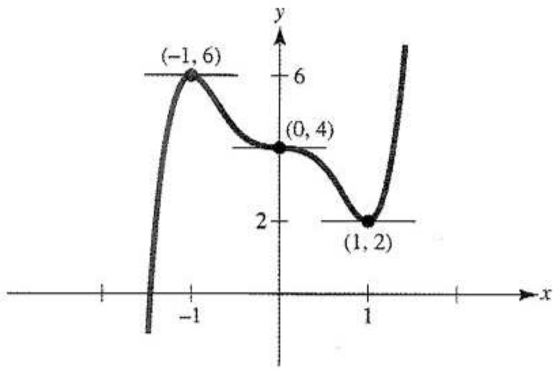
39.



41.



43.



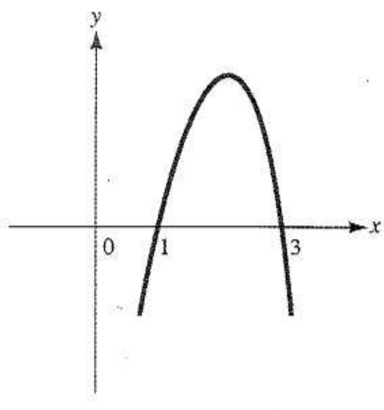
45.

Número Crítico	Classificação
-2	Mínimo relativo
0	Nenhum dos dois
2	Máximo relativo

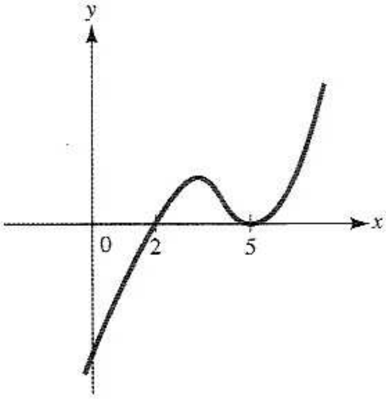
47.

Número Crítico	Classificação
-1	Nenhum dos dois
$\frac{4}{3}$	Máximo relativo

49. Uma possibilidade:



51. Uma possibilidade:



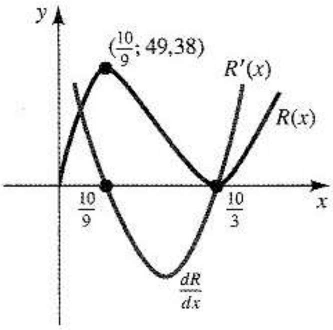
53. **a.** $A'(x) = 2x - 20 - \dfrac{242}{x^2}$

b. Crescente: $x > 11$; decrescente: $0 \leqslant x < 11$

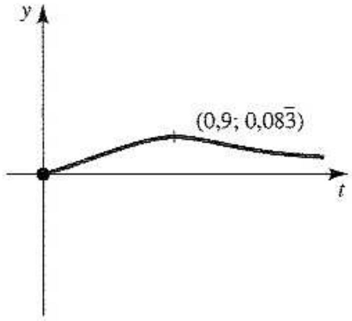
c. O custo médio é mínimo para $x = 11$; o custo mínimo é R$ 102.000 por unidade.

55. $R(x) = x(10 - 3x)^2$; $\dfrac{dR}{dx} = (10 - 3x)(10 - 9x)$;

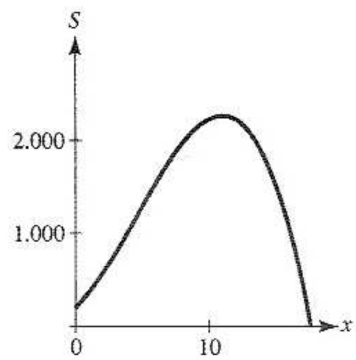
A receita é máxima para $x = \dfrac{10}{9}$.



57. A concentração é máxima para $t = 0{,}9$ hora.



59. **a.**



b. 207

c. R$ 11.000,00; 2.264 unidades

61. **a.** $1 \leq r \leq 5.495$

b. 5,495%; 1.137 pedidos

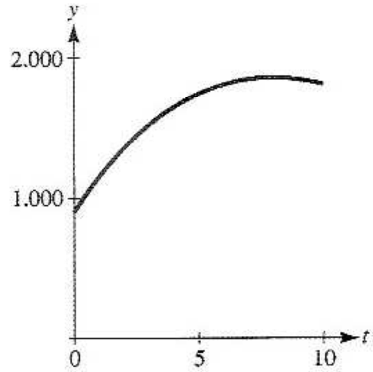
63. **a.** 1971, 1976, 1980, 1983, 1988, 1994

b. 1973, 1979, 1981, 1985, 1989

c. Aproximadamente 0,5% ao ano

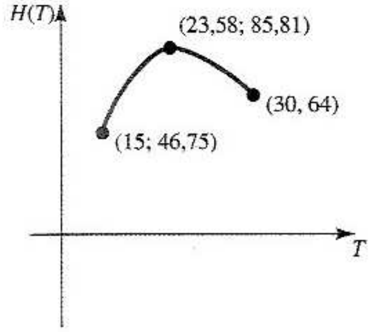
d. Aproximadamente 0,5% ao ano

65. **a.** $Y(t) = \dfrac{9{,}300}{31 + t}(3 + t - 0{,}05t^2)$



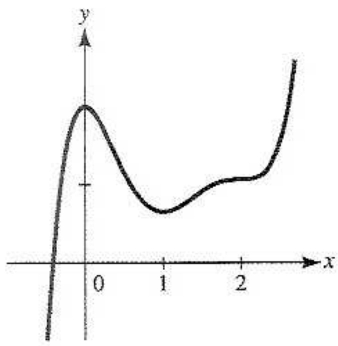
b. 8 semanas; 1.860 kg

67.

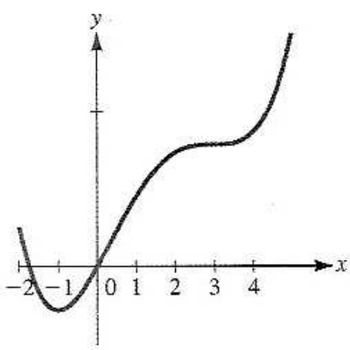


$T = 23{,}58°C$; 85,81%

69.

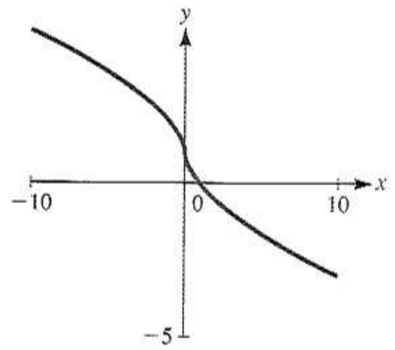


71.



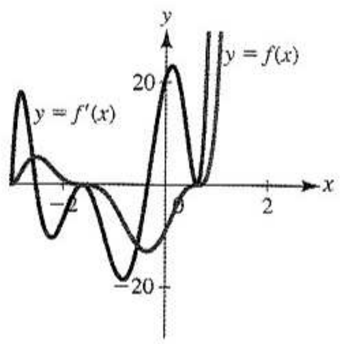
73. $a = 2; b = 3; c = -12; d = -12$

75.

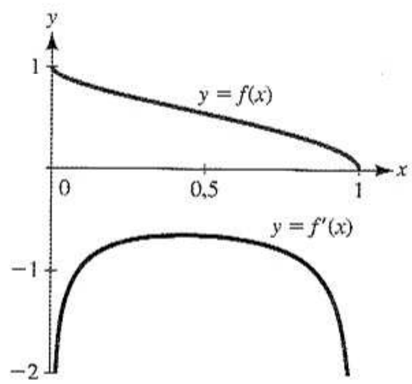


77. Pela regra do produto, $\frac{dy}{dx} = (x - p)(1) + (1)(x - q) = 2x - p - q$. Fazendo $\frac{dy}{dx} = 0$, obtemos $x = \frac{p+q}{2}$, o ponto médio das duas interseções com o eixo x.

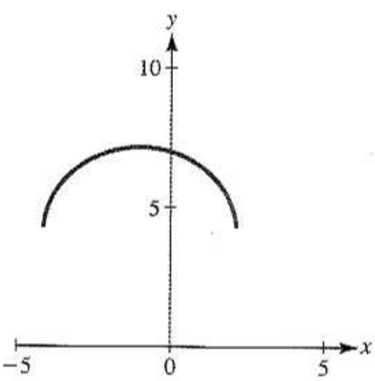
79. $f'(x) = 0$ para $x = -3$; $-2{,}529$; $-1{,}618$; $-0{,}346$; $0{,}618$



81. $f'(x)$ não se anula para nenhum valor de x.



83. A metade superior de uma circunferência.



CAPÍTULO 3 | Seção 2

1. $f''(x) > 0$ para $x > 2$; $f''(x) < 0$ para $x < 2$

3. $f''(x) > 0$ para $x < -1$ e $x > 1$; $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 1$

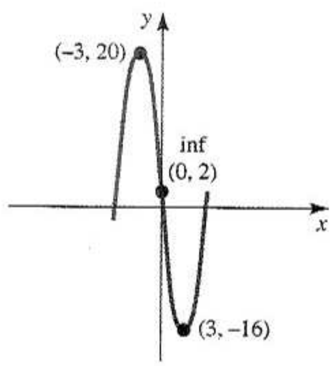
5. A concavidade é para cima para $x > -1$ e para baixo para $x < -1$; existe um ponto de inflexão em $(-1, 2)$

7. A concavidade é para cima para $x > -\frac{1}{3}$ e para baixo para $x < -\frac{1}{3}$; existe um ponto de inflexão em $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}\right)$

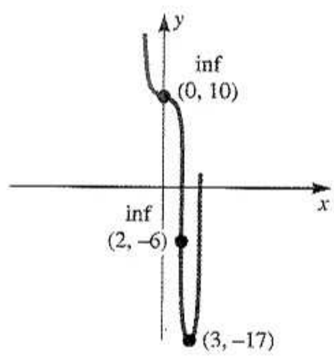
9. A concavidade é para cima para $t < 0$ e $t > 1$ e para baixo para $0 < t < 1$; existe um ponto de inflexão em $(1, 0)$

11. A concavidade é para cima para $x < 0$ e $x > 3$ e para baixo para $0 < x < 3$; existem pontos de inflexão em $(0, -5)$ e $(3, -65)$

13. A função é crescente para $x < -3$ e $x > 3$ e decrescente para $-3 < x < 3$. A concavidade é para cima para $x > 0$ e para baixo para $x < 0$. Existem um máximo em $(-3, 20)$, um mínimo em $(3, -16)$ e um ponto de inflexão em $(0, 2)$

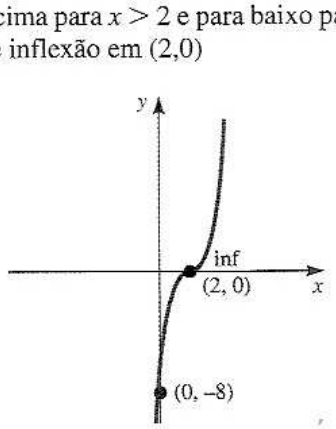


15. A função é crescente para $x > 3$ e decrescente para $x < 3$. A concavidade é para cima para $x < 0$ e $x > 2$ e para baixo para $0 < x < 2$. Existem um mínimo em $(3, -17)$ e pontos de inflexão em $(0,10)$ e $(2, -6)$

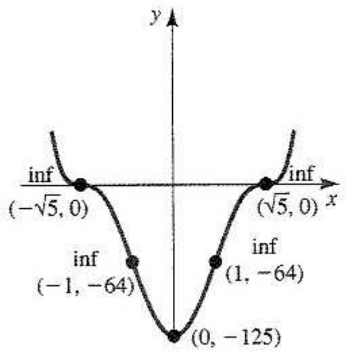


RESPOSTAS

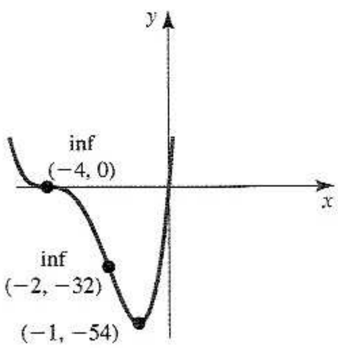
17. A função é crescente para qualquer valor de x. A concavidade é para cima para $x > 2$ e para baixo para $x < 2$. Existe um ponto de inflexão em (2,0)



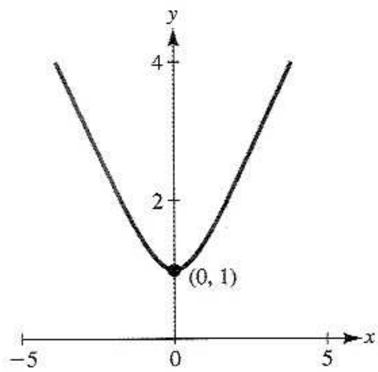
19. A função é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$. A concavidade é para cima para $x < -\sqrt{5}$, $-1 < x < 1$ e $x > \sqrt{5}$, e para baixo para $-\sqrt{5}, < -1$ e $1 < x < \sqrt{5}$. Existem um mínimo em $(0, -125)$ e pontos de inflexão em $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$, $(-1, -64)$ e $(1, -64)$



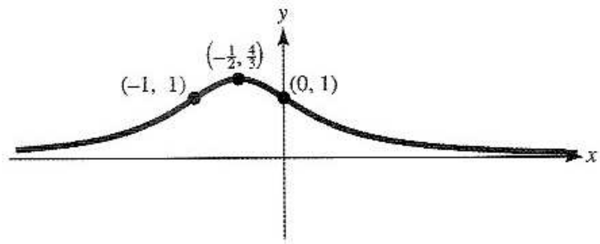
21. A função é crescente para $s > -1$ e decrescente para $s < -1$. A concavidade é para cima para $s < -4$ e $s > -2$ e para baixo para $-4 < s < -2$. Existem um mínimo em $(-1, -54)$ e pontos de inflexão em $(-4, 0)$ e $(-2, -32)$



23. A função é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$. A concavidade é para cima para qualquer valor de x. Existe um mínimo em (0, 1)



25. A função é crescente para $x < -\dfrac{1}{2}$ e decrescente para $x > -\dfrac{1}{2}$. A concavidade é para cima para $x < -1$ e $x > 0$ e para baixo para $-1 < x < 0$. Existem um máximo em $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}\right)$ e pontos de inflexão em $(-1, 1)$ e $(0, 1)$.



27. $f'(x) = 6(x + 1)$; máximo em $(-2, 5)$; mínimo em (0,1)

29. $f'(x) = 12(x^2 - 3)$; máximo em (0, 81); mínimos em (3, 0) e $(-3, 0)$

31. $f'(x) = \dfrac{36}{x^3}$; máximo em $(-3, -11)$; mínimo em (3, 13)

33. $f'(x) = 12x^2 - 60x + 50$; máximo em $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{625}{16}\right)$; mínimos em (0,0) e (5,0)

35. $f'(x) = \dfrac{4(t^2 - 1)}{(1 + t^2)^3}$; máximo em (0,2)

37. $f'(x) = \dfrac{24(x - 2)}{x^4}$; máximo em $(-4; -13{,}5)$. O teste não funciona para $x = 2$ [(existe um ponto de inflexão em (2, 0)].

39. A concavidade é para cima para $x < 0$, $0 < x < 1$ e $x > 3$ e para baixo em $1 < x < 3$. Existem pontos de inflexão em $x = 1$ e $x = 3$.

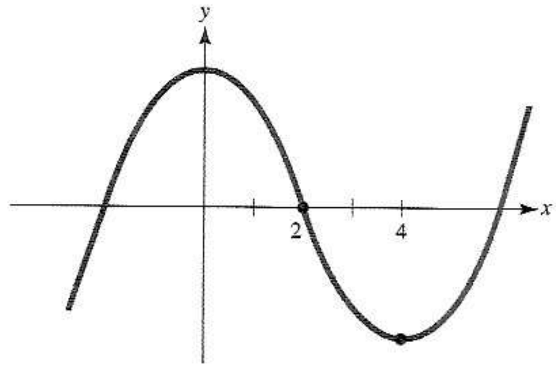
41. A concavidade é para cima para $x > 1$ e para baixo para $x < 1$. Existe um ponto de inflexão em $x = 1$.

43. **a.** A função é crescente para $x < 0$ e $x > 4$ e decrescente para $0 < x < 4$.

b. A concavidade é para cima para $x > 2$ e para baixo para $x < 2$.

c. Existem um mínimo relativo em $x = 4$, um máximo relativo em $x = 0$ e um ponto de inflexão em $x = 2$.

d.

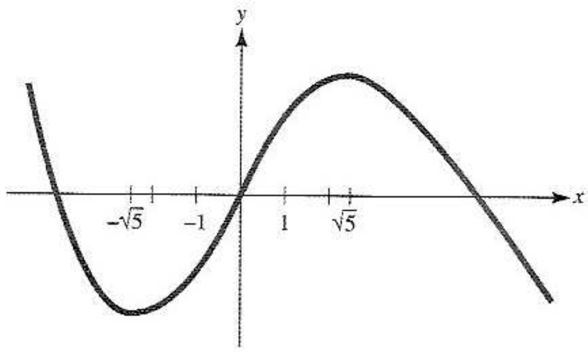


45. a. A função é crescente para $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$ e decrescente para $x > \sqrt{5}$ e $x < -\sqrt{5}$.

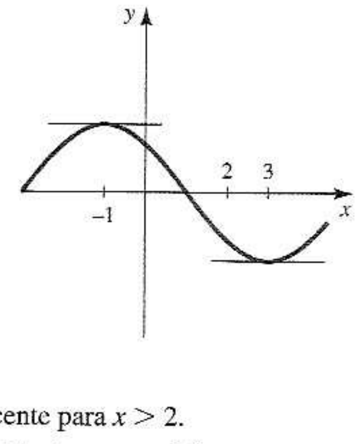
b. A concavidade é para cima para $x < 0$ e para baixo para $x > 0$.

c. Existem um máximo relativo para $x = \sqrt{5}$, um mínimo relativo em $x = -\sqrt{5}$ e um ponto de inflexão em $x = 0$.

d.



47. A figura mostra uma curva possível.



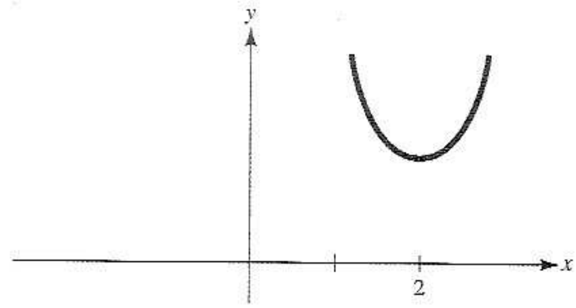
49. $f(x)$ é crescente para $x > 2$.

$f(x)$ é decrescente para $x < 2$.

A concavidade de $f(x)$ é para cima para qualquer valor de x.

$f(x)$ possui um mínimo relativo em $x = 2$.

$f(x)$ não possui pontos de inflexão.



51. $f(x)$ é crescente para $x > 2$.

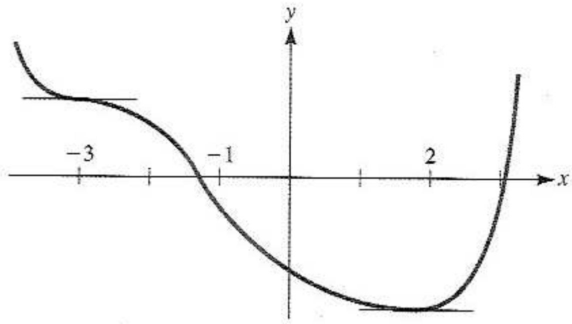
$f(x)$ é decrescente para $x < -3$ e $-3 < x < 2$.

A concavidade de $f(x)$ é para cima para $x < -3$ e $x > -1$.

A concavidade de $f(x)$ é para baixo para $-3 < x < -1$.

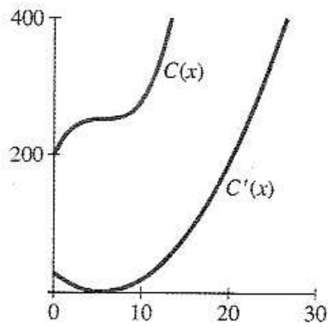
$f(x)$ possui um mínimo relativo em $x = 2$.

$f(x)$ possui pontos de inflexão em $x = -3$ e $x = -1$.



53. $C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$

a. $C'(x) = 0{,}9x^2 - 10x + 28$



b. $C''(x) = 0$ para $x = 5{,}56$. Este ponto corresponde a um mínimo na curva de $C'(x)$.

55. A produtividade é $Q'(t) = -3t^2 + 9t + 15$.

a. A produtividade é máxima para $t = 1{,}5$ (9 h 30 min).

b. A produtividade é mínima para $t = 4$ (meio-dia).

57. A taxa de crescimento é $P'(t) = -3t^2 + 18t + 48$.

a. A taxa é máxima para $t = 3$ anos.

b. A taxa é mínima para $t = 0$ ano.

c. A taxa de variação da taxa de crescimento é $P''(t) = -6t + 18$, que é máxima para $t = 0$ ano.

59. a. $N'(t) = \dfrac{60 - 5t^2}{(12 + t^2)^2}$;

$$N''(t) = \frac{10t^3 - 360t}{(12 + t^2)^3}$$

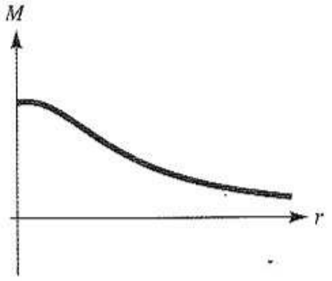
b. 3,5 semanas após o início do surto; 722 novos casos

c. 6 semanas após o início do surto; 62,5 novos casos

61. a. $M'(r) = \dfrac{0{,}02 - 0{,}018r - 0{,}00018r^2}{(1 + 0{,}009r^2)^2}$

$$M''(r) = \frac{-0{,}018 - 0{,}00108r + 0{,}000486r^2 + 0{,}00000324r^3}{(1 + 0{,}009r^2)^3}$$

b.



c. 7,10%

63. $\dfrac{100P'(t)}{P(t)} = A - BP(t)$; $P'(t) = \dfrac{P(t)[(A - BP(t)]}{100}$; $P''(t) = \dfrac{1}{100^2}$ $[P(t)(A - BP(t))(A - 2BP(t))]$; $P''(t) = 0$ para $P(t) = \dfrac{A}{B}$ ou $P(t) = \dfrac{A}{2B}$. Para $P(t) = \dfrac{A}{B}$, a população é máxima e a taxa de variação é nula $[P'(t) = 0)]$. Para $P(t) = \dfrac{A}{2B}$, a taxa de variação da população é máxima.

65. a. $R'(t) = A''(t) = \dfrac{d}{dt}[(k\sqrt{A(t)}\,(M - A(t))]$

$$= k\left(\frac{1}{2}\right)\frac{A'(t)}{\sqrt{A(t)}}[M - A(t)] + k\sqrt{A(t)}(-A'(t))$$

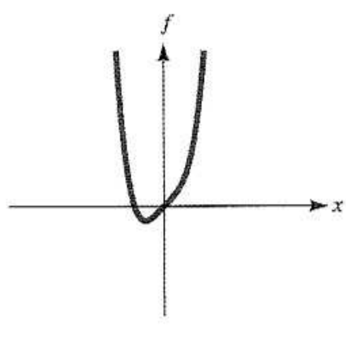
$$= \frac{kA'(t)}{2\sqrt{A(t)}}[M - 3A(t)]$$

$$= 0 \text{ para } A = \frac{M}{3}.$$

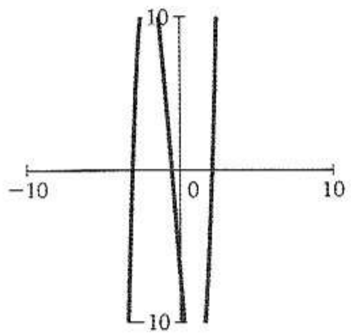
b. Máxima

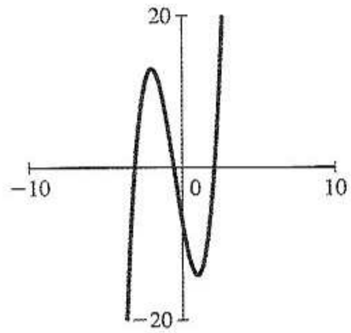
c. A curva de $A(t)$ possui um ponto de inflexão no qual $A(t) = \dfrac{M}{3}$.

67. $f'(x) = 4x^3 + 1$; $f''(x) = 12x^2$. Embora $f''(0) = 0$, $f'(x) \neq 0$ e $f''(x)$ não muda de sinal em $x = 0$ e, portanto, a curva de f não possui nem um extremo relativo nem um ponto de inflexão em $x = 0$.



69. a.





b.

x	−4	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−39	13	6	−7	−14	−3
$f'(x)$	60	0	−12	−12	0	24
$f''(x)$	−42	−18	−6	6	18	30

c. $(-3{,}08;0)$, $(-0{,}54;0)$, $(2{,}12;0)$; $(0, -7)$

d. Máximo relativo em $(-2{,}13)$; mínimo relativo em $(1, -14)$

e. $x < -2$ e $x > 1$

f. $-2 < x < 1$

g. $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

h. $x > -\dfrac{1}{2}$

i. $x < -\dfrac{1}{2}$

j. As respostas podem variar.

k. 13; −39

CAPÍTULO 3 | Seção 3

1. Assíntota vertical, $x = 0$; assíntota horizontal, $y = 0$

3. Não há assíntotas verticais; assíntota horizontal, $y = 0$

5. Assíntotas verticais, $x = -2$ e $x = 2$; assíntotas horizontais, $y = 2$ e $y = 0$ (eixo x)

7. Assíntota vertical, $x = 2$; assíntota horizontal, $y = 0$

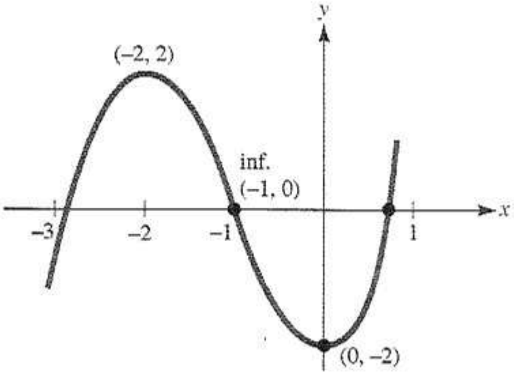
9. Assíntota vertical, $x = -2$; assíntota horizontal, $y = 3$

11. Não há assíntotas verticais; assíntota horizontal, $y = 1$

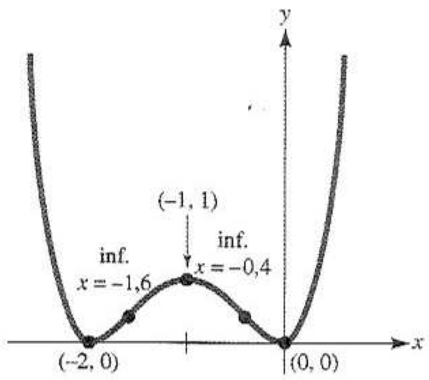
13. Assíntotas verticais, $t = 2$ e $t = 3$; assíntota horizontal, $y = 1$

15. Assíntotas verticais, $x = 0$, $x = 1$; assíntota horizontal, $y = 0$

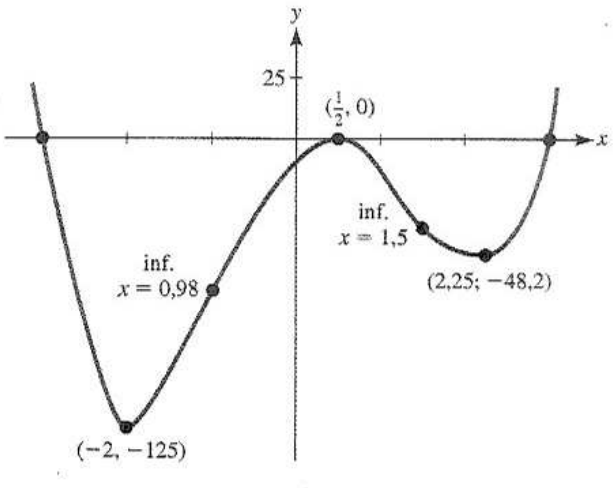
17.



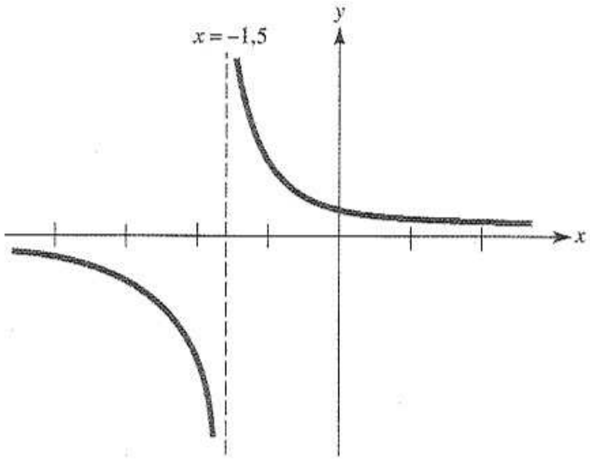
19.



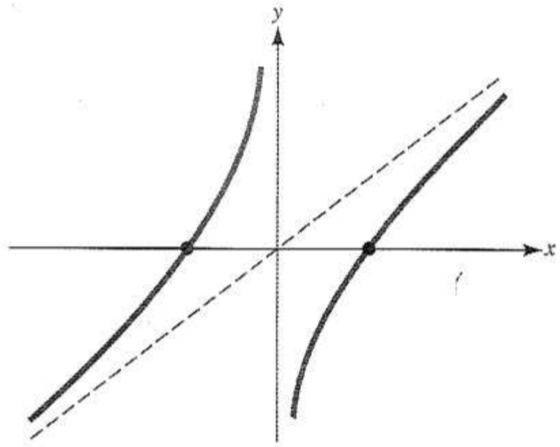
21.



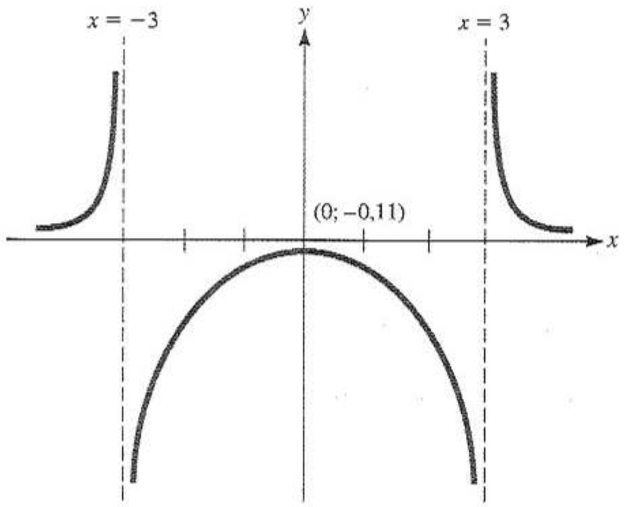
23.



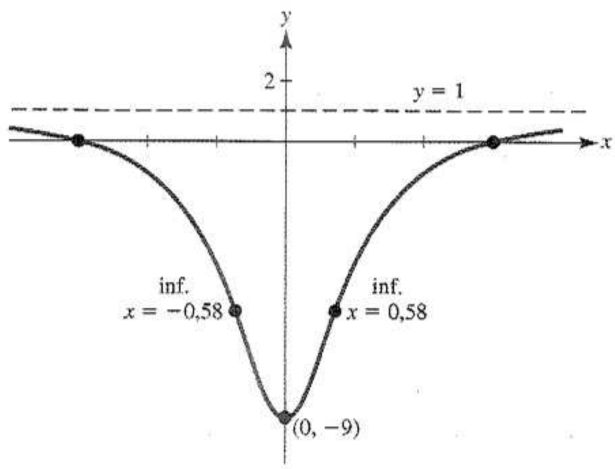
25.



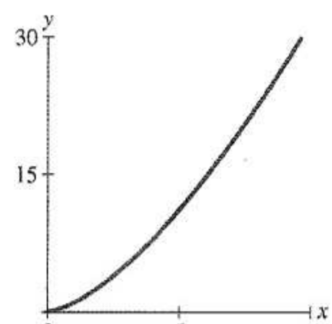
27.



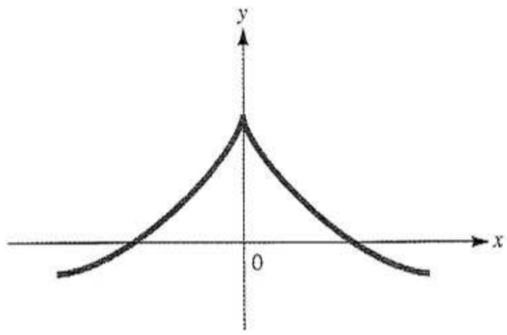
29.



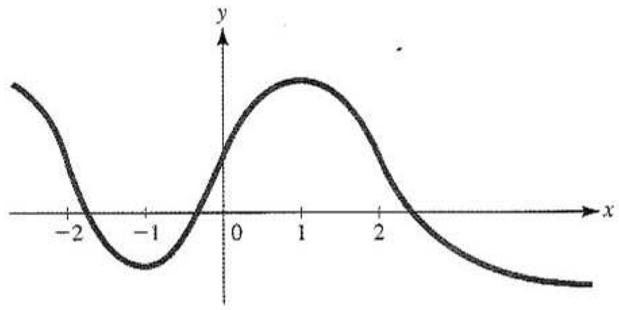
31.



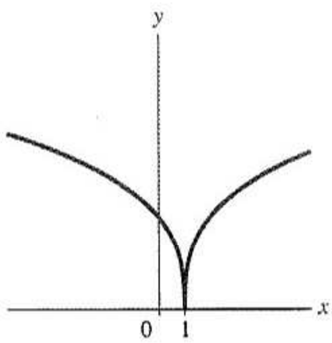
33. A figura mostra uma curva possível.



35. A figura mostra uma curva possível.



37. A figura mostra uma curva possível.



39. **a.** $f(x)$ é crescente $[f'(x) > 0)]$ para $0 < x < 2$ e para $x > 2$ e decrescente $[f'(x) < 0)]$ para $x < 0$.

b. Mínimo relativo em $x = 0$

c. $f''(x) = x^2(x - 2)(5x - 6)$; a concavidade de $f(x)$ é para cima para $x < 0$, $0 < x < \frac{6}{5}$ e $x > 2$ e para baixo para $\frac{6}{5} < x < 2$.

d. $x = \frac{6}{5}$ e $x = 2$

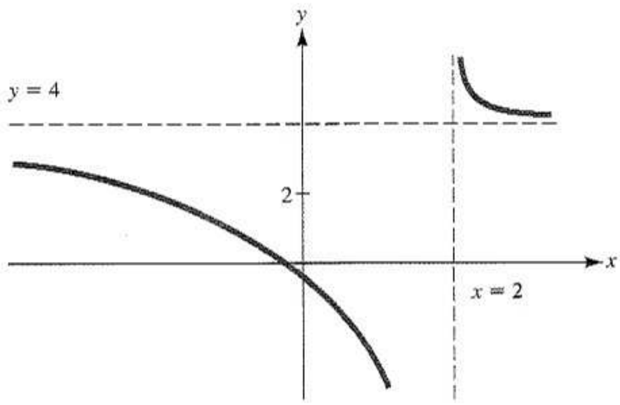
41. **a.** $f(x)$ é crescente $[f'(x) > 0]$ para $-3 < x < 2$ e $x > 2$ e decrescente $[f'(x) < 0]$ para $x < -3$

b. Mínimo relativo em $x = -3$

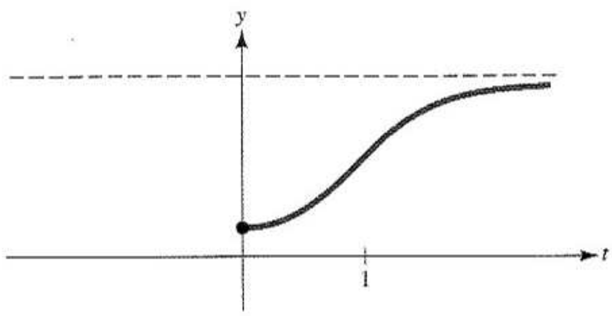
c. $f''(x) = \dfrac{-x-8}{(x-2)^3}$; a concavidade de $f(x)$ é para cima para $-8 < x < 2$ e para baixo para $x < -8$ e $x > 2$.

d. $x = -8$

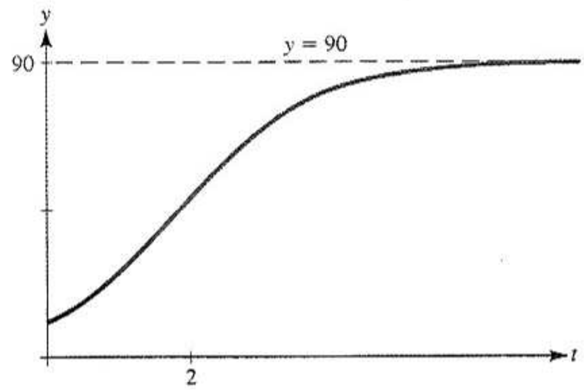
43. $A = -10$; $B = -\frac{5}{2}$



45. A figura mostra uma curva possível.



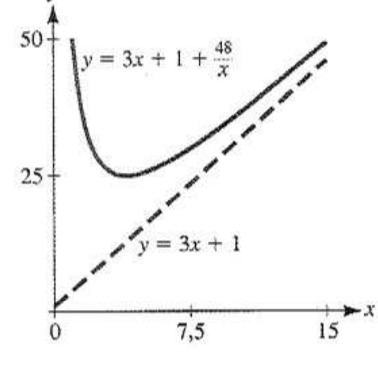
47.



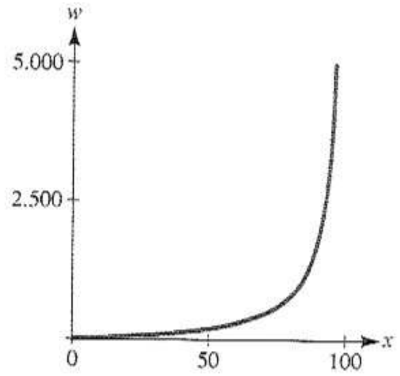
49. **a.** Assíntota vertical, $x = 0$; não existem assíntotas horizontais

b. A curva de custo médio tende para a reta $y = 3x + 1$.

c.

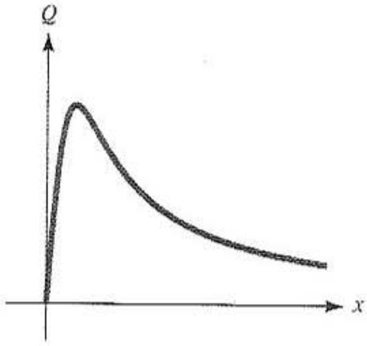


51. **a.**



b. 11,8%

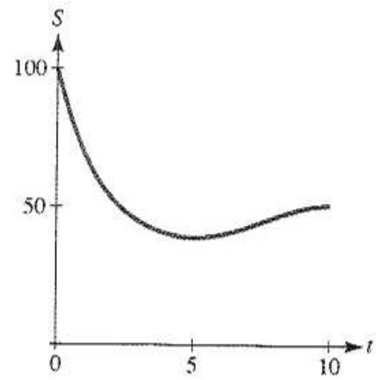
53. **a.**



b. R$ 5.196,00; 674 unidades

c. R$ 9.000,00

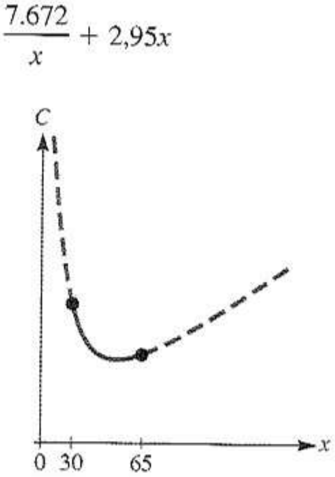
55. **a.**



b. $t = 5$; 41,2%

c. Positiva; diminuindo

57. **a.** $C(x) = \dfrac{7.672}{x} + 2{,}95x$



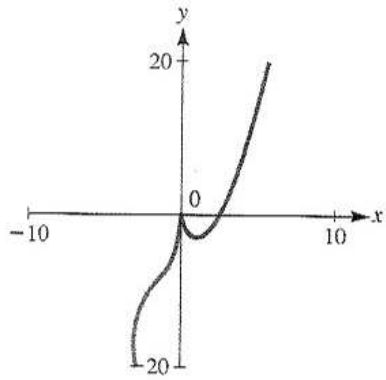
b. 51 km/h; R$ 300,58

59. **a.** $f'(x) = \dfrac{10(x-1)}{3x^{1/3}}$; $f(x)$ é crescente para $x < 0$ e $x > 1$ e decrescente para $0 < x < 1$. Existem um mínimo relativo em $(1, -3)$ e um máximo relativo em $(0, 0)$.

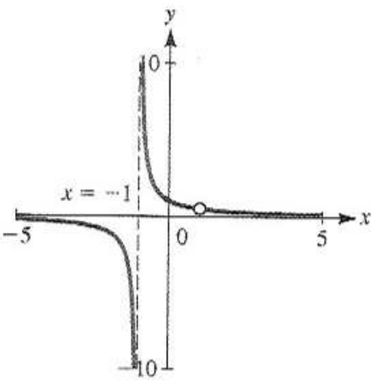
b. $f''(x) = \dfrac{10(2x+1)}{9x^{4/3}}$; a concavidade de $f(x)$ é para cima para $x > -\dfrac{1}{2}$ e para baixo para $x < -\dfrac{1}{2}$. Existe um ponto de inflexão em $\left(-\dfrac{1}{2}, -3\sqrt[3]{2}\right)$.

c. $(0,0)$ e $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$. Não há assíntotas.

d.

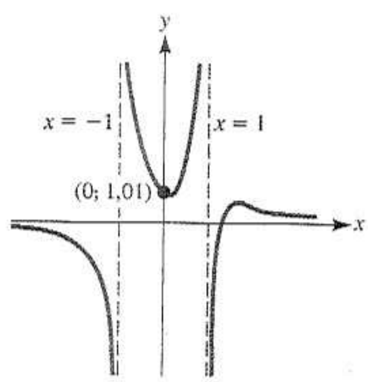


61. **a.**



A curva possui um buraco em $x = 1$.

b.



A curva possui uma assíntota vertical em $x = 1$.

CAPÍTULO 3 | Seção 4

1. Máximo absoluto em $(1, 10)$ e mínimo absoluto em $(-2, 1)$

3. Máximo absoluto em $(0, 2)$ e mínimo absoluto em $\left(2, -\dfrac{40}{3}\right)$

5. Máximo absoluto em $(-1, 2)$ e mínimo absoluto em $(-2, -56)$

7. Máximo absoluto em $(-3; 3; 125)$ e mínimo absoluto em $(0, -1024)$

9. Máximo absoluto em $\left(3, \frac{10}{3}\right)$ e mínimo absoluto em $(1, 2)$

11. Mínimo absoluto em $(1, 2)$; não há máximo absoluto.

13. Não há máximo absoluto nem mínimo absoluto.

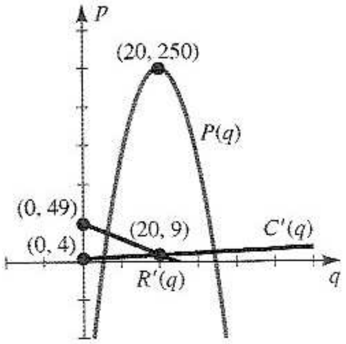
15. Máximo absoluto em $(0, 1)$; não há mínimo absoluto

17. a. $R(q) = 49q - q^2$; $R'(q) = 49 - 2q$;

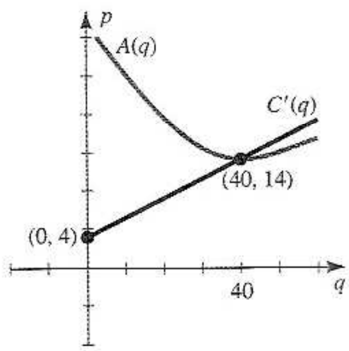
$C'(q) = \frac{1}{4}q + 4$;

$P(q) = -\frac{9}{8}q^2 + 45q - 200$;

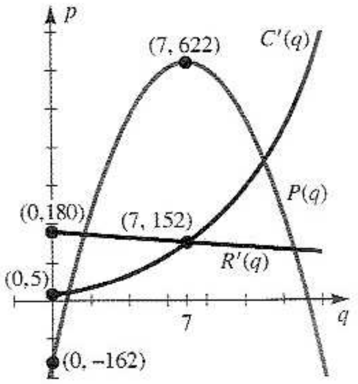
$P(q)$ é máximo para $q = 20$



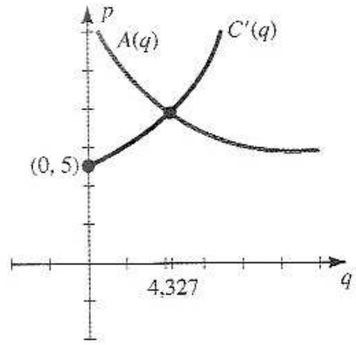
b. $A(q) = \frac{1}{8}q + 4 + \frac{200}{q}$; $A(q)$ é mínimo para $q = 40$.



19. a. $R(q) = 180q - 2q^2$; $R'(q) = 180 - 4q$; $C'(q) = 3q^2 + 5$; $P(q) = -q^3 - 2q^2 + 175q - 162$;
$P(q)$ é máximo para $q = 7$.

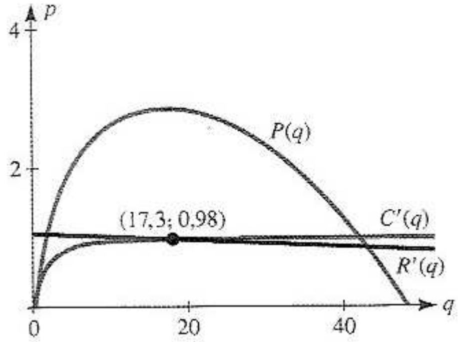


b. $A(q) = q^2 + 5 + \frac{162}{q}$; $A(q)$ é máximo para $q = 4{,}327$.

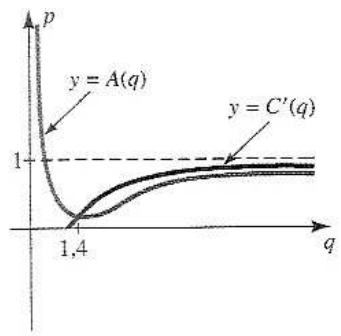


21. a. $R(q) = 1{,}0625q - 0{,}0025q^2$;
$R'(q) = 1{,}0625 - 0{,}005q$;
$C'(q) = \dfrac{q^2 + 6q - 1}{(q + 3)^2}$;
$P(q) = \dfrac{-0{,}0025q^3 + 0{,}055q^2 + 3{,}1875q - 1}{q + 3}$;

$P(q)$ é máximo para $q = 17{,}3$.



b. $A(q) = \dfrac{q^2 + 1}{q(q + 3)}$ é mínimo para $q = \dfrac{1 + \sqrt{10}}{3} \approx 1{,}3874$.



23. $E(p) = \dfrac{-1{,}3p}{-1{,}3p + 10}$; $E(4) = -\dfrac{13}{12}$, elástica

25. $E(p) = \dfrac{2p^2}{p^2 - 200}$; $E(10) = -2$, elástica

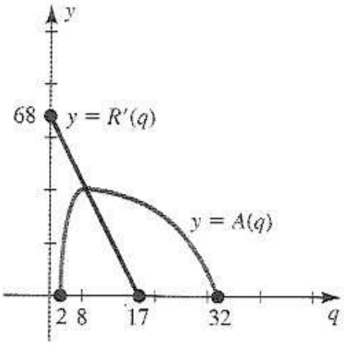
27. $E(p) = \dfrac{30}{p - 30}$; $E(10) = -\dfrac{3}{2}$, elástica

29. $R'(q) = -4q + 68$;
$A(q) = \dfrac{R(q)}{q} = -2q + 68 - \dfrac{128}{q}$

a. $R'(q) = A(q)$ para $q = 8$

b. A é crescente ($A' > 0$) para $0 < q < 8$ e decrescente ($A' < 0$) para $q > 8$

c.



31. A inclinação $f'(x) = 4x - x^2$ é máxima para $x = -1$. O ponto em que a inclinação é máxima é $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$. A inclinação neste ponto é -5.

33. a. $x = 4$ (1996). O número de sócios em 1996 foi de 46.400.

b. $x = 0$ (1992). O número de sócios em 1992 foi 0.

35. $p = \frac{n}{m}$

37. A velocidade do sangue é máxima em $r = 0$, ou seja, no eixo central.

39. a. $E = \frac{-3p}{2q + 3p}$

b. Para $p = 3$, $q = 2$, $E = -\frac{9}{13}$ e a demanda é inelástica.

41. a. $225 \leq p \leq 250$

b. $E(p) = \frac{p}{p - 250}$

A demanda é elástica para $p > 125$, inelástica para $p < 125$ e de elasticidade unitária para $p = 125$.

c. A receita total é crescente para $p < 125$ e decrescente para $p > 125$.

d. Se o número de reproduções fosse ilimitado, $p = 125$ maximizaria a receita total; com o número de reproduções limitado a 50, $p = 225$ maximiza a receita total.

43. a. $v = 39$ km/h

b. As respostas podem variar.

45. a. $D = \frac{C}{2}$; $\frac{C^2}{4}$

b. $\frac{C^3}{12}$

47. $R = r$

49. a. $R(x) = \frac{AB + A(1 - m)x^m}{(B + x^m)^2}; x = \left(\frac{B}{m - 1}\right)^{1/m}$

b. $R'(x) = \frac{-Amx^{m-1}[(1 - m)x^m + (1 + m)B]}{(B + x^m)^3};$

$x = 0$ e $x = \left[\frac{B(m + 1)}{m - 1}\right]^{1/m}$

c. Máximo relativo, de acordo com o teste da derivada primeira.

51. a. $F(r) = a\pi r^4(r_0 - r)$

b. $r = \frac{4}{5}r_0$

53. a. $E(p) = \frac{ap}{ap - b}$

b. $E(p) = -1 \Rightarrow ap = (-1)(ap - b)$

$\Rightarrow 2ap = b \Rightarrow p = \frac{b}{2a}$

c. Elástica para $\frac{b}{2a} < p \leq \frac{b}{a}$; inelástica para $0 \leq p < \frac{b}{2a}$

55. $E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{\left(\frac{a}{p^m}\right)}\left(\frac{-ma}{p^{m+1}}\right) =$

$\left(\frac{p^{m+1}}{a}\right)\left(\frac{-ma}{p^{m+1}}\right) = -m$

Se $m = 1$, a demanda é de elasticidade unitária. Se $m > 1$, a demanda é elástica; se $0 < m < 1$, a demanda é inelástica.

CAPÍTULO 3 | Seção 5

1. $\frac{1}{2}$

3. $x = 25$, $y = 25$

5. R\$ 40,83 $\approx$ R\$ 41,00

7. 80 árvores

9. O parque deve ser um quadrado com $S = 60\ m$ de lado.

11. Seja x o comprimento do retângulo, y a largura e p o perímetro. Nesse caso, $p = 2(x + y)$ e $y = \frac{1}{2}(p - 2x)$. A área é

$A = xy = x\left[\frac{1}{2}(p - 2x)\right] = -x^2 + \frac{1}{2}px$

Derivando, obtemos $A' = -2x + \frac{1}{2}p$, que se anula para $x = \frac{p}{4}$. Como $A'' = -2 < 0$, a área é máxima para $x = \frac{p}{4}$ e $y = \frac{1}{2}\left[p - 2\left(\frac{p}{4}\right)\right] = \frac{p}{4}$, o que significa que $x = y = \frac{p}{4}$ e, portanto, a figura é um quadrado.

13. 6 por 2,5

15. 2 por 2 por $\frac{4}{3}$ metros

17. 2 horas após o instante inicial; para $x \geq 0$, o mínimo do quadrado de x coincide com o mínimo de x.

19. $r = 3{,}74$ cm; $h = 7{,}51$ cm; ao fato de que a lata não é perfeitamente cilíndrica.

21. O percurso mais econômico é estender o cabo 2.000 metros no fundo do rio e 400 metros em terra.

23. 27π centímetros cúbicos

25. $r = \frac{2}{3}h$

27. **a.** 10 máquinas
b. R$ 400,00
c. R$ 200,00

29. **a.** 200 vidros
b. de três em três meses

31. **a.** $C(N) = 8N + \frac{200(N+1)}{N}$
b. 5 retiradas

33. daqui a 5 anos

35. $x = 18$; $y = 36$; $V = 11.664$ polegadas cúbicas

37. $C(x) = 1.200 + 1{,}20x + \frac{100}{x^2}$; $x = 6$

39. O ponto P deve estar a $\frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}9$ km do ponto A.

41. $S = Kwh^3 = Kh^3\sqrt{225 - h^2}$;

$S'(h) = \frac{675h^2 - 4h^4}{\sqrt{225 - h^2}} = 0$ para $h \approx 13$ cm;

$w \approx 7{,}5$ cm.

43. A 4,5 km da fábrica A

45. Suponha que os custos de preparação e operação sejam aN e $\frac{b}{N}$, respectivamente, onde a e b são constantes positivas. Nesse caso, o custo total é $C = aN + \frac{b}{N}$. O custo mínimo é aquele para o qual

$$C' = a - \frac{b}{N^2} = 0$$

$$aN = \frac{b}{N}$$

ou seja, aquele para o qual o custo de preparação aN é igual ao custo de operação $\frac{b}{N}$.

47. João está certo; no Exemplo 3.5.5, substitua 3.000 por qualquer distância fixa $D \geq 1.200$. O resultado será o mesmo, já que D não contribui para a derivada $C'(x)$.

49. **a.** Seja x o número de máquinas e t o número de horas necessárias para produzir Q unidades. O custo de preparação é $C_s = xs$ e o custo de operação (para as x máquinas) é $C_o = pt$. Como cada máquina é capaz de produzir n unidades por hora, $Q = nxt$ e, portanto, $t = \frac{Q}{nx}$. O custo total é

$$C = C_s + C_o = xs + \frac{pQ}{nx}$$

e, portanto,

$$C' = s - \frac{pQ}{nx^2} = 0$$

o que nos dá $x = \sqrt{\frac{pQ}{ns}}$. Como $C'' > 0$, este valor de x corresponde a um mínimo.

b. $C_s = xs = \sqrt{\frac{pQs}{n}}$, $C_o = \frac{pQ}{nx} = \sqrt{\frac{pQs}{n}}$

51. **a.** $P(x) = x\left(15 - \frac{3}{8}x\right) - \frac{7}{8}x^2 - 5x - 100 - tx$;

Assim, $P'(x) = -\frac{5}{2}x + 10$, que se anula para $x = \frac{2}{5}(10 - t)$

b. $t = 5$
c. O monopolista absorve R$ 4,25 por imposto de R$ 5,00 por unidade e repassa R$ 0,75 para o consumidor.
d. As respostas podem variar.

CAPÍTULO 3 | Verificação

1. (a) é a curva de $f(x)$ e (b) é a curva de $f'(x)$. As justificativas podem variar. Uma razão é que os pontos em que a curva (b) intercepta o eixo x correspondem aos extremos de (a).

2. **a.** Crescente para $x < 0$ e $0 < x < 3$; decrescente para $x > 3$

Número Crítico	Classificação
0	Nenhum dos dois
3	Máximo relativo

b. Crescente para $t < 1$ e $t > 2$; decrescente para $1 < t < 2$

Número Crítico	Classificação
1	Mínimo relativo
2	Máximo relativo

c. Crescente para $-3 < t < 3$; decrescente para $t < -3$ e $t > 3$

Número Crítico	Classificação
−3	Mínimo relativo
3	Máximo relativo

d. Crescente para $x < -1$ e $x > 9$; decrescente para $-1 < x < 9$

Número Crítico	Classificação
−1	Mínimo relativo
9	Máximo relativo

3. **a.** Concavidade para cima para $x > 2$; concavidade para baixo para $x < 0$ e $0 < x < 2$; ponto de inflexão em $x = 2$
b. Concavidade para cima para $-5 < x < 0$ e $x > 1$; concavidade para baixo para $x < -5$ e $0 < x < 1$; pontos de inflexão em $x = -5$, $x = 0$ e $x = 1$
c. Concavidade para cima para $t > 1$; concavidade para baixo para $t < 1$; não há pontos de inflexão
d. Concavidade para cima para $-1 < t < 1$; concavidade para baixo para $t < -1$ e $t > 1$; pontos de inflexão em $t = -1$ e $t = 1$

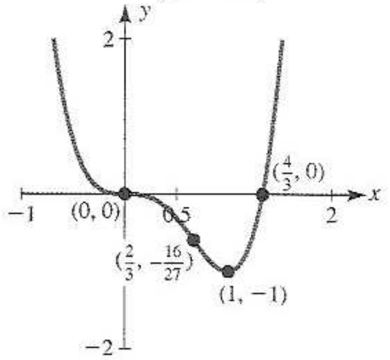
4. a. Assíntota vertical, $x = -3$; assíntota horizontal, $y = 2$

b. Assíntotas verticais, $x = -1$ e $x = 1$; assíntota horizontal, $y = 0$

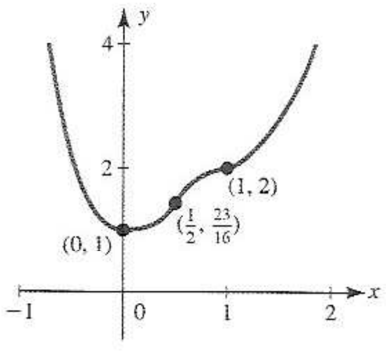
c. Assíntotas verticais, $x = -\frac{3}{2}$, $x = 1$; assíntota horizontal, $y = \frac{1}{2}$

d. Assíntota vertical, $x = 0$; assíntota horizontal, $y = 0$

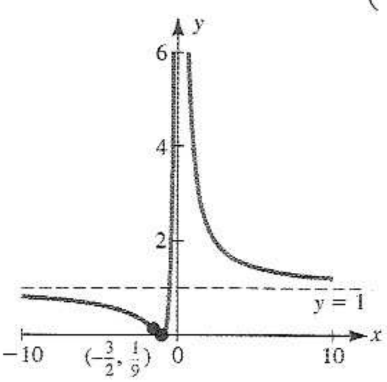
5. a. Não há assíntotas; interseção com o eixo x em $(0, 0)$ e $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$; interseção com o eixo y em $(0, 0)$; pontos de inflexão em $(0, 0)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$



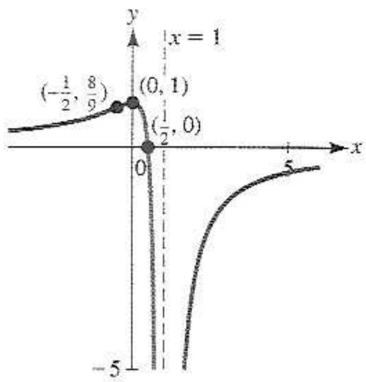
b. Não há assíntotas; interseção com o eixo y em $(0, 1)$; mínimo relativo em $(0, 1)$; pontos de inflexão em $(1, 2)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{23}{16}\right)$



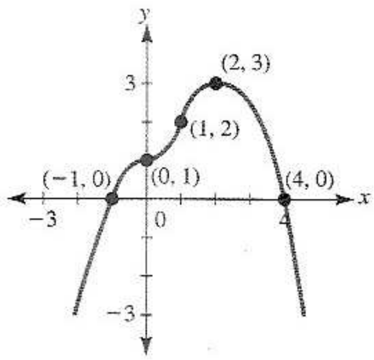
c. Assíntota vertical, $x = 0$; assíntota horizontal, $y = 1$; ponto de interseção com o eixo x, $(-1, 0)$; mínimo relativo em $(-1, 0)$; ponto de inflexão em $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{9}\right)$



d. Assíntota vertical, $x = 1$; assíntota horizontal, $y = 0$; ponto de interseção com o eixo x, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; ponto de interseção com o eixo y, $(0, 1)$; máximo relativo em $(0, 1)$; ponto de inflexão em $\left(-\frac{1}{2}, \frac{8}{9}\right)$



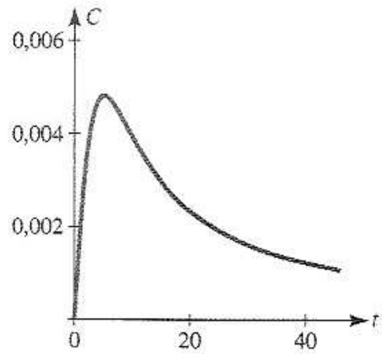
6. A figura mostra uma curva possível.



7. 8 h 20 min

8. R$ 70,00

9. a.



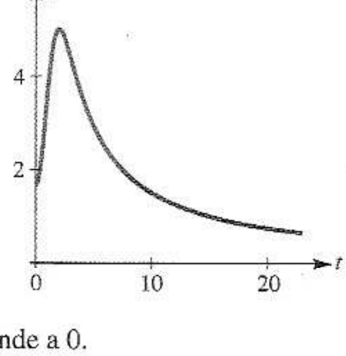
b. $t = 9$

c. A concentração tende a 0.

10. a. 1,667 milhão

b. $t = 2$ h; 5 milhões

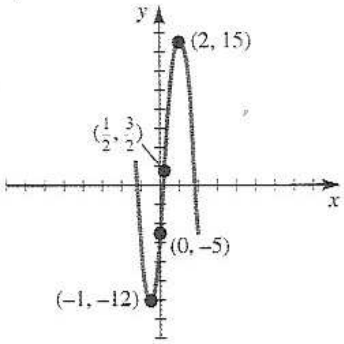
c.



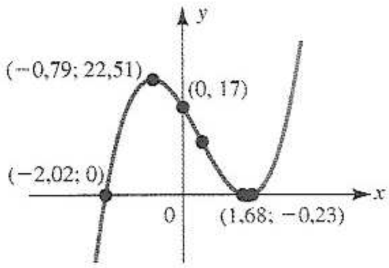
A população tende a 0.

CAPÍTULO 3 | Revisão

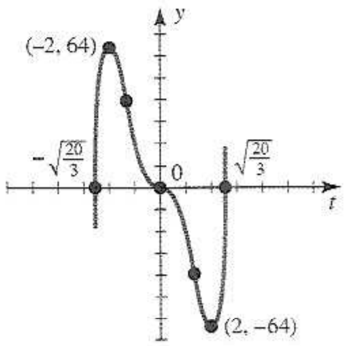
1. $f(x)$ é crescente para $-1 < x < 2$ e decrescente para $x < -1$ e $x > 2$. A concavidade é para cima para $x < \frac{1}{2}$ e para baixo para $x > \frac{1}{2}$. Existem um máximo relativo em (2, 15), um mínimo relativo em $(-1, -12)$ e um ponto de inflexão em $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



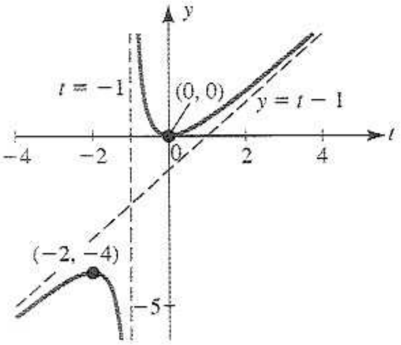
3. $f(x)$ é crescente para $x < -0{,}79$ e $x > 1{,}68$ e decrescente para $-0{,}79 < x < 1{,}68$. A concavidade é para baixo para $x < \frac{4}{9}$ e para cima para $x > \frac{4}{9}$. Existem um máximo relativo em $(-0{,}79; 22, 51)$, um mínimo relativo em $(1{,}68; -0{,}23)$ e um ponto de inflexão em $(0{,}44; 11{,}14)$.



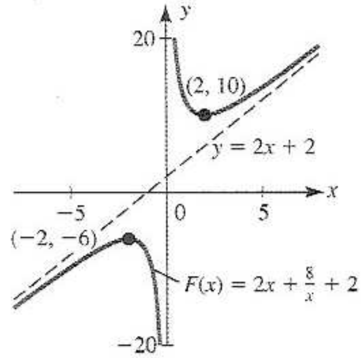
5. $f(t)$ é crescente para $t < -2$ e $t > 2$ e decrescente para $-2 < t < 2$. A concavidade é para cima para $-\sqrt{2} < t < 0$ e para $t > \sqrt{2}$ e para baixo para $t < -\sqrt{2}$ e $0 < t < \sqrt{2}$. Existe um máximo relativo em $(-2, 64)$, um mínimo relativo em $(2, 64)$ e pontos de inflexão em $(-\sqrt{2}; 39{,}6)$ e $(\sqrt{2}; -39{,}6)$.



7. $g(t)$ é crescente para $t < -2$ e $t > 0$ e decrescente para $-2 < t < -1$ e $-1 < t < 0$. A concavidade é para cima para $t > -1$ e para baixo para $t < -1$. Existe um máximo relativo em $(-2, -4)$ e um mínimo relativo em (0, 0); não há pontos de inflexão.



9. $F(t)$ é crescente para $x < -2$ e para $x > 2$ e decrescente para $-2 < x < 0$ e para $0 < x < 2$. A concavidade é para cima para $x > 0$ e para baixo para $x < 0$. Existe um máximo relativo em $(-2, -6)$ e um mínimo relativo em (2, 10); não existem pontos de inflexão.



11. (b) é a curva de $f(x)$ e (a) é a curva de $f'(x)$. As justificativas podem variar. Uma razão é que a curva (b) é sempre crescente e a curva (a) é sempre positiva.

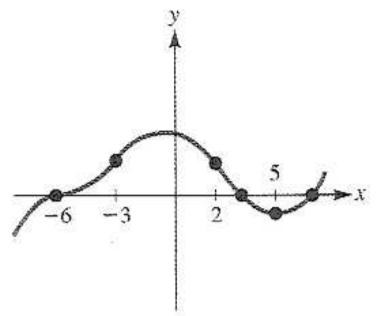
13.

Número Crítico	Classificação
−1	Mínimo relativo
0	Máximo relativo
3/2	Nenhum dos dois
7	Mínimo relativo

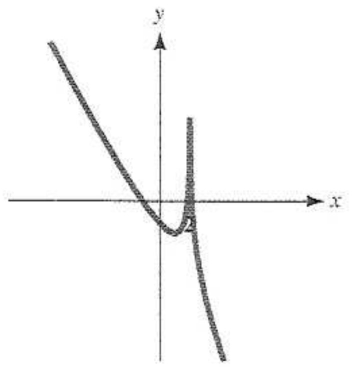
15.

Número Crítico	Classificação
0	Mínimo relativo
2	Nenhum dos dois

17. A figura mostra uma curva possível.



19. A figura mostra uma curva possível.



21. Máximo relativo em (2, 15); mínimo relativo em (−1, −12)

23. Máximo relativo em (−2, −4); mínimo relativo em (0, 0)

25. Máximo absoluto de 40 em $x = -3$; mínimo absoluto de −12 em $x = -1$

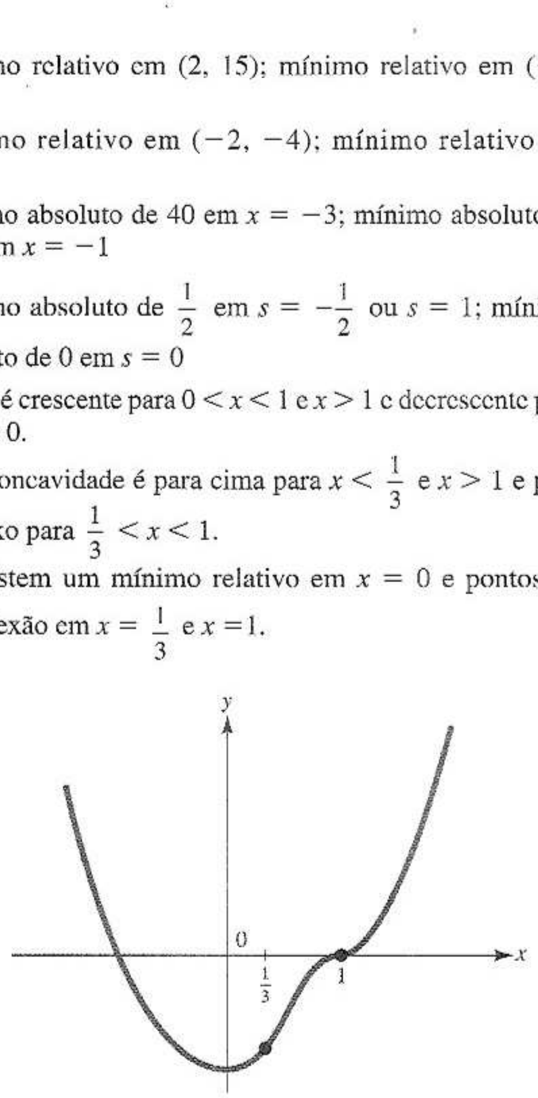
27. Máximo absoluto de $\frac{1}{2}$ em $s = -\frac{1}{2}$ ou $s = 1$; mínimo absoluto de 0 em $s = 0$

29. a. $f(x)$ é crescente para $0 < x < 1$ e $x > 1$ e decrescente para $x < 0$.

b. A concavidade é para cima para $x < \frac{1}{3}$ e $x > 1$ e para baixo para $\frac{1}{3} < x < 1$.

c. Existem um mínimo relativo em $x = 0$ e pontos de inflexão em $x = \frac{1}{3}$ e $x = 1$.

d.



31. R\$ 12,50

33. $R = kN(P - N)$ e, portanto, $R' = k(P - 2N)$, que se anula para $N = \frac{P}{2}$. Como $R''\left(\frac{P}{2}\right) = -2k < 0$, existe um máximo em $N = \frac{P}{2}$.

35. $r = \frac{2}{3}h$

37. $p = 65/8 \approx$ R\$ 8,12 ou R\$ 8,13

39. 17 andares

41. O homem deve remar diretamente para a cidade.

43. 12 máquinas

45. a. $E = \dfrac{-2p^2}{100 - p^2}$

b. Para $p = 6$, $E = -\frac{9}{8}$ e, portanto, $|E| = \frac{9}{8}$. Como $|E| > 1$, a demanda é elástica (ou seja, quando o preço aumenta, a receita diminui). É aconselhável reduzir o preço.

c. R\$ 5,77

47. a. $E(p) = \dfrac{1{,}4p^2}{0{,}7p^2 - 300}$

b. $E(8) = -0{,}351$; a empresa deve aumentar o preço.

49. Retângulo: 39 cm por 42 cm; lado do triângulo: 39 cm

51. 400 Lalás e 700 Lilis

53. 4.000 mapas por lote

55. *Sugestão*: Para uma remessa de x unidades, $C = k_1x + \frac{k_2}{x}$.

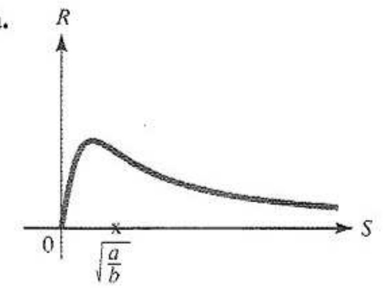
57. a. Mínimo relativo em $x = \frac{1}{c}$

b. Máximo de $\frac{\pi}{3}(5 - 3\sqrt{2})$; mínimo de $\frac{\pi}{6}$

c. Máximo de $\frac{\pi\sqrt{3}}{16}$; mínimo de $\frac{\pi\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{2})^2}$

d. para $\lim_{x \to \infty} f(x) = Kc^2$; $r >> R$, a fração de empacotamento depende apenas da geometria da rede cristalina.

59. a.



A curva parece ter um máximo aboluto $\left(\text{em } x = \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$, um mínimo absoluto (em $x = 0$) e um ponto de inflexão. A taxa de aumento da concentração de rejeitos parece tender a 0 quando S aumenta indefinidamente.

61. a. $E_1(p) = 0{,}287$; 0,574%; 1,435%

b. $E_2(p) = 0{,}349$; 0,698%; 1,745%

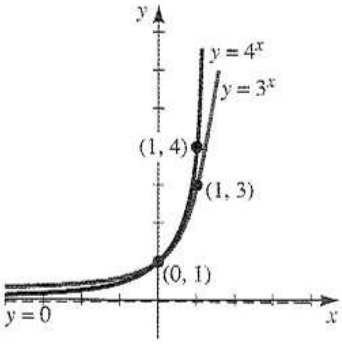
c. 0,2917; 1,49%

d. 147.000 dólares

CAPÍTULO 4 | Seção 1

1. $e^2 \approx 7{,}389$, $e^{-2} \approx 0{,}135$, $e^{0{,}05} \approx 1{,}051$, $e^{-0{,}05} \approx 0{,}951$, $e^0 = 1$, $e \approx 2{,}718$, $\sqrt{e} \approx 1{,}649$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}607$

3.



5. **a.** 9
b. $\frac{1}{27}$

7. **a.** 12
b. $\frac{189}{1.331}\sqrt{7}$

9. **a.** 3
b. 4

11. **a.** 243
b. $e^{14/3}$

13. **a.** $9x^4$
b. $2x^{2/3}y$

15. **a.** $\frac{1}{x^{1/3}y^{1/2}}$
b. $x^{1,1}y^2$

17. **a.** $\frac{1}{t}$
b. t

19. $\frac{3}{2}$

21. 1

23. 1

25. $b = 2$, $C = 3$

27. **a.** R$ 1.967,15
b. R$ 2.001,60
c. R$ 2.009,66
d. R$ 2.013,75

29. R$ 3.534,12

31. **a.** R$ 6.361,42
b. R$ 6.342,19

33. **a.** 50.000.000
b. 91.105.940

35. 400

37. 320

39. O montante será quatro vezes maior que o investimento original.

41. 13.570 bactérias

43. 20.480 bactérias

45. 4.000

47. **a.** 12.000 habitantes por quilômetro quadrado
b. 5.959 habitantes por quilômetro quadrado

49. 204,8 gramas

51. **a.** 0,5488
b. 0,1812
c. 0,1215

53. $\frac{1}{\sqrt[3]{10}} I_0 \approx 0{,}46 I_0$

55. 0,05%

57. **a.** 310
b. Não; o número previsto é 169 e não 167. Não, esta diferença não é significativa; a glotocronologia fornece apenas valores aproximados.
c. As respostas podem variar.

59. R$ 1.206,93

61. **a.** Não; o valor correto seria R$ 166,07.
b. As respostas podem variar.

63.

x	$-2{,}2$	$-1{,}5$	0	1,5	2,3
$f(x)$	10,5561	4	0,5	0,0625	0,0206

65. Como $n \to -\infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2{,}71828$

67. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{5}{2n}\right)^{n/3} = +\infty$

CAPÍTULO 4 | Seção 2

1. $\ln 1 = 0$, $\ln 2 \approx 0{,}693$, $\ln e = 1$, $\ln 5 \approx 1{,}609$, $\ln\left(\frac{1}{5}\right) \approx -1{,}609$, $\ln e^2 = 2$, $\ln 0$ e $\ln -2$ não existem, já que e^x não é 0 nem negativo para nenhum valor de x.

3. 3

5. 5

7. $\frac{8}{25}$

9. $3 + \log_3 2 + \log_3 5$

11. $2\log_3 2 + 2\log_3 5$

13. $4\log_2 x + 3\log_2 y$

15. $\frac{1}{3}[\ln x + \ln(x - 1)]$

17. $2\ln x + \frac{2}{3}\ln(3 - x) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1)$

19. $3\ln x - x^2$

21. $\frac{\ln 53}{\ln 4} \approx 2{,}864$

23. 5

25. $\frac{\ln 2}{0{,}06} \approx 11{,}552$

27. $\frac{\ln 5}{4} \approx 0{,}402$

29. $e^{-C-t/50}$

31. 4

33. $\dfrac{2}{\ln 3} \approx 1{,}820$

35. $10 \ln 2$

37. $5 \ln 2 \approx 3{,}4657$

39. $7 \ln 5 - \ln 2 \approx 10{,}5729$

41. $-5{,}5$

43. $\dfrac{\ln 2}{0{,}06} \approx 11{,}55$ anos

45. $\dfrac{\ln 2}{13} \approx 5{,}33\%$

47. $\dfrac{12 \ln 3}{\ln 2} \approx 19{,}02$ anos

49. **a.** $0{,}765\ \text{g/cm}^3$; $0{,}784\ \text{g/cm}^3$

b. $-50 \ln\left(\dfrac{0{,}125}{0{,}13}\right) \approx 1{,}96$ s

51. 5.614 anos

53. $Q(t) = 6.000e^{0{,}0203t}$; 20.250

55. $Q(t) = 500 - 200e^{-0{,}1331t}$; 459,5 unidades

57. 10.523 anos

59. há 24,84 anos; 95,8%

61. 65°C

63. André; 1 h e 35 min de quarta-feira.

65. **a.** 8,25

b. 10^{14} joules

67. **a.** 2×10^8

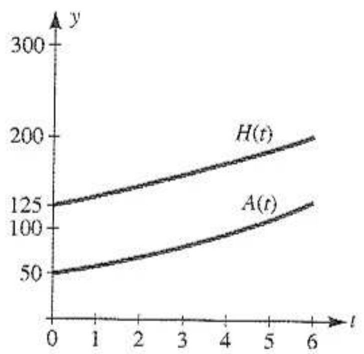
b. $10^{1,2} \approx 15{,}85$ vezes mais intenso

69. **a.** 45%

b. 2,34%

71. No ano de 2095

73. **a.**



b. $A = \dfrac{2H^2}{625}$

75. A reta $y = x$ tem inclinação 1 e, portanto, é perpendicular à reta que passa pelos pontos $A(a, b)$ e $B(b, a)$, cuja inclinação é $m = \dfrac{(a-b)}{(b-a)} = -1$. Se O é a origem e M é o ponto onde $y = x$ intercepta o segmento de reta AB, os triângulos retângulos OMA e OMB são congruentes, já que possuem o lado OM em comum e

$$|OA| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = |OB|$$

Nesse caso, $|AM| = |BM|$, o que significa que A e B são simétricos em relação à reta $y = x$.

77. $Y = mX + b$, onde $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $m = k$ e $b = \ln c$.

79. $x \approx -17{,}4213$ (usando uma calculadora)

81. $x \approx 1{,}1697$ (usando uma calculadora)

83. **a.** $(\log b)(\log a) = \left(\dfrac{\ln b}{\ln a}\right)\left(\dfrac{\ln a}{\ln b}\right) = 1$

b.
$$\begin{aligned}\log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a}\\ &= \frac{(\ln x)(\ln b)}{(\ln b)(\ln a)} = (\log_b x)(\log_a b)\\ &= \frac{\log_b x}{\log_a b} \quad \text{usando o resultado do item (a)}\end{aligned}$$

CAPÍTULO 4 | Seção 3

1. $f'(x) = 5e^{5x}$

3. $f'(x) = xe^x + e^x$

5. $f'(x) = -0{,}5e^{-0{,}05x}$

7. $f'(x) = (6x^2 + 20x + 33)e^{6x}$

9. $f'(x) = -6e^x(1 - 3e^x)$

11. $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}e^{\sqrt{3x}}$

13. $f'(x) = \dfrac{3}{x}$

15. $f'(x) = 2x \ln x + x$

17. $f'(x) = \dfrac{2}{3}e^{2x/3}$

19. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$

21. $f'(x) = -2e^{-2x} + 3x^2$

23.
$$\begin{aligned}g'(s) &= (e^s + 1)(2e^{-s} + s) + (e^s + s + 1)(-2e^{-s} + 1)\\ &= 1 + 2s + e^s + se^s - 2se^{-s}\end{aligned}$$

25. $h'(t) = \dfrac{te^t \ln t + t \ln t - e^t - t}{t(\ln t)^2}$

27. $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

29. $f'(t) = \dfrac{t+1}{2t\sqrt{\ln t + t}}$

31. $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

33. $g'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$

35. $\dfrac{1}{e}$; 0

37. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}e^{-3/2}$; 0

39. $y = x$

41. $y = e^2$

43. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

45. $f''(x) = 4e^{2x} + 2e^{-x}$

47. $2 \ln t + 3$

49. $f'(x) = f(x)\left[\frac{4}{2x+3} + \frac{1-10x}{2(x-5x^2)}\right]$

51. $f'(x) = f(x)\left[\frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(3x-5)}\right]$

53. $f'(x) = f(x)\left[\frac{3}{x+1} - \frac{2}{6-x} + \frac{2}{3(2x+1)}\right]$

55. $f'(x) = (2 \ln 5)x5^{x^2}$

57. **a.** $E(p) = 0{,}04p$; elástica para $p > 25$, inelástica para $p < 25$, de elasticidade unitária para $p = 25$

b. A demanda diminuirá de aproximadamente 1,2%.

c. $R(p) = 3.000pe^{-0{,}04p}$; $p = 25$

59. **a.** $E(p) = \frac{-p^2 - p}{10(p+11)}$; elástica para $p > 15{,}91$, inelástica para $p < 15{,}91$ e de elasticidade unitária para $p = 15{,}91$

b. A demanda diminuirá de aproximadamente 1,85%

c. $R(p) = 5.000\,p(p + 11)\,e^{-0{,}1p}$; $p = 15{,}91$

61. **a.** $C'(x) = 0{,}2e^{0{,}2x}$

b. 5 unidades

63. **a.** $C'(x) = \frac{6\,e^{x/10}}{\sqrt{x^7}}\left(1 + \frac{x}{5}\right)$

b. 5 unidades

65. **a.** A população estará aumentando à taxa de 1,22 milhão de habitantes por ano.

b. 2% ao ano (constante)

67. **a.** R$ 1.082,68 (decrescente)

b. −40% ao ano (constante)

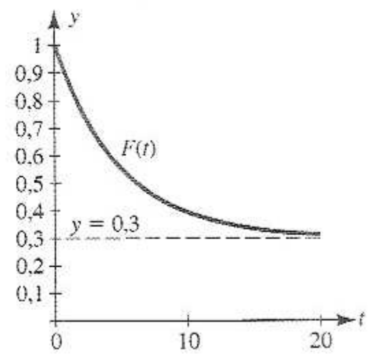
69. **a.** Aproximadamente 406 exemplares.

b. 368 exemplares. Sim (o erro é da ordem de 10%).

71. **a.** $F'(t) = -k(1 - B)e^{-kt}$ corresponde à velocidade com que o aluno esquece o conteúdo.

b. $F'(t) = -k(F(t) - B)$, o que significa que a velocidade com que o aluno esquece é proporcional à fração de fatos que ainda podem ser esquecidos.

c.



73. **a.** $E'(p) = 3.000e^{-0{,}01p}(1 - 0{,}01p)$

b. $p = 100$

c. $p = 200$

75. **a.** $N'(t) = \frac{36e^{-0{,}02t}}{(1 + 3e^{-0{,}02t})^2}$; a população é crescente para qualquer valor de t.

b. Crescente para $t < 50 \ln 3$, decrescente para $t > 50 \ln 3$. A população aumenta mais lentamente para longos tempos.

c. A população tende para um valor constante de 600 espécimes.

77. **a.** $P_1'(10) \approx 1{,}556$ cm/dia; decrescente

$P_2'(10) \approx -0{,}257$ cm/dia; decrescente

b. As plantas têm a mesma altura, aproximadamente 21 cm, após 20,71 dias; como $P_1'(20,71) \approx 0{,}286$ e $P_2'(20,71) \approx 0{,}001$, a primeira planta está crescendo mais depressa.

79. $\frac{R'(t_0)}{R(t_0)} = \frac{0{,}09(11) - 0{,}02(8)}{19} \approx 0{,}0437$; 4,37%

81. A população da cidade daqui a x anos será

$$P(x) = 5.000\sqrt{x^2 + 4x + 19}$$

A taxa de variação percentual daqui a x anos será

$$\frac{100\,P'(x)}{P(x)} = 100\frac{d}{dx}[\ln 5.000\sqrt{x^2 + 4x + 19}]$$

$$= 100\frac{d}{dx}[\ln 5.000 + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4x + 19)]$$

$$= \frac{100(x+2)}{x^2 + 4x + 19}$$

Assim, a taxa de variação percentual daqui a 3 anos será

$$\frac{100(3+2)}{3^2 + 12 + 19} = 12{,}5\% \text{ ao ano}$$

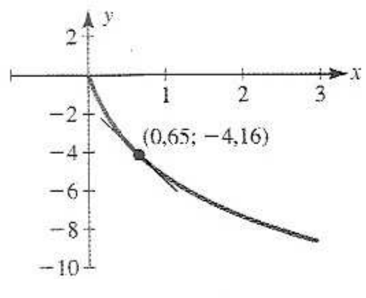
83. $f'(x) = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2}$

85. $\frac{1 + \ln x}{\ln 10}$

87. $f(x) = \frac{1}{3}\ln(x+1) - 4\ln(1+3x)$

$f'(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{12}{1+3x}$; $f'(0{,}65) \approx -3{,}87$

a reta tangente em $(0{,}65; -4{,}16)$ é $y = -3{,}87x - 1{,}65$.

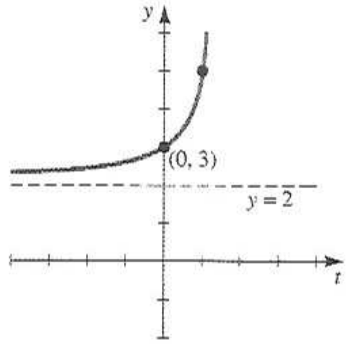


CAPÍTULO 4 | Seção 4

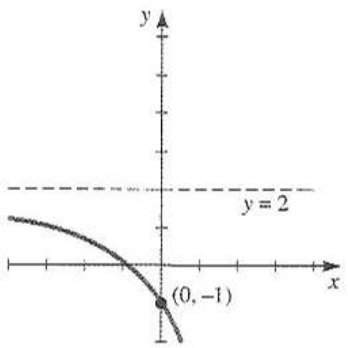
1. $f_5(x)$

3. $f_3(x)$

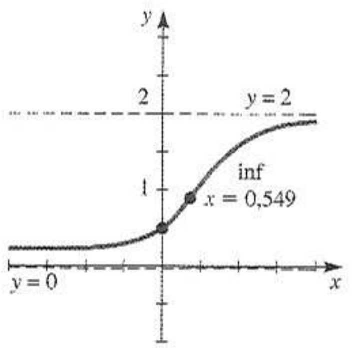
5. $f(t)$ é crescente para qualquer valor de t; a concavidade é para cima para qualquer valor de t. Existe uma assíntota horizontal em $y = 2$.



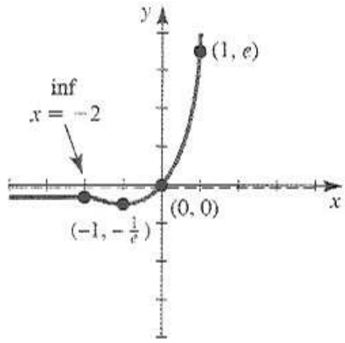
7. $g(x)$ é decrescente para qualquer valor de x; a concavidade é para baixo para qualquer valor de x; existe uma assíntota horizontal em $y = 2$.



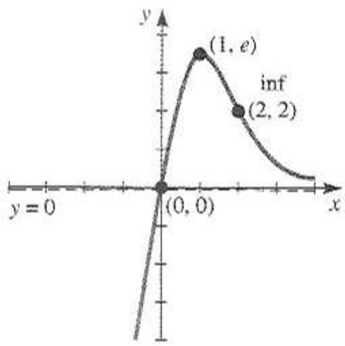
9. $f(x)$ é crescente para qualquer valor de x; a concavidade é para cima para $x < 0{,}549$ e para baixo para $x > 0{,}549$. Existe um ponto de inflexão em (0,549; 1). Existem assíntotas horizontais em $y = 2$ e $y = 0$.



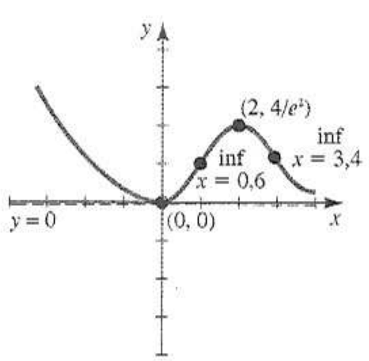
11. $f(x)$ é crescente para $x > -1$ e decrescente para $x < -1$. A concavidade é para cima para $x > -2$ e para baixo para $x < -2$. Existe um mínimo relativo em $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$. Existe um ponto de inflexão em $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$. Existe uma assíntota horizontal em $y = 0$ (eixo x).



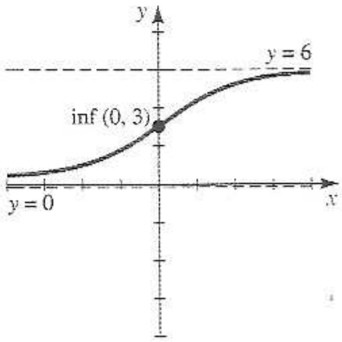
13. $f(x)$ é crescente para $x < 1$ e decrescente para $x > 1$. A concavidade é para cima para $x > 2$ e para baixo para $x < 2$. Existe um máximo relativo em $(1, e)$. Existe um ponto de inflexão em (2, 2). Existe uma assíntota horizontal em $y = 0$ (eixo x).



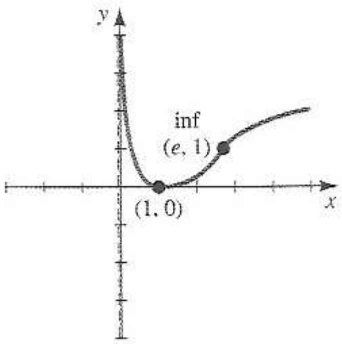
15. $f(x)$ é crescente para $0 < x < 2$ e decrescente para $x < 0$ e $x > 2$. A concavidade é para cima para $x < 0{,}6$ e $x > 3{,}4$ e para baixo para $0{,}6 < x < 3{,}4$. Existe um mínimo relativo em (0,0). Existe um máximo relativo em $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$. Existem pontos de inflexão em (0,6;0,2) e (3,4;0,4). Existe uma assíntota horizontal em $y = 0$ (eixo x).



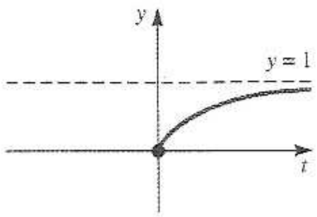
17. $f(x)$ é crescente para qualquer valor de x. A concavidade é para cima para $x < 0$ e para baixo para $x > 0$. Existe um ponto de inflexão em (0,3). Existe uma assíntota horizontal em $y = 0$ (eixo x) e outra em $y = 6$.



19. $f(x)$ é crescente para $x > 1$ e decrescente para $x < 1$. A concavidade é para cima para $x < e$ e para baixo para $x > e$. Existe um mínimo relativo em (1, 0). Existe um ponto de inflexão em (e, 1). Existe uma assíntota vertical em $x = 0$ (eixo y).



21. **a.** Quando $t \to \infty$, $f(t) \to 1$

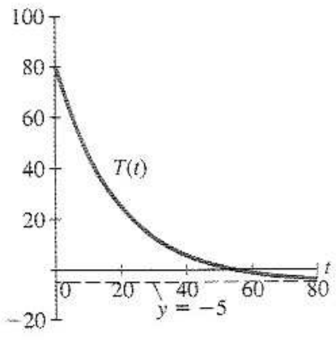


b. 0,741

c. 0,089

23. **a.** $A = 85$, $k = \dfrac{1}{20} \ln \dfrac{17}{6}$

b.

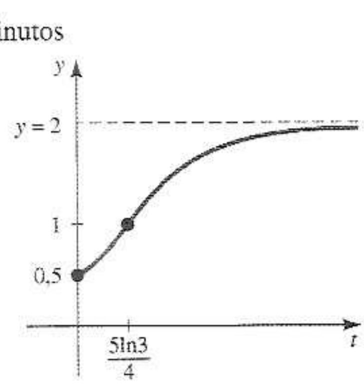


A temperatura tende a -5°C.

c. 12,8°C

d. 54,4 minutos

25. **a.**



b. 500

c. 1.572

d. 2.000

27. 37,5 unidades por dia

29. **a.** Aproximadamente 403 cópias

b. 348 cópias; sim (a diferença é da ordem de 15%).

31. **a.** $e - 1 \approx 1{,}7$ ano

b. Com 0 ano (ao nascer).

33. $C = \dfrac{1}{199}$; $k = 0{,}1745$

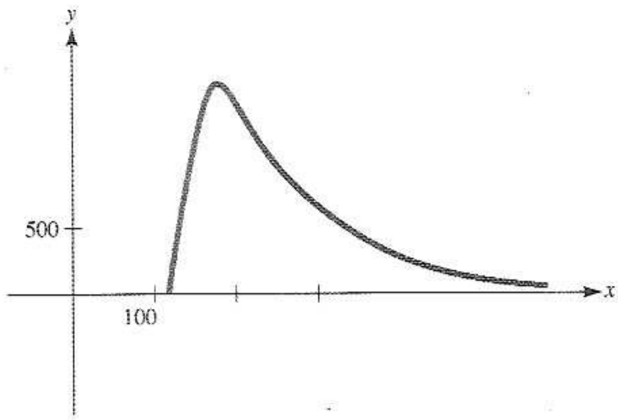
A taxa de variação da fração de ações especulativas é dada por

$$p'(t) = \frac{199ke^{kt}}{(199 + e^{kt})^2}$$

e é máxima para

$$p''(t) = 0;\ t \approx 30{,}33 \text{ semanas}$$
$$p(30{,}33) \approx 0{,}5$$

35. **a.** $P(x) = 1.000e^{-0{,}02x}(x - 125)$



b. R$ 175,00

37. Daqui a 69,44 anos

39. 0,45 ano

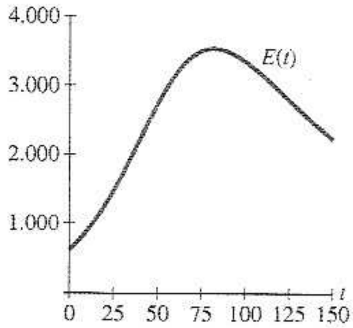
41. **a.** $C = \dfrac{b}{aR}$; $E''\left(\dfrac{b}{aR}\right) = \dfrac{2a^3R^3}{b} > 0$

b. $k = \dfrac{b}{aR}$; $m = \dfrac{4}{e}a^2R^2$

43. **a.** $E(t) = 1.000w(t)p(t)$

b. $t = 82$; 3.527 quilogramas

c.



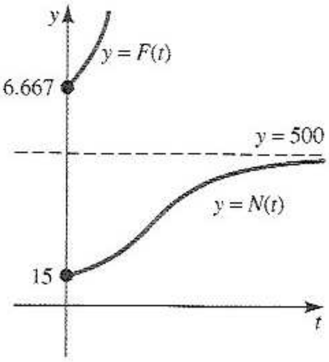
45. a. $C = 9, k = \frac{1}{2}\ln 3$

b. 4 horas

c. 4 horas

47. a. $N(0) = 15$ empregados; $N(5) = 482$ empregados; 2,10 anos; 500 empregados

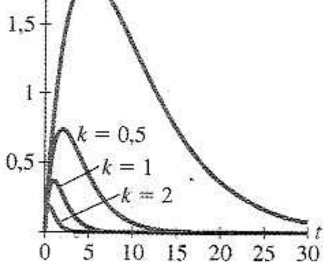
b.



49. a. $C'(t) = Ae^{-kt}(1 - kt)$. $C(t)$ é crescente para $t < \frac{1}{k}$ e descrescente para $t > \frac{1}{k}$. A concentração é máxima para $t = \frac{1}{k}$. A concentração máxima é $\frac{A}{ke}$.

b. $C''(t) = kAe^{-kt}(kt - 2)$. A concavidade da curva de $C(t)$ é para cima para $t > \frac{2}{k}$ e para baixo para $t < \frac{2}{k}$. Existe apenas um ponto de inflexão, o ponto $\left(\frac{2}{k}, \frac{2A}{ke^2}\right)$; neste ponto, a taxa de variação da concentração do medicamento é mínima.

c.



Quando k aumenta, o ponto de máximo se desloca para a esquerda e a concentração máxima diminui.

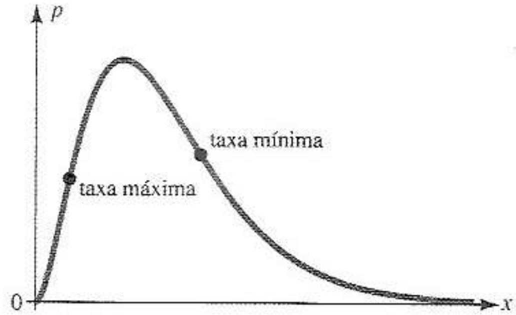
51. a. $Q(t) = 1.139e^{0,06t}$. $Q(7) = 1.734$ funcionários.

b. $t \approx 11,5$ anos

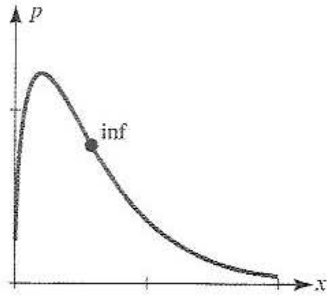
c. As respostas podem variar.

53. a. $x = r; p''(r) < 0$

b. Os pontos de inflexão estão em $x = \frac{r(s - \sqrt{s})}{s}$ e $x = \frac{r(s + \sqrt{s})}{s}$. Ambos estão no semi-eixo x positivo, já que $s > 1$. A taxa de produção é máxima no primeiro ponto de inflexão e mínima no segundo.



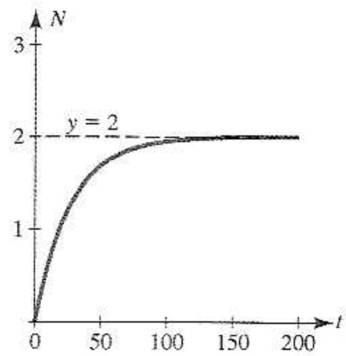
c.



Neste caso, existe apenas um ponto de inflexão.

55. $f'(t) = 0$ para $t = \frac{\ln c}{k}$; $f\left(\frac{\ln c}{k}\right) = \frac{A}{2}$

57.

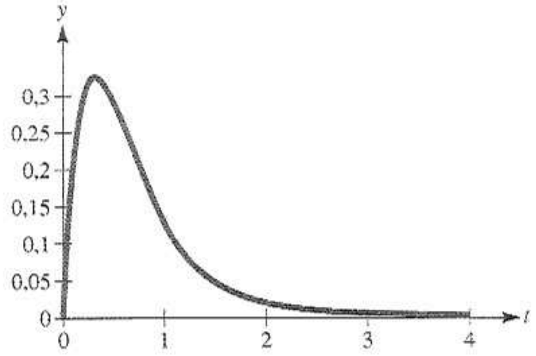


O valor de N tende ao maior valor possível (2 milhões de espectadores).

59. a. $t = \frac{1}{b - a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

"A longo prazo", a concentração tende a 0.

b.



c. As respostas podem variar.

61. **a.** $V(5) =$ R\$ 207,64;

$$V'(t) = V_0\left(1 - \frac{2}{L}\right)^t \ln\left(1 - \frac{2}{L}\right)$$

$V'(5) \approx -$R\$ 60,00 por ano

b. $100 \ln\left(1 - \dfrac{2}{L}\right)$

CAPÍTULO 4 | Verificação

1. **a.** 1

b. $\dfrac{10}{3}$

c. 0

d. $\dfrac{16}{81}$

2. **a.** $27x^6y^3$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{3}xy^{2/3}}$

c. $\dfrac{y^{7/6}}{x^{1/6}}$

d. $\dfrac{1}{x^{6,5}y^8}$

3. **a.** $x = 3, x = -1$

b. $x = \dfrac{1}{\ln 4}$

c. $x = -4, x = 4$

d. $t = -2 \ln \dfrac{11}{3}$

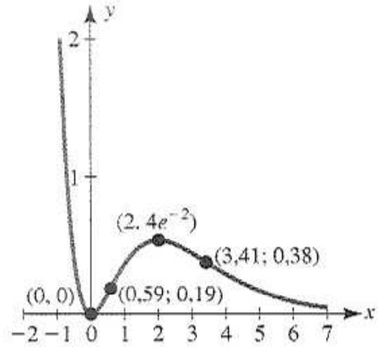
4. **a.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x(x^2 - 5x + 3)}{(x^2 - 3x)^2}$

b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 4x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

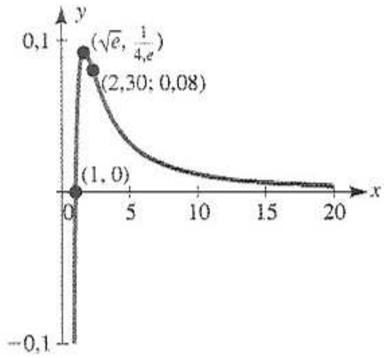
c. $\dfrac{dy}{dx} = x^2(1 + 3 \ln x)$

d. $\dfrac{dy}{dx} = y\left(-2 + \dfrac{6}{2x - 1} + \dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$

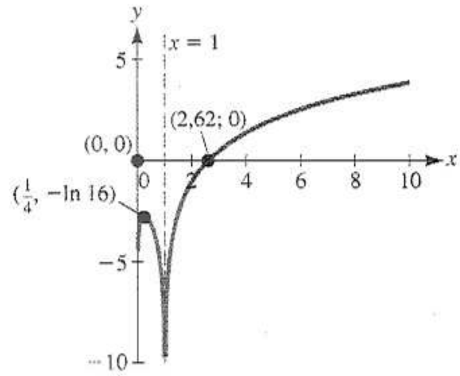
5. **a.** $f(x)$ é crescente para $0 < x < 2$ e decrescente para $x < 0$ e $x > 2$. A concavidade é para cima para $x < 2 - \sqrt{2}$ e $x > 2 + \sqrt{2}$ e para baixo para $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Existe um máximo relativo em $x = 2$. Existe um mínimo relativo em $x = 0$. Existem dois pontos de inflexão, em $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$. Existe uma assíntota horizontal em $y = 0$ (eixo x).



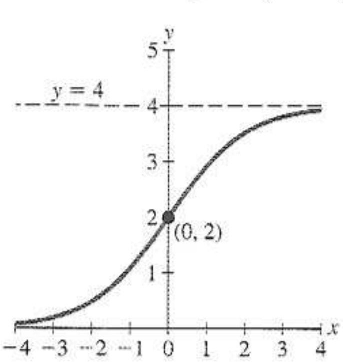
b. $f(x)$ é crescente para $0 < x < \sqrt{e}$ e decrescente para $x > \sqrt{e}$. A concavidade é para cima para $x > e^{5/6}$ e para baixo para $x < e^{5/6}$. Existe um máximo relativo em $x = \sqrt{e}$. Existe um ponto de inflexão em $x = e^{5/6}$, o ponto (2,30; 0,08). Existe uma assíntota vertical em $x = 0$ (eixo y). Existe uma assíntota horizontal em $y = 0$ (eixo x).



c. $f(x)$ é crescente para $0 < x < \dfrac{1}{4}$ e $x > 1$ e decrescente para $\dfrac{1}{4} < x < 1$. A concavidade é para baixo para $x \neq 1$. Existe um máximo relativo em $x = \dfrac{1}{4}$. Não existem pontos de inflexão. Existem assíntotas verticais em $x = 0$ e $x = 1$.



d. $f(x)$ é crescente para qualquer valor de x. A concavidade é para cima para $x < 0$ e para baixo para $x > 0$. Existe um ponto de inflexão em $x = 0$, o ponto $(0, 2)$. Existem assíntotas horizontais em $y = 0$ (eixo x) e $y = 4$.



6. R$ 2.323,67; 8,1 anos

7. a. Aumentando para $-1 < t < e - 1$; diminuindo para $t > e - 1$.

b. $t = e^{3/2} - 1$

c. O preço tende a R$ 500,00.

8. a. $q'(p) = -1000e^{-p}(p + 1) < 0$ para $p \geqslant 0$

b. $p = \sqrt{2}$ ou R$ 141,42; R$ 117.384,14

9. 6.601 anos

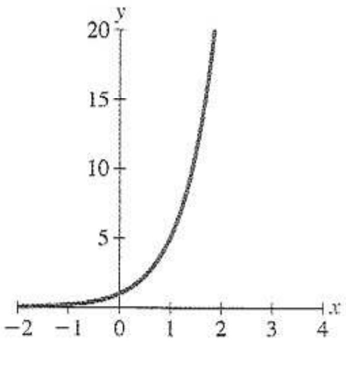
10. a. 80.000

b. 2 horas; 81.873

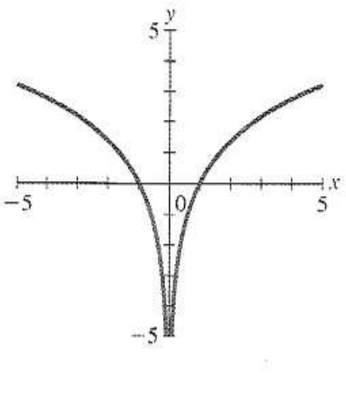
c. A população tende a zero.

CAPÍTULO 4 | Problemas de Revisão

1.



3.



5. a. $f(4) = \dfrac{3.125}{8}$

b. $f(3) = \dfrac{100}{3}$

c. $f(9) = \dfrac{65}{2}$

d. $f(10) = \dfrac{6}{5}$

7. $x = 25 \ln 4$

9. $x = e^2$

11. $x = \dfrac{41}{2}$

13. $x = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-x}(2 - x)$

17. $\dfrac{dy}{dx} = 2 \ln x + 2$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x \ln 3}$

21. $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ (Note que $y = e^x$.)

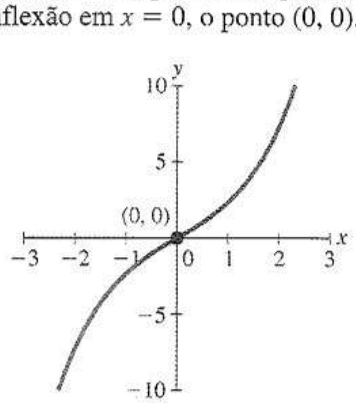
23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(1 + 2e^{-x})}{1 + e^{-x}}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-e^{-x}(x^2 + x + 1 + x \ln x)}{x(x + \ln x)^2}$

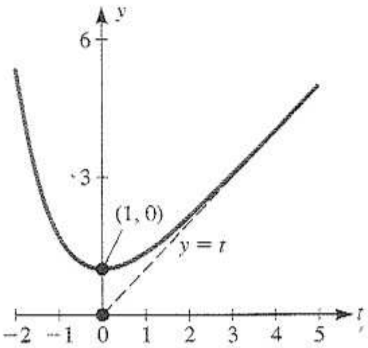
27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{x-x^2}(2x - 1) + 1}{e^{x-x^2} - 1}$

29. $\dfrac{dy}{dx} = 2y\left[\dfrac{3x + 3e^{2x}}{x^2 + e^{2x}} - 1 - \dfrac{1 - 2x}{3(1 + x - x^2)}\right]$

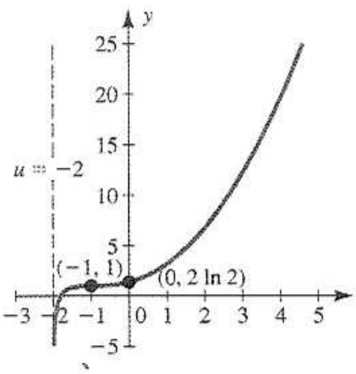
31. $f(x)$ é crescente para qualquer valor de x. A concavidade é para cima para $x > 0$ e para baixo para $x < 0$. Existe um ponto de inflexão em $x = 0$, o ponto $(0, 0)$.



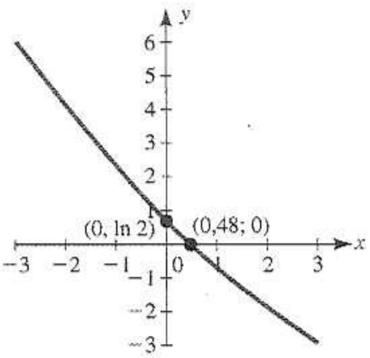
33. $f(t)$ é crescente para $t > 0$ e decrescente para $t < 0$. A concavidade é para cima para qualquer valor de t. Existe um mínimo relativo em $t = 0$. Não existem pontos de inflexão.



35. $F(u)$ é crescente para qualquer valor de $-2 < u < -1$ e $u > -1$. A concavidade é para cima para $u > -1$ e para baixo para $-2 < u < -1$. Existe um ponto de inflexão em $u = -1$, o ponto $(-1, 1)$. Existe uma assíntota vertical em $u = -2$.



37. $G(x)$ é decrescente para qualquer valor de x. A concavidade é para cima para qualquer valor de x.



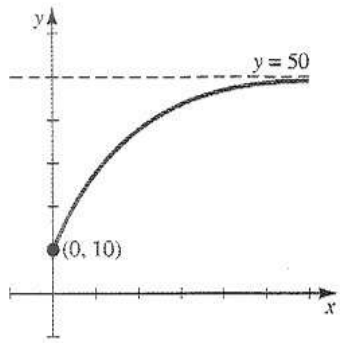
39. ln 4; ln 3

41. $\left(e + \dfrac{1}{e}\right)^5$; 32

43. $y = 2x - 2$

45. $y = 4x$

47. **a.**



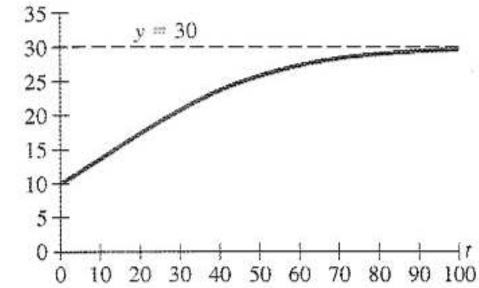
b. 10.000

c. 32.027

d. R$ 9.808,29

e. Pouco menos de 50.000 unidades

49. **a.**



b. 10 milhões

c. 17,28 milhões (17.283.507)

d. A população tende a 30 milhões.

51. 8,20% ao ano capitalizados continuamente

53. **a.** R$ 4.323,25

b. R$ 4.282,09

55. 5,83%

57. **a.** 0,13 parte por milhão por ano

b. 3%; constante

59. Daqui a 200 anos.

61. **a.** Como $\lambda = \dfrac{\ln 2}{k}$, temos $k = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ e $Q(t) = Q_o e^{-(\ln 2/\lambda)t}$.

$Q(t) = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$.

b. $Q_0(0{,}5)^{kt} = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$

$$kt \ln 0{,}5 = -\left(\frac{\ln 2}{\lambda}\right)t$$

Assim, $k = \dfrac{1}{\lambda}$

63. Como a Idade do Bronze começou há cerca de 5.000 anos (por volta de 3.000 a.C.), a maior porcentagem seria 55%.

65. 0,8110 minutos = 48,66 segundos; −8,64°C/min.

67. **a.** $A = 5e$, $k = \dfrac{1}{2}$

b. $t = 9{,}78$ horas

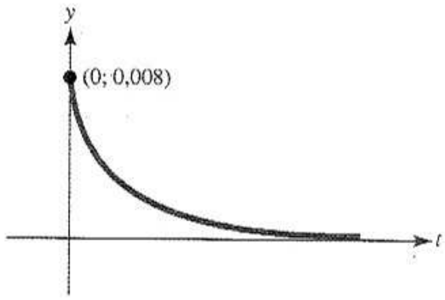
69. **a.** 0,15% por ano

b. 70,24 anos, 0,15% por ano

71. $10^{-1,6} \approx 0{,}0251$

73. **a.** $D(10) = 0{,}00195$; $D(25) = 0{,}000591$

b.



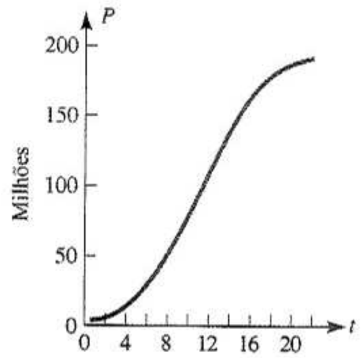
75. **a.** $2{,}31 \times 10^{-200}$ por cento. Esta concentração é pequena demais para ser medida.

b. As respostas podem variar.

77. **a.**

1790	3.867.087
1800	5.256.550
1830	12.956.719
1860	30.207.500
1880	50.071.364
1900	77.142.427
1920	108.425.601
1940	138.370.607
1960	162.289.823
1980	178.782.499
1990	184.566.653
2000	189.034.385

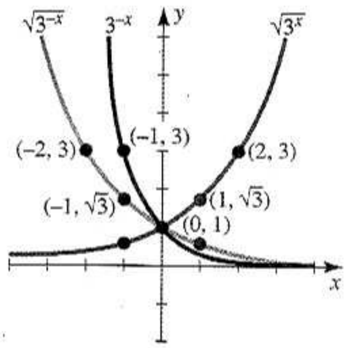
b.



De acordo com o modelo, a população estava aumentando com maior rapidez por volta de 1915.

c. As respostas podem variar.

79.



81. $x = 1{,}066$

83.

n	$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$	$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$
8	22,63	22,36
9	32,77	31,62
12	88,21	85,00
20	957,27	904,84
25	3.665	3.447
31	16.528	15.494
37	68.159	63.786
38	85.679	80.166
43	261.578	244.579
50	1.165.565	1.089.362
100	$1{,}12 \times 10^{10}$	$1{,}05 \times 10^{10}$
1.000	$2{,}87 \times 10^{47}$	$2{,}76 \times 10^{47}$
	$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ $>$	$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$

CAPÍTULO 5 | Seção 1

1. $-3x + C$

3. $\dfrac{x^6}{6} + C$

5. $-\dfrac{1}{x} + C$

7. $4\sqrt{t} + C$

9. $\dfrac{5}{3}u^{3/5} + C$

11. $t^3 - \dfrac{2\sqrt{5}}{3}t^{3/2} + 2t + C$

13. $2y^{3/2} + y^{-2} + C$

15. $\dfrac{e^x}{2} + \dfrac{2}{5}x^{5/2} + C$

17. $\dfrac{u^{1,1}}{3{,}3} - \dfrac{u^{2,1}}{2{,}1} + C$

19. $x + \ln x^2 - \dfrac{1}{x} + C$

21. $-\dfrac{5}{4}x^4 + \dfrac{11}{3}x^3 - x^2 + C$

23. $\dfrac{2}{7}t^{7/2} - \dfrac{2}{3}t^{3/2} + C$

25. $\dfrac{1}{2}e^{2t} + 2e^t + t + C$

27. $\dfrac{1}{3}\ln|y| - 10\sqrt{y} - 2e^{-y/2} + C$

29. $\dfrac{2}{5}t^{5/2} - \dfrac{2}{3}t^{3/2} + 4t^{1/2} + C$

31. $y = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

33. $y = \ln x^2 + \frac{1}{x} - 2$

35. $f(x) = 2x^2 + x - 1$

37. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x} + 2x - \frac{5}{4}$

39. $f(x) = -e^{-x} + \frac{x^3}{3} + 5$

41. 10.128 habitantes

43. $\frac{5}{2}(e^{0,4} - e^{0,2})$

45. R$ 22.360,00

47. **a.** $18\frac{1}{3}$ (18 elementos)
 b. $48\frac{1}{3}$ (48 elementos)

49. 3.253

51. **a.** $T(t) = 16 - 20e^{-0,35t}$
 b. 6,1°C
 c. 3,44 horas

53. **a.** $P(q) = 100q - q^2 - 200$
 b. $q = 50$; R$ 2.300,00

55. $c(x) = 0{,}9x + 0{,}2x^{3/2} + 10$

57. $f'(x)$ é máxima para $x = 10$.
 a. Sete elementos por minuto
 b. $f(x) = x + 0{,}6x^2 - 0{,}02x^3$
 c. 100 elementos

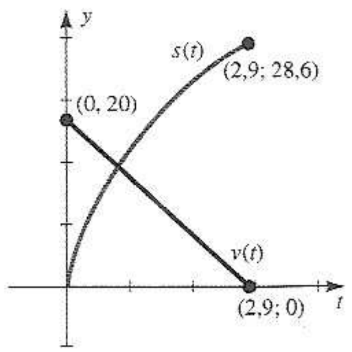
59. R$ 2.265,80

61. $v(r) = \frac{1}{2}a(R^2 - r^2)$

63. 20 metros

65. $\int b^x dx = \int e^{x \ln b} dx = \frac{e^{x \ln b}}{\ln b} + C = \frac{b^x}{\ln b} + C$

67. **a** $v(t) = 20 - 7t$; $s(t) = 20t - 3{,}5t^2$
 b.



 c. $t = 2{,}9$ s; $s(2{,}9) = 28{,}6$ m; $v = 14{,}3$ m/s

CAPÍTULO 5 | Seção 2

1. **a.** $u = 3x + 4$
 b. $u = 3 - x$
 c. $u = 2 - t^2$
 d. $u = 2 + t^2$

3. $\frac{1}{12}(2x + 6)^6 + C$

5. $\frac{1}{6}(4x - 1)^{3/2} + C$

7. $-e^{1-x} + C$

9. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

11. $\frac{1}{12}(t^2 + 1)^6 + C$

13. $\frac{4}{21}(x^3 + 1)^{7/4} + C$

15. $\frac{2}{5}\ln|y^5 + 1| + C$

17. $\frac{1}{26}(x^2 + 2x + 5)^{13} + C$

19. $\frac{3}{5}\ln|x^5 + 5x^4 + 10x + 12| + C$

21. $-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{u^2 - 2u + 6}\right) + C$

23. $\frac{1}{2}(\ln 5x)^2 + C$

25. $\frac{-1}{\ln x} + C$

27. $\frac{1}{2}[\ln(x^2 + 1)]^2 + C$

29. $\ln|e^x - e^{-x}| + C$

31. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|2x + 1| + C$

33. $\frac{1}{10}(2x + 1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x + 1)^{3/2} + C$

35. $2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$

37. $y = \ln|x + 1| + 1$

39. $y = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 4x + 5| - \frac{1}{2}\ln 2 + 3$

41. $f(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(1 - 2x)^{5/2}$

43. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{4-x^2}$

45. **a.** $x(t) = -\frac{4}{9}(3t + 1)^{3/2} + \frac{40}{9}$
 b. $x(4) = -16{,}4$
 c. $t = 0{,}4$

47. **a.** $x(t) = \sqrt{2t + 1} - 1$
b. $x(4) = 2$
c. $t = \dfrac{15}{2}$

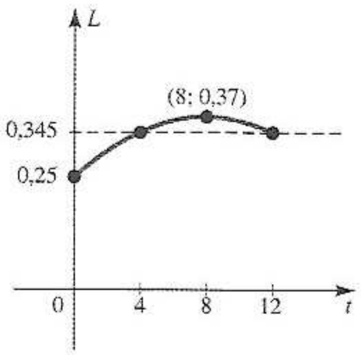
49. **a.** $C(q) = (q - 4)^3 + 64 + k$, onde k é o custo fixo
b. R$ 1.500,00

51. 2,3 metros

53. **a.** $R(x) = 50x - 175e^{-0{,}01x^2} + 175$
b. R$ 50.175,00

55. **a.** $C(t) = \dfrac{1}{e^{0{,}01t} + 1}$
b. 0,3543 mg/cm^3; 0,1419 mg/cm^3
c. 294 minutos

57. **a.** $L(t) = 0{,}03\sqrt{-t^2 + 16t + 36} + 0{,}07$; em $t = 8$ (15 h); 0,37 parte por milhão
b. A concentração de ozônio às 11 h ($t = 4$) é $L(4) = 0{,}345$. A concentração de ozônio é a mesma em $t = 12$ (às 19 h).



59. **a.** $p(x) = \dfrac{300}{\sqrt{x^2 + 9}} + 15$
b. R$ 66,45; R$ 115,00
c. 265

61. $R'(x) = \dfrac{11 - x}{\sqrt{14 - x}}$, $C'(x) = 2 + x + x^2$

Fazendo $14 - x = u$, $du = -dx$ e, portanto,

$$R(x) = -\int \frac{u - 3}{\sqrt{u}}du$$
$$= -\int (u^{1/2} - 3u^{-1/2})du$$
$$= -\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - 6u^{1/2}\right) + K_1$$
$$= 6\sqrt{14 - x} - \frac{2}{3}(14 - x)^{3/2} + K_1$$

Também temos

$$C(x) = \int (2 + x + x^2)dx = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + K_2$$

e, portanto, o lucro $P(x) = R(x) - C(x)$ satisfaz a equação $P(9) - P(5) = R(9) - C(9) - [R(5) - C(5)] = -295{,}54 - (-64{,}167) = -231{,}373$

63. $\dfrac{3}{7}(x^{2/3} + 1)^{7/2} - \dfrac{3}{5}(x^{2/3} + 1)^{5/2} + C$

65. $e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C$

CAPÍTULO 5 | Seção 3

1. 15

3. $\dfrac{95}{2}$

5. $\dfrac{6}{5}$

7. $-\dfrac{6}{5}$

9. $3 - \dfrac{4}{e}$

11. 1,95

13. 144

15. $\dfrac{8}{3} + \ln 3 \approx 3{,}7653$

17. $\dfrac{2}{9}$

19. 3,2

21. $\dfrac{4}{3}$

23. $\dfrac{7}{6}$

25. e

27. $\dfrac{8}{3}$

29. $e^3 - e^2$

31. -20

33. 0

35. 3

37. $\dfrac{33}{5}$

39. 4

41. $\dfrac{112}{9}$

43. $V(5) - V(0)$

45. R$ 480,00

47. 0,75 ppm

49. 98 habitantes

51. R$ 75,00

53. $1.500\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4}\ln\dfrac{11}{9}\right) \approx 2.626$ telefones

55. A concentração diminui de 0,8283 mg/cm^3

57. R$ 1.870,00

59. $2 \ln 2 \approx 1{,}386$ grama

61. $8\sqrt{11} - 8\sqrt{6}$ ou cerca de 7 fatos

63. 27,9 m acima do alto do edifício

65. a. $\dfrac{\pi}{4}$

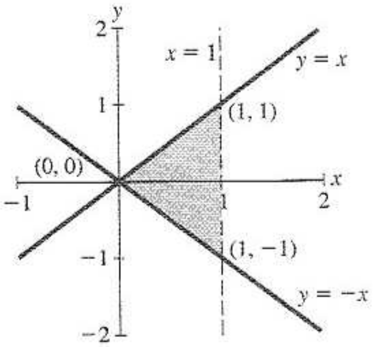
b. $\dfrac{\pi}{4}$; parte da área sob a circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$

CAPÍTULO 5 | Seção 4

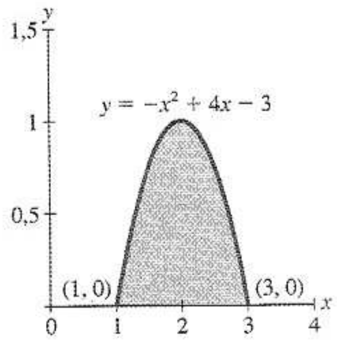
1. $\dfrac{5}{12}$

3. $2 \ln 2 - \dfrac{1}{2}$

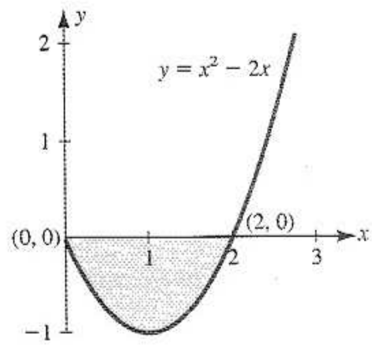
5. Área $= 1$



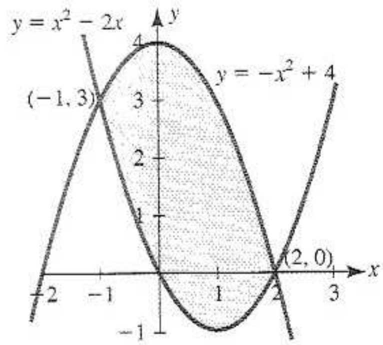
7. Área $= \dfrac{4}{3}$



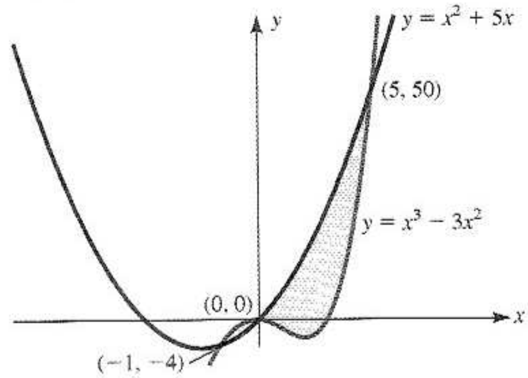
9. Área $= \dfrac{4}{3}$



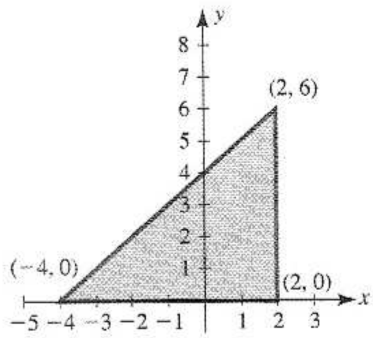
11. Área $= 9$



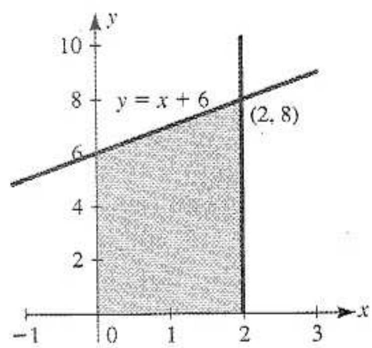
13. Área $= \dfrac{443}{6}$



15. Área $= 18$



17. Área $= 14$

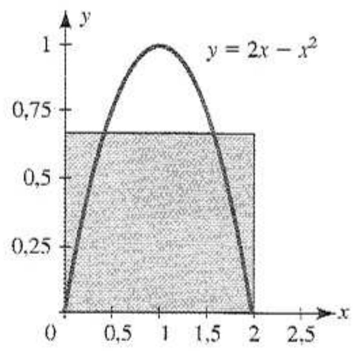


19. -2

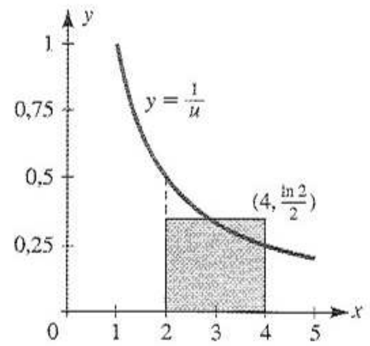
21. $\dfrac{3}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$

23. $\dfrac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 3}$

25. Valor médio $= \frac{2}{3}$



27. Valor médio $= \frac{\ln 2}{2}$



29. $\frac{1}{2}$

31. 0,1833

33. 0,383

35. R$ 1,57 o quilo

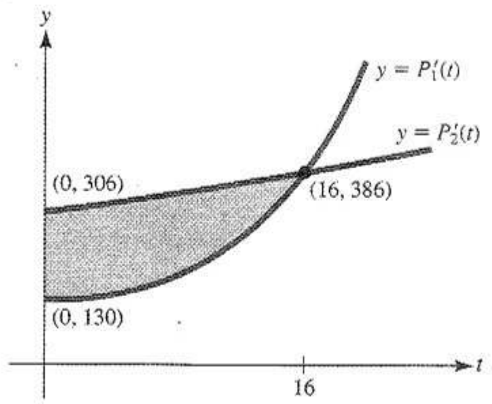
37. 2.272,2

39. 30.000 kg

41. **a.** 16 anos

b. R$ 209,067

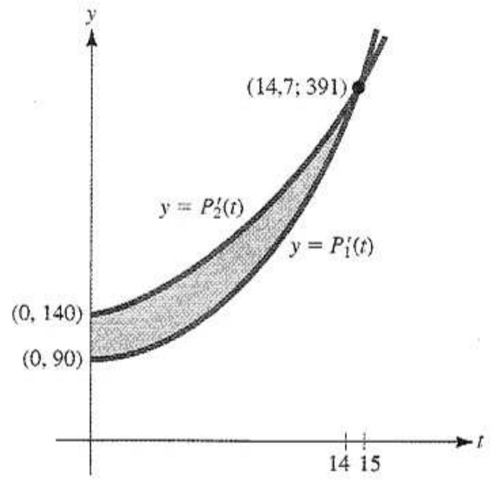
c.



43. **a.** 14,7 anos

b. R$ 582,221

c.



45. 0,412 milhão de habitantes

47. $\frac{1}{40}$ mg / cm^3

49. **a.** 0°C

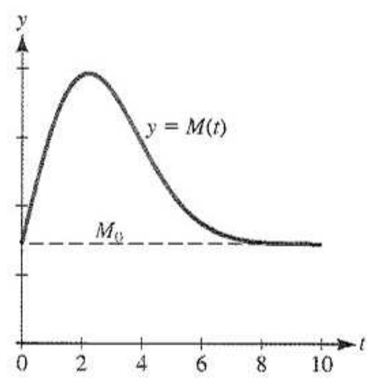
b. 8 h e 14 h.

51. **a.** 39,25 km/h

b. 15 h 30 min

53. **a.** $M_0 + 20{,}833$

b. $t = \sqrt{5}$, $M(\sqrt{5}) = M_0 + 50\sqrt{5/e}$



55. Voleibol: $\frac{1}{3}$; basquete: $\frac{5}{18}$; futebol: $\frac{9}{25}$. A distribuição mais justa é a do basquete e a menos justa é a do futebol.

57. 5.710 habitantes

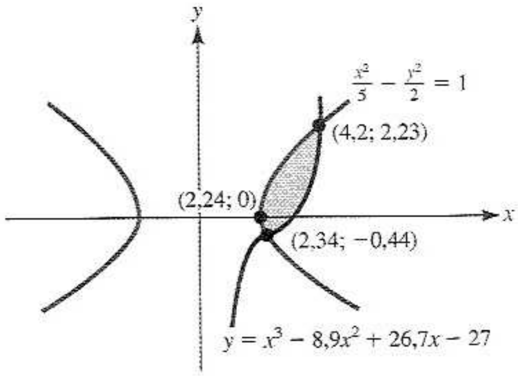
59. R$ 241.223,76

61. **a.** $S' = F''(M) = \frac{1}{3}(2k - 6M) = 0$ para $M = k/3$.

Trata-se de um máximo, já que $S'' = -2 < 0$.

b. $\frac{k^3}{108}$

63.



$$A = \int_{\sqrt{5}}^{2{,}34} \left[\sqrt{\frac{2x^2}{5} - 2} - \left(-\sqrt{\frac{2x^2}{5} - 2}\right)\right] dx$$

$$+ \int_{2{,}34}^{4{,}2} \left[\sqrt{\frac{2x^2}{5} - 2} - (x^3 - 8{,}9x^2 + 26{,}7x - 27)\right] dx$$

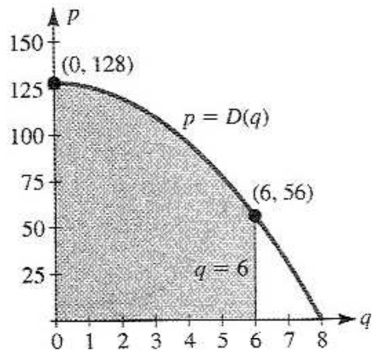
$$\approx 2{,}097$$

65. As respostas podem variar.

CAPÍTULO 5 | Seção 5

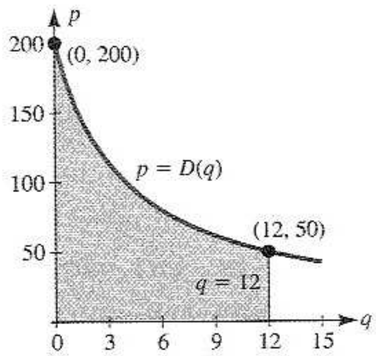
1. a. R\$ 624,00

b.



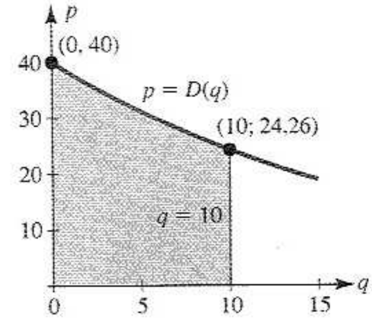
3. a. $1.600 \ln 2 \approx$ R\$ 1.109,04

b.

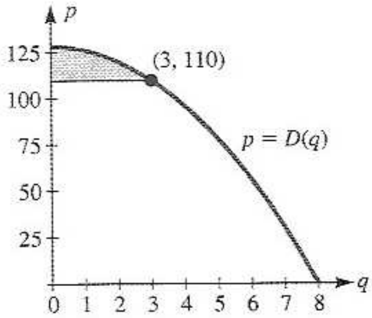


5. a. $800\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx$ R\$ 314,78

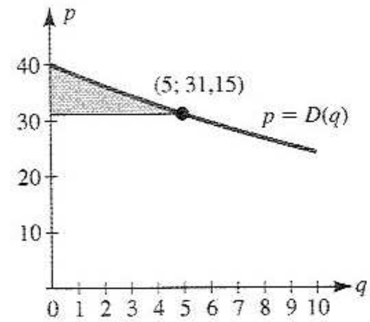
b.



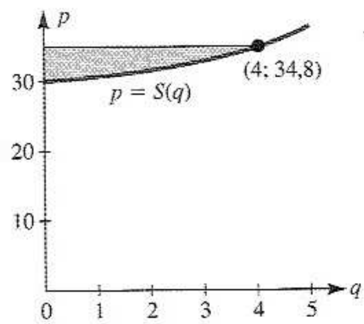
7. p_0 = R\$ 110,00; EC = R\$ 36,00



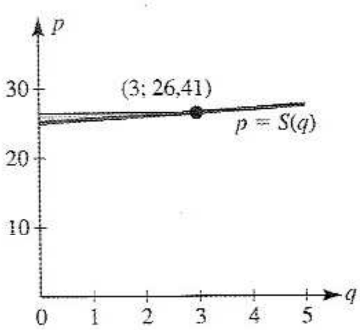
9. p_0 = R\$ 31,15; EC = R\$ 21,21



11. p_0 = R\$ 34,80; EC = R\$ 12,80



13. p_0 = R\$ 26,41; EC = R\$ 2,14

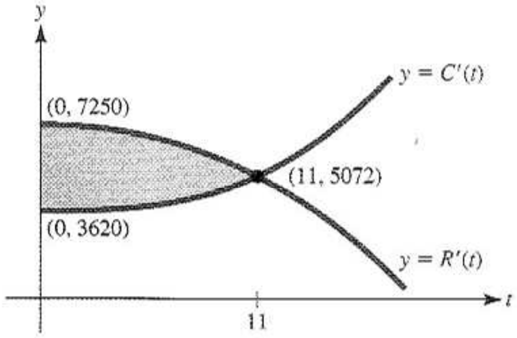


15. **a.** R\$ 104,00
b. EC = R\$ 162,00, EP = R\$ 324,00

17. **a.** R\$ 40,00
b. EC = R\$ 200,00, EP = R\$ 116,67

19. **a.** R\$ 1,00
b. EC = R\$ 3,09, EP = R\$ 0,67

21. **a.** 11 anos
b. R\$ 26.620,00
c.



23. **a.** 8
b. R\$ 15.069,00
c. A receita líquida é representada pela área entre a curva $R'(t) = 6.537e^{-0,3t}$ e a reta horizontal $y = 593$.

25. R\$ 17.182,82

27. R\$ 237.730,00; R\$ 319.453,00

29. R\$ 5.308,78

31. O plano de R\$ 50.000,00 é melhor, pois em 5 anos produz um montante de R\$ 37.465,00, enquanto o plano de R\$ 30.000,00 produz um montante de R\$ 22.479,00.

33. **a.** $P'(q) = -q^3 + 24q^2 + 108q - 3.000$
b. 18 unidades
c. R\$ 162,00

35. **a.** $P(t) - 32{,}5e^{0{,}04t} - 32{,}5$; 4,14 bilhões de barris; 4,67 bilhões de barris
b. 12 anos
c. 823,22 bilhões de dólares
d. As respostas podem variar.

37. **a.** $P(t) = 60e^{0{,}02t} - 60$; 3,71 bilhões de barris; 3,94 bilhões de barris
b. 9,12 anos
c. 608,89 bilhões de dólares
d. As respostas podem variar.

39. R\$ 1.929.148,00

41. **a.** R\$ 137.334,29
b. R\$ 44.585,94

43. **a.** 207.360 dólares
b. As respostas podem variar.

CAPÍTULO 5 | Seção 6

1. 30.484

3. 468.130

5. 451.404

7. $7\pi \approx 21{,}99$ unidades cúbicas

9. $\dfrac{1.532\pi}{15} \approx 320{,}86$ unidades cúbicas

11. $\dfrac{32\pi}{3} \approx 33{,}51$ unidades cúbicas

13. $2\pi \approx 6{,}28$ unidades cúbicas

15. 61.070.138

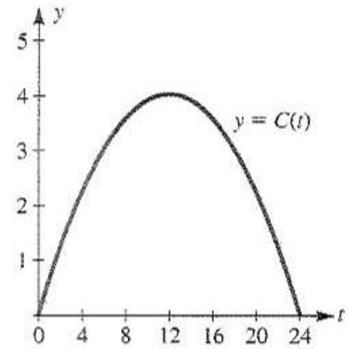
17. Cerca de 80 membros

19. 4.097,62 (4.098 pessoas)

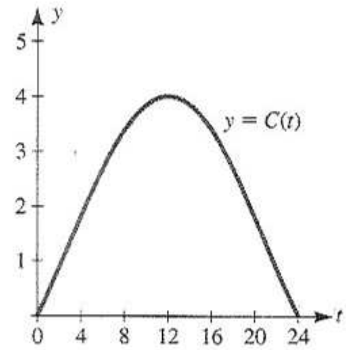
21. 515,48 bilhões de barris

23. 4.207 assinantes

25. **a.** 0,0775 L/s
b.



27. **a.** 0,0853 L/s
b.



29. 208.128 pessoas

31. **a.** O nível de LDL diminui de 6,16 unidades.
b. $L(t) = \dfrac{3}{28}(49 - t^2)^{1,4} + 150 - \dfrac{21}{4}(49)^{0,4}$
c. 5,8 dias

33. Após T anos, a primeira população é

$$P_1(T) = \left(100.000 - \frac{50}{0{,}011}\right)e^{-0{,}011T} + \frac{50}{0{,}011}$$

Assim, $P(T) > P_1(T)$ para $T = 50$ e $T = 100$ e $P_1(T) > P(T)$ para $T = 300$

35. 1.565,83 (1.566 espécimes)

37. 10.125 indivíduos

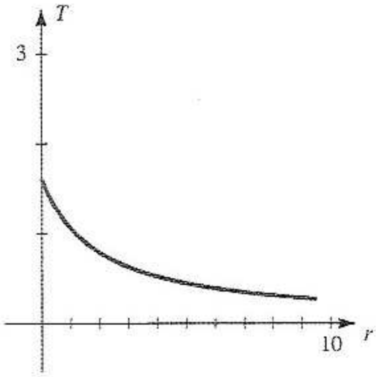
39. $\displaystyle\int_0^{12} [W'(t) - D'(t)]dt = 0{,}363$;

36 habitantes; 18,1%

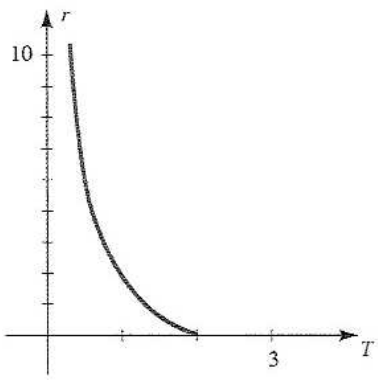
41. **a.** 55 anos
b. 70,78 anos
c. 86,36 anos; a pessoa já ultrapassou a expectativa de vida
d. 71,69 anos; as respostas podem variar

43. **a.** 2,37 s
b. 0,905 L
c. 0,382 L/s

45. **a.**



b. $r(T) = \dfrac{3}{T} - 2$



c. $\pi\left[12\left(\ln\dfrac{1}{3} - \ln\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{77}{3}\right] \approx 23{,}93 \text{ m}^3$

47. **a.** $100\pi \ln\dfrac{23}{5} \sim 479{,}42$ unidades

b. $L = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} \sim 4{,}74$ km; $100\pi \ln 10 \approx 723{,}38$ unidades

49. A equação da hipotenusa do triângulo é $y = \dfrac{r}{h}x$ e o volume pedido é

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^h = \frac{\pi r^2}{3h^2}(h^3 - 0)$$
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

CAPÍTULO 5 | Verificação

1. **a.** $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} - \dfrac{5}{2}e^{-2x} + C$

b. $\dfrac{x^2}{2} - 2x + 4\ln|x| + C$

c. $\dfrac{2}{7}x^{7/2} - 2x^{1/2} + C$

d. $\dfrac{-1}{2\sqrt{3 + 2x^2}} + C$

e. $\dfrac{1}{4}(\ln x)^2 + C$

f. $\dfrac{1}{2}e^{1+x^2} + C$

2. **a.** $\dfrac{62}{5} + 4\ln 2$

b. $e^3 - 1$

c. $1 - \ln 2$

d. $\sqrt{31} - 2$

3. **a.** $\dfrac{73}{6}$

b. 36

4. $1 - 2\ln 2$

5. R$ 10.333,33

6. 71,14 bilhões de dólares; aumenta

7. R$ 4.266,67

8. R$ 16.183,42

9. 45.055 habitantes

10. 0,1 mg/cm^3

CAPÍTULO 5 | Problemas de Revisão

1. $\dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^{3/2} - 9x + C$

3. $\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{5}{2}e^{-2x} + C$

5. $\dfrac{5}{3}x^3 - 3\ln|x| + C$

7. $\dfrac{1}{6}t^6 - t^3 - \dfrac{1}{t} + C$

9. $\dfrac{2}{9}(3x+1)^{3/2} + C$

11. $\dfrac{1}{12}(x^2 + 4x + 2)^6 + C$

13. $\dfrac{-3}{4(2x^2 + 8x + 3)} + C$

15. $\dfrac{1}{14}(v - 5)^{14} + \dfrac{5}{13}(v - 5)^{13} + C$

17. $-\dfrac{5}{2}e^{-x^2} + C$

19. $\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$

21. 0

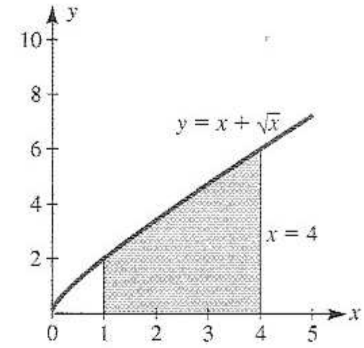
23. $\frac{1}{2}(e^2 + 5)$

25. 1,710

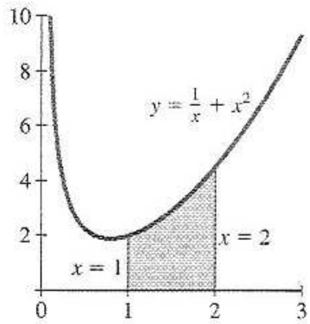
27. $1 - \frac{1}{e}$

29. $e - 2$

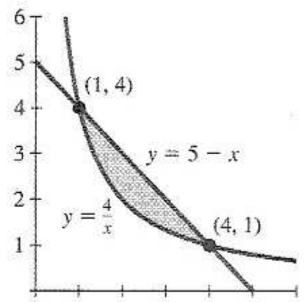
31. Área $= \frac{101}{6}$



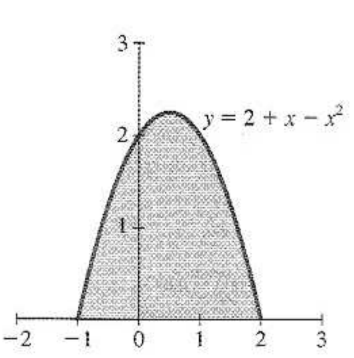
33. Área $= \ln 2 + \frac{7}{3}$



35. Área $= \frac{15}{2} - 8 \ln 2$



37. Área $= \frac{9}{2}$



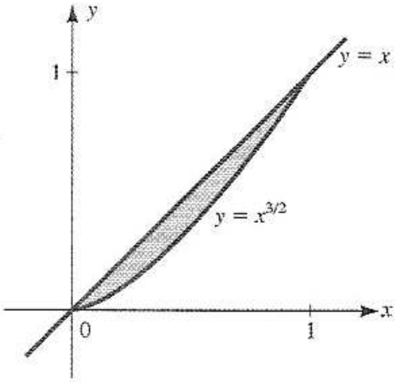
39. $\frac{11.407}{84} - \frac{2\sqrt{2}}{21} \approx 135{,}7$

41. $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$

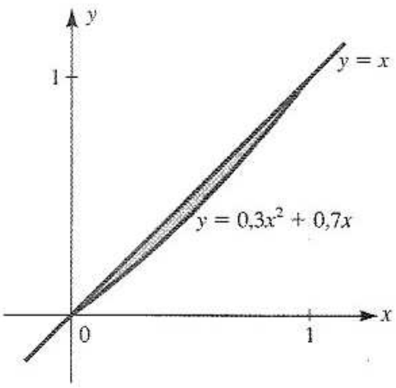
43. R\$ 128,00; R\$ 21,33

45. R\$ 6,70; R\$ 6,16

47. IG $= \frac{1}{5}$



49. IG $= \frac{1}{10}$



51. 43.984 habitantes

53. 14.308 habitantes

55. $\frac{78}{5}\pi \approx 49{,}01$ unidades cúbicas

57. $\pi \ln 3 \approx 3{,}45$ unidades cúbicas

59. $y = 2x + 10$

61. $x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

63. $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 5 - \frac{1}{2}\ln 2$

65. R\$ 87,57

67. 1.220 pessoas

69. 11.250 pessoas

71. Em 2006 (0,2554 bilhão de barris, enquanto em 2009 será 0,1003 bilhão de barris); a diferença será de 0,2554 − 0,1003 = 0,1551 bilhão de barris.

73. R\$ 7.377,37

75. 61,65 (cerca de 62 casas)

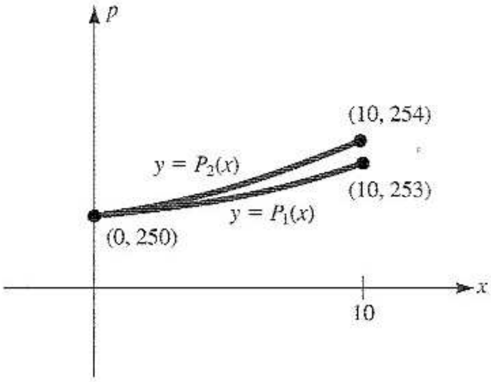
77. 14.868 kg

79. 565.056 dólares

81. R$ 1.32 o quilo

83. A temperatura diminui 2,88°C

85. **a.** $p_1(x) = 0{,}2x + 0{,}001x^3 + 250$; $p_1(10) =$ R$ 2,53 a dúzia
b. $p_2(x) = 0{,}3x + 0{,}001x^3 + 250$; $p_2(10) =$ R$ 2,54 a dúzia



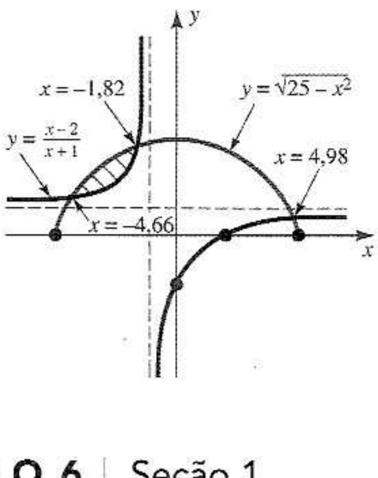
87. 30 metros

89. Na dos fisioterapeutas

91. 2.255

93. **a.** $\dfrac{1}{N}\displaystyle\int_0^N S(t)\,dt$
b. $\displaystyle\int_0^N S(t)\,dt$
c. A velocidade é igual à distância percorrida dividida pelo número de horas.

95. A região limitada pelas curvas está entre $x = -4{,}66$ e $x = -1{,}82$; as curvas também se interceptam em $x = 4{,}98$. A área é aproximadamente 3.



CAPÍTULO 6 | Seção 1

1. $-(x + 1)e^{-x} + C$

3. $(2 - x)e^x + C$

5. $\dfrac{1}{2}t^2\left(\ln 2t - \dfrac{1}{2}\right) + C$

7. $-5(v + 5)e^{-v/5} + C$

9. $\dfrac{2}{3}x(x - 6)^{3/2} - \dfrac{4}{15}(x - 6)^{5/2} + C$

11. $\dfrac{1}{9}x(x + 1)^9 - \dfrac{1}{90}(x + 1)^{10} + C$

13. $2x\sqrt{x + 2} - \dfrac{4}{3}(x + 2)^{3/2} + C$

15. $\dfrac{8}{3}$

17. $\dfrac{1}{4}(1 - 3e^{-2})$

19. $\dfrac{1}{12}(3e^4 + 1)$

21. $\dfrac{1}{16}(e^2 + 1)$

23. $-\dfrac{1}{x}(\ln x + 1) + C$

25. $\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C$

27. $\dfrac{1}{25}(3 - 5x - 3\ln|3 - 5x|) + C$

29. $\dfrac{-\sqrt{4x^2 - 9}}{x} + 2\ln\left|2x + \sqrt{4x^2 - 9}\right| + C$

31. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{2 + 3x}\right| + C$

33. $\dfrac{\sqrt{3}}{24}\ln\left|\dfrac{4 + \sqrt{3}u}{4 - \sqrt{3}u}\right| + C$

35. $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$

37. $-\dfrac{1}{25}\left[\dfrac{5 + 4x}{x(5 + 2x)} + \dfrac{4}{5}\ln\left|\dfrac{x}{5 + 2x}\right|\right] + C$

39. $f(x) = 5 + \dfrac{3}{e} - \dfrac{x + 2}{e^x}$

41. $s(t) = 4 - 2e^{-t/2}(t + 2)$

43. R$ 13.212,00

45. 2.008.876

47. $\dfrac{40}{27}(5e^2 - 14e^{1/5}) \approx 29{,}4$ mg/mL

49. $62.000e^{1/2} - 63.000 \approx$ R$ 39.220,72

51. R$ 11.417,00

53. 4.367

55. **a.** R$ 4,47 por unidade
b. R$ 14.284,56

57. $1 - \dfrac{2}{e} \approx 0{,}2642$

59. 0,09043 L/s

61. Seja $\quad U = u^n \qquad dV = e^{au}\,du$
$\qquad dU = nu^{n-1}\,du \qquad V = \dfrac{1}{a}e^{au}$

Nesse caso,

$$\int u^n e^{au}\,du$$

$$= u^n\left(\frac{1}{a}e^{au}\right) - \int \frac{1}{a}e^{au}(nu^{n-1}du)$$

$$= \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du$$

63. (0,244; 0,353)

65. **a.** A cabina deve ser instalada no centro $(\bar{x}, \bar{y})$ do estacionamento. Como a parte curva dos limites do estacionamento é descrita pela equação $2x^2 - y^2 = 1$ ou $y = \sqrt{2x^2 - 1}$, a área do estacionamento é dada por

$$A = \int_1^5 \sqrt{2x^2 - 1}\,dx = 16{,}38$$

(Use a Fórmula 18 da tabela de integrais da Seção 6.1.) Assim, temos:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_1^5 x\sqrt{2x^2 - 1}\,dx = \frac{57}{16{,}38} = 3{,}48$$

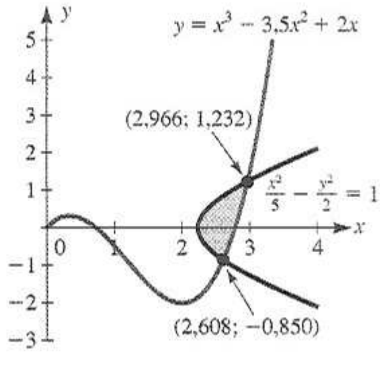
e

$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_1^5 \left(\sqrt{2x^2 - 1}\right)^2 dx = \frac{236/3}{2(16{,}38)} = 2{,}41$$

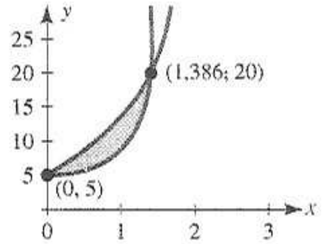
Assim, a cabina deve ser instalada no ponto (3,48; 2,41).

b. As respostas podem variar.

67. Área ≈ 0,75834



69. Área ≈ 1,95482



71. 4,2265

73. 0,4509

CAPÍTULO 6 | Seção 2

1. $y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + C$

3. $y = Ce^{3x}$

5. $e^{-y} = C - x$

7. $y^2 = x^2 + C$

9. $\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^{3/2} + C$

11. $y = C|x - 1|$

13. $\ln (y + 3)^{10} = -(2x - 5)^{-5} + C$

15. $x = Ce^{t/2}(2t + 1)^{-1/4}$

17. $y = \ln (xe^x - e^x + C)$ ou $e^y = (x - 1)e^x + C$

19. $y = Ce^{(\ln t - 1)t/2}$

21. $y = \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{4}{5}$

23. $y^3 = \frac{3}{2}x^2 + 21$

25. $y = \dfrac{6}{4(4 - x)^{3/2} + 3}$

27. $y - 2\ln|y + 1| = \ln|t| + 2(1 - \ln 3)$

29. Seja Q o número de bactérias.

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

31. Seja Q o valor do investimento.

$$\frac{dQ}{dt} = 0{,}07Q$$

33. Seja P a população.

$$\frac{dP}{dt} = 500$$

35. $\frac{dT(t)}{dt} = k[T_m - (t)]$, onde k é uma constante de proporcionalidade, T_m é a temperatura ambiente e $T(t)$ é a temperatura do corpo no instante t

37. $\frac{dR(t)}{dt} = k[F - R(t)]$, onde k é uma constante de proporcionalidade, F é o número total de fatos e $R(t)$ é o número de fatos lembrados no instante t

39. $\frac{dP}{dt} = kP(t)[N - P(t)]$, onde k é uma constante de proporcionalidade, N é o número de pessoas envolvidas e $P(t)$ é o número de pessoas implicadas no instante t.

41. $y = Ce^{kx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C(ke^{kx}) = k(Ce^{kx}) = ky$

43. $y = C_1e^x + C_2xe^x$

$$\frac{dy}{dx} = C_1e^x + C_2(xe^x + e^x)$$

$$= (C_1 + C_2)e^x + C_2xe^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (C_1 + C_2)e^x + C_2(xe^x + e^x)$$
$$= (C_1 + 2C_2)e^x + C_2xe^x$$
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = (C_1 + 2C_2)e^x + C_2xe^x -$$
$$2C_1e^x - 2C_2xe^x - 2C_2e^x + C_1e^x + C_2xe^x$$
$$= (C_1 + 2C_2 - 2C_1 - 2C_2 + C_1)e^x +$$
$$(C_2 - 2C_2 + C_2)xe^x$$
$$= 0 \cdot e^x + 0 \cdot xe^x = 0$$

45. 542.208 dólares

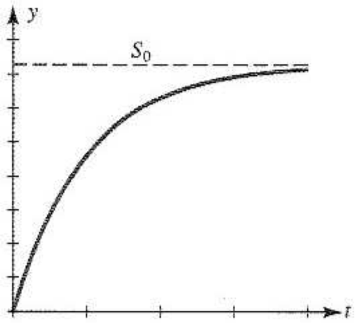
47. Se S_0 é a quantidade inicial de açúcar e $S(t)$ é a quantidade dissolvida no instante t, $S_0 - S$ é a quantidade de açúcar não dissolvido no instante t. A variação de S com o tempo pode ser expressa através da equação diferencial

$$\frac{dS}{dt} = k(S_0 - S)$$

Separando as variáveis e resolvendo a equação, obtemos

$$S(t) = S_0(1 - e^{-kt})$$

A figura a seguir mostra o gráfico de $S(t)$.



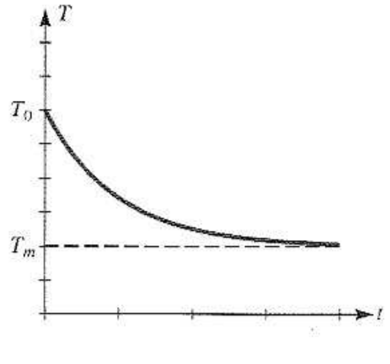
49. Seja T_0 a temperatura inicial do corpo, seja $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t e seja T a temperatura ambiente. A variação da temperatura do corpo com o tempo pode ser expressa pela equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T)$$

Separando as variáveis e resolvendo a equação, obtemos

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

A figura a seguir mostra o gráfico de $T(t)$.



51. a. $\frac{S(t)}{40}$ litros por minuto

b. $\frac{dS}{dt} = -\frac{S}{40}$

c. $S(t) = 400e^{-t/40}$

53. a. A relação entre as taxas pode ser expressa na forma

$$\frac{dV}{dt} = \begin{bmatrix}\text{taxa de}\\ \text{depósitos}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{taxa de}\\ \text{retiradas}\end{bmatrix}$$
$$= rV - W$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dV}{rV - W} = dt$$

A solução particular com $V(0) = S$ é

$$V = \frac{W}{r} + \left(S - \frac{W}{r}\right)e^{rt}$$

b. R\$ 175.639,00

c. R\$ 25.000,00

d. 7,5 anos

55. $\frac{dp}{dt} = k(1 - p), p(8) = 0{,}05$

$p(t) = 1 - (0{,}95)^{t/8}$

57. 4,16 minutos

59. a. $p(t) = 3 + 3e^{-(\ln 3/4)t}$

b. $S = D$ para $7 - p = 1 + p$ ou $p = 3$, que é igual a $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

61. a. $D(t) = \frac{a}{b}I_0e^{bt} + \left(D_0 - \frac{a}{b}I_0\right)$

$I(t) = I_0e^{bt}$

b. A razão tende a $\frac{a}{b}$.

63. Seja $P(t)$ o número de pessoas infectadas e C o número de pessoas suscetíveis.

$\frac{dP}{dt} = kP(C - P)$ é máxima para

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k(C - P) - kP = k(C - 2P) = 0$$

ou seja, para $P = \frac{C}{2}$.

65. $C(t) = \frac{R}{k} + \left(C_0 - \frac{R}{k}\right)e^{-kt}$

CAPÍTULO 6 | Seção 3

1. $\frac{1}{2}$

3. Diverge.

5. Diverge.

7. $\frac{1}{10}$

9. $\frac{5}{2}$

11. $\frac{1}{9}$

13. Diverge.

15. $\frac{2}{e} = 2e^{-1}$

17. $\frac{2}{9}$

19. Diverge.

21. Diverge.

23. 2

25. Sim

27. Sim

29. Não, $f(x)$ é negativa para $-1 \leq x < 0$.

31. **a.** 1
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{3}$

33. **a.** 1
b. $\frac{3}{16}$
c. $\frac{9}{16}$

35. **a.** 1
b. $\frac{7}{8}$
c. $\frac{1}{8}$

37. **a.** 1
b. $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}$
c. $1 - \frac{1}{e^4}$

39. $\frac{7}{2}$

41. $\frac{4}{3}$

43. $\frac{3}{2}$

45. R$ 60.000,00

47. R$ 600.000,00

49. 200 pacientes

51. 50 unidades

53. **a.** $\frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{9}$
c. $\frac{45}{2}$ segundos

55. **a.** $\frac{1}{e} \approx 0{,}368$
b. $\frac{1}{e^{2/3}} - \frac{1}{e^{5/3}} \approx 0{,}325$
c. 3 minutos

57. **a.** $\frac{1}{e^{1/5}} - \frac{1}{e^{3/10}} \approx 0{,}078$
b. $1 - \frac{1}{e^{4/25}} \approx 0{,}148$
c. $\frac{1}{e^{6/25}} \approx 0{,}787$
d. 50 meses

59. **a.** $\frac{1}{5}$
b. $1 - \frac{1}{e^{2/5}} \approx 0{,}33$
c. $e^{-7/5} \approx 0{,}247$

61. **a.** $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}632$
b. $e^{-6/5} \approx 0{,}301$
c. 5 minutos

63. R$ 875.000,00

65. **a.** 0,595
b. 0,445

67.
$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^N (A + Bt)e^{-rt}\,dt$$
$$= \lim_{N\to+\infty} -\frac{A}{r}e^{-rt} + B\left(-\frac{t}{r}e^{-rt} + \frac{1}{r}\int_0^N e^{-rt}\,dt\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \left(-\frac{A}{r}e^{-rt} - \frac{Bt}{r}e^{-rt} - \frac{B}{r^2}e^{-rt}\right)\Bigg|_0^N$$
$$= 0 - \left(-\frac{A}{r}e^0 - 0 - \frac{B}{r^2}e^0\right) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

69.
$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\infty} kxe^{-kx}\,dx$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N kxe^{-kx}\,dx$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(-xe^{-kx}\Big|_0^N + \int_0^N e^{-kx}\,dx\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(-xe^{-kx} - \frac{1}{k}e^{-kx}\right)\Bigg|_0^N$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(-Ne^{-kN} - \frac{1}{k}e^{-kN} + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

CAPÍTULO 6 | Seção 4

1. a. 2,343750
   b. $\frac{7}{3}$
3. a. 0,782794
   b. 0,785392
5. a. 1,151479
   b. 1,147782
7. a. 0,742984
   b. 0,746855
9. a. 1,930756
   b. 1,922752
11. a. 1,096997
    b. 1,094800
13. a. 0,849195
    b. 0,836203
15. a. 0,508994; $|E_n| \leq 0{,}031250$
    b. 0,500418; $|E_n| \leq 0{,}002604$
17. a. 2,796731; $|E_n| \leq 0{,}001667$
    b. 2,797432; $|E_n| \leq 0{,}000017$
19. a. 1,490679; $|E_n| \leq 0{,}084946$
    b. 1,463711; $|E_n| \leq 0{,}004483$
21. a. 164
    b. 18
23. a. 36
    b. 6
25. a. 179
    b. 8
27. a. 3,0898
    b. 3,1212
29. 0,138569
31. 0,358531 unidade cúbica
33. R$ 26.072,45
35. 3.496 pessoas
37. 51,75 km
39. R$ 5.950,00
41. 235 m^2
43. R$ 34.200,00
45. 475.197
47. a. A integral é a diferença entre o número cumulativo de mortes provocadas pela AIDS até 2001 e o número cumulativo até 1990. Este é exatamente o número de mortes no período de 1990 a 2001.
    b. 362.771
    c. As respostas podem variar.

CAPÍTULO 6 | Verificação

1. a. $\frac{4\sqrt{2}}{9}x^{3/2}(3\ln x - 2) + C$
   b. $25 - 20e^{0,2}$
   c. $-\frac{298}{15}$
   d. $-xe^{-x} + C$
2. a. 10
   b. $\frac{3}{4}e^{-2}$
   c. Diverge.
   d. 0
3. a. $\frac{x}{4}[(\ln 3x)^2 - 2\ln 3x + 2]$
   b. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+2}{x}\right| + C$
   c. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$
   d. $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{3x-4}\right| + C$
4. a. $y = \sqrt{\frac{4}{x} + 5}$
   b. $y = -3\sqrt{x^2+1}$
   c. $y = x - \ln(x+1)$
5. R$ 16.487,21
6. R$ 1.666.667,00
7. a. 0,6977
   b. 0,0787
   c. 33,3 meses
8. 3,5 mg
9. a. $\frac{dm}{dt} = kmt;\ m(t) = Ce^{-(\ln 2/144)t^2}$
   b. 67,7%
10. 1,027552; $5\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1$

CAPÍTULO 6 | Problemas de Revisão

1. $-e^{1-t}(t+1) + C$
3. $\frac{1}{3}x(2x+3)^{3/2} - \frac{1}{15}(2x+3)^{5/2} + C$
5. $4\ln 2 - 2$
7. $\frac{74}{7}$
9. $\frac{1}{9}x^2(3x^2+2)^{3/2} - \frac{2}{135}(3x^2+2)^{5/2} + C$
11. $\frac{5}{8}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$

13. $-3w^2e^{-w/3} - 18we^{-w/3} - 54e^{-w/3} + C$

15. $x[(\ln 2x)^3 - 3(\ln 2x)^2 + 6\ln 2x - 6] + C$

17. Diverge.

19. Diverge.

21. $\frac{1}{4}$

23. $\frac{1}{4}$

25. Diverge.

27. $y = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C$

29. $y = 80 - Ce^{-kx}$

31. $y = x^5 - x^3 - 2x + 6$

33. $y = 2e^{1-\sqrt{1-x^2}}$

35. **a.** 1
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{3}$

37. **a.** 1
b. 0,3694
c. 0,3679

39. R$ 22.857,00

41. $\frac{dQ}{dt} = \frac{-Q}{50}$; 81,2 kg

43. $\frac{dQ}{dt} = 18 - \frac{18Q}{5.000}$; 640 dias

45. A população aumentará indefinidamente.

47. $\frac{1}{6}$

49. R$ 320.000,00

51. $\frac{2}{9}$

53. **a.** 0,7047
b. 0,1466

55. **a.** $k = \frac{\ln 10}{30}$
b. $D(t) = 50e^{-(\ln 10/30)t}$, $S(t) = 5e^{(\ln 10/15)t}$
c. 23,2 unidades

57. **a.** $P'(t) = (b-d)P(t)$; $P(t) = P_0e^{(b-d)t}$
b. $P'(t) = kP^{1+1/c}$; $P(t) = \left(P_0^{-1/c} - \frac{kt}{c}\right)^{-c}$
c. 3.375

59. 15.000

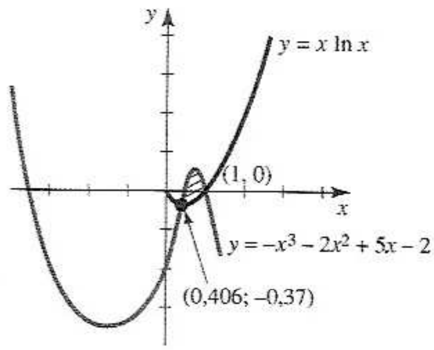
61. **a.** 17,565086; erro $|E_8| \leq 10{,}3$
b. 16,538595; erro $|E_8| \leq 1{,}1$

63. **a.** 2,94940; erro $|E_8| \leq 0{,}0035$
b. 2,94834; erro $|E_8| \leq 0{,}00008$

65. **a.** 13
b. 2

67. 4.804,80 milhares de reais

69. As curvas se interceptam em $x = 1$ e aproximadamente em $x = 0{,}41$; área $\approx 0{,}1692$.



71. $\frac{2}{3}\ln 2$

73. As respostas podem variar; 0,5.

75. $\frac{b}{a}\ln S + \frac{c}{a}S + \frac{1}{2a}S^2 = t + C$

CAPÍTULO 7 | Seção 1

1. $f(2,-1) = -3, f(1,2) = 16$

3. $g(4,5) = 3, g(-1,2) = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$

5. $f(e^2, 3) = \frac{3}{2}; f(\ln 9, e^3) = 25{,}515$

7. $g(1,2) = 2{,}5; g(2,-3) = -2{,}167$

9. $f(1,2,3) = 6; f(3,2,1) = 6$

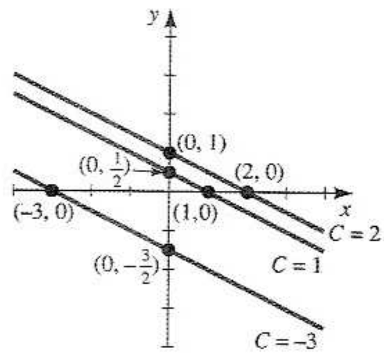
11. $F(1,1,1) \approx 0{,}2310; F(0, e^2, 3e^2) \approx 0{,}1048$

13. Todos os pares ordenados (x, y) de números reais para os quais $y \neq \frac{-4}{3}x$

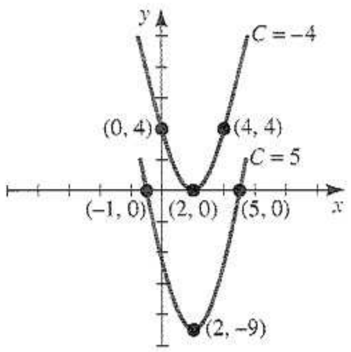
15. Todos os pares ordenados (x, y) de números reais para os quais $y \leq x^2$

17. Todos os pares ordenados (x, y) de números reais para os quais $x > 4 - y$

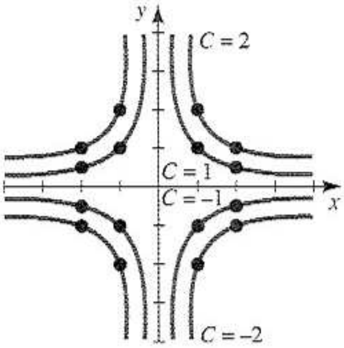
19.



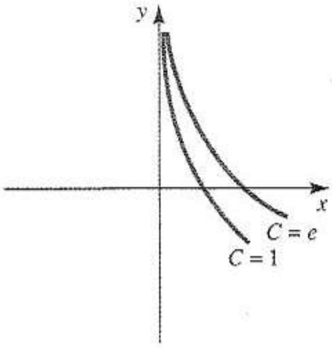
21.



23.



25.



27. a. 160.000 unidades

b. A produção aumentará de 16.400 unidades.

c. A produção aumentará de 4.000 unidades.

d. A produção aumentará de 20.810 unidades.

29. a. $R(x_1, x_2) = 200x_1 - 10x_1^2 + 25x_1x_2 + 100x_2 - 10x_2^2$

b. R$ 1.840,00

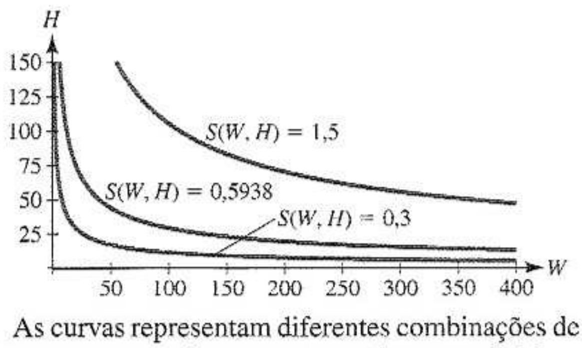
31. a. Se $a + b > 1$, a produção mais do que dobra.

b. Se $a + b < 1$, a produção aumenta, mas não chega a dobrar.

c. Se $a + b = 1$, a produção dobra.

33. $R(x, y) = 60x - \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{xy}{10} + 50y - \dfrac{y^2}{10}$

35. a. $S(15{,}83; 87{,}11) = 0{,}5938$



As curvas representam diferentes combinações de altura e peso que resultam na mesma área superficial.

b. 90,05 cm de altura

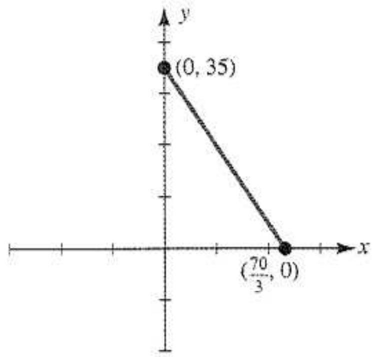
c. 254%

d. As respostas podem variar.

37. a. 70 unidades

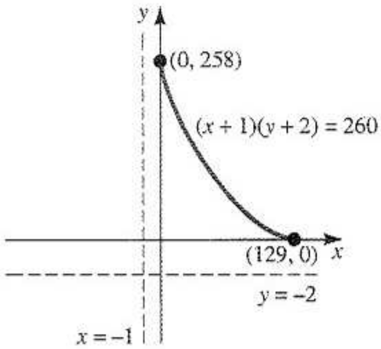
b. $y = -\dfrac{3}{2}x + 35$

c.



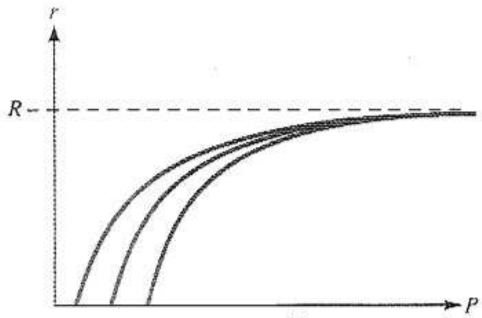
d. O número de operários não-especializados deve diminuir de três unidades.

39. 260



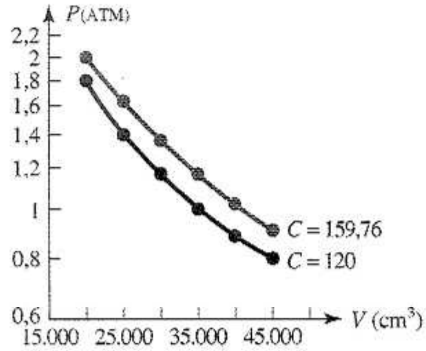
41. a. 0,866 cm/s

b.



As curvas representam diferentes combinações de pressão e distância do eixo que resultam na mesma velocidade.

43. a.



b. 159,76°C

45. **a.** 2105,03 quilocalorias
b. 1428,84 quilocalorias
c. 27 anos
d. 24,4 anos

47. **a.** R$ 2.003,13; R$ 110.563,40
b. R$ 1.435,20; R$ 266.672,00

49. 23,54

51. Para $Q(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$,

$$\begin{aligned} Q(sK, sL) &= A(sK)^{\alpha}(sL)^{1-\alpha} \\ &= As^{\alpha}K^{\alpha}s^{1-\alpha}L^{1-\alpha} \\ &= s^{\alpha+1-\alpha}AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \\ &= sAK^{\alpha}L^{1-\alpha} \\ &= sQ(K, L) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 7 | Seção 2

1. $f_x = 2y^5 + 6xy + 2x; f_y = 10xy^4 + 3x^2$

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 15(3x + 2y)^4; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 10(3x + 2y)^4$

5. $f_s = -\dfrac{3t}{2s^2}; f_t = \dfrac{3}{2s}$

7. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (xy + 1)e^{xy}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2e^{xy}$

9. $f_x = \dfrac{-e^{2-x}}{y^2}; f_y = \dfrac{-2e^{2-x}}{y^3}$

11. $f_x = \dfrac{5y}{(y-x)^2}; f_y = \dfrac{-5x}{(y-x)^2}$

13. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \ln v; \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{u}{v}$

15. $f_x = \dfrac{1}{y^2(x + 2y)}; f_y = \dfrac{2[y - (x + 2y)\ln(x + 2y)]}{y^3(x + 2y)}$

17. $f_x(-2, 1) = -22; f_y(-2, 1) = 26$

19. $f_x(0, 0) = 1; f_y(0, 0) = 1$

21. $f_{xx} = 60x^2y^3; f_{xy} = 2(30x^3y^2 + 1);$
$f_{yx} = 2(30x^3y^2 + 1); f_{yy} = 30x^4y$

23. $f_{xx} = 2y(2x^2y + 1)e^{x^2y}; f_{xy} = 2x(x^2y + 1)e^{x^2y};$
$f_{yx} = 2x(x^2y + 1)e^{x^2y}; f_{yy} = x^4e^{x^2y}$

25. $f_{ss} = \dfrac{t^2}{\sqrt{(s^2 + t^2)^3}}; f_{st} = \dfrac{-st}{\sqrt{(s^2 + t^2)^3}};$

$f_{ts} = \dfrac{-st}{\sqrt{(s^2 + t^2)^3}}; f_{tt} = \dfrac{s^2}{\sqrt{(s^2 + t^2)^3}}$

27. Substitutos

29. Nem uma coisa nem outra

31. Substitutos

33. Sim

35. Não

37. A produção diária aumentará aproximadamente em 10 unidades.

39. **a.** A produtividade marginal do capital é aproximadamente de 27 unidades. A produtividade marginal da mão-de-obra é aproximadamente de 64 unidades.
b. O aumento da mão-de-obra.

41. $F(L, r) = \dfrac{kL}{r^4}$

a. $F(3{,}17; 0{,}085) = 60.727{,}24k;$
$\dfrac{\partial F}{\partial L} = \dfrac{k}{r^4} = 19.156{,}86k;$
$\dfrac{\partial F}{\partial r} = -\dfrac{4kL}{r^5} = -2.857.752{,}58k$

b. $F(1{,}2L; 0{,}8r) = \dfrac{k(1{,}2L)}{(0{,}8r)^4} = 2{,}93F(L, r);$
$\dfrac{\partial F}{\partial r}(1{,}2L; 0{,}8r) = 3{,}66\dfrac{\partial F}{\partial r}(L, r);$
$\dfrac{\partial F}{\partial L}(1{,}2L; 0{,}8r) = 2{,}44\dfrac{\partial F}{\partial L}(L, r)$

43. A demanda mensal de bicicletas diminuirá de aproximadamente 3 unidades.

45. O volume aumentará de 72π cm³.

47. **a.** Um aumento de x fará diminuir a demanda $D(x, y)$ de cortadores da primeira marca. Um aumento de y fará aumentar a demanda $D(x, y)$ de cortadores da primeira marca.
b. $\dfrac{\partial D}{\partial x} < 0, \dfrac{\partial D}{\partial y} > 0$
c. $b < 0, c > 0$

49. $P(x, y, u, v) = \dfrac{100xy}{xy + uv};$

$$P_x = \frac{(xy + uv)100y - 100xy^2}{(xy + uv)^2} = \frac{100uvy}{(xy + uv)^2};$$

$$P_y = \frac{(xy + uv)100x - 100x^2y}{(xy + uv)^2} = \frac{100uvx}{(xy + uv)^2};$$

$$P_u = -\frac{100xyv}{(xy + uv)^2}$$

$$P_v = -\frac{100xyu}{(xy + uv)^2}$$

Estas derivadas parciais medem a taxa de variação da porcentagem total de sangue com as grandezas x, y, u e v, respectivamente.

51. $\dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{-c\pi x^2}{8\sqrt{y - z}}$; decrescente, já que $F_{zz} < 0$

53. **a.** $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$; para um valor fixo do capital imobilizado, o efeito sobre a produção de um aumento de uma unidade de mão-de-obra é maior quando a mão-de-obra é pequena do que quando a mão-de-obra é grande.

b. $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$; para um valor fixo da mão-de-obra, o efeito sobre a produção de um aumento de R$ 1.000,00 do capital imobilizado é maior quando o capital imobilizado é pequeno do que quando o capital imobilizado é grande.

55. **a.** $Q(37, 71) = 304.691$; $Q(38, 71) = 317.310$; $Q(37, 72) = 309.031$
b. $Q_x(37, 71) = 12.534$ unidades; $Q(38, 71) - Q(37, 71) = 12.619$ unidades
c. $Q_y(37, 71) = 4.344$ unidades; $Q(37, 72) - Q(37, 71) = 4.340$ unidades

57. $\dfrac{dz}{dt} = 4t + 15$

59. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3}{y} - \dfrac{6xt}{y^2}$

61. $\dfrac{dz}{dt} = 2ye^{2t} - 3xe^{-3t}$

63. O número de unidades produzidas diminui de aproximadamente 55.

65. **a.** 424 unidades por mês
b. 16,31%

67. O número de unidades produzidas aumentará de aproximadamente 62 unidades por mês.

69. As vendas diminuirão em aproximadamente 2.000 livros.

71. **a.** $C(R, H) = 0{,}001\pi(R^2 + RH + R^2H)$
b. O custo aumentará de 0,08 centavos por lata.

73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}$; $x - 2y = -1$

75. 2,6 unidades

CAPÍTULO 7 | Seção 3

	Máximo relativo	Mínimo relativo	Ponto de sela
1.	$(0, 0)$	Nenhum	Nenhum
3.	Nenhum	Nenhum	$(0, 0)$
5.	Nenhum	Nenhum	$(2, -1)$
7.	$(-2, -1)$	$(1, 1)$	$(-2, 1)$; $(1, -1)$
9.	Nenhum	$\left(4, \dfrac{19}{2}\right)$	$\left(2, \dfrac{7}{2}\right)$
11.	$(0, 1)$; $(0, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$; $(-1, 0)$
13.	Nenhum	$\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$	$(0, 0)$
15.	$(0, 3)$	Nenhum	Nenhum
17.	$\left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$	Nenhum	Nenhum
19.	$(e, 1)$; $(e, -1)$	Nenhum	Nenhum

21. Camisas Jordan: $x =$ R\$ 2,70; camisas O'Neal: $y =$ R\$ 2,50

23. O caixote deve ter 2 metros de comprimento, 2 metros de largura e 1 metro de altura.

25. $x = y = 20$

27. $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

29. $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

31. $x = 200$; $y = 300$

33. $S\left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$

35. $P = \dfrac{2}{3}$, para $p = q = r = \dfrac{1}{3}$.

37. **a.** Paulo deve esperar em $x = 0{,}424$ km; Maria deve esperar em $y = 2{,}236$ km (1,6397 km de F). O menor tempo possível é 1,748 hora.
b. Pedro, Paulo e Maria ganham por uma diferença de 0,2080 hora (12,5 minutos).
c. As respostas podem variar.

39. O problema pode ser enunciado da seguinte forma:

minimizar $V = 1{,}80\left[x - 2\left(\dfrac{1{,}80}{\sqrt{3}}\right)\right]y$

com a restrição de que $2xy + 2\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2\right) = 45$

A solução é $x = 4{,}161$ m; $y = 3{,}606$ m

41. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y$; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y - 4x$. Assim, $(0, 0)$ é um ponto crítico. Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, o teste da derivada segunda mostra que existe um mínimo na direção x. Além disso, o fato de que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 > 0$ mostra que existe um mínimo na direção y. Entretanto, ao longo da reta $y = x$, temos $f = -2x^2$, que possui um máximo relativo no ponto $(0, 0)$.

43. $f_x = \dfrac{x^2 - 7y^2}{x^2 \ln y}$;

$f_y = \dfrac{y(x + 14y)\ln y - (x^2 + xy + 7y^2)}{xy(\ln y)^2}$

Pontos críticos: $(\sqrt{7}e, e)$, $(-\sqrt{7}e, e)$

45. $f_x = 8x^3 - 22xy + 36x$; $f_y = 4y^3 - 11x^2$

Ponto crítico: $(0, 0)$

CAPÍTULO 7 | Seção 4

1. $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2}$

3. $y = 3$

5. $y = \dfrac{7}{9}x + \dfrac{19}{18}$

7. $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$

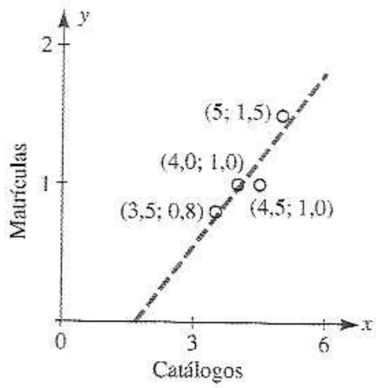
9. $y \doteq 1{,}018x + 0{,}802$

11. $y = -0{,}915x + 1{,}683$

13. $y = 15{,}018e^{0{,}04x}$

15. $y = 20{,}03e^{-0{,}201x}$

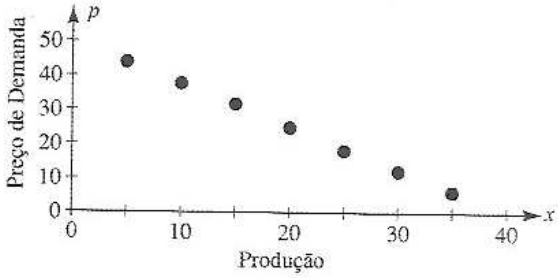
17. a.



b. $y = 0{,}42x - 0{,}71$

c. Se 4.800 catálogos ($x = 4{,}8$) forem pedidos, haverá $y = 0{,}42(4{,}8) - 0{,}71 = 1{,}306$ ou 1.306 pedidos de matrícula.

19. a.



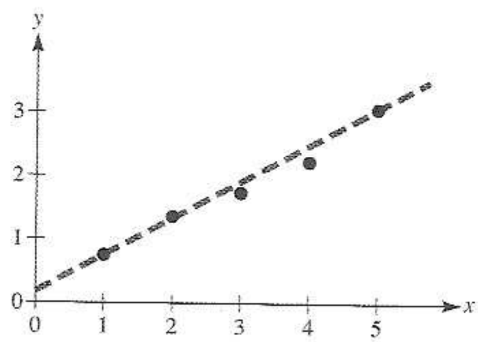
b. $p = -1{,}29x + 50{,}71$

c. Como o preço previsto é negativo, não será possível vender as 4.000 unidades por nenhum preço.

21. a. Seja x o número de horas após o início da votação e y a porcentagem correspondente de eleitores que já votaram. Nesse caso,

x	2	4	6	8	10
y	12	19	24	30	37

x	y	xy	x^2
2	12	24	4
4	19	76	16
6	24	144	36
8	30	240	64
10	37	370	100
$\sum x = 30$	$\sum y = 122$	$\sum xy = 854$	$\sum x^2 = 220$



b. $y = 3{,}05x + 6{,}10$

c. Quando a votação for encerrada às 20 h, $x = 12$ e, portanto, $y = 3{,}05(12) + 6{,}1 = 42{,}7$, o que significa que 42,7% dos eleitores terão votado.

23. a. 12,5% por década

b. 308,4 milhões de habitantes

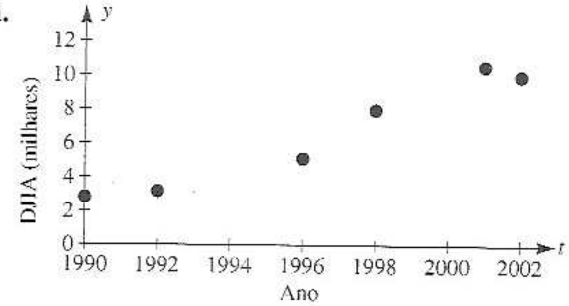
25. a. $V = 53{,}90e^{0{,}041t}$; 4,09%

b. R$ 122.380,00

c. 42 anos

d. A fórmula usada por Marcos é $V = 54{,}52e^{0{,}044t}$. É mais fácil de obter, mas não é tão precisa, já que se baseia em apenas dois pontos experimentais.

27. a.



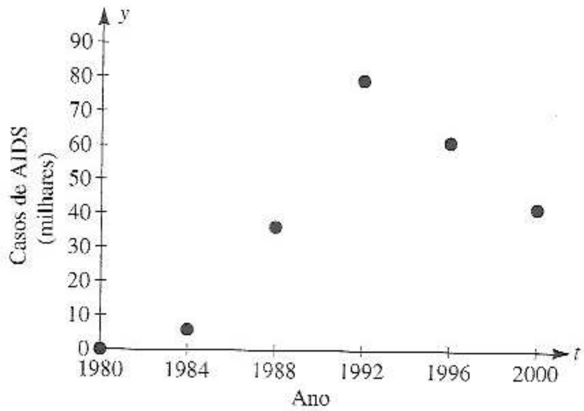
b. $y = 693{,}75t + 2131{,}1$

c. Previsto: 11.150; real: 8.608

29. a. $y = 538{,}9t + 6.584{,}80$

b. 11.634 bilhões de yuans

31. a.

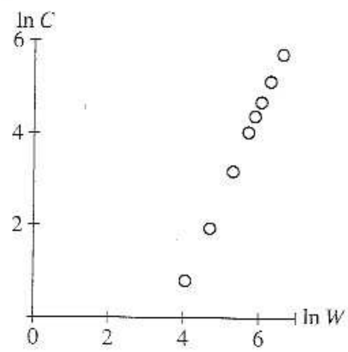


b. $y = 2.985{,}3t + 7.691$

c. 82.324 casos

d. Não. A curva tem uma inclinação positiva, mas o número de casos parece estar diminuindo.

33. a.



b. $y = 1{,}631x - 4{,}975$

c. $C = 0{,}0069W^{1{,}631}$

CAPÍTULO 7 | Seção 5

1. $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

3. $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$

5. $f(0, 2) = f(0, -2) = -4$

7. $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ (máx);
$f(0, 1) = -3$ (mín)

9. $f(8, 7) = -18$

11. $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = e^2$ (máx);
$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = e^{-2}$ (mín)

13. $f\left(8, 4, \frac{8}{3}\right) = \frac{256}{3}$ (max)

15. $f\left(\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}, \frac{12}{\sqrt{14}}\right) = \frac{56}{\sqrt{14}}$ (máx);
$f\left(-\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}}\right) = \frac{-56}{\sqrt{14}}$ (mín)

17. 40 metros por 80 metros

19. 11.664 polegadas cúbicas, com $x = 18$, $y = 36$

21. $r = 3{,}74$ cm; $h = 7{,}51$ cm

23. Desenvolvimento, $x =$ R\$ 2.000,00; propaganda, $y =$ R\$ 6.000,00

25. A produção aumentará de 31,75.

27. $H = 2R$

29. $s_{\text{máx}} = 4L$

31. $x = 8{,}93$ cm, $y = 10{,}04$ cm

33. $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

35. Frente, 11,5 m; lados, 15,4 m; altura, 7,2 m

37. $\lambda = 306{,}12$ o que corresponde à variação aproximada para cada R\$ 1.000,00. Como a diferença é apenas de R\$ 100,00, o lucro máximo aumenta de aproximadamente 0,1(R\$ 306,12) = R\$ 30,61.

39. **a.** $x = 35$ unidades, $y = 42$ unidades
b. $\lambda = 14{,}33$ é a variação aproximada da máxima utilidade que resulta de uma variação de um aumento de uma unidade na quantia disponível.

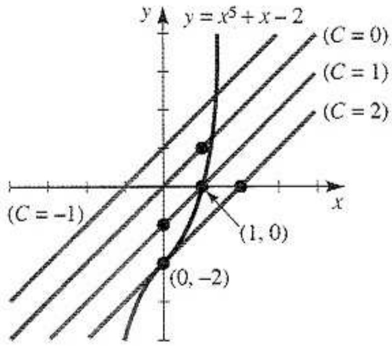
41. Aumenta de $\lambda = \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{b}\right)^{\beta}$

43. Seja $Q(x, y) =$ produção; $C(x, y) = px + qy = k$. $C_x = p$, $C_y = q$. Assim, $Q_x = \lambda p$; $Q_y = \lambda q$; $\frac{Q_x}{p} = \frac{Q_y}{q}$.

45. $Q(40, 14) \approx 1.398$

47. Para $Q(K, L) = A[\alpha K^{-\beta} + (1 - \alpha) L^{-\beta}]^{-1/\beta}$,
$$\begin{aligned} Q(sK, sL) &= A[\alpha(sK)^{-\beta} + (1-\alpha)(sL)^{-\beta}]^{-1/\beta} \\ &= A[\alpha s^{-\beta} K^{-\beta} + (1-\alpha) s^{-\beta} L^{-\beta}]^{-1/\beta} \\ &= A[s^{-\beta}\{\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha) L^{-\beta}\}]^{-1/\beta} \\ &= A[s^{-\beta}]^{-1/\beta}[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha) L^{-\beta}]^{-1/\beta} \\ &= sA[\alpha K^{-\beta} + (1-\alpha) L^{-\beta}]^{-1/\beta} \\ &= sQ(K, L) \end{aligned}$$

49. $x = 0$, $y = -2$. O ponto crítico $(0, -2)$ não é um extremo relativo e sim um ponto de inflexão.



51. $\frac{\partial P}{\partial K} = \lambda \frac{\partial C}{\partial K}$; $\frac{\partial P}{\partial L} = \lambda \frac{\partial C}{\partial L}$; $\lambda = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial K}}{\frac{\partial C}{\partial K}} = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial L}}{\frac{\partial C}{\partial L}}$

53. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x^2} - (1 + xy^2)e^{xy^2} - \ln(x + y) - \frac{x}{x + y}}{2x^2ye^{xy^2} + \frac{1}{x} + \frac{x}{x + y}}$$

55. $f(2{,}1623; 1{,}5811) = 1{,}6723$

57. $f(0{,}9729; -0{,}1635) = 2{,}9522$

CAPÍTULO 7 | Seção 6

1. $\frac{7}{6}$

3. -1

5. $4 \ln 2 = \ln 16$

7. 0

9. $\ln 3$

11. 32

13. $\frac{1}{3}$

15. $\frac{32}{9}$

17. $\frac{e^2 - 1}{8}$

19. Retas verticais como limites: $0 \le x \le 3$
$x^2 \le y \le 3x$
Retas horizontais como limites: $0 \le y \le 9$
$\frac{y}{3} \le x \le \sqrt{y}$

21. Retas verticais como limites: $-1 \le x \le 2$
$1 \le y \le 2$
Retas horizontais como limites: $1 \le y \le 2$
$-1 \le x \le 2$

23. Retas verticais como limites: $1 \le x \le e$
$0 \le y \le \ln x$
Retas horizontais como limites: $0 \le y \le 1$
$e^y \le x \le e$

25. $\dfrac{3}{2}$

27. $\dfrac{1}{2}$

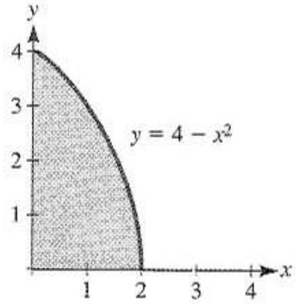
29. $\dfrac{44}{15}$

31. 1

33. $\dfrac{3}{2}\ln 5$

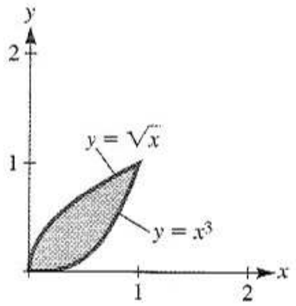
35. $2(e-2)$

37.



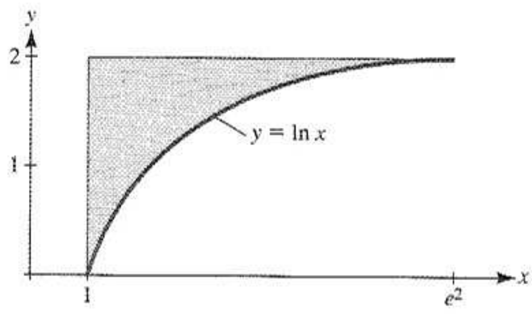
$$\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

39.



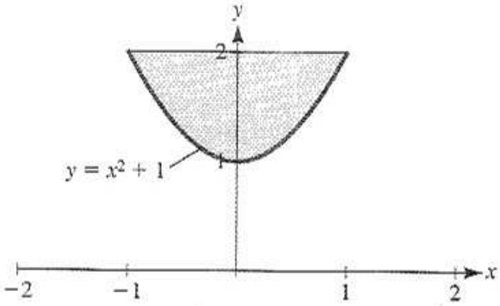
$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y^2}^{x=y^{1/3}} f(x,y)\,dx\,dy$$

41.



$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=1}^{x=e^y} f(x,y)\,dx\,dy$$

43.



$$\int_{y=1}^{y=2}\int_{x=-\sqrt{y-1}}^{x=\sqrt{y-1}} f(x,y)\,dx\,dy$$

45. $\displaystyle\int_{x=-4}^{x=2}\int_{y=0}^{y=x+4} 1\,dy\,dx = 18$

47. $\displaystyle\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=\frac{1}{2}x^2}^{y=2x} 1\,dy\,dx = \frac{16}{3}$

49. $\displaystyle\int_{x=1}^{x=3}\int_{y=x^2-4x+3}^{0} 1\,dy\,dx = \frac{4}{3}$

51. $\displaystyle\int_{x=1}^{x=e}\int_{y=0}^{y=\ln x} 1\,dy\,dx = 1$

53. $\displaystyle\int_{y=0}^{y=3}\int_{x=y/3}^{x=\sqrt{4-y}} 1\,dx\,dy = \frac{19}{6}$

55. $\displaystyle\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=1} (6-2x-2y)\,dx\,dy = 6$

57. $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2}\int_{y=1}^{y=3} \frac{1}{xy}\,dy\,dx = (\ln 3)(\ln 2)$

59. $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} xe^{-y}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

61. $\displaystyle\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=2-y} (2x+y)\,dx\,dy = \frac{7}{3}$

63. $\displaystyle\int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=x^2}^{y=8-x^2} (x+1)\,dy\,dx = \frac{64}{3}$

65. Área $\displaystyle = \int_{x=-2}^{x=3}\int_{y=-1}^{y=2} 1\,dy\,dx = 15$

Média $\displaystyle = \frac{1}{15}\int_{x=-2}^{x=3}\int_{y=-1}^{y=2} xy(x-2y)\,dy\,dx = \frac{1}{6}$

67. Área $\displaystyle = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} 1\,dy\,dx = 2$

Média $\displaystyle = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} xye^{x^2y}\,dy\,dx = \frac{e^2-3}{4}$

69. Área $\displaystyle = \int_{x=0}^{x=3}\int_{y=x/3}^{y=1} 1\,dy\,dx = \frac{3}{2}$

Média $\displaystyle = \frac{2}{3}\int_{x=0}^{x=3}\int_{y=x/3}^{y=1} 6xy\,dy\,dx = \frac{9}{2}$

71. Área $= \int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=0}^{y=4-x^2} 1\,dy\,dx = \dfrac{32}{3}$

Média $= \dfrac{3}{32}\int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=0}^{y=4-x^2} x\,dy\,dx = 0$

73. $\int_{x=1}^{x=3}\int_{y=2}^{y=5} \dfrac{\ln(xy)}{y}\,dy\,dx$

$= (3\ln 3 - 2)\ln\dfrac{5}{2} + (\ln 5)^2 - (\ln 2)^2$

75. $\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} x^3 e^{x^2 y}\,dy\,dx = \dfrac{e-2}{2}$

77. Área $= \int_{x=0}^{x=5}\int_{y=0}^{y=7} 1\,dy\,dx = 35$

Média $= \dfrac{1}{35}\int_{x=0}^{x=5}\int_{y=0}^{y=7} (2x^3 + 3x^2y + y^3)\,dy\,dx$

$= \dfrac{943}{4}$

79. Média $= \dfrac{1}{25\cdot 19}\int_{x=100}^{x=125}\int_{y=70}^{y=89} [(x-30)(70+5x$

$-4y) + (y-40)(80-6x+7y)]\,dy\,dx$

$= 24.896{,}5$ (R$ 2.489.650,00)

81. Média $= \dfrac{1}{12}\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=0}^{y=3} 90(2x+y^2)\,dy\,dx$

$= 630$ metros

83. Valor $= \int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=-1}^{y=1} (300+x+y)\,e^{-0{,}01x}\,dy\,dx$

$= 79.800\,e^{0{,}01} - 80.200\,e^{-0{,}01} \approx 1.200$

85. **a.** 0,991 metro quadrado

b. Não; pode ser interpretado apenas como o valor médio da área superficial da pessoa até se tornar adulta.

87. $\dfrac{17.408}{105} \approx 166\ \text{m}^3$

89. $\dfrac{304}{27} \approx 11{,}26$

91. $\dfrac{7e^{-6}}{9} + \dfrac{17}{9} \approx 1{,}891$ unidade cúbica

CAPÍTULO 7 | Verificação

1. **a.** Domínio: todos os pares ordenados (x, y) de números reais

$$f_x = 3x^2 + 2y^2$$
$$f_y = 4xy - 12y^3$$
$$f_{xx} = 6x$$
$$f_{yx} = 4y$$

b. Domínio: todos os pares ordenados (x, y) de números reais para os quais $x \neq y$

$$f_x = \frac{-3y}{(x-y)^2}$$
$$f_y = \frac{3x}{(x-y)^2}$$
$$f_{xx} = \frac{6y}{(x-y)^3}$$
$$f_{yx} = \frac{-3(x+y)}{(x-y)^3}$$

c. Domínio: todos os pares ordenados (x, y) de números reais para os quais $y^2 > 2x$

$$f_x = 2e^{2x-y} - \frac{2}{y^2-2x}$$
$$f_y = -e^{2x-y} + \frac{2y}{y^2-2x}$$
$$f_{xx} = 4e^{2x-y} - \frac{4}{(y^2-2x)^2}$$
$$f_{yx} = -2e^{2x-y} + \frac{4y}{(y^2-2x)^2}$$

2. **a.** Circunferências com centro na origem e o ponto isolado $(0, 0)$

b. Parábolas com o vértice no eixo x e a concavidade à esquerda

3. **a.** Máximo relativo: $(0, 0)$; mínimo relativo: $(1, 4)$; pontos de sela: $(1, 0)$, $(0, 4)$

b. Ponto de sela: $(-1, 0)$

c. Mínimo relativo: $(-1, -1)$

4. **a.** $\dfrac{16}{5}$ em $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

b. Máximo de 4 em $(1, 2)$ e $(1, -2)$; mínimo de -4 em $(-1, 2)$ e $(-1, -2)$.

5. **a.** 16

b. $\dfrac{1}{4}(e^2 + 3e^{-2})$

c. $2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$

d. $1 - \dfrac{1}{e^2}$

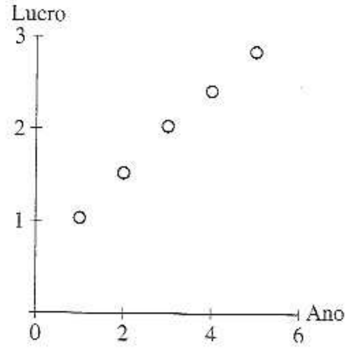
6. $Q_K = 180$; $Q_L = 3{,}75$

7. 12 DVDs e 2 videogames

8. 30 unidades do medicamento A e 25 unidades do medicamento B, o que resulta em uma dose equivalente de $E(30, 25) = 83{,}75$ unidades. Como o número total de unidades é 55, que é menor que 60, não há risco de efeitos colaterais; como $E(30, 25) > 70$, a combinação é eficaz.

9. $\dfrac{5}{2}(1 + e^{-2}) \approx 2{,}84\,^\circ\text{C}$

10. a.



b. $y = 0{,}45x + 0{,}61$

c. 3,31 milhões de reais

CAPÍTULO 7 | Problemas de Revisão

1. $f_x = 6x^2y + 3y^2 - \dfrac{y}{x^2}$; $f_y = 2x^3 + 6xy + \dfrac{1}{x}$

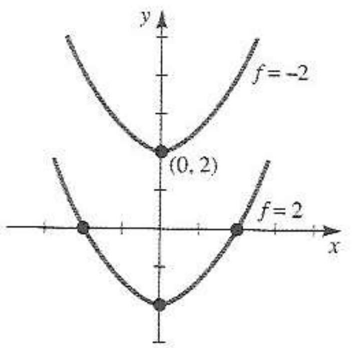
3. $f_x = y(xy + 1)e^{xy}$; $f_y = x(xy + 1)e^{xy}$

5. $f_x = \dfrac{3y}{x(x + 3y)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 3y}$;

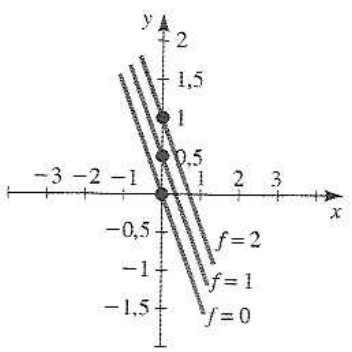
$f_y = \dfrac{x}{y(x + 3y)} = \dfrac{1}{y} - \dfrac{3}{x + 3y}$

7. A produção diária aumentará de aproximadamente 16 unidades.

9. a.



b.



11. O número de operários não-especializados deve ser reduzido de duas unidades.

13. Mínimo relativo em $\left(-\dfrac{23}{2}, 5\right)$; ponto de sela em $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

15. Pontos de sela em $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{6}\right)$ e $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{6}\right)$

17. Maximize a área $A = xy$ com a restrição de que o perímetro deve ter o valor constante $P = 2x + 2y$. As condições de Lagrange são $y = \lambda x$, $x = \lambda y$ e $2x + 2y = C$. Como devemos ter $\lambda > 0$, já que x e y são positivos, $x = y$ e o retângulo é, na verdade, um quadrado.

19. Desenvolvimento, $x =$ R\$ 4.000,00; propaganda, $y =$ R\$ 7.000,00.

21. Temos $f_x = y - \dfrac{12}{x^2}$ e $f_y = x - \dfrac{18}{y^2}$. Assim, $f_x = f_y = 0$ para $x = 2$ e $y = 3$. Como $f(x, y)$ é grande quando x ou y é muito grande ou muito pequeno, $(2, 3)$ só pode ser um mínimo relativo. Para confirmar esta conclusão, observe que

$$D = \left(\frac{24}{x^3}\right)\left(\frac{24}{y^3}\right) - 1 \qquad \text{e} \qquad f_{xx} = \frac{24}{x^3}$$

e, portanto, $D(2, 3) > 0$ e $f_{xx}(2, 3) > 0$.

23. 0,5466

25. $\dfrac{1}{4}(e^2 - e^{-2})$

27. $2e - 2$

29. $\dfrac{3}{2}(e - 1)$

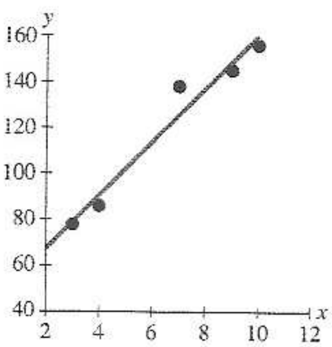
31. 2

33. $\dfrac{3}{2}(e^{-2} - e^{-3})$ unidades cúbicas

35. $x = y = z = \dfrac{20}{3}$

37. $\sqrt{10}$; em $(0, \pm\sqrt{10}, 0)$

39. a.



b. $y = 11{,}54x + 44{,}45$

c. R\$ 102.150,00

41. $-0{,}74$; a demanda estará aumentado à taxa de aproximadamente $\dfrac{3}{4}$ de lata por mês.

43. -3; a demanda estará diminuindo à taxa de 3 tortas por semana.

45. A poluição estará variando à taxa de 113 unidades por dia.

47. 7.056 unidades

49. $Q(x, y) = x^a y^b$

$Q_x = ax^{a-1}y^b$; $Q_y = bx^a y^{b-1}$

$xQ_x + yQ_y = x(ax^{a-1}y^b) + y(bx^a y^{b-1})$

$= (a + b)x^a y^b = (a + b)Q$

Se $a + b = 1$, $xQ_x + yQ_y = Q$.

APÊNDICE Revisão de Álgebra, Seção A1

1. $1 < x \leq 5$

3. $x > -5$

5. 

7. 

9. 4

11. 5

13. $-3 \leq x \leq 3$

15. $-6 \leq x \leq -2$

17. $x \leq -7$ ou $x \geq 3$

19. 125

21. 4

23. 4

25. $\frac{1}{2}$

27. $\frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{4}$

31. 2

33. $\frac{1}{4}$

35. $n = 10$

37. $n = 1$

39. $n = 4$

41. $n = \frac{13}{5}$

43. $x^4(x - 4)$

45. $-25(x - 7) = 25(7 - x)$

47. $2(x + 1)^2(x - 2)^2(7x - 2)$

49. $x^{-1/2}(6x + 1)$

51. $2(x + 3)$

53. $\frac{2(x + 3)^3(5 - x)}{(1 - x)^3}$

55. 34

57. 0

59. $\sum_{j=1}^{6} \frac{1}{j}$

61. $\sum_{j=1}^{6} 2x_j$

63. $\sum_{j=1}^{8} (-1)^{j+1} j$

65. a. A área da superfície é $5{,}212 \times 10^8$ km^2; a massa da atmosfera é $5{,}212 \times 10^{18}$ kg.

b. 127.400 anos

APÊNDICE Revisão de Álgebra, Seção A2

1. $(x + 2)(x - 1)$

3. $(x - 3)(x - 4)$

5. $(x - 1)^2$

7. $(4x + 5)(4x - 5)$

9. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

11. $x^5(x + 1)(x - 1)$

13. $2x(x - 5)(x + 1)$

15. $x = 4$; $x = -2$

17. $x = -5$

19. $x = 4$; $x = -4$

21. $x = -\frac{1}{2}$; $x = -1$

23. $x = -\frac{3}{2}$

25. $x = 1$; $x = -5$

27. $x = 1$; $x = -2$

29. $x = -1$

31. $x = -\frac{1}{2}$; $x = -1$

33. Não há soluções reais

35. $x = -\frac{3}{2}$

37. $x = 3$; $y = 2$

39. $x = 4$, $y = 2$

41. $x = -7$; $y = -5$ e $x = 1$, $y = -1$

APÊNDICE Revisão de Álgebra, Seção A3

1. 0

3. $\frac{1}{2}$

5. $-\frac{1}{3}$

7. 0

9. 0

11. 0

13. 0

15. e^2

APÊNDICE Revisão de Álgebra, Problemas de Revisão

1. $-2 \le x < 3$

3. 

5. 

7. 3

9. $2 \le x \le 4$

11. 243

13. 4

15. $16\sqrt[4]{2}$

17. 73

19. $\dfrac{3}{2}$

21. $n = \dfrac{7}{18}$

23. $n = -1$

25. 21

27. 95

29. $1 + \sum_{k=2}^{7} \dfrac{(-1)^k}{k}$

31. $x^2(x+3)(x-3)$

33. $x^4(x^6+4)(x^3+2)(x^3-2)$

35. $x(x-1)^2$

37. $(x+5)(x-3)$

39. $(2x+3)^2$

41. $(x+1)(x-1)(x+3)$

43. $x = -4; x = 1$

45. $x = -7$

47. $x = -1; x = 2$

49. $x = -\dfrac{3}{7}; x = \dfrac{1}{2}$

51. Não há soluções reais

53. $x = -2; x = \dfrac{1}{3}$

55. $x = -2; y = 1$

57. $x = 1, y = 2$ e $x = 15, y = -26$

59. $\dfrac{2}{7}$

61. 0

63. 1

ÍNDICE

E

F

N

O

P

Q

R

S

T

Aprenda Cálculo e Seja Bem-sucedido.

Está se preparando para uma carreira em administração? Em economia? Em ciências sociais? Em biologia? Se a resposta for afirmativa, este livro o ajudará a aprender os métodos de cálculo de que precisa para ser bem-sucedido na carreira que escolheu. Esta nona edição apresenta as técnicas de cálculo diferencial e integral que você provavelmente encontrará em cursos de graduação e atividades profissionais subseqüentes. A ênfase em aplicações e técnicas para solução de problemas facilita o uso de cálculo em problemas da vida cotidiana.

NOVIDADES DESTA EDIÇÃO

Cálculo – Um Curso Moderno e Suas Aplicações, Nona Edição, contém os seguintes melhoramentos em relação à edição anterior:

- 200 novos problemas convencionais e aplicados foram acrescentados às nossas já extensas listas de exercícios
- Novos exemplos e discussões foram incluídos para tornar a apresentação mais clara e precisa
- O tema da Modelagem Matemática foi ampliado e agora está presente como um tema mais vigoroso em toda a obra
- As instruções para calculadoras gráficas foram atualizadas de modo a serem compatíveis com a calculadora TI-84 Plus
- Novos *Lembretes* foram incluídos para recordar conceitos importantes de álgebra

ISBN 978-85-216-1602-3
9 788521 616023

gen Grupo Editorial Nacional
LTC
www.ltceditora.com.br