Forma Canônica de Jordan

Matriz por Blocos

A matriz $A \in Mat_{n\times m}(\mathbf{R})$ é uma **matriz por blocos** quando consideramos sua partição em submatrizes, denominadas **blocos**.

Notação: $A = [A_{ij}]$

Exemplos: Partições de uma matriz.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \\ C_{41} & C_{42} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \end{pmatrix}$$

Observe que, A é uma matriz 5×4, a blocagem $[B_{ij}]$ é de ordem 3×2, $[C_{ij}]$ é 4×2 e $[D_{ij}]$ é 2×3. Já cada um dos blocos em si têm diferentes ordens, por exemplo, B_{22} é 2×2, C_{32} é 1×1 e D_{11} é 3×2.

Considere duas matrizes por blocos de mesma ordem $A = [A_{ij}]$ e $B = [B_{ij}]$ que possuam a mesma quantidade de blocos e os blocos correspondentes têm a mesma ordem.

Assim, $A + B = [A_{ij}] + [B_{ij}]$ e $k \cdot A = [k \cdot A_{ij}]$.Sejam duas matrizes por blocos $A = [A_{ik}]$, de ordem $n \times p$, e $B = [B_{kj}]$, de ordem $p \times m$, tais que o número de colunas de cada bloco A_{ik} é igual ao número de linhas de cada bloco B_{kj}.

Assim, $A \cdot B = C = [C_{ij}]$, com $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$.

Matriz Quadrada por Blocos

Seja a matriz quadrada $A \in Mat_n(\mathbf{R})$. Sua matriz por blocos $A = [A_{ij}]$ é denominada **matriz quadrada por blocos** quando os blocos formam uma matriz quadrada e os blocos da diagonal são também matrizes quadradas.

Exemplos: A primeira blocagem não é uma matriz quadrada por blocos, já a segunda é.

$$\left(\begin{array}{cc:cc:c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ \hdashline 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc:cc:c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ \hdashline 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Matriz Diagonal por Blocos

A matriz quadrada por blocos $A = [A_{ij}]$ é uma matriz diagonal por blocos quando os blocos que não pertencem à diagonal são todos matrizes nulas.

Notação: $A = Diag(A_{11}, \dots, A_{kk})$, com $k \le n$.

Exemplo: $\left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$ é uma matriz diagonal por blocos.

Revendo Operadores

Seja V um $\mathbf{R}$-espaço vetorial n dimensional e $T : V \to V$ um operador linear.

Teo113. Seja $S \le V$ T-invariante. Então existe uma base α de V tal que $[T]_\alpha = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$ é uma matriz por blocos, sendo A a matriz associada ao operador $T|_S : S \to S$ restrição do operador T ao subespaço S.

Teo114. Sejam $S_1, \dots, S_r$ subespaços de V e $B_1, \dots, B_r$ suas respectivas bases. Então $V = S_1 \oplus \dots \oplus S_r$ se e somente se $B_1 \cup \dots \cup B_r$ é uma base de V.

Teo115. Sejam $S_1, \ldots, S_r \leq V$ *T*-invariantes tais que $V = S_1 \oplus \ldots \oplus S_r$. Então existe uma base α de *V* tal que $[T]_\alpha = Diag(A_1, \ldots, A_r)$, sendo $A_i = [T|_{S_i}]$, $i = 1, \ldots, r$.

Neste caso, $V = S_1 \oplus \ldots \oplus S_r$ é denominada a **decomposição de *V* em soma direta *T*-invariante**.

Operadores Nilpotentes

Um operador linear $T : V \to V$ é **nilpotente** quando $T^k = \mathbf{0}$, para algum $k \in \mathbf{Z}_+^*$. Se $T^{k-1} \neq \mathbf{0}$ então ***k*** é denominado índice de nilpotência de *T*.

Exemplo: $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tal que $T(x, y, z, t) = (y, z, t, 0)$ é um operador nilpotente de ordem 4.

Forma Canônica de Jordan

A matriz quadrada $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \end{pmatrix}$ de ordem *r* é denominada **bloco nilpotente de Jordan de ordem *r***,

e a matriz quadrada $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \lambda \end{pmatrix}$ de ordem *r* é dita **bloco de Jordan associado ao autovalor λ.**

Teo116. Seja $T : V \to V$ um operador linear, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ autovalores todos distintos, $P_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ o polinômio característico e $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{l_r}$ o polinômio minimal. Então existe uma base α de *V* tal que $[T]_\alpha = Diag(J_{ij})$ é uma matriz diagonal por blocos, sendo $J_{ij} = J(\lambda_i)$ um bloco de Jordan com as seguintes propriedades:

i) Existe pelo menos um bloco J_{ij} de ordem l_i, todos os outros blocos têm ordem menor ou igual a l_i.

ii) A soma das ordens dos J_{ij} é m_i.

iii) A quantidade dos blocos J_{ij} é a multiplicidade geométrica de λ_i.

iv) A quantidade dos blocos J_{ij} de uma ordem qualquer possível é unicamente determinada por *T*.

Exemplos:

1. Considere $P_T(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-5)^3$ e $m_T(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-5)^3$. As possíveis formas de Jordan para o operador T são:

$$Diag\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) \text{ ou } Diag\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, (2), (2), \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

2. Sejam $P_T(\lambda) = (\lambda-2)^5$ e $m_T(\lambda) = (\lambda-2)^2$. As formas de Jordan para o operador são:

$$Diag\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, (2)\right) \text{ ou } Diag\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, (2), (2), (2)\right)$$

Exercícios

1) Analise a transposição de matrizes por blocos.
2) Definir matriz triangular superior por blocos e também matriz triangular inferior por blocos.
3) Mostre que $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$, sendo A e B matrizes quadradas.

Considere $A = Diag(A_{11}, \ldots, A_{kk})$. Mostre que:

4) Seja $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio então $f(A) = Diag(f(A_{11}), \ldots, f(A_{kk}))$.
5) A é invertível se e somente se A_{ii} é invertível, para todo $i = 1, \ldots, k$.
6) $A^{-1} = Diag(A_{11}^{-1}, \ldots, A_{kk}^{-1})$.
7) $A^r = Diag(A_{11}^r, \ldots, A_{kk}^r)$, sendo $r \geq 1$.

Considere $A = Diag(A_{11}, \ldots, A_{kk})$ e $B = Diag(B_{11}, \ldots, B_{kk})$ matrizes quadradas de mesma ordem. Então:

8) $A + B = Diag(A_{11} + B_{11}, \ldots, A_{kk} + B_{kk})$
9) $A \cdot B = Diag(A_{11} \cdot B_{11}, \ldots, A_{kk} \cdot B_{kk})$

Considere $T : V \to V$ um operador nilpotente com índice k.

10) Se $v \neq \mathbf{0}_V$ então o conjunto $\{v, T(v), \ldots, T^{k-1}(v)\}$ é LI?
11) $[v, T(v), \ldots, T^{k-1}(v)]$ é T-invariante?
12) Dado $P_T(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-5)^2$ escolha um polinômio minimal e indique as formas de Jordan possíveis.