

PRODUTO INTERNO

Definição

Considere V um espaço vetorial real. O **produto interno** sobre V é uma função

$$\begin{aligned}\langle \rangle : V \times V &\rightarrow \mathbf{R} \\ (v, u) &\mapsto \langle v, u \rangle\end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

PI1. (Positiva Definida) Para todo, $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se e somente se $v = \mathbf{0}_V$.

PI2. (Simétrica) Para quaisquer $v, u \in V$, $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$.

PI3. (Aditividade) Para quaisquer $v, u, w \in V$, $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$.

PI4. (Homogeneidade) Para quaisquer $v, u \in V$ e para todo $k \in \mathbf{R}$, $\langle kv, u \rangle = k\langle v, u \rangle$.

Exemplos:

1) Produto usual, canônico ou Euclidiano no $\mathbf{R}^n$.

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

2) $V : \mathbf{R}^2$

$$\langle (x, y), (z, t) \rangle = \frac{1}{2}xz + 3yt$$

3) $V : \mathbf{R}^3$

$$\langle (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + 2y_1 y_2 + 5z_1 z_2$$

Norma de um Vetor

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Define-se a função **norma** como sendo

$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Assim, $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.

Com esta definição, a norma de vetores depende do produto interno considerado.

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Um vetor $v \in V$ é denominado **vetor unitário** quando $\|v\| = 1$.

Seja um vetor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}_V$. O vetor $\frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{v}{\|v\|} \in V$ é denominado **vetor normalizado**, e sempre

um vetor unitário, isto é, $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$.

Distância entre dois Vetores

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Define-se a função **distância** $d: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $d(v, u) = \|v - u\|$. Assim, $d(v, u) = \|v - u\| = \sqrt{\langle v - u, v - u \rangle}$, e $d(v, u)^2 = \langle v - u, v - u \rangle$.

Ângulo entre dois Vetores

Seja V um espaço vetorial munido com um produto interno. O **ângulo** θ entre dois vetores $v, u \in V$ é tal que $\cos \theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$.

Ortogonalidade

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Dois vetores $v, u \in V$ são denominados **vetores ortogonais** quando $\langle v, u \rangle = 0$.

Notação: $v \perp u$

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e o conjunto $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$.

O conjunto A é dito **conjunto ortogonal** quando $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Se em um conjunto ortogonal todos os vetores são unitários o conjunto é denominado **conjunto ortonormal**.

Desta forma, se uma base do espaço vetorial for um conjunto ortogonal, será denominada **base ortogonal**. Uma base ortogonal formada por vetores unitários é chamada **base ortonormal**.

Exemplo: O conjunto $\{(1, 2, 0), (2, -1, 3), (-6, 3, 5)\}$ é ortogonal em relação ao produto interno usual.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Projeção de um Vetor sobre um Subespaço.

O **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt** resolve o problema de a partir de uma base qualquer de um espaço vetorial, obter uma base ortogonal. O processo será apresentado para os espaços vetoriais do $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$, e, finalmente, generalizado.

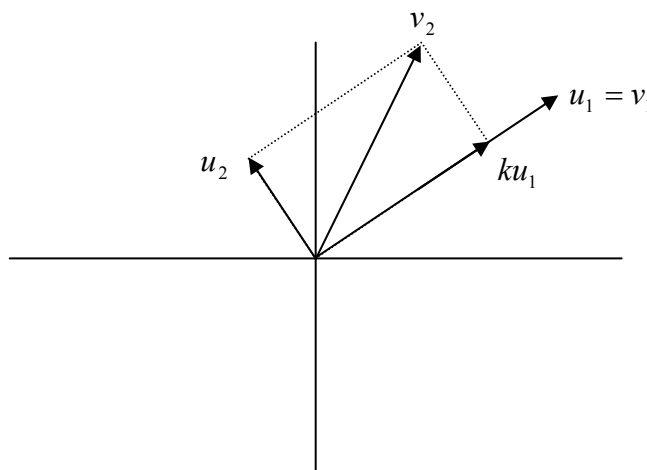
• Processo para o espaço $\mathbf{R}^2$

Considere $A = \{v_1, v_2\}$ uma base de $\mathbf{R}^2$.

Sejam $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2 - ku_1$.

Assim, $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$ isto é, o vetor u_2 , obtido em função de v_1 e v_2 , é ortogonal ao vetor u_1 .

Interpretação geométrica:



O escalar $k \in \mathbf{R}$ é tal que: $\langle u_2, u_1 \rangle = 0$

$$\langle v_2 - ku_1, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle - \langle ku_1, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle - \langle ku_1, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle - k\langle u_1, u_1 \rangle = 0 \therefore k = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}$$

Logo, $B = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortogonal com $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2 - ku_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$.

O vetor ku_1 é a **projeção ortogonal** do vetor v_2 no subespaço vetorial gerado pelo vetor u_1 .

$$proj_{[u_1]} v_2 = ku_1 = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

Exemplo: Ortogonalizando a base $\{(1,2), (3,5)\}$ pelo processo de Gram-Schmidt.

$$u_1 = v_1 = (1,2)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (3,5) - \frac{\langle (3,5), (1,2) \rangle}{\langle (1,2), (1,2) \rangle} (1,2) = (3,5) - \frac{13}{5} (1,2) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

Assim o conjunto $\{(1,2), (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})\}$ é uma base ortogonal do $\mathbf{R}^2$.

O vetor $ku_1 = \frac{13}{5} (1,2) = (\frac{13}{5}, \frac{26}{5})$ é a projeção ortogonal do vetor $(3,5)$ no subespaço vetorial $[(1,2)]$.

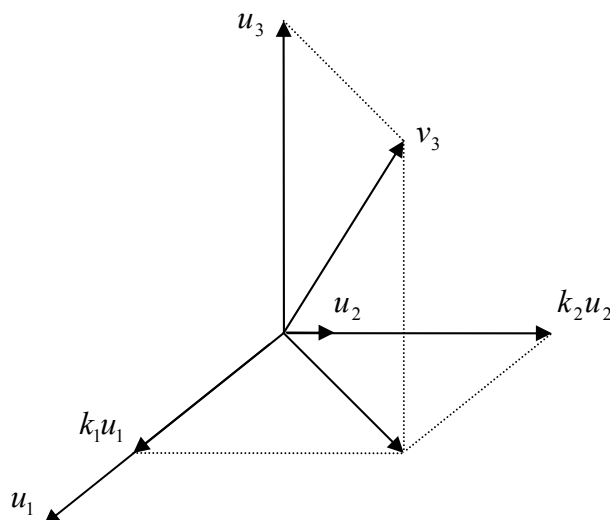
- Processo para o espaço $\mathbf{R}^3$

Seja $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbf{R}^3$.

Sejam os vetores $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$.

O vetor u_3 é obtido em função dos vetores v_1, v_2 e v_3 e ortogonal tanto ao vetor u_1 quanto ao vetor u_2 . Assim, $u_3 = v_3 - (k_1 \cdot u_1 + k_2 \cdot u_2)$ com $\langle u_3, u_1 \rangle = 0$ e $\langle u_3, u_2 \rangle = 0$.

Interpretação geométrica para esta situação:



O escalar $k_1 \in \mathbf{R}$ é tal que: $\langle u_3, u_1 \rangle = 0$

$$\langle v_3 - (k_1 u_1 + k_2 u_2), u_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_3 - k_1 u_1 - k_2 u_2, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle - k_1 \langle u_1, u_1 \rangle - k_2 \langle u_2, u_1 \rangle = 0$$

$$\text{Mas, } u_1 \perp u_2 \therefore \langle u_2, u_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle - k_1 \langle u_1, u_1 \rangle = 0 \therefore k_1 = \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}$$

O escalar $k_2 \in \mathbf{R}$ é tal que: $\langle u_3, u_2 \rangle = 0$

$$\langle v_3 - (k_1 u_1 + k_2 u_2), u_2 \rangle = 0$$

$$\langle v_3 - k_1 u_1 - k_2 u_2, u_2 \rangle = 0$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle - k_1 \langle u_1, u_2 \rangle - k_2 \langle u_2, u_2 \rangle = 0$$

$$\text{Mas, } u_1 \perp u_2 \therefore \langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle - k_2 \langle u_2, u_2 \rangle = 0 \therefore k_2 = \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle}$$

Então, $u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = v_3 - k_1 u_1 - k_2 u_2 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

Logo, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortogonal do $\mathbf{R}^3$, com $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$ e

$$u_3 = v_3 - k_1 u_1 - k_2 u_2 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2.$$

O vetor $k_1 u_1 + k_2 u_2$ é a **projeção ortogonal** do vetor v_3 no subespaço vetorial gerado pelos vetores u_1 e u_2 .

$$proj_{[u_1, u_2]} v_3 = k_1 u_1 + k_2 u_2 = \frac{\langle u_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle u_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

• Generalização

Seja $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V n -dimensional munido de um produto interno.

Considere os vetores:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_n, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \dots - \frac{\langle v_n, u_{n-1} \rangle}{\langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle} u_{n-1}$$

Então $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma **base ortogonal** de V .

Como $\frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{v}{\|v\|} \in V$ é um unitário, o conjunto $C = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$, obtido da normalização dos vetores da base ortogonal B , é denominado **base ortonormal**.

Complemento Ortogonal

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno e S um subespaço vetorial de V . O **complemento ortogonal de S** é o conjunto $S^\perp = \{v \in V \mid \langle v, s \rangle = 0, \text{ para todo } s \in S\}$.

Exemplos:

1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 0\}$.

Encontrar um vetor ortogonal ao subespaço vetorial S significa encontrar um vetor ortogonal aos vetores de uma base de S .

Seja $\{(0,1,0), (0,0,1)\}$ uma base de S .

Assim, $S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y, z) \perp (0,1,0) \text{ e } (x, y, z) \perp (0,0,1)\}$.

$\langle (x, y, z), (0,1,0) \rangle = 0$ e $\langle (x, y, z), (0,0,1) \rangle = 0 \therefore$

$y = 0$ e $z = 0$.

Então, $S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0 \text{ e } z = 0\}$.

2) $S = \{(3y - z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$.

Uma base para S é $\{(3,1,0), (-1,0,1)\}$.

$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (3,1,0) \rangle = 0 \text{ e } \langle (x, y, z), (-1,0,1) \rangle = 0\}$.

Assim,
$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$S^\perp = \{(z, -3z, z), z \in \mathbf{R}\}$.

Observe que, se S é um subespaço vetorial de V , seu complemento ortogonal $S^\perp$ também é subespaço vetorial de V .

É importante ainda ressaltar que o único vetor comum a S e a $S^\perp$ é o vetor nulo $\mathbf{0}_V$. Assim, $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$.

O subespaço vetorial $S + S^\perp$ é na verdade o próprio espaço vetorial V .

Portanto, $S \oplus S^\perp = V$.

Pelo Teorema da Dimensão, $\dim V = \dim(S \oplus S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp$.

Exercícios

- 1) Verifique que funções $\langle \rangle : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definidas abaixo são produtos internos.
- a) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = 2xz + 3yt$
 - b) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = xz - yt$
 - c) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = 4xz$
 - d) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = xz + yt + 1$
 - e) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = 2x^2z + y^2t$
 - f) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = x^2z + y^2t$
 - g) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = x^2z^2 + y^2t^2$
 - h) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = k_1l_1 - k_2l_2$ onde $A = \{v_1, v_2\}$ é uma base qualquer do espaço vetorial $\mathbf{R}^2$,
 $(x, y) = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2$ e $(z, t) = l_1 \cdot v_1 + l_2 \cdot v_2$.
 - i) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = xz - 2xt - 2yz + 5yt$
- 2) Calcule a norma de $(1, -5, 2)$ considerando:
- a) o produto interno usual no $\mathbf{R}^3$.
 - b) $\langle (x, y, z), (w, r, t) \rangle = \frac{1}{2}xw + yr + 3zt$.
- 3) Calcule $\|(2, 1)\|$ em relação ao:
- a) produto interno usual.
 - b) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = 3xz + 4yt$.
- 4) Considere o espaço vetorial $\mathbf{R}^3$ munido do produto interno usual. Determine $k \in \mathbf{R}$ tal que $\|(6, k, -1)\| = \sqrt{41}$.
- 5) Mostre que $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1$ para todo $v \in V$.
- 6) Sejam $u, v \in V$ um espaço vetorial euclidiano tais que $\|v\| = 3$ e $\|u\| = 5$. Determine $k \in \mathbf{R}$ de modo que $\langle v + k \cdot u, v - k \cdot u \rangle = 0$.
- 7) Seja $\mathbf{R}^2$ munido do produto interno usual e $v = (1, 2)$ e $u = (3, 5)$.
- a) interprete geometricamente $v + u, v - u$ e $u - v$.
 - b) calcule $d(v, u)$ e $d(u, v)$.
- 8) Seja o espaço vetorial $\mathbf{R}^2$ com produto interno usual. Seja que $\|v\| = 3$, $\|u\| = 4$ e $\|v + u\| = 2\sqrt{5}$. Indique o ângulo entre v e u .
- 9) Verifique se os vetores $(2, -3)$ e $(3, 2)$ são ortogonais em relação aos seguintes produtos internos no $\mathbf{R}^2$:
- a) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = xz + yt$
 - b) $\langle (x, y), (z, t) \rangle = 4xz + 3yt$

- 10) Se v e u são vetores ortogonais então $\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$? Justifique. (Generalização do Teorema de Pitágoras)
- 11) Normalize o conjunto $\{(1,2,0), (2,-1,3), (-6,3,5)\}$.
- 12) Verifique se as bases abaixo são ortogonais no $\mathbf{R}^2$ e no $\mathbf{R}^3$, respectivamente, para o produto interno usual.
- a) $\{(1,2), (3,5)\}$
- b) $\left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$
- 13) Encontre um vetor unitário no $\mathbf{R}^3$ que seja ortogonal aos vetores $(1,-1,0)$ e $(2,-1,1)$.
- 14) Seja V um espaço vetorial euclidiano. Mostre que se $v, u \in V$ são ortogonais e tais que $\|v\| = \|u\| = 1$ então $\|v - u\| = \sqrt{2}$.
- 15) Ortogonalize a base $\{(1,1,2), (1,2,0), (0,-1,1)\}$ do $\mathbf{R}^3$.
- 16) O conjunto $A = \{(1,0,2), (0,1,1)\}$ é uma base de um subespaço vetorial do $\mathbf{R}^3$. Obtenha uma base ortogonal B a partir de A .
- 17) Encontre a projeção ortogonal do vetor $(1,1,-1)$ no subespaço vetorial $[B]$ do exercício anterior.
- 18) Seja $S = \{(3y - z, y, z), y, z \in \mathbf{R}\}$ um subespaço vetorial do $\mathbf{R}^3$. Indique $S^\perp$, $S \cap S^\perp$ e $S + S^\perp$.
- 19) A partir da base $\{(1,3), (2,5)\}$ indique duas bases ortonormais do $\mathbf{R}^2$.
- 20) Ortogonalize pelo processo de Gram-Schmidt as seguintes bases do $\mathbf{R}^3$.
- a) $\{(1,1,1), (-1,1,0), (1,2,1)\}$
- b) $\{(1,0,0), (3,7,-2), (0,4,1)\}$
- 21) Seja o espaço vetorial $\mathbf{R}^3$ munido do produto interno usual e seja S o subespaço vetorial gerado pela base ortogonal $B = \{(0,1,0), (-4,0,3)\}$. Determine a projeção do vetor $(1,1,1)$ no subespaço S .
- 22) Seja o espaço vetorial $\mathbf{R}^3$ com o produto interno $\langle (x, y, z), (w, t, r) \rangle = xw + 2yt + 3zr$. Utilize o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ numa base ortogonal.
- 23) Seja o espaço vetorial $\mathbf{R}^3$ munido do produto interno usual e $A = \{(1,2,-3), (2,-4,2)\}$. Determine:
- a) o subespaço vetorial S gerado pelo conjunto A .
- b) o subespaço vetorial $S^\perp$.
- 24) Considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - z = 0\}$ com o produto interno $\langle (x, y, z), (w, t, r) \rangle = 2xw + 3yt + 4zr$. Determine $S^\perp$, uma base e sua dimensão.

- 25) Considere o espaço vetorial $Mat_n(\mathbf{R})$ com as operações usuais. Verifique se a função $\langle A, B \rangle = tr(A \cdot B')$ define um produto interno.
- 26) Considere o espaço vetorial das funções contínuas no intervalo $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ com as operações usuais. Verifique se a função $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ é um produto interno.

Respostas

- 2) a) $\sqrt{30}$ b) $\sqrt{\frac{75}{2}}$
 3) a) $\sqrt{5}$ b) 4
 4) $a = \pm 2$
 6) $a = \pm \frac{3}{5}$
 7) $d(v, u) = d(u, v) = \sqrt{13}$
 8) $\theta = \arccos(-\frac{5}{24})$
 11) $\{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0), (\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}), (-\frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}})\}$
 13) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$
 15) $\{(1, 1, 2), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1), (\frac{4}{21}, -\frac{2}{21}, -\frac{1}{21})\}$
 16) $\{(1, 0, 2), (-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5})\}$
 17) $proj_{[B']}v = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$
 18) a) Sim b) $\{0_v\}$ c) $\mathbf{R}^3$
 19) $\{(1, 1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)\}$
 20) a) $\{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{6})\}$
 b) $\{(1, 0, 0), (0, 7, -2), (0, \frac{30}{53}, \frac{105}{53})\}$
 21) $proj_{[B]}v = (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25})$
 22) $\{(1, 1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)\}$
 23) a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
 b) $S^\perp = \{(z, z, z), z \in \mathbf{R}\}$
 24) $S^\perp = \{(-2z, 0, z), z \in \mathbf{R}\}$
 base : $\{(-2, 0, 1)\}$
 $\dim S^\perp = 1$

Apêndice D – Teoremas

Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Para quaisquer $v, u, w \in V$ e $k, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$.

Teo51. $\langle v, k \cdot u \rangle = k \langle v, u \rangle$

Teo52. $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$

Teo53. $\langle k_1 \cdot v, k_2 \cdot u \rangle = k_1 k_2 \langle v, u \rangle$

Teo54. $\langle v, \mathbf{0}_V \rangle = 0$

dem.: $\langle v, \mathbf{0}_V \rangle = 0 + \langle v, \mathbf{0}_V \rangle$ (1)

$\langle v, \mathbf{0}_V \rangle = \langle v, \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V \rangle = \langle v, \mathbf{0}_V \rangle + \langle v, \mathbf{0}_V \rangle$ (2)

De (1) e (2): $0 + \langle v, \mathbf{0}_V \rangle = \langle v, \mathbf{0}_V \rangle + \langle v, \mathbf{0}_V \rangle$.

Pela Lei do Corte para adição em $\mathbf{R}$, $\langle v, \mathbf{0}_V \rangle = 0$.

Teo55. Se para todo $u \in V, u \neq \mathbf{0}_V$, $\langle v, u \rangle = 0$ então $v = \mathbf{0}_V$.

dem.: (RAA) Seja $v \neq \mathbf{0}_V$.

Considere $v = u$.

Assim, $\langle v, u \rangle = \langle v, v \rangle > 0$.

Mas, $\langle v, u \rangle = 0$. Contradição.

Logo, $v = \mathbf{0}_V$.

Teo56. Se para todo $u \in V, u \neq \mathbf{0}_V$, $\langle v, u \rangle = \langle w, u \rangle$ então $v = w$.

Teo57. $\langle v - u, w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle$.

Teo58. $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se e somente se $v = \mathbf{0}_V$.

Teo59. $\|k \cdot v\| = |k| \cdot \|v\|$.

Teo60. **Desigualdade de Cauchy-Schwarz:** $|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$.

dem.: Se $v = \mathbf{0}_V$ ou $u = \mathbf{0}_V$ então $\|\langle v, \mathbf{0}_V \rangle\| = \|\mathbf{0}_V\| = 0 = \|v\|$.

Considere $v \neq \mathbf{0}_V, u \neq \mathbf{0}_V$ e $w = v + k \cdot u$.

$\langle w, w \rangle = \langle v + k \cdot u, v + k \cdot u \rangle > 0$

$\langle v + k \cdot u, v + k \cdot u \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, k \cdot u \rangle + \langle k \cdot u, v \rangle + \langle k \cdot u, k \cdot u \rangle =$

$\langle v, v \rangle + k \langle v, u \rangle + k \langle u, v \rangle + k^2 \langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle + k \langle v, u \rangle + k \langle v, u \rangle + k^2 \langle u, u \rangle =$

$\langle v, v \rangle + 2k \langle v, u \rangle + k^2 \langle u, u \rangle = \|v\|^2 + 2k \langle v, u \rangle + k^2 \|u\|^2 =$

Assim, $\langle v + k \cdot u, v + k \cdot u \rangle = \|u\|^2 k^2 + 2 \langle v, u \rangle k + \|v\|^2 > 0$.

Um polinômio do 2º grau em k com coeficiente de maior grau $\|u\|^2$ positivo, possui discriminante negativo ou nulo.

$(2 \langle v, u \rangle)^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \therefore 4 \langle v, u \rangle^2 - 4 \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \therefore \langle v, u \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0 \therefore \langle v, u \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$

Logo, $|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$

Corolário60: $\langle v, u \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle u, u \rangle$, isto é, $\langle v, u \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$.

Teo61. **Desigualdade Triangular:** $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

dem.: $\|v + u\|^2 = \langle v + u, v + u \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, u \rangle + \langle u, u \rangle$

$$\langle v, v \rangle + 2\langle v, u \rangle + \langle u, u \rangle \leq \langle v, v \rangle + 2\|v\|\|u\| + \langle u, u \rangle$$

$$\langle v, v \rangle + 2\|v\|\|u\| + \langle u, u \rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|u\| + \|u\|^2 = (\|v\| + \|u\|)^2$$

$$\text{Assim, } \|v + u\|^2 \leq (\|v\| + \|u\|)^2.$$

$$\text{Logo, } \|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|.$$

Teo62. i) $d(v, u) \geq 0$ e $d(v, u) = 0$ se e somente se $v = u$

ii) $d(v, u) = d(u, v)$

iii) $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$

Teo63. $\mathbf{0}_V \perp v$.

Teo64. Se $v \perp u$ então $u \perp v$.

Teo65. Se $v \perp u$, para todo $u \in V, u \neq \mathbf{0}_V$ então $v = \mathbf{0}_V$.

Teo66. Se $v \perp w$ e $u \perp w$ então $v + u \perp w$.

Teo67. Se $v \perp u$ então $k \cdot v \perp u$.

Teo68. (Generalização do Teorema de Pitágoras) Se $v \perp u$ então $\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$.

Teo69. Se $\{v_1, \dots, v_r\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos então $\{v_1, \dots, v_r\}$ é um conjunto linearmente independente.

Teo70. Sejam $S \leq V$, $\{v_1, \dots, v_r\}$ uma base de S e $v \in V$ tal que para todo $i = 1, \dots, r$, $v \perp v_i$ então para todo $s \in S$, $v \perp s$.

Teo71. Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V e $v \in V$. Então $v = \langle v, v_1 \rangle \cdot v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle \cdot v_n$.

Teo72. (Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt)

Sejam $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ um conjunto de vetores linearmente independente. Existe um conjunto ortogonal (ortonormal) $\{u_1, \dots, u_r\} \subseteq V$ que é uma base do subespaço gerado pelo conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$.

Teo73. $S^\perp \neq \emptyset$.

Teo74. $S^\perp \leq V$.

Teo75. $(S^\perp)^\perp = S$

Teo76. $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$.

Teo77. $V = S \oplus S^\perp$

Corolário77: $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$

Teo78. Seja V um $\mathbf{R}$ -espaço vetorial munido de um produto interno e um dado vetor $u \in V$. A função $f_u : V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(v) = \langle u, v \rangle$ é um funcional.

Teo79. Seja V um $\mathbf{R}$ -espaço vetorial munido de um produto interno. A função $T : V \rightarrow V^*$ tal que $T(v) = f_v$ é uma transformação linear.

Teo80. Sejam V um $\mathbf{R}$ -espaço vetorial munido de um produto interno e $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ um funcional. Então existe um único vetor $v \in V$ tal que $f(u) = \langle v, u \rangle$, para todo $u \in V$, isto é, a função $T : V \rightarrow V^*$ tal que $T(v) = f_v$ é um isomorfismo.

Corolário80. Se $\dim V = n$ então $\dim V^* = n$.