

Matrizes e Polinômios

Duas **matrizes** $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbf{R})$ são **semelhantes** quando existe uma matriz invertível $P \in \text{Mat}_n(\mathbf{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, já que:

$$\det(A - \lambda I_n) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P) = \det(B - \lambda I_n)$$

Exemplo: As matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ são semelhantes, pois:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$.

Uma **matriz** A pode ser **diagonalizada** quando existir uma matriz invertível $P \in \text{Mat}_n(\mathbf{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. Esta matriz P é uma matriz de autovetores do operador relativo à matriz A .

Exemplo: Considere $[T] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, os autoespaços $V_3 = \{(x, 2x), x \in \mathbf{R}\}$ e $V_{-1} = \{(0, y), y \in \mathbf{R}\}$, e uma base de autovetores $\{(1, 2), (0, 1)\}$.

$$\text{Assim, } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1}[T]P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considerando $B = P^{-1}AP$, temos que $B^k = (P^{-1}AP)^k = \underbrace{P^{-1}AP \dots P^{-1}AP}_{k \text{ fatores}} = P^{-1}A^kP$, com $k \in \mathbf{Z}_+$. Se a

matriz A é diagonalizável então $D^k = P^{-1}A^kP \therefore A^k = PD^kP^{-1}$.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59049 & 0 \\ 118100 & -1 \end{pmatrix}$$

Considere $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$ um polinômio e uma matriz quadrada $A \in \text{Mat}_n(\mathbf{R})$.

Então $p(A)$ é a matriz quadrada $a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I_n$. Diz-se que o **polinômio** $p(x)$ **anula a matriz** A quando $p(A) = \mathbf{0}_n$.

Exemplo: Sejam $p(x) = x^2 - 9$, $q(x) = 2x + 3$ e a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$p(A) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Assim, o polinômio $p(x)$ anula a matriz A , mas $q(x)$ não.

Diz-se que um **polinômio** $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ **anula o operador linear** T quando $p([T]_\alpha) = \mathbf{0}_n$, para toda base α de V .

Seja V um $\mathbf{R}$ -espaço vetorial n dimensional, $T: V \rightarrow V$ um operador linear e $p(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[X]$ um polinômio. Define-se o operador linear $p(T): V \rightarrow V$ tal que $p(T)(v) = (a_m T^m + \dots + a_1 T + a_0 I_V)(v)$. Se λ_0 é um autovalor do operador T então $p(\lambda_0)$ é um autovalor do operador linear $p(T)$.

Exemplo: Seja $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (3x, 8x - y)$, cujos autovalores são 3 e -1 .

Considere o polinômio $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 3$ e o operador $p(T): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que $p(T)(x, y) = (2T^3 - 4T^2 - T + 3I)(x, y)$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } p(T)(x, y) &= (2T^3)(x, y) - (4T^2)(x, y) - T(x, y) + (3I)(x, y) \\ &= 2(T^3(x, y)) - 4(T^2(x, y)) - T(x, y) + 3(I(x, y)) \\ &= 2(27x, 56x - y) - 4(9x, 16x + y) - (3x, 8x - y) + (3x, 3y) \\ &= (54x, 112x - 2y) - (36x, 64x + 4y) - (3x, 8x - y) + (3x, 3y) \\ &= (18x, 40x - 2y) \end{aligned}$$

Então, os autovalores de $p(T)$ são 18 e -2 .

Teorema de Cayley-Hamilton (TCH) Sejam V um $\mathbf{R}$ -espaço vetorial n -dimensional e $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Então $P_T([T]_\alpha) = \mathbf{0}_n$ para toda base α de V .

dem: Seja $P_T(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$

Denotaremos por $A(\lambda)$ a matriz adjunta clássica da matriz $[T - \lambda I_n]_\alpha$

Os elementos de $A(\lambda)$ são os cofatores desta matriz, sendo então polinômios em λ de grau menor ou igual a $n-1$.

$$A(\lambda) = A_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + A_1\lambda + A_0 \text{ sendo } A_{n-1}, \dots, A_0 \in \text{Mat}_n(\mathbf{R}).$$

Pela propriedade fundamental da adjunta clássica:

$$[T - \lambda I_n]_\alpha \cdot A(\lambda) = \det[T - \lambda I]_\alpha \cdot I_n$$

$$[T - \lambda I_n]_\alpha \cdot A(\lambda) = P_T(\lambda) \cdot I_n$$

$$[T - \lambda I_n]_\alpha \cdot (A_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + A_1\lambda + A_0) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) \cdot I_n$$

$$-A_{n-1}\lambda^n + ([T]_\alpha A_{n-1} - A_{n-2})\lambda^{n-1} + \dots + ([T]_\alpha A_1 - A_0)\lambda + [T]_\alpha A_0 = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) \cdot I_n$$

$$(n) \quad -A_{n-1} = I_n$$

$$\begin{aligned}
(n-1) \quad & [T]_{\alpha} A_{n-1} - A_{n-2} = a_{n-1} I_n \\
(n-2) \quad & [T]_{\alpha} A_{n-2} - A_{n-3} = a_{n-2} I_n \\
& \dots \\
(1) \quad & [T]_{\alpha} A_1 - A_0 = a_1 I_n \\
(0) \quad & [T]_{\alpha} A_0 = a_0 I_n
\end{aligned}$$

Multiplicando-se a equação (n) por $[T]_{\alpha}^n$, (n-1) por $[T]_{\alpha}^{n-1}$, ... e (1) por $[T]_{\alpha}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(n) \quad & -[T]_{\alpha}^n A_{n-1} = [T]_{\alpha}^n \\
(n-1) \quad & [T]_{\alpha}^n A_{n-1} - [T]_{\alpha}^{n-1} A_{n-2} = a_{n-1} [T]_{\alpha}^{n-1} \\
(n-2) \quad & [T]_{\alpha}^{n-1} A_{n-2} - [T]_{\alpha}^{n-2} A_{n-3} = a_{n-2} [T]_{\alpha}^{n-2} \\
& \dots \\
(1) \quad & [T]_{\alpha}^2 A_1 - [T]_{\alpha} A_0 = a_1 [T]_{\alpha} \\
(0) \quad & [T]_{\alpha} A_0 = a_0 I_n
\end{aligned}$$

Somando-se as equações matriciais, $\mathbf{0}_n = [T]_{\alpha}^n + a_{n-1} [T]_{\alpha}^{n-1} + \dots + a_1 [T]_{\alpha} + a_0 I_n = P_T([T]_{\alpha})$.

Polinômio Minimal

Seja V um $\mathbf{R}$ -espaço vetorial n -dimensional e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Define-se o **polinômio minimal ou mínimo do operador linear** T , $m_T(\lambda) \in \mathbf{R}[\lambda]$, como sendo o polinômio mônico de menor grau possível tal que $m_T([T]_{\alpha}) = \mathbf{0}_n$.

Exemplos:

1) $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x + 2y - 5z, 3x + 7y - 15z, x + 2y - 4z)$.

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$$

$$m_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

2) $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (4z, x, y - 3z)$.

$$P_T(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$$

$$m_T(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1)$$

3) $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tal que $T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$.

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2$$

$$m_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

CorolárioTCH: O polinômio minimal de T divide o polinômio característico de T , isto é,
 $m_T(\lambda) \mid P_T(\lambda)$.

Teo87. $P_T(\lambda) \mid (m_T(\lambda))^n$

Teo88. Os polinômios característico e minimal possuem os mesmos fatores irredutíveis e as mesmas raízes.

Teo89. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de T . Então T é diagonalizável se e somente se
 $m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_r)$.

Exercícios

1) Verificar, utilizando a definição, se os vetores dados são autovetores:

a) $(-2,1)$ para $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $(-2,1,3)$ para $[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2) Os vetores $(1,1)$ e $(2,-1)$ são autovetores de um operador linear $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ associados aos autovalores $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determinar $T(4,1)$.

3) Determinar o operador linear $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos autoespaços $V_1 = \{(-y, y), y \in \mathbf{R}\}$ e $V_3 = \{(0, y), y \in \mathbf{R}\}$.

4) Determinar os autovalores e os autovetores dos seguintes operadores lineares no $\mathbf{R}^2$.

a) $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$

b) $T(x, y) = (y, -x)$

5) Dado o operador linear T no $\mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-3x - 5y, 2y)$, encontrar uma base de autovetores.

6) Verificar se existe uma base de autovetores para:

a) $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

b) $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$

c) $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, -2x + 3y - z, -4y + 3z)$

7) Seja $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$. Encontrar uma base que diagonalize o operador.

8) O operador linear $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ tal que $T(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z, y + z + t, x + y)$ é diagonalizável?

9) Determine o polinômio minimal do operador $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

10) Dada a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, verifique se é diagonalizável.

11) Seja a matriz triangular superior $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, com todos os seus elementos acima da diagonal distintos e não nulos. Indique os autovalores e os autoespaços.

12) Para que valores de a e b as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são diagonalizáveis?

13) Se uma matriz A quadrada é diagonalizável então o determinante de A é o produto de seus autovalores?

14) Utilize a forma diagonal para encontrar A^n nos seguintes casos (n natural):

a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

15) Diz-se que um operador $T: V \rightarrow V$ é **idempotente** se $T^2 = T$.

a) Seja T idempotente. Ache seus autovalores.

b) Dê exemplo de um operador não nulo $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ idempotente.

c) Mostre que todo operador linear idempotente é diagonalizável.

16) Seja V um espaço n -dimensional. Qual é o polinômio minimal do operador identidade? Qual é o polinômio minimal do operador nulo?

17) Verifique se a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizável.

18) Determinar uma matriz de ordem 3 cujo polinômio minimal seja λ^2 .

19) Indique o polinômio minimal dos operadores considerando a, b, c, d e e constantes não nulas.

a) $T: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ tal que $T(x, y, z, t, w) = (ax + by, ay + bz, az + bt, at + bw, aw)$

b) $T: \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ tal que $T(x, y, z, t, w) = (-aw, x - bw, y - cw, z - dw, t - ew)$