Subespaços Invariantes

Seja V um $\mathbf{R}$-espaço vetorial n dimensional e $T: V \to V$ um operador linear. O subespaço vetorial $S \leq V$ é denominado **subespaço vetorial invariante pelo operador *T*** ou **subespaço vetorial *T*-invariante** quando $T(S) \subseteq S$, sendo $T(S) = \{T(s) \mid s \in S\}$.

Exemplo: Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y) = (3x, 8x - y)$.

O subespaço $S = \{(x,2x), x \in \mathbf{R}\}$ é T-invariante, já que $T(1,2) = (3,6) \in S$.

Já o subespaço $S' = \{(x,0), x \in \mathbf{R}\}$ não é T-invariante, pois $T(1,0) = (3,8) \notin S'$.

Teo90. Considere V um $\mathbf{R}$-espaço vetorial n dimensional e $T: V \to V$ um operador linear. Então:

i) São subespaços T-invariantes: $\{\mathbf{0}_V\}$, V, $KerT$ e $\mathrm{Im}T$.

ii) Seja λ um autovalor do operador T. Então o autoespaço V_λ é T-invariante.

dem.: Se $v \in T(V_\lambda)$ então $v = T(u)$, para algum $u \in V_\lambda$.

Se $u \in V_\lambda$ então $T(u) = \lambda u$.

Assim, $v = \lambda u$.

Então, $T(v) = T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda(\lambda u) = \lambda v$.

Logo, $v \in V_\lambda$.

iii) Seja $S \leq V$ tal que $\dim S = 1$. O subespaço S é T-invariante se e somente se existe um escalar $k \in \mathbf{R}$ tal que $T(s) = ks$, para todo $s \in S$.

iv) Considere o conjunto $\{v,u\} \subseteq V$ linearmente independente. $[v,u]$ é T-invariante se e somente se $T(v) \in [v,u]$ e $T(u) \in [v,u]$.

Exemplos: Considere os operadores: $[T] = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $[T'] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $[T''] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

S	$T(S)$	$T'(S)$	$T''(S)$	T-inv	T'-inv	T''-inv
$KerT = KerT' = \{(0,0,0)\}$	$\{(0,0,0)\}$	$\{(0,0,0)\}$	$\{(0,0,0)\}$	✓	✓	✓
$\mathrm{Im}T = \mathrm{Im}T' = \mathbf{R}^3$	$\mathbf{R}^3$	$\mathbf{R}^3$	$\mathbf{R}^3$	✓	✓	✓
$KerT'' = [(-1,1,0)]$	$[(-1,1,0)]$	$[(-3,2,1)]$	$\{(0,0,0)\}$	✓		✓
$\mathrm{Im}T'' = [(1,1,0),(0,0,1)]$	$[(1,1,0),(0,0,1)]$	$[(3,2,0),(0,0,1)]$	$\mathrm{Im}T''$	✓		✓
$V_{2T} = [(-1,1,0),(-1,0,1)]$	$[(-1,1,0),(-1,0,1)]$	$[(3,4,0),(0,-2,1)]$	$[(-1,-1,1)]$	✓		
$V_{8T} = [(1,1,1)]$	$[(1,1,1)]$	$[(3,2,3)]$	$[(2,2,1)]$	✓		
$V_{2T'} = [(0,0,1)]$	$[(1,1,2)]$	$[(0,0,1)]$	$[(0,0,1)]$		✓	✓
$V_{3T'} = [(1,0,0)]$	$[(2,1,1)]$	$[(1,0,0)]$	$[(1,1,0)]$		✓	
$V_{0T''} = [(-1,1,0)]$	$[(-1,1,0)]$	$[(-3,2,1)]$	$\{(0,0,0)\}$	✓		✓
$V_{1T''} = [(0,0,1)]$	$[(1,1,2)]$	$[(0,0,1)]$	$[(0,0,1)]$		✓	✓
$V_{2T''} = [(1,1,0)]$	$[(3,3,2)]$	$[(3,2,1)]$	$[(1,1,0)]$			✓

ESPAÇOS VETORIAS COM PRODUTO INTERNO E OPERADORES LINEARES

Considere V um **R**-espaço vetorial n dimensional munido de um produto interno e $T: V \to V$ um operador linear..

Operador Adjunto

Teo91. Seja $f: V \to \mathbf{R}$ um funcional linear. Então, para todo $v \in V$ existe um único vetor $u \in V$ tal que

$f(v) = \langle v, u \rangle$.

dem:
(exist.) Sejam $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V e $u = f(v_1)v_1 + ... + f(v_n)v_n \in V$

Considere $v_i \in \{v_1, ..., v_n\}$ qualquer.

$\langle v_i, u \rangle = \langle v_i, f(v_1)v_1 + ... + f(v_n)v_n \rangle$

$= f(v_1)\langle v_i, v_1 \rangle + ... + f(v_i)\langle v_i, v_i \rangle + ... + f(v_n)\langle v_i, v_n \rangle$

$= f(v_i)$

Logo, para todo $v \in V$ existe um único vetor $u \in V$ tal que $f(v) = \langle v, u \rangle$.

(unic.) (RAA) Supor que exista $w \in V, w \neq u$ tal que $f(v) = \langle v, w \rangle$, para todo $v \in V$.

Assim, $\langle v, u \rangle = \langle v, w \rangle$

Então, $\langle v, u - w \rangle = 0$

Em particular, vale a igualdade para $v = u - w$.

Assim, $\langle u - w, u - w \rangle = 0$ sse $u - w = \mathbf{0}_V$ sse $u = w$.

Contradição.

Logo, $u \in V$ é único.

Teo92. Existe um único operador linear $T^*: V \to V$ tal que $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$, para quaisquer

$v, w \in V$.

dem.: Seja $w \in V$ qualquer e o funcional linear $f: V \to \mathbf{R}$ tal que $f(v) = \langle T(v), w \rangle$

Pelo Teo91, existe um único vetor $u \in V$ tal que $f(v) = \langle v, u \rangle$

Assim, $\langle T(v), w \rangle = \langle v, u \rangle$

Considere $T^*: V \to V$ tal que $T^*(w) = u$

Então, $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$

T^* é um operador linear, pois:

(po+) $\langle v'', T^*(v + v') \rangle = \langle T(v''), v + v' \rangle = \langle T(v''), v \rangle + \langle T(v''), v' \rangle = \langle v'', T^*(v) \rangle + \langle v'', T^*(v') \rangle$

Então, $T^*(v+v') = T^*(v) + T^*(v')$, para quaisquer $v, v' \in V$.

(po.) $\left\langle v', T^*(kv)\right\rangle = \langle T(v'), kv\rangle = k\langle T(v'), v\rangle = k\left\langle v', T^*(v)\right\rangle = \left\langle v', kT^*(v)\right\rangle$

Então, $T^*(kv) = kT^*(v)$, para quaisquer $k \in \mathbf{R}, v \in V$.

A unicidade de T^* é uma decorrência da unicidade de *u*.

O operador T^* é denominado **operador adjunto do operador *T***.

Exemplo: Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y) = (3x, 8x - y)$.

O operador $T^*: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T^*(x,y) = (3x + 8y, -y)$ é o operador adjunto de *T*.

Teo93. Seja α uma base ortonormal de *V*. Então $[T^*]_\alpha = [T]_\alpha^t$.

Teo94. Sejam T, T_1 e T_2 operadores lineares em *V*.

Então:

i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
ii) $(k \cdot T)^* = k \cdot T^*$, para todo $k \in \mathbf{R}$.
iii) $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$
iv) $(T^*)^* = T$
v) $KerT = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

dem.: (i) $\left\langle (T_1 + T_2)(v), u\right\rangle = \left\langle T_1(v) + T_2(v), u\right\rangle = \left\langle T_1(v), u\right\rangle + \left\langle T_2(v), u\right\rangle = \left\langle v, T_1^*(u)\right\rangle + \left\langle v, T_2^*(u)\right\rangle$

$= \left\langle v, T_1^*(u) + T_2^*(u)\right\rangle = \left\langle v, (T_1^* + T_2^*)(u)\right\rangle$

Teo95. Seja $T: V \to V$ um operador linear e $S \leq V$ um subespaço *T*-invariante.

Então $S^\perp$ é T^*-invariante.

dem.: Sejam $v \in S^\perp$ e $w \in S$.

Tem-se, $\left\langle T^*(v), w\right\rangle = \left\langle v, T(w)\right\rangle$.

Como *S* é *T*-invariante, $T(w) \in S$.

Assim, $\left\langle v, T(w)\right\rangle = 0$.

Então, $\left\langle T^*(v), w\right\rangle = 0$.

Isto é, $T^*(v) \in S^\perp$.

Logo, $S^\perp$ é T^*-invariante.

Operadores Auto-Adjuntos

O operador linear $T: V \to V$ é denominado **operador auto-adjunto** quando $\langle T(v), u\rangle = \langle v, T(u)\rangle$, para quaisquer $v, u \in V$, isto é, $T^* = T$.

Exemplos:

1) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x + 4y, 4x - y)$

2) $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, -x + 3y - 2z, -2y)$

Teo96. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares auto-adjuntos e $k \in \mathbf{R}$.

Então $(T_1 + T_2)$ e $(k \cdot T_1)$ também são operadores auto-adjuntos.

dem: $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^* = T_1 + T_2$, pelo Teo95 e por hipótese.
$(k \cdot T_1)^* = k \cdot T^* = k \cdot T$, mesmas justificativas.

Teo97. $T: V \to V$ um operador auto-adjunto se e somente $[T]_\alpha$ é uma matriz simétrica, qualquer que seja a base ortomormal α de V.

Teo98. Seja $T: V \to V$ um operador auto-adjunto e $v_1, \ldots, v_r$ autovetores associados a autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de T. Então v_i é ortogonal a v_j, $i, j = 1, \ldots r, i \neq j$.

dem.: Como $\langle T(v_i), v_j\rangle = \langle v_i, T^*(v_j)\rangle = \langle v_i, T(v_j)\rangle$.

Tem-se, $\langle \lambda_i \cdot v_i, v_j\rangle = \langle v_i, \lambda_j \cdot v_j\rangle$.

Assim, $\langle \lambda_i \cdot v_i, v_j\rangle - \langle v_i, \lambda_j \cdot v_j\rangle = 0$

$\lambda_i \langle v_i, v_j\rangle - \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle = 0$

$(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j\rangle = 0$

Por hipótese, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Logo, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$.

Teo99. Seja $T: V \to V$ um operador auto-adjunto. Então T possui um autovalor real, isto é, possui um autovetor não nulo.

Teo100. Seja $T: V \to V$ um operador auto-adjunto e v um autovetor associado ao autovalor λ de T.

Então os subespaços $[v]$ e $[v]^\perp$ são T-invariantes.

Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos

Seja V um **R**-espaço vetorial n dimensional munido de um produto interno e $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto. Então T é diagonalizável, isto é, existe uma base ortonormal α de autovetores de V tal que $[T]_\alpha$ é uma matriz diagonal.

dem.: (indução em n)

Base: $\dim V = 1$

Existe um autovetor $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$, por Teo101.

$\{v\}$ é uma base de V.

$\left\{\frac{v}{|v|}\right\}$ é uma base ortonormal de V.

Passo: (HI) Supor de vale o teorema para espaços vetoriais com dimensão $n-1$.

Considere v um autovetor unitário de T, vide Teo99, e $\dim[v] = 1$.

Mas, $[v]^\perp$ é um subespaço T-invariante, por Teo102.

Então, $T|_{[v]^\perp} : [v]^\perp \to [v]^\perp$ é um operador auto-adjunto.

Pela hipótese de indução, existe uma base ortonormal $\delta = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$ de autovetores de $[v]^\perp$ tal que $[T|_{[v]^\perp}]_\delta$ é uma matriz diagonal.

Mas, $V = [v] \oplus [v]^\perp$ e $\dim V = \dim[v] + \dim[v]^\perp$.

Logo, $\{v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v\}$ é uma base ortonormal de autovetores de V.

O **espectro de um operador linear** é **o conjunto de seus autovalores**.

Operadores Ortogonais

O operador linear $T: V \to V$ é denominado **operador ortogonal** quando $\langle T(v), T(u) \rangle = \langle v, u \rangle$, isto é, $T^* = T^{-1}$.

Exemplos:

1) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (y, -x)$

2) $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{\sqrt{3}}{3}z, -\frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{6}}{6}y + \frac{\sqrt{6}}{6}z, -\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z)$

Teo101. Seja $T: V \to V$ um operador linear. São equivalentes:

i) T é um operador ortogonal.
ii) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais.
iii) T preserva produto interno, isto é, $\langle T(v), T(u) \rangle = \langle v, u \rangle$, para quaisquer $v, u \in V$.
iv) T preserva norma, isto é, $\|T(v)\| = \|v\|$, para todo $v \in V$.

Teo102. Seja $T: V \to V$ um operador ortogonal. Então:

i) T preserva distância.
ii) Os únicos autovalores possíveis para T são ± 1.
iii) Autovetores de T são sempre ortogonais.
iv) Se S é um subespaço vetorial T-invariante então $S^{\perp}$ é T-invariante.

Operadores Normais

O operador linear $T: V \to V$ é denominado **operador normal** quando comuta com seu operador adjunto, isto é, $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Teo103. Seja $T: V \to V$ um operador normal. Então:

i) $(k \cdot T)$ também é um operador normal.
ii) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$.
iii) Se λ é um autovalor de T então λ é um autovalor de T^*.
iv) T e T^* possuem os mesmos autovetores.
v) $KerT = KerT^*$.
vi) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$
vii) $(KerT)^{\perp} = \operatorname{Im} T$.

Se V é **C**-espaço vetorial, o operador linear $T: V \to V$ tal que $T^* = T$ é denominado **operador hermitiano** e quando $T^* = T^{-1}$, **operador unitário**.

Exercícios

1) Classifique os operadores.

   a) $T(x,y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$

   b) $T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta, z)$

   c) $T(x,y,z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$

2) Ache valores para x e y tais que $\begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

3) Dê exemplo de um operador auto-adjunto não ortogonal e vice-versa.

4) Dê exemplo de um operador normal que não é nem auto-adjunto nem ortogonal.

5) Se $\langle\ \rangle$ e $\langle\langle\ \rangle\rangle$ são produtos internos sobre $\mathbf{R}^2$ e $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ um operador auto-adjunto em relação a $\langle\ \rangle$ então T também é auto-adjunto em relação a $\langle\langle\ \rangle\rangle$?

6) Seja $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Verifique que T é diagonalizável sem usar os critérios de diagonalização.

7) Considere $T : V \to V$ e $U : V \to V$ operadores lineares que comutam entre si.

   (C1) Se λ é um autovalor de T então V_λ é um subespaço U-invariante

   (C2) Existe um autovetor comum a T e a U.

9) Todo operador auto-adjunto é um operador normal.

10) Todo operador ortogonal é um operador normal.

Apêndice E – Algumas demonstrações

Teo94. v) $KerT = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

<u>dem</u>.: $v \in KerT$ sse $T(v) = 0_V$ sse $\langle T(v), u \rangle = 0$, para todo $u \in V$ sse $\langle v, T^*(u) \rangle = 0$, para todo $u \in V$ sse $v \perp T^*(u)$, para todo $u \in V$ sse $v \in (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

Teo101. São equivalentes:

i) *T* é um operador ortogonal.

ii) *T* transforma bases ortonormais em bases ortonormais.

iii) *T* preserva produto interno, isto é, $\langle T(v), T(u) \rangle = \langle v, u \rangle$, para quaisquer $v,u \in V$.

iv) *T* preserva norma, isto é, $\|T(v)\| = \|v\|$, para todo $v \in V$.

<u>dem</u>.:

i) $\rightarrow$ ii) $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de *V*

$T(\alpha) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ base de *V*, pois *T* é isomorfismo

$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle v_i, T^*(T(v_j)) \rangle = \langle v_i, T^{-1}(T(v_j)) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = 0$, por hipótese

$\|T(v_i)\|^2 = \langle T(v_i), T(v_i) \rangle = \langle v_i, T^*(T(v_i)) \rangle = \langle v_i, T^{-1}(T(v_i)) \rangle = \langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1$, por hipótese

$T(\alpha)$ base ortonormal de *V*

ii) $\rightarrow$ iii) α e $T(\alpha)$ bases ortonormais de *V*

$v = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$ e $u = l_1 v_1 + \ldots + l_n v_n$

$$\langle v, u \rangle = \langle k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n, l_1 v_1 + \ldots + l_n v_n \rangle =$$
$$k_1 l_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \ldots + k_1 l_n \langle v_1, v_n \rangle + \ldots + k_n l_1 \langle v_n, v_1 \rangle + \ldots + k_n l_n \langle v_n, v_n \rangle =$$
$$k_1 l_1 1 + \ldots + k_1 l_n 0 + \ldots + k_n l_1 0 + \ldots + k_n l_n 1 = k_1 l_1 + \ldots + k_n l_n$$

$T(v) = k_1 T(v_1) + \ldots + k_n T(v_n)$ e $T(u) = l_1 T(v_1) + \ldots + l_n T(v_n)$

$$\langle T(v), T(u) \rangle = \langle k_1 T(v_1) + \ldots + k_n T(v_n), l_1 T(v_1) + \ldots + l_n T(v_n) \rangle =$$
$$k_1 l_1 \langle T(v_1), T(v_1) \rangle + \ldots + k_1 l_n \langle T(v_1), T(v_n) \rangle + \ldots + k_n l_1 \langle T(v_n), T(v_1) \rangle + \ldots + k_n l_n \langle T(v_n), T(v_n) \rangle =$$
$$k_1 l_1 1 + \ldots + k_1 l_n 0 + \ldots + k_n l_1 0 + \ldots + k_n l_n 1 = k_1 l_1 + \ldots + k_n l_n$$

Assim, $\langle v, u \rangle = \langle T(v), T(u) \rangle$

iii) $\rightarrow$ iv) $\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$

iv) $\rightarrow$ i) $\|T(v)\| = \|v\| \therefore \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle \therefore \langle T^*(T(v)), v \rangle = \langle v, v \rangle \therefore \langle T^*(T(v)), v \rangle - \langle v, v \rangle = 0 \therefore$

$\langle T^*(T(v)) - I(v), v \rangle = 0 \therefore \langle (T^* \circ T - I)(v), v \rangle = 0$

Mas, $(T^* \circ T - I)^* = (T^* \circ T)^* - I^* = (T^* \circ T) - I$, isto é, $(T^* \circ T) - I$ é OAA

Então, $(T^* \circ T) - I = \mathbf{0} \therefore (T^* \circ T) = I \therefore T^* = T^{-1}$

Analogamente, $(T \circ T^*) = I$

Logo, *T* é OO.

Outros Teoremas:

1. $\langle T(v), u \rangle = 0$, para quaisquer $v, u \in V$ sse $T = \mathbf{0}$
2. $\langle T(v), v \rangle = 0$, para todo $v \in V$ sse $T^* = -T$

3. Se T é OAA e $\langle T(v), v\rangle = 0$, para todo $v \in V$ então $T = \mathbf{0}$

4. Considere V um **C**-EVPI. $\langle T(v), v\rangle = 0$, para todo $v \in V$ sse $T = \mathbf{0}$

   Contra-exemplo para o caso real: Seja $[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = \langle (-y,x),(x,y)\rangle = -xy + xy = 0$$

Mas, $T \neq \mathbf{0}$

Teo102. Se T é OO então:

i) T preserva distância.

ii) Os únicos autovalores possíveis para T são ± 1.

iii) Autovetores de T são sempre ortogonais.

iv) Se S é um subespaço vetorial T-invariante então $S^{\perp}$ é T-invariante.

<u>dem</u>.:

i) $d(v,u) = \|v-u\| = \|T(v-u)\| = \|T(v)-T(u)\| = d(T(v),T(u))$, por definição e T101iv

ii) $v \in V$, $v \neq 0_V$, autovetor associado ao autovalor λ

$\langle T(v),T(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v,v\rangle$, por definição e prop´s PI, e $\langle T(v),T(v)\rangle = \langle v,v\rangle$, por T101iii

$\lambda^2 = 1 \therefore \lambda = \pm 1$

iii) $v,u \in V$, $v,u \neq 0_V$, autovetores associados a autovalores distintos $\lambda \neq \lambda'$

$\langle T(v),T(u)\rangle = \langle \lambda v, \lambda' u\rangle = \langle \pm v, \mp u\rangle$ e $\langle T(v),T(u)\rangle = \langle v,u\rangle$, por T101iii

$\langle \pm v, \mp u\rangle = \langle v,u\rangle \therefore \langle v,u\rangle = 0$

iv) $v \in S^{\perp}$ e $s \in S$

$\langle T(v),T(s)\rangle = \langle T(v), s'\rangle$, pois S é T-inv e $\langle T(v),T(s)\rangle = \langle v,s\rangle = 0$, por T101iii

$\langle T(v), s'\rangle = 0 \therefore T(v) \in S^{\perp}$

Teo103. Se T é ON então:

i) $(k \cdot T)$ é ON.

ii) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$.

iii) Se λ é um autovalor de T então λ é um autovalor de T^*.

iv) T e T^* possuem os mesmos autovetores.

v) $KerT = KerT^*$

vi) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$

vii) $(KerT)^{\perp} = \operatorname{Im} T$.

<u>dem</u>.:

i) $(kT)\circ(kT)^*(v) = (kT)\circ(kT^*)(v) = (kT)[(kT^*)(v)] = (kT)(kT^*(v)) = kT(kT^*(v)) = kk(T(T^*(v)))$

$= kk(T^*(T(v))) = kT^*(kT(v)) = (kT^*)(kT(v)) = (kT^*)[(kT)(v)] = (kT^*)\circ(kT)(v)$

ii) $\|T(v)\|^2 = \langle T(v),T(v)\rangle = \langle v, T^*(T(v))\rangle = \langle v, T(T^*(v))\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|^2$

v) $v \in KerT \therefore \|T(v)\|^2 = \langle T(v),T(v)\rangle = \langle 0_V, 0_V\rangle = 0 = \|T^*(v)\|^2 \therefore v \in KerT^*$

vii) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^* = (KerT)^{\perp}$