Formas Lineares, Bilineares e Quadráticas

Considere *V* um R-espaço vetorial *n*-dimensional.

Formas Lineares

Qualquer transformação linear da forma $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ é denominada um **funcional linear** ou **forma linear**.

Exemplos:

1) $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x,y) = x + y$
2) $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x,y,z) = 2x + y - z$
3) $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$ com $1 \leq i \leq n$

Considere o conjunto $L(V,\mathbf{R})$ ou $Hom(V,\mathbf{R})$ ou V^* como sendo o conjunto de todos os funcionais de V em $\mathbf{R}$. Assim, fica definido um novo espaço vetorial $[V^*, \mathbf{R}, +, \cdot]$ denominado **espaço vetorial dual de *V***.

O teorema 91 nos garante que para todo $u \in V$, a função $f_u : V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f_u(v) = <v,u>$ é um funcional.

Teo104. Os espaços V e V^* são isomorfos, isto é, $T: V \rightarrow V^*$ tal que $T(v) = f_v$ é um isomorfismo.

Corol104. $\dim V = \dim V^*$

Formas Bilineares

A função $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ é denominada uma forma bilinear quando para quaisquer $v, u, w \in V$ e para todo $k \in \mathbf{R}$,

FB1. $f(v+u, w) = f(v,w) + f(u,w)$ e $f(v, u+w) = f(v,u) + f(v,w)$

FB2. $f(k.v, u) = k.f(v,u) = f(v, k.u)$

Exemplos:

1) $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x,y) = xy$
2) $f: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f((x,y),(z,t)) = xz - 2yt$
3) $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(v,u) = <v,u>$

Teo105. Sejam f e g formas bilineares sobre V e $k \in \mathbf{R}$. Então $(f+g)$ e $(k.f)$ também são formas bilineares sobre V.

Corol105: Seja $FB(V)$ o conjunto de todas as formas bilineares sobre V. Então $[FB(V), \mathbf{R}, +, \cdot]$ é um espaço vetorial.

Formas Bilineares e Matrizes

Teo106. Considere $A \in Mat_n(\mathbf{R})$ e α uma base de V. A função $f_A : V \times V \to \mathbf{R}$ tal que $f_A(v,u) = [v]^t \cdot A \cdot [u]$ é uma forma bilinear.

Teo107. A função $T : Mat_n(\mathbf{R}) \to FB(V)$ tal que $T(A) = f_A$ é uma transformação linear.

Considere $v,u \in V$, $\alpha = \{v_1,...,v_n\}$ uma base de V e f uma forma bilinear.

Assim, $v = k_1v_1 + ... + k_nv_n$ e $u = l_1v_1 + ... + l_nv_n$.

Então, $f(v,u) = f(k_1v_1 + ... + k_nv_n, l_1v_1 + ... + l_nv_n)$

$$= f(k_1v_1, l_1v_1) + ... + f(k_1v_1, l_nv_n) + ... + f(k_nv_n, l_1v_1) + ... + f(k_nv_n, l_nv_n)$$

$$= k_1 f(v_1,v_1) l_1 + ... + k_1 f(v_1,v_n) l_n + ... + k_n f(v_n,v_1) l_1 + ... + k_n f(v_n,v_n) l_n$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 ...... k_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) ...... f(v_1,v_n) \\ .... \\ f(v_n,v_1) ...... f(v_n,v_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ ... \\ l_n \end{pmatrix}$$

$$= [v]_\alpha^t \cdot [f]_\alpha^\alpha \cdot [u]_\alpha$$

Logo, a cada forma bilinear é possível associar uma matriz quadrada.

Uma forma bilinear $f : V \times V \to \mathbf{R}$ é denominada **forma bilinear simétrica** quando para quaisquer $v,u \in V$, $f(v,u) = f(u,v)$.

Teo108. Seja α uma base de V. Uma forma bilinear f é simétrica se e somente se $[f]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica.

Formas Bilineares e Espaços Vetoriais com Produto Interno

Considere V um **R**-espaço vetorial munido de um produto interno n dimensional.

Teo109. Seja f uma forma bilinear. Então existe um único operador linear $U : V \to V$ tal que $f(v,u) = \langle v, U(u) \rangle$, para todo $v,u \in V$.

Teo110. Os espaços $FB(V)$ e $L(V)$ são isomorfos, isto é, $T : FB(V) \to L(V)$ tal que $T(f) = U$ é um isomorfismo.

Teo111. A forma bilinear f é simétrica se e somente se o operador linear U é um operador auto-adjunto.

Formas Quadráticas

Considere uma forma bilinear simétrica $f : V \times V \to \mathbf{R}$. A função $Q : V \to \mathbf{R}$ tal que $Q(v) = f(v,v)$ é denominada **forma quadrática associada a forma bilinear *f***.

Notação matricial: $Q(v) = [v]_\alpha^t \cdot [f]_\alpha^\alpha \cdot [v]_\alpha$ sendo α uma base de *V*.

Exemplos:

1) Seja $f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que $f((x,y),(z,t)) = xz - 5xt - 5yz + yt$ e a base canônica do $\mathbf{R}^2$.
   A forma quadrática associada é $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que
$$\begin{aligned} Q(x,y) &= f((x,y),(x,y)) \\ &= x^2 - 5xy - 5xy + y^2 \\ &= x^2 - 10xy + y^2 \end{aligned}$$

2) Seja $f : V \times V \to \mathbf{R}$ uma forma bilinear simétrica e $Q : V \to \mathbf{R}$ sua forma quadrática associada.
$$\begin{aligned} Q(v+u) &= f(v+u, v+u) \\ &= f(v,v) + f(v,u) + f(u,v) + f(u,u) \\ &= f(v,v) + 2f(v,u) + f(u,u) \\ &= Q(v) + 2f(v,u) + Q(u) \end{aligned}$$
   $f(v,u) = \frac{1}{2}[Q(v+u) - Q(v) - Q(u)]$ é denominada de **forma polar de *f***.

Uma forma quadrática $Q : V \to \mathbf{R}$ é denominada **forma quadrática positiva definida** quando para todo $v \in V, v \neq \mathbf{0}_V$, $Q(v) > 0$.

Teo112. Seja $T : V \to V$ um operador auto-adjunto. Então $Q : V \to \mathbf{R}$ tal que $Q(v) = \langle T(v), v \rangle$ é uma forma quadrática.

Teorema de Sylvester: Lei da Inércia

Seja *f* uma forma bilinear simétrica. Então existe uma base α de *V* tal que $[f]_\alpha^\alpha$ é uma matriz diagonal e qualquer outra representação matricial diagonal de *f* possui a mesma quantidade *p* de elementos positivos (na diagonal) e a mesma quantidade *q* de negativos da matriz $[f]_\alpha^\alpha$.

O **posto** da forma bilinear *f* é $rank(f) = p + q$ e a **assinatura** é $sign(f) = p - q$.

Corolário: Toda forma quadrática $Q : V \to \mathbf{R}$ admite representação na forma $Q(v) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$, com $p + q \leq$ n.

Exemplo: Considere a forma bilinear simétrica $[f]=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$ na base canônica do $\mathbf{R}^3$.

$\lambda_1 = 2$ e $V_2 = \{(-y-z,y,z), y,z\in \mathbf{R}\} = [(-1,1,0),(-1,0,1)]$

$\lambda_2 = 8$ e $V_8 = \{(z,z,z), z\in \mathbf{R}\} = [(1,1,1)]$

$\alpha = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$ base de autovetores: $[f]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix}4&2&0\\2&4&0\\0&0&24\end{pmatrix}$

$V_2 = V_8^\perp$, mas os vetores $(-1,1,0),(-1,0,1)\in V_2$ não são ortogonais.

Pelo processo de Gram-Schmidt, $(-1,1,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\in V_2$ são vetores ortogonais.

$\beta = \left\{(-1,1,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right),(1,1,1)\right\}$ base ortogonal de autovetores: $[f]_\beta^\beta = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&24\end{pmatrix}$

$\gamma = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ base ortonormal de autovetores.

Desta forma, $[f]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}$ e $rank(f) = sign(f) = 3$.

Lembrando que $D = P^{-1}AP$, neste caso com P matriz ortogonal.

Temos: $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

A forma quadrática Q associada à forma bilinear simétrica f é $Q(x,y,z) = 4x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz+4yz$, sua forma diagonalizada é $Q(x',y',z') = 2x'^2+2y'^2+8z'^2$, e, pelo Teorema de Sylvester, $Q(X,Y,Z) = X^2+Y^2+Z^2$.

Observe que, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{8}}\end{pmatrix}$.

Exercícios

1) Verifique se as funções abaixo definem formas bilineares:
   a) $f:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ tal que $f((x,y),(z,t))=x+t$
   b) $f:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ tal que $f((x,y),(z,t))=-xz+3yz+3xt+2yt$
   c) $f:Mat_2(\mathbf{R})\times Mat_2(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ tal que $f(A,B)=tr(A^t.M.B)$ sendo $M=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$
2) Considerando a base canônica do $\mathbf{R}^2$, indique a matriz $[f]$ sendo f o produto interno usual.
3) Sejam V um $\mathbf{R}$-espaço vetorial n-dimensional e $\alpha=\{v_1,...,v_n\}$ uma base de V. A função $T':FB(V)\to Mat_n(\mathbf{R})$ tal que $T'(f)=[f]_\alpha^\alpha$ é uma transformação linear?
4) Seja $f:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ tal que $f((x,y),(z,t))=xt-yz$ e $\alpha=\{(1,1),(-1,1)\}$. Indique $[f]_\alpha^\alpha$.
5) Considere $f:\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ cuja matriz associada a base canônica é $[f]=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$. Indique dois vetores $v,u\in\mathbf{R}^3$ tais que $f(v,u)\neq f(u,v)$.
6) Considere o conjunto $FBS(V)$ de todas as formas bilineares simétricas sobre V. $FBS(V)$ é um subespaço de $FB(V)$?
7) Todo produto interno é uma forma bilinear e vice-versa? Todo produto interno é uma forma bilinear simétrica e vice-versa?
8) Considere V um $\mathbf{R}$-espaço vetorial e as formas bilineares f e g sobre V. A função $h:V\times V\to\mathbf{R}$ tal que $h(v,u)=f(v).g(u)$ é uma forma bilinear? É simétrica?

9) Seja $f:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ tal que $f((x,y),(z,t))=3xz-yt$. Indique a forma quadrática associada.

10) Seja $Q:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ tal que $Q(x,y)=2x^2+4xy-y^2$. Indique a forma bilinear f.

11) Seja $Q:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ tal que $Q(x,y)=x^2+12xy-4y^2$. Determine a base α do $\mathbf{R}^2$ tal que $Q(x,y)=ax^2+by^2$. Indique a forma bilinear f.
12) Se Q_1 e Q_2 são formas quadráticas associadas às formas bilineares simétricas f_1 e f_2 então (Q_1+Q_2) é a forma quadrática associada a forma bilinear simétrica (f_1+f_2)?
13) Seja f uma forma bilinear simétrica e Q sua forma quadrática associada. Então $f(v,u)=\frac{1}{4}[Q(v+u)-Q(v-u)]$?
14) A forma quadrática $Q:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ dada pela matriz $\begin{pmatrix}1&2\\2&-4\end{pmatrix}$ é positiva definida?
15) Como devem ser os autovalores de uma matriz associada a uma forma quadrática positiva definida?
16) Qual a relação entre produto interno e forma quadrática?
17) Qual o posto e a assinatura das formas bilineares $\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&5&-4\\-3&-4&8\end{pmatrix}$

Apêndice F – Uma Aplicação

Neste apêndice iremos considerar a base canônica α e $[v]=[v]_\alpha$, as coordenadas do vetor v em relação a esta base.

Forma Quadrática no R^2

O polinômio $Q(x,y)=ax^2+by^2+2cxy$ com coeficientes reais é denominado **forma quadrática no R²**.

A matriz simétrica real $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ é a **matriz da forma quadrática**.

$$Q(x,y)=[v]^t A[v]=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A forma quadrática $Q(x,y)=ax^2+by^2+2cxy$ pode ser expressa de forma simplificada por $Q(x',y')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$, sendo λ_1 e λ_2 os autovalores do operador auto-adjunto representado pela matriz simétrica A.

$$Q(x,y)=[v]^t A[v]=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=[v]_\beta^t D[v]_\beta=Q(x',y')$$

Observe que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ são as coordenadas do vetor (x,y) em relação a base ortonormal β de autovetores.

A forma $Q(x',y')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$ é denominada **forma canônica da forma quadrática no R²** ou também **forma quadrática diagonalizada**.

Exemplo: A matriz simétrica real $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ define no **R**^{2} a forma quadrática $4x^2-3y^2+24xy$.

Assim, $Q(1,0)=4$ e $Q(1,2)=40$.

O operador linear associado a matriz $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ possui autovalores $\lambda_1=-12$ e $\lambda_2=13$.

Esta forma quadrática pode ser expressa por $-12x'^2+13y'^2$.

A forma quadrática diagonalizada é obtida através de uma mudança de base. Deste modo, $[v]_\alpha=[I]_\alpha^\beta[v]_\beta$, sendo $[I]_\alpha^\beta$ a matriz mudança de base. As colunas da matriz $[I]_\alpha^\beta$ são os autovetores e, conseqüentemente, uma matriz ortogonal.

Exemplo: Considerando o exemplo anterior, uma base ortonormal de autovetores é $\beta = \left\{\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$.

Assim, $[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Seja $v = (1,2)$, tem-se: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' = 1 \\ -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = 2 \end{cases}$

Obtém-se: $x' = -1$ e $y' = 2 \therefore [(1,2)]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Verificando, $Q(x,y) = 4x^2 - 3y^2 + 24xy \therefore Q(1,2) = 40$

$$Q(x',y') = -12x'^2 + 13y'^2 \therefore Q(-1,2) = 40 .$$

Esta mudança do sistema XOY, cujos eixos são determinados pelos vetores da base canônica $\{(1,0),(0,1)\}$, para o sistema $X'OY'$, cujos eixos são determinados pelos vetores da base ortonormal β de autovetores, representa uma rotação de ângulo θ.

Exemplo: Seja $Q(x,y) = x^2 + 9y^2 + 6xy$. A matriz simétrica associada é $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$.

Para $\lambda_1 = 0$, o autoespaço é $V_0 = \{(-3y, y), y \in \mathbf{R}\}$.

Para $\lambda_2 = 10$, o autoespaço é $V_{10} = \{(x, 3x), x \in \mathbf{R}\}$.

Assim, $\{(-3,1),(1,3)\}$ é uma base de autovetores e $\beta = \left\{\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\}$ uma base ortonormal de autovetores.

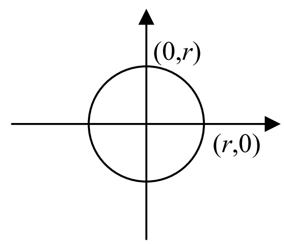
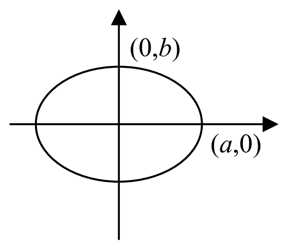
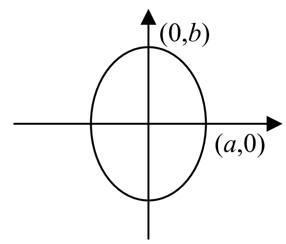
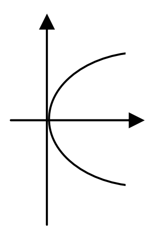
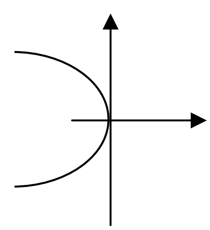
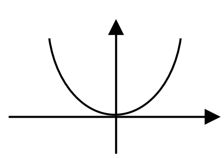
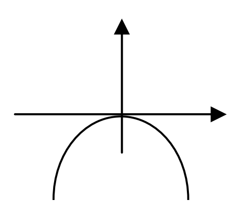
A matriz $[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ é tal que $\det([I]_\alpha^\beta) = 1$.

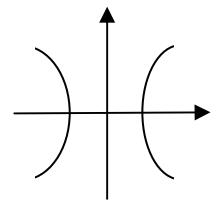
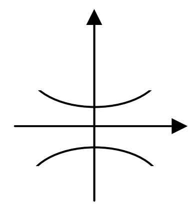
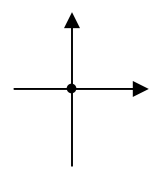
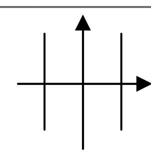
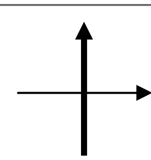
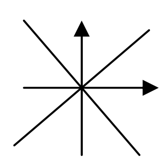
A forma quadrática diagonalizada é $0x'^2 + 10y'^2$.

Cônicas

É o conjunto de pontos do $\mathbf{R}^2$ cujas coordenadas x e y, em relação à base canônica, satisfazem à equação $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Classificação

<table>
<tr><td>Circunferência: $x^2 + y^2 = r^2$</td><td></td></tr>
<tr><td>Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</td><td>
$a > b$

$a < b$</td></tr>
<tr><td>Parábola: $y^2 = kx$</td><td>
$k > 0$

$k < 0$</td></tr>
<tr><td>$x^2 = ky$</td><td>
$k > 0$

$k < 0$</td></tr>
</table>

Hipérbole: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	 $a, b > 0$
$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$	 $a, b > 0$
Elipse Degenerada (ponto) $ax^2 + by^2 = 0$	 $a, b > 0$
Elipse ou Parábola Degenerada (conjunto vazio) $ax^2 + by^2 + r^2 = 0$ $a, b > 0$ e $r \neq 0$	
Parábola Degenerada (retas paralelas) $ax^2 - b = 0$	 $a, b > 0$
Parábola Degenerada (reta) $x^2 = 0$	
Hipérbole Degenerada (retas concorrentes) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$	 $a, b > 0$

Equação Reduzida

Considere a equação $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$. A equação reduzida é obtida da seguinte forma:

1. Eliminação do termo em xy.

   Escreve-se a equação na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

   Calcula-se os autovalores λ_1 e λ_2 do operador linear representado pela matriz $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ e os autovetores ortogonais unitários $u_1 = (x_{11}, x_{21})$ e $u_2 = (x_{12}, x_{22})$. Obtém-se matriz mudança de base $[I]_\alpha^\beta$, a fim de se obter a rotação. Assim,

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

   Obtém-se a equação $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + gx' + hy' + i = 0$ em relação ao sistema $X'OY'$.

2. Translação do referencial $X'OY'$ para o novo referencial $XO'Y$, obtendo-se assim a equação reduzida da cônica.

Exemplos:

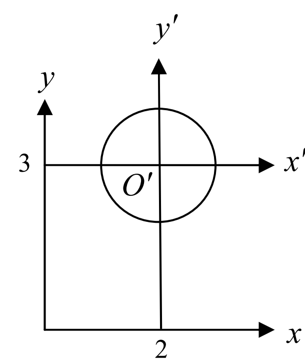
1) $2x^2 + 3y^2 = 6$

$$\frac{2x^2}{6} + \frac{3y^2}{6} = 1 \therefore \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$, que é representada por uma de uma elipse.

2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + 12 - 13 = 0 \therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

Fazendo uma translação de eixos, onde $x' = x - 2$ e $y' = y - 3$, obtém-se $x'^2 + y'^2 = 1$, que é representada por uma circunferência de raio 1 e centro $O' = (2,3)$.



3) $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 8 = 0$$

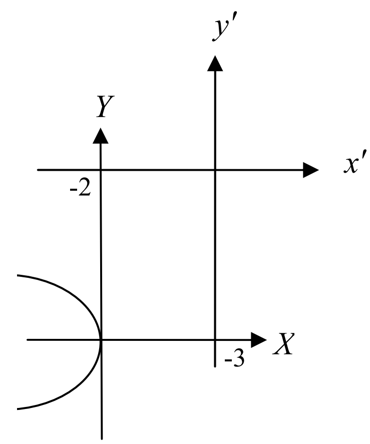
Os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$ e $\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ uma base ortonormal de autovetores. Assim, a equação acima pode ser reescrita:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 8 = 0$$

$4y'^2 - 8x' + 16y' - 8 = 0 \therefore y'^2 - 2x' + 4y' - 2 = 0 \therefore (y'^2 + 4y' + 4) - (2x' + 2 + 4) = 0 \therefore$

$(y' + 2)^2 - 2(x' + 3) = 0$

Fazendo uma translação para o referencial $XO'Y$ onde $X = x' + 3$ e $Y = y' + 2$, obtém-se a equação $Y^2 - 2X = 0$, representada pela parábola.



Classificação de Cônicas por Autovalores

- Se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ então a cônica é representada por uma elipse ou alguma das degenerações (ponto ou vazio).
- Se $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ então a cônica é representada por uma parábola ou alguma das degenerações (ponto, vazio ou par de retas paralelas).
- Se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ então a cônica é representada por uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).

Exemplos:

1) $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 38x - 34y + 71 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \therefore \lambda^2 - 25\lambda = 0 \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 25 \end{cases} \therefore \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

A cônica é representada por uma parábola.

2) $3x^2 - y^2 - 4\sqrt{3}xy + 20y - 25 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \therefore \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0 \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases} \therefore \lambda_1 \lambda_2 < 0$$

A cônica é representada por uma hipérbole.

Forma Quadrática no R^3

O polinômio $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ com coeficientes reais é denominado **forma quadrática no $\mathbf{R^3}$**.

Como foi visto no caso $\mathbf{R^2}$, é possível reduzir uma forma quadrática $\mathbf{R^3}$ a uma forma canônica.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

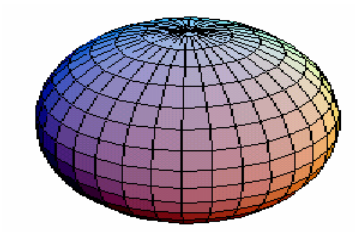
A forma $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ é denominada **forma canônica da forma quadrática no $\mathbf{R^3}$** ou também **forma quadrática diagonalizada**.

Quádricas

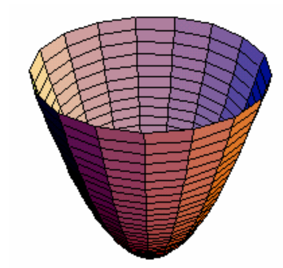
É o conjunto de pontos do $\mathbf{R^3}$ cujas coordenadas x, y e z, em relação à base canônica, satisfazem à equação $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$, com a, b, c, d, e ou $f \neq 0$.

Classificação de Quádricas

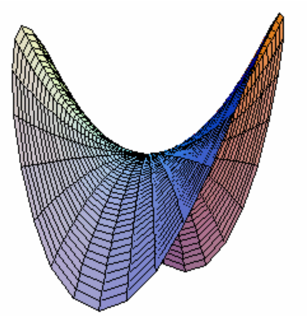
Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Parabolóide Elíptico: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+cz=0$

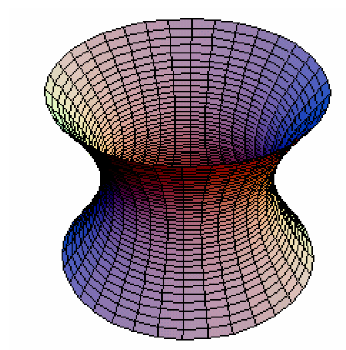


Parabolóide Hiperbólico: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+cz=0$



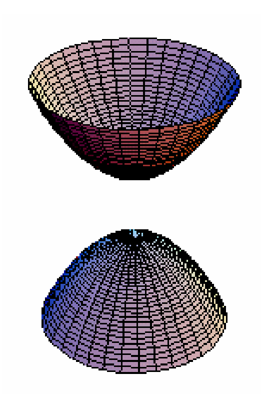
Hiperbolóide de uma folha (ou face):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Hiperbolóide de duas folhas (ou faces):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Equação Reduzida

Exemplos:

1) $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$

Observe que esta equação não possui os termos em *xy*, *xz* e *yz*. Portanto, não é necessário fazer eliminação, faz-se somente a translação.

$$4(x^2 - 4x) + 36(y^2 - 6y) - 9z^2 = -304$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 36(y^2 - 6y + 9) - 9z^2 = -304 + 16 + 324$$

$$4(x-2)^2 + 36(y-3)^2 - 9z^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$$

Fazendo a translação dos eixos: $X = x - 2$, $Y = y - 3$ e $Z = z$, obtém-se: $\dfrac{X^2}{9} + Y^2 - \dfrac{Z^2}{4} = 1$

2) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \therefore \begin{cases} v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \end{cases} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 8 \therefore v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 3 = 0$$

$$2x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 3$$

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \frac{z'^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} = 1$$

Neste caso, não é necessário fazer translação.

3) $-x^2 + 2xy - y + z - 100 = 0$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 100 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \therefore \begin{cases} v_1 = (1,0,0) \\ v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 \therefore v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 100 = 0$$

$$-x'^2 - y'^2 + z'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} y' - 100 = 0$$

Fazendo uma nova mudança de coordenadas para eliminar os termos lineares, obtém-se:

$$-x'^2 - \left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + z'^2 + \frac{1}{2} - 100 = 0$$

Considerando $X = x'$, $Y = y' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $Z = z'$.

$$-\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} - \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} + \frac{Z^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} = 1$$

Classificação de Quádricas por Autovalores

- Se os três autovalores são positivos então a quádrica é representada por um elipsóide.
- Se dois autovalores são positivos e um é negativo então a quádrica é representada por hiperbolóide de uma folha.
- Se um autovalor é positivo e dois são negativos então a quádrica é representada por hiperbolóide de duas folhas.

Exemplos:

1) $4x^2 + 36y^2 - 9z^2 - 16x - 216y + 304 = 0$

   $\dfrac{X^2}{9} + Y^2 - \dfrac{Z^2}{4} = 1$: hiperbolóide de uma folha.

2) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

   $\dfrac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \dfrac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} + \dfrac{z'^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} = 1$: elipsóide.

3) $-x^2 + 2xy - y + z - 100 = 0$

   $-\dfrac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} - \dfrac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} + \dfrac{Z^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} = 1$: um hiperbolóide de duas folhas.

Exercícios

1) Qual a matriz associada a forma quadrática $Q(x, y) = x^2 + 4y^2 - 3xy$?

2) Seja $Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que $Q(x, y) = x^2 - 4y^2 + 12xy$. Determine uma base β tal que $[(x, y)]_\beta = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

   e $Q(x', y') = ax'^2 + by'^2$.

3) Determinar a equação reduzida e o gênero das cônicas representadas pelas equações:

   a) $5x^2 + 8y^2 - 4xy + \dfrac{20}{\sqrt{5}}x - \dfrac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$

   b) $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0$

   c) $16x^2 + 9y^2 - 24xy - 15x - 20y + 50 = 0$

4) Achar a equação reduzida e o gênero das quádricas:

   a) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

   b) $6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 12x - 18y - 8z + 7 = 0$

   c) $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$

   d) $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z - 24 = 0$