
1^{ra} prova de Álgebra Linear

Curitiba, 06 de Abril de 2016

1. Determine os valores de k de modo que o seguinte sistema nas incógnitas x, y, z tenha:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ -3x + 3z & = & 0 \\ 2kx + (k+1)y + (k-2)z & = & 0 \end{array}$$

- (i) Solução única.
(ii) Nenhuma solução.
(iii) Uma infinidade de soluções.

2. Sejam U e V os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y - z + t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y, y = 2z\}$$

Ache uma base e a dimensão de U , W , $(U \cap W)$ e $(U + W)$.

3. (**)Seja V o Espaço vetorial de todas as matrizes 2×2 sobre o corpo real $\mathbb{R}$. Mostre que

$$W = \{A \in V; A^2 = A\}$$

não é Subespaço vetorial de V

4. Determine os valores de a, b e c que façam com que o gráfico do polinômio

$$p(x) = ax^2 + bx + c \text{ passe pelos pontos } (1, 2), (-1, 6), (2, 3).$$

5. Considerem-se no $\mathbb{R}^3$ as bases $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $B = \{g_1, g_2, g_3\}$, relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{array}{lcl} g_1 & = & e_1 + e_3 \\ g_2 & = & 2e_1 + e_2 + e_3 \\ g_3 & = & e_1 + 2e_2 + e_3 \end{array}$$

Sabendo que $[v]_A = (-2, 5, -1)$ são as coordenadas do vetor v em relação à base A . Determinar $[v]_B$.

6. (***)Determine a dimensão do Espaço vetorial de matrizes quadradas anti-simétricas ($A^t = -A$) de ordem n .

1

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ 2Kx + (K+1)y + (K-2)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 2K & K+1 & K-2 & 0 \end{array}$$

(i) Solução única, se $K \neq \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2K-2 & 0 \end{array}$$

(ii) Nenhuma solução, se ?
Esta possibilidade não existe!

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2K-3 & 0 \end{array}$$

(iii) Infinitude de soluções, se $K = \frac{3}{2}$

2 $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y - z + t = 0\}$

$\forall (x, y, z, t) \in U$ tem-se: $(x, y, z, t) = (x, z - t, z, t)$

$\therefore U = \left[(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \right]$

geradores, i.e.

Base de U .

$\dim(U) = 3$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x=y, y=2z\}$$

$$\forall (x, y, z, t) \in W \Rightarrow (x, y, z, t) = (y, y, \frac{y}{2}, t)$$

$$W = \left[\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right), (0, 0, 0, 1) \right]$$

generadores e l.i.
 $\Rightarrow$ Base.

$$\boxed{\dim(W) = 2}$$

$$U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y=z-t, x=y, y=2z\}$$

$$\forall (x, y, z, t) \in U \cap W \Rightarrow (x, y, z, t) = (2z, 2z, z, t) = (2z, 2z, z, -z)$$

$$U \cap W = \left[(2, 2, 1, -1) \right]$$

$$\boxed{\dim(U \cap W) = 1}$$

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U + W) = 3 + 2 - 1$$

$$\dim(U + W) = 4 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^4$$

Uma base para $(U + W)$, poderia ser:

$$\left\{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \right\}$$

3

$$W = \{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) ; A^2 = A \}$$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$.

(ii) $A, B \in W \Rightarrow (A+B) \in W$?

$$A^2 = A$$

$$B^2 = B$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 = A + B \end{aligned}$$

↑
?

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W ; A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin W : (2A)^2 \neq (2A)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto
W não é
subespaço
vetorial.

4 $P(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1, 2), (-1, 6), (2, 3)$

Então:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

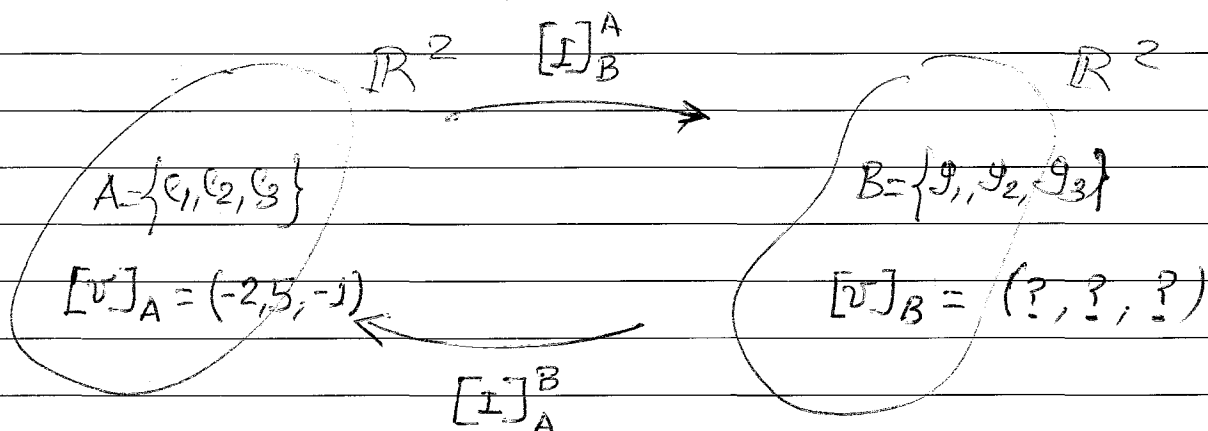
$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -3 & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \quad \begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{array}$$

$$P(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{passa pelos pontos}$$

$$(1, 2), (-1, 6) \text{ e } (2, 3).$$

5



$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_3 \\ g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ g_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow [I]_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = [I]_B^A [v]_A$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & -3/2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6 Matrizes anti-simétricas

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$A^t = -A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= 0 \\ c &= -b \\ b &= -c \\ d &= 0 \end{aligned}$$

$$A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ é anti-simétrica} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \text{ é Anti simétrica} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ é Anti-simétrica} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

n	dimensão
1	1
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

$$A = \frac{(A+A^t)}{2} + \frac{(A-A^t)}{2}$$

n	$n(n-1)$ 2
-----	---------------

$$\text{Matriz Quadrada} = (\text{Matriz Simétrica}) \oplus (\text{Matriz Anti-simétrica})$$

Usando teorema da Dimensão.

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + X$$

$$\frac{2n^2 - (n^2 + n)}{2} = X$$

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = X$$