Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} prova de Álgebra Linear
Curitiba, 04 de Setembro de 2016

1. Determine os valores de a de modo que o seguinte sistema nas incógnitas x, y, z tenha:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x + y - z &= 2 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

   (i) Solução única (Sistema Possível Determinado: **SPD**)

   (ii) Uma infinidade de soluções (Sistema Possível Indeterminado: **SPI**)

   (iii) Nemhuma solução (Sistema Impossível: **SI**)

2. Sejam U e V os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$U = [\ (1,1,1), (1,2,2), (1,-1,-1)\ ]$$

$$W = [\ (0,1,-1), (1,1,2)\ ]$$

   Ache uma base e a dimensão de U , W , $(U \cap W)$ e $(U + W)$.

3. (**)Seja V o Espaço vetorial de todas as matrizes 2×2 sobre o corpo real $\mathbb{R}$. Mostre que

$$W = \{A \in V; \det(A) = 0\}$$

   não é Subespaço vetorial de V

4. Expresse o polinômio $v = t^2 + 4t - 3$ sobre $\mathbb{R}$ como combinação linear dos polinômios $p_1 = t^2 - 2t + 5$, $p_2 = 2t^2 - 3t$, $p_3 = t + 3$.

5. Seja V o espaço das matrizes 2×2 triangulares superiores. Sejam:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   duas bases de V.

   (i) Encontre as coordenadas de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ em relação às bases A e à base B.

   (ii) Encontre a matriz de mudança da base A para a base B e a matriz de mudança da base B para a base A.

6. (***)Determine a dimensão do Espaço vetorial de matrizes quadradas simetricas de ordem n.

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas

Nota: 120

Disciplina:

Curso: COMPUTAÇÃO

Professor: EU

Aluno: EU

Turma: 2017

Data: 04/09/2017

1

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ x+y-z=2 \\ x+y+(a^2-5)z=a \end{cases}$$

(i) Se $a \neq 2 \wedge a \neq -2$ o sistema tem solução única.

(ii) Se $a=2$ o sistema tem infinitas soluções.

(iii) Se $a=-2$ o sistema não tem solução.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & a^2-6 & a-3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

2

$U = [(1,1,1), (1,2,2), (1,-1,-1)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$3(1,1,1) - 2(1,2,2) = (1,-1,-1)$

$\therefore$ $\boxed{U = [(1,1,1), (1,2,2)] \quad \dim(U) = 2}$

Base de $U = \{(1,1,1), (1,2,2)\}$

$W = [(0,1,-1),\ (1,1,2)]$

$\dim(W) = 2$ e Base $= \{(0,1,-1),\ (1,1,2)\}$

U é um plano de equação : $-y + z = 0$

$\vec{n}_1 = (1,1,1) \times (1,2,2)$

$$\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\vec{n}_1 = (0, -1, 1)$

W é um plano de Equação : $3x - y - z = 0$

$\vec{n}_2 = (0,1,-1) \times (1,1,2)$

$$\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\vec{n}_2 = (3, -1, -1)$

$U \cap W$ é uma reta, com vetor de direção $\vec{u} = (2,3,3)$

$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (2, 3, 3)$

$U \cap W = [(2,3,3)]$

$\dim(U \cap W) = 1$

Base de $U \cap W = \{(2,3,3)\}$

$$U + W = \left[(1,1,1),\ (1,2,2),\ (0,1,-1),\ (1,1,2)\right]$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$
$$\dim(U+W) = 2 + 2 - 1$$
$$\dim(U+W) = 3 \Rightarrow \boxed{U+W = \mathbb{R}^3}$$

Uma base para $U+W$ é $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

ou também $\{(1,1,1),\ (1,2,2),\ (0,1,-1)\}$

$\boxed{3}$ $W = \{A \in V;\ \det(A) = 0\}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$ $\left(\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\right)$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$

$\det(A) = 0$ $\qquad$ $\det(B) = 0$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$

$\therefore$ W não é sub-espaço.

$\boxed{4}$ $v = t^2 + 4t - 3$

$P_1 = t^2 - 2t + 5$, $P_2 = 2t^2 - 3t$, $P_3 = t + 3$

Achar a, b, c ; $v = aP_1 + bP_2 + cP_3$

$t^2 + 4t - 3 = a(t^2 - 2t + 5) + b(2t^2 - 3t) + c(t+3)$

$t^2 + 4t - 3 = [a + 2b]t^2 + [-2a - 3b + c]t + [5a + 3c]$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ -2a - 3b + c = 4 \\ 5a + 3c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1	2	0	1
-2	-3	1	4
5	0	3	-3
1	2	0	1
0	1	1	6
0	-10	3	-8
1	2	0	1
0	1	1	6
0	0	13	52

Novo sistema:

$a + 2b = 1$

$b + c = 6$

$13c = 52$

$c = 4$, $b = 2$, $a = -3$

$$\boxed{v = -3P_1 + 2P_2 + 4P_3}$$

$\boxed{5}$ i)

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $a = 1$

$b = 2$ $\Rightarrow$ $[v]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$c = 4$

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas

Nota: ____________

Disciplina: ____________

Curso: ____________ Professor: ____________

Aluno: ____________

Turma: ____________ Data: ___ / ___ / ___

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+q+r & q+r \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

$r = 4$

$q + r = 2 \Rightarrow q = -2$

$p + q + r = 1 \Rightarrow p = -1$

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(*) $[I]_A^B = ?$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]_B^A = \left([I]_A^B\right)^{-1}$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{[I]_A^B} & \multicolumn{3}{c}{I} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{I} & \multicolumn{3}{c}{\left([I]_A^B\right)^{-1}}
\end{array}
$$

Por tanto

$$
[I]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\boxed{6}$ Matriz simetrica $\quad A = A^t$

$\boxed{n = 2}$

$$
A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}
$$

$$
A = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

$$
\dim = 3
$$

$\boxed{n = 3}$

$$
A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}
$$

$$
\dim = 6
$$

$n = 4 \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$

~~dim~~ $\dim = 10$

n	dim
2	3
3	6
4	10
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{n(n+1)}{2}$

$V = \{\text{Matriz simetrica de ordem } n\}$

$$\boxed{\dim(V) = \frac{n(n+1)}{2}}$$