INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Julho 2010

Editor, Coordenador de Revisão, Supervisor de Produção, Capa e Ilustrações:
Reginaldo J. Santos

ISBN 978-85-7470-021-2

Ficha Catalográfica

	Santos, Reginaldo J.
S237i	Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias / Reginaldo J. Santos - Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.
	1. Equações Diferenciais I. Título
	CDD: 515.3

Conteúdo

Prefácio

Este é um texto alternativo ao excelente livro Boyce-DiPrima [1] para a parte de equações diferenciais ordinárias, sendo mais objetivo e mais elementar. Entretanto aqui estão apresentadas provas elementares de resultados como os teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais e para sistemas de equações diferenciais, o teorema sobre a existência de soluções em série de potências para equações lineares de 2ª ordem, a injetividade da transformada de Laplace e outros. O conteúdo corresponde ao programa da disciplina 'Equações Diferenciais A' que é ministrado para os alunos da área de ciências exatas na Universidade Federal de Minas Gerais.

O texto é dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 apesar do título ser 'Equações diferenciais de 1ª Ordem' é feita uma introdução às equações diferenciais em geral e entre as equações de 1ª ordem são estudadas as equações lineares, as separáveis e as exatas. Tem uma seção sobre substituições em equações de 1ª ordem onde são estudadas as equações homogêneas, as de Bernoulli e as de Ricatti. Terminamos o capítulo com aplicações das equações de 1ª ordem, análise qualitativa das equações autônomas e existência e unicidade de soluções.

As equações lineares de 2ª ordem é o assunto do Capítulo 2. Aqui o estudo tanto das equações homogêneas como das equações não homogêneas é feito inicialmente no caso geral e depois no caso particular em que os coeficientes são constantes. O capítulo contém também oscilações. O capítulo termina com soluções em série de potências em torno de $t_0 = 0$ no caso em que este ponto é ordinário e mudanças de variáveis em equações de 2ª ordem.

O Capítulo 3 trata da transformada de Laplace. O objetivo é resolver problemas de valor inicial para equações lineares de 2ª ordem tanto com o termo não homogêneo contínuo, quanto descontínuo. Terminamos o capítulo com a transformada de Laplace do delta de Dirac e com a convolução.

No Capítulo 4 o estudo de sistemas de equações diferenciais lineares é feito usando diagonalização de matrizes. O caso 2×2 é tratado em separado com detalhe. O capítulo termina com os sistemas não homogêneos e o uso da transformada de Laplace.

Todos os exercícios estão resolvidos no final do capitulo correspondente. Os desenhos e gráficos foram feitos usando o MATLAB®* com o pacote GAAL e o Maxima também com o pacote GAAL disponíveis no site do autor (http://www.mat.ufmg.br/~regi). Neste site também estão disponíveis páginas interativas para o estudo de oscilações, equações parciais, séries de Fourier e outros.

Gostaria de agradecer ao professor Helder C. Rodrigues pelas frutíferas discussões, aos professores Rogério S. Mol, Antônio Gaspar Ruas, Francisco Dutenhefner, Grey Ercole, Hamilton P. Bueno, Antônio Zumpano, Marcelo T. Cunha, Jorge Sabatucci, Regina Radich, Marcelo Marchesin, Ricardo Takahashi, Armando G. M. Neves e Carlos A. Arteaga pelas críticas e sugestões que possibilitaram o aperfeiçoamento do presente texto.

*MATLAB é marca registrada de The Mathworks, Inc.

Sugestão de Cronograma para 60 Horas

Capítulo 1	20 aulas
Capítulo 2	20 aulas
Capítulo 3	10 aulas
Capítulo 4	10 aulas
Total	60 aulas

Capítulo 1

Equações Diferenciais de 1ª Ordem

1.1 Introdução às Equações Diferenciais

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto uma **equação diferencial** é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(t)$, t é a variável independente e y é a variável dependente. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1. O movimento de um pêndulo simples de massa m e comprimento l é descrito pela função $\theta(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

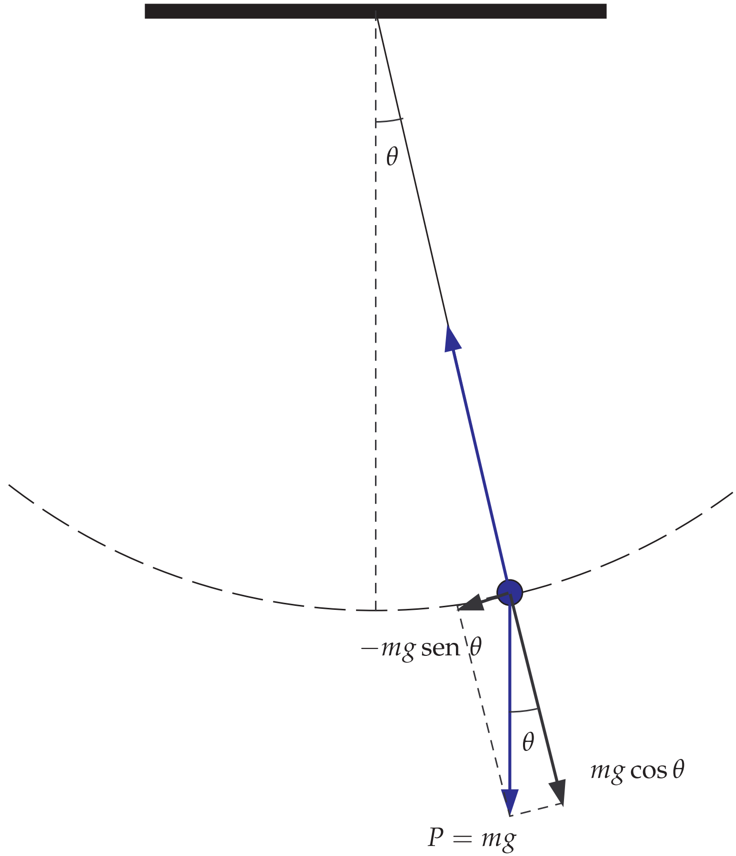


Figura 1.1: Pêndulo Simples

Nesta equação a incógnita é a função $\theta(t)$. Assim θ é a variável dependente e t é a variável independente.

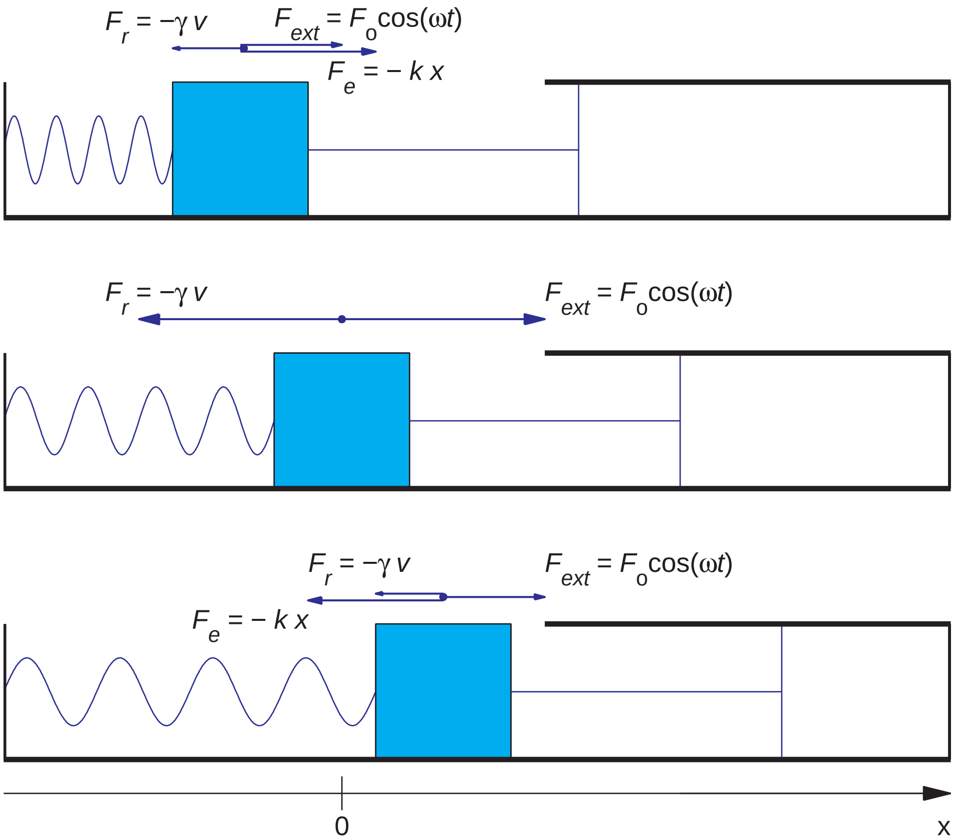


Figura 1.2: Sistema massa-mola

Exemplo 1.2. Em um sistema massa-mola composto de um corpo de massa m preso a uma mola com constante elástica k, sujeita a uma força de resistência $F_r = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$ e uma força externa $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$ o deslocamento da massa $x(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\omega t).$$

Nesta equação a incógnita é a função $x(t)$. Assim x é a variável dependente e t é a variável independente.

Exemplo 1.3. Numa região do plano em que não há cargas elétricas o potencial elétrico $u(x,y)$ em cada ponto (x,y) da região satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Nesta equação a incógnita é a função $u(x,y)$. Assim u é a variável dependente e x e y são as variáveis independentes.

Exemplo 1.4. Um circuito RC é um circuito que tem um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C e um gerador que gera uma diferença de potencial $V(t)$ ligados em série. A carga $Q(t)$ no capacitor satisfaz a equação diferencial

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t).$$

Nesta equação a incógnita é a função $Q(t)$. Assim Q é a variável dependente e t é a variável independente.

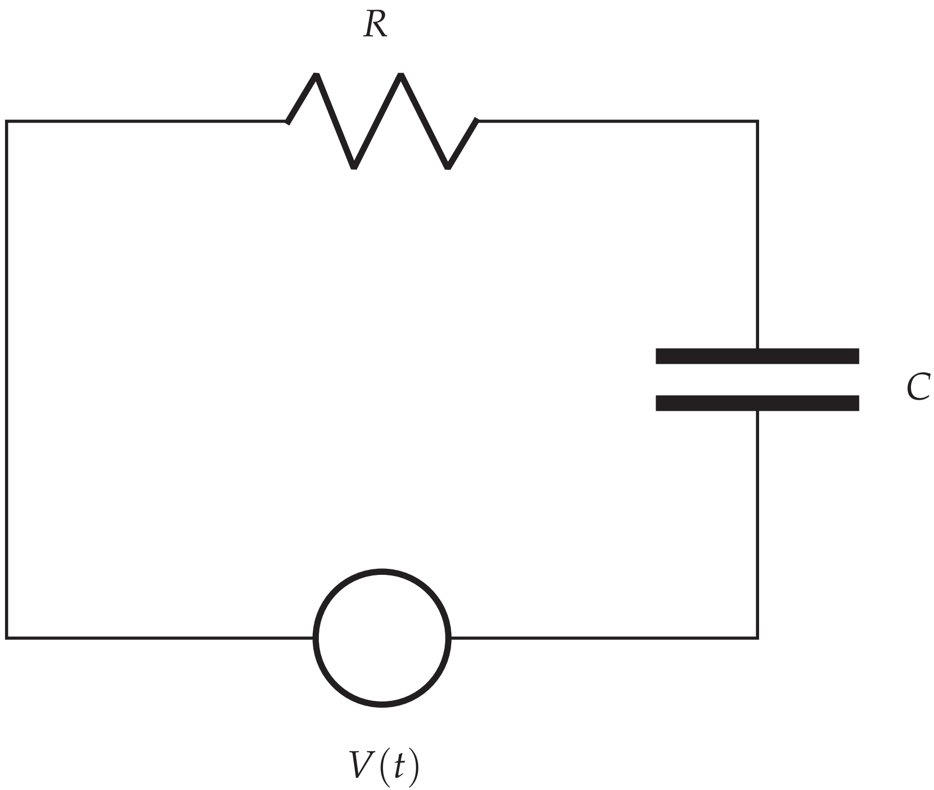


Figura 1.3: Circuito RC

1.1.1 Classificação

As equações são classificadas quanto ao **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

(a) Quanto ao tipo uma equação diferencial pode ser **ordinária** ou **parcial**. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto as derivadas que aparecem na equação são derivadas totais. Por exemplo, as equações que podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y', y'', ...) = 0,$$

em que y é função apenas de t, são equações diferenciais ordinárias, como as equações dos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.4. A equação do Exemplo 1.3 é parcial.

(b) Quanto à ordem uma equação diferencial pode ser de **1ª**, de **2ª**, ..., de ***n*-ésima ordem** dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação que pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

As equações dos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 são de 2ª ordem e a equação do Exemplo 1.4 é de 1ª ordem.

(c) Quanto a linearidade uma equação diferencial pode ser **linear** ou **não linear**. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita como

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \ldots + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma são não lineares. As equações dos Exemplos 1.2, 1.3 e 1.4 são lineares e a equação do Exemplo 1.1 é não linear.

1.1.2 Soluções de Equações Ordinárias

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial ordinária de ordem** n **em um intervalo** I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que as suas derivadas de ordem até n estão definidas no intervalo I e satisfazem a equação neste intervalo.

Exemplo 1.5. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ tais que } b^2 - 4ac = 0.$$

Vamos mostrar que $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução desta equação para $t \in \mathbb{R}$.

$$y'(t) = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}, \quad y''(t) = \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}$$

Substituindo-se $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ no primeiro membro da equação obtemos

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t} + b\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}\right) + ce^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)e^{-\frac{b}{2a}t} \\ &= \frac{-b^2 + 4ac}{4a}e^{-\frac{b}{2a}t} = 0, \end{aligned}$$

pois por hipótese $b^2 - 4ac = 0$. Assim $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução da equação.

1.1.3 Equações Ordinárias de 1ª Ordem

As equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(t, y, y') = 0.$$

Vamos estudar equações de primeira ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1.1}$$

Uma **solução (particular) de uma equação diferencial (1.1) em um intervalo** I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que a sua derivada $y'(t)$ está definida no intervalo I e satisfaz a equação (1.1) neste intervalo.
O problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

é chamado **problema de valor inicial (PVI)**. Uma **solução do problema de valor inicial (1.2) em um intervalo** I é uma função $y(t)$ que está definida neste intervalo, tal que a sua derivada também está definida neste intervalo e satisfaz (1.2).

Quando resolvemos uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem obtemos uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária. Se toda solução particular puder ser obtida da família de soluções que encontramos por uma escolha apropriada da constante dizemos que a família de soluções é a **solução geral** da equação.

Exemplo 1.6. A equação

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t}$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo

$$y(t) = \int e^{3t}\, dt = \frac{e^{3t}}{3} + C,$$

que é a solução geral da equação diferencial dada.

Para encontrarmos a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{3t} \\ y(1/3) = e/3 \end{cases}$$

Substituímos $t = 1/3$ e $y = e/3$ na solução geral encontrada obtendo $C = 0$. Assim a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3}$$

válida para $-\infty < t < \infty$, que é o maior intervalo em que a solução e sua derivada estão definidas.

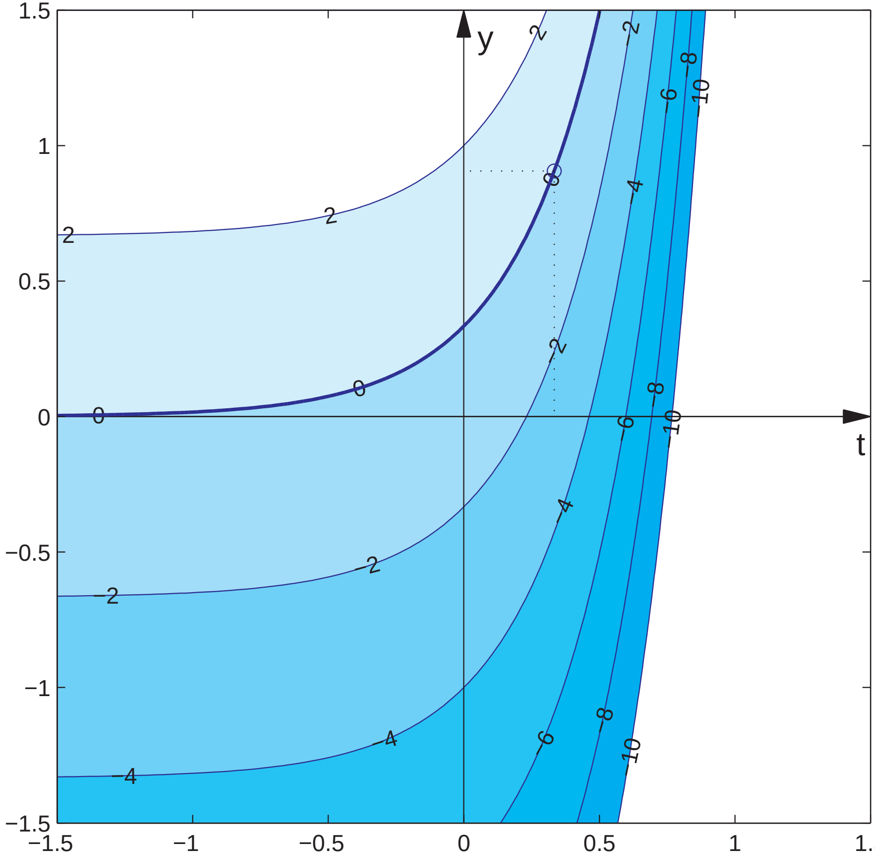


Figura 1.4: Soluções da equação e do PVI do Exemplo 1.6

Exercícios (respostas na página 159)

1.1. Classifique as equações abaixo quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

(a) $yy' + t = 0$

(b) $x^2y'' + bxy' + cy = 0$

1.2. Determine qual ou quais das funções $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ e $y_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

1.3. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostre que

(a) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar + b = 0$, é solução da equação $ay' + by = 0$.

(b) $y(t) = e^{rt}$, com r raiz de $ar^2 + br + c = 0$, é solução da equação $ay'' + by' + cy = 0$.

(c) $y(x) = x^r$, com r raiz de $r^2 + (b-1)r + c = 0$, é solução da equação $x^2y'' + bxy' + cy = 0$.

1.4. Determine os valores de r para os quais a função $y(t)$ é solução da equação.

(a) $y(t) = \dfrac{r}{t^2-3}$ e $y' + ty^2 = 0$.

(b) $y(t) = \dfrac{r}{t^2+1}$ e $y' - 2ty^2 = 0$.

(c) $y(t) = \dfrac{r}{t^2+1}$ e $y' - 6ty^2 = 0$.

(d) $y(t) = \dfrac{r}{t^2+2}$ e $y' - ty^2 = 0$.

1.2 Equações Lineares de 1ª Ordem

As **equações (diferenciais ordinárias) lineares de 1ª ordem** são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.3}$$

1.2.1 Equações em que $p(t) = 0$

Se a função $p(t) = 0$ a equação (1.3) torna-se

$$\frac{dy}{dt} = q(t), \tag{1.4}$$

que é facilmente resolvida integrando-se os dois lados. Assim a solução geral desta equação é dada por

$$y(t) = \int q(t)dt + C.$$

Exemplo 1.7. A equação

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(2t)$$

pode ser resolvida por integração direta obtendo-se a solução geral

$$y(t) = \int \operatorname{sen}(2t)\, dt = -\frac{\cos(2t)}{2} + C.$$

Na subseção 1.2.2 e na seção 1.3 veremos técnicas de se encontrar soluções de equações de 1ª ordem que se baseiam em transformar a equação inicial em uma equação do tipo (1.4).

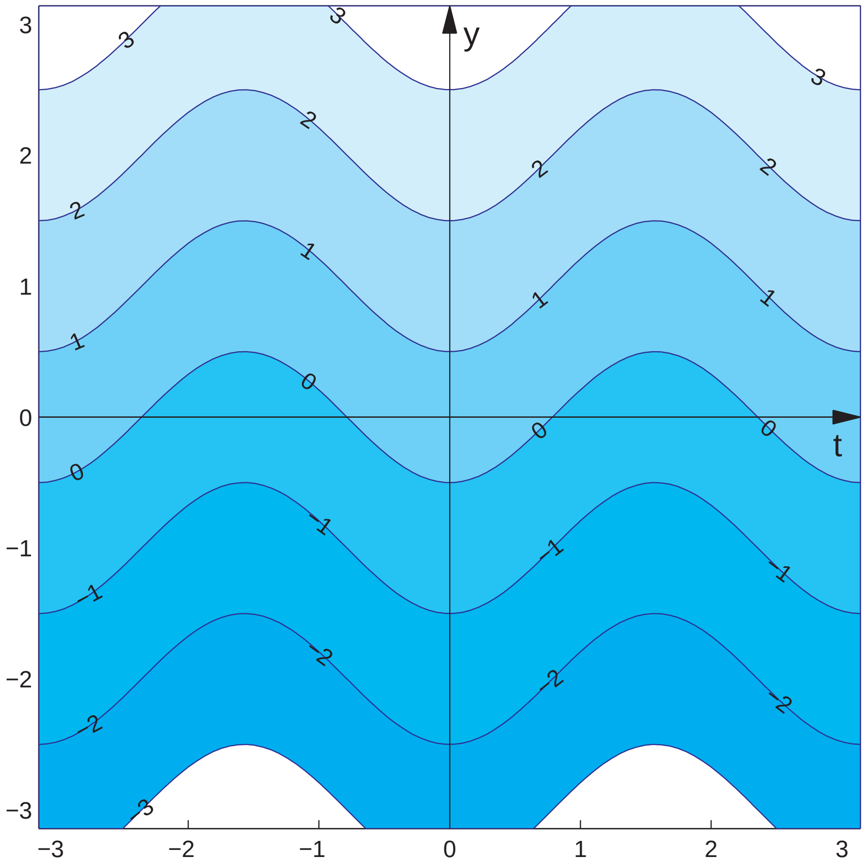


Figura 1.5: Soluções da equação do Exemplo 1.7

1.2.2 Equações Lineares - Caso Geral

Vamos considerar equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t). \tag{1.5}$$

Vamos definir uma função auxiliar, $\mu(t)$, de forma que ao multiplicarmos a equação (1.5) por esta função a equação obtida é uma equação linear com $p(t) = 0$, ou seja, do tipo (1.4), que já resolvemos anteriormente. Uma função com esta propriedade é chamada **fator integrante da equação linear**.

Seja

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Vamos mostrar agora que $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ é um fator integrante da equação (1.5).

Observe em primeiro lugar que

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt} \frac{d}{dt}\left(\int p(t)dt\right) = e^{\int p(t)dt} p(t) = \mu(t)p(t). \tag{1.6}$$

Assim multiplicando-se (1.5) por $\mu(t)$, obtemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t) \tag{1.7}$$

mas como por (1.6), $\mu(t)p(t) = \dfrac{d\mu}{dt}$, então (1.7) pode ser reescrita como

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t). \tag{1.8}$$

Mas o lado esquerdo dessa equação é a derivada de um produto o que faz com que ela possa ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right) = \mu(t)q(t) \tag{1.9}$$

A equação (1.9) é uma equação do tipo (1.4), ou seja,

$$\frac{dY}{dt} = f(t)$$

em que $Y(t) = \mu(t)y(t)$ e $f(t) = \mu(t)q(t)$. Assim, a solução geral de (1.9) é dada por

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + C.$$

Como $\mu(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, dividindo-se a equação anterior por $\mu(t)$ obtemos que a solução geral de (1.5) é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)q(t)dt + C\right)$$

Mostraremos na Subseção 1.2.3 como podemos chegar a $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ como fator integrante da equação (1.5).

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação linear de 1ª ordem.

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

Exemplo 1.8. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t.$$

O fator integrante é

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln t} = e^{\ln t^2} = t^2.$$

Multiplicando-se a equação acima por $\mu(t)$ obtemos:

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty = t^3.$$

O lado esquerdo é igual a derivada do produto $t^2 y(t)$. Logo a equação acima é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 y(t)\right) = t^3.$$

Integrando-se obtemos

$$t^2 y(t) = \frac{t^4}{4} + C$$

Explicitando $y(t)$ temos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2}. \tag{1.10}$$

Podemos esboçar as soluções desta equação diferencial. Para $C = 0$ a solução é a parábola

$$y(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Para $C \neq 0$, temos que o domínio de $y(t)$ é o conjunto dos números reais tais que $t \neq 0$. $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = +\infty$, se $C \neq 0$. Além disso

$$\lim_{t \to 0} y(t) = +\infty, \quad \text{se } C > 0$$

e

$$\lim_{t \to 0} y(t) = -\infty, \quad \text{se } C < 0.$$

Vamos analisar o crescimento e decrescimento das soluções

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{2} - \frac{2C}{t^3} = 0$$

se, e somente se,

$$t^4 = 4C.$$

Assim se $C > 0$ as soluções têm somente pontos críticos em $t = \pm\sqrt[4]{4C}$ e se $C < 0$ elas não têm ponto crítico.

Exemplo 1.9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{t} y = t. \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

A equação é a mesma do Exemplo 1.8. Substituindo-se $t = 2$ e $y = 3$ em (1.10) obtemos

$$3 = \frac{4}{4} + \frac{C}{4}$$

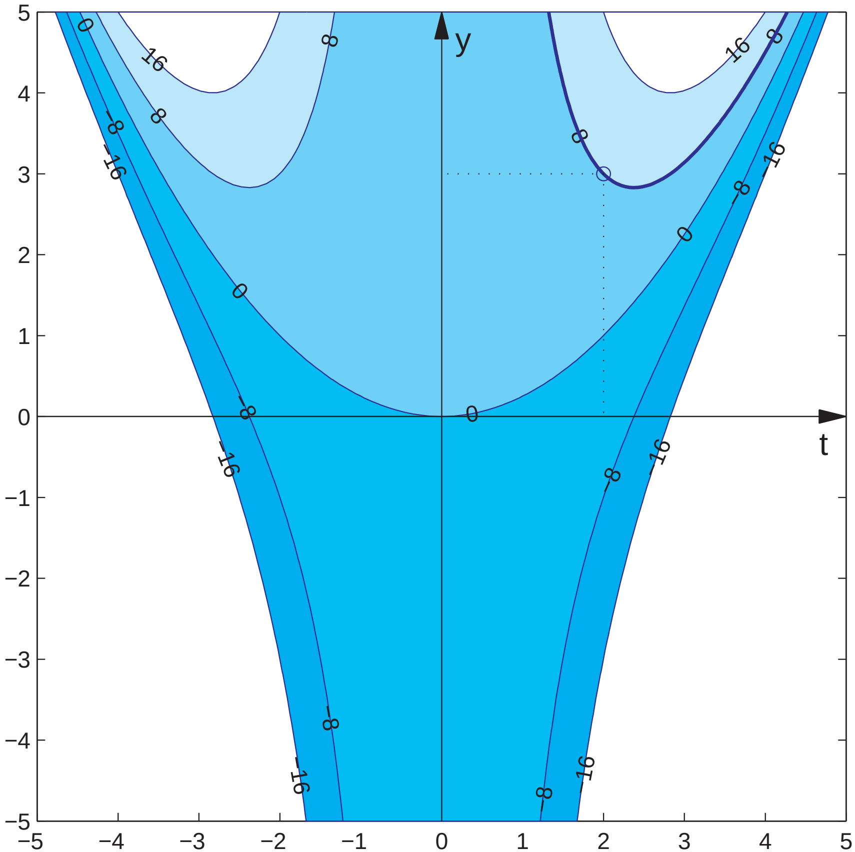


Figura 1.6: Soluções da equação do Exemplo 1.8 e a solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.9

De onde obtemos que $C = 8$. Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{8}{t^2}.$$

Observe que a solução deste problema de valor inicial é válida no intervalo $(0, +\infty)$, que é o maior intervalo contendo $t = 2$ (pois a condição inicial é $y(2) = 3$) em que a solução e sua derivada estão definidas. Se a condição inicial ao invés de $y(2) = 3$ fosse $y(-2) = 3$ a solução teria a mesma expressão, mas o intervalo de validade da solução seria $(-\infty, 0)$.

1.2.3 Como chegar ao fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$?

Vamos mostrar como podemos chegar ao fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$. Comparando-se as equações (1.7) e (1.8) na página 16 vemos que o fator integrante $\mu(t)$ deve ser uma função que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dt} = p(t)\mu(t).$$

Esta é também uma equação linear, mas com $q(t) = 0$. Supondo-se $\mu(t) \neq 0$, vamos multiplicar esta equação por $1/\mu(t)$ obtendo a equação

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Como $\frac{1}{\mu(t)} = \frac{d}{d\mu}(\ln|\mu(t)|)$ a equação anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\mu}(\ln|\mu(t)|) \frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Mas pela regra da cadeia esta equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}(\ln|\mu(t)|) = p(t)$$

que é uma equação do tipo (1.4) que pode ser resolvida simplesmente integrando-se ambos os membros obtendo

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + C_1$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\mu(t) = \pm e^{c_1} e^{\int p(t)dt} = Ce^{\int p(t)dt}.$$

Como estamos interessados em apenas um fator integrante podemos tomar $C = 1$ e obtermos

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Exercícios (respostas na página 161)

2.1. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y' + (1-2x)y = xe^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y' + 3t^2 y = e^{-t^3+t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' - \cos t\, y = te^{t^2+\operatorname{sen} t} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' + x^4 y = x^4 e^{\frac{4x^5}{5}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2.2. Resolva as equações:

(a) $y' - \dfrac{4}{x}y = -\dfrac{2}{x^3}$.

(b) $y' - \dfrac{1}{x}y = -x$.

(c) $y' - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$.

2.3. (a) Resolva o problema de valor inicial:
$\begin{cases} y' + 5x^4 y = x^4 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

(b) Para quais valores de y_0 a solução é crescente e para quais valores de y_0 a solução é decrescente.

(c) Qual o limite de $y(x)$ quando x tende a $+\infty$. O limite depende de y_0?

2.4. (a) Resolva o problema de valor inicial:
$\begin{cases} (x^2-9)y' + xy = 0 \\ y(5) = y_0 \end{cases}$

(b) Qual o intervalo de validade da solução?

(c) Qual o limite de $y(x)$ quando x tende a $+\infty$. O limite depende de y_0?

2.5. Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

(a) Mostre que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação, então $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ também o é.

(b) Mostre que se $y_1(t)$ é solução da equação, então $y(t) = cy_1(t)$ também o é, para qualquer constante c.

2.6. Considere as equações

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \tag{1.12}$$

Mostre que se $y_1(t)$ é solução da equação (1.11) e $y_2(t)$ é solução da equação (1.12), então $y(t) = cy_1(t) + y_2(t)$ é solução de (1.12), para qualquer constante c.

1.3 Equações Separáveis

As **equações (diferenciais ordinárias) separáveis** são equações que podem ser escritas na forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.13}$$

Seja

$$h(y) = \int g(y)dy.$$

Então

$$\frac{dh}{dy} = g(y).$$

Substituindo-se $g(y)$ por $\frac{dh}{dy}$ na equação (1.13) obtemos

$$\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.14}$$

Mas, pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx},$$

o que implica que (1.14) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = f(x) \tag{1.15}$$

A equação (1.15) é do tipo (1.4) na página 14, ou seja, é da forma

$$\frac{dY}{dx} = f(x)$$

em que $Y(x) = h(y(x))$. Assim, integrando-se (1.15) dos dois lados obtemos que a solução geral de (1.13) é dada **implicitamente** por

$$h(y(x))) = \int f(x)dx + C.$$

Também podemos obter a solução da maneira mostrada a seguir. Integrando-se em relação a x ambos os membros de (1.13) obtemos

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)dx + C,$$

que pode ser reescrita como

$$\int g(y)y'\,dx = \int f(x)dx + C.$$

Fazendo a substituição $y'dx = dy$ obtemos

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)dx + C.$$

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação separável.

As curvas que são soluções de uma equação separável podem ser vistas como curvas de nível da função

$$z = F(x,y) = h(y(x))) - \int f(x)dx.$$

Exemplo 1.10. Vamos, agora, encontrar a solução geral da equação diferencial

$$2y\frac{dy}{dx} = -4x \quad \text{ou} \quad 2yy' = -4x$$

Integrando-se em relação a x ambos os membros obtemos

$$\int 2yy'\,dx = -\int 4x dx + C.$$

Fazendo a substituição $y'dx = dy$ obtemos

$$\int 2y\,dy = -\int 4x dx + C.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^2 = -2x^2 + C$$

As soluções são elipses (Figura 1.7) que são as curvas de nível da função

$$z = F(x,y) = y^2 + 2x^2.$$

O gráfico da função $F(x,y) = y^2 + 2x^2$ é um parabolóide elíptico (Figura 1.8).

Exemplo 1.11. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{3y^2-3} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(b) Determine o **intervalo de validade da solução**, ou seja, o maior intervalo contendo $x_0 = 1$ para o qual a solução $y(x)$ e sua derivada $\dfrac{dy}{dx}$ estão definidas.

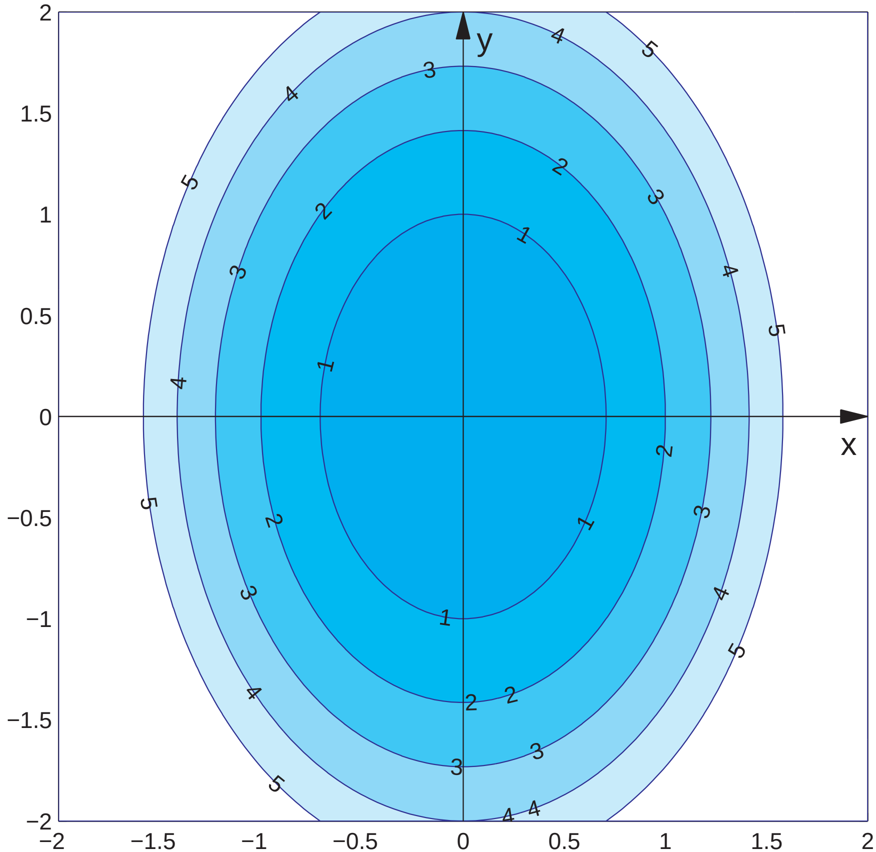


Figura 1.7: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.10

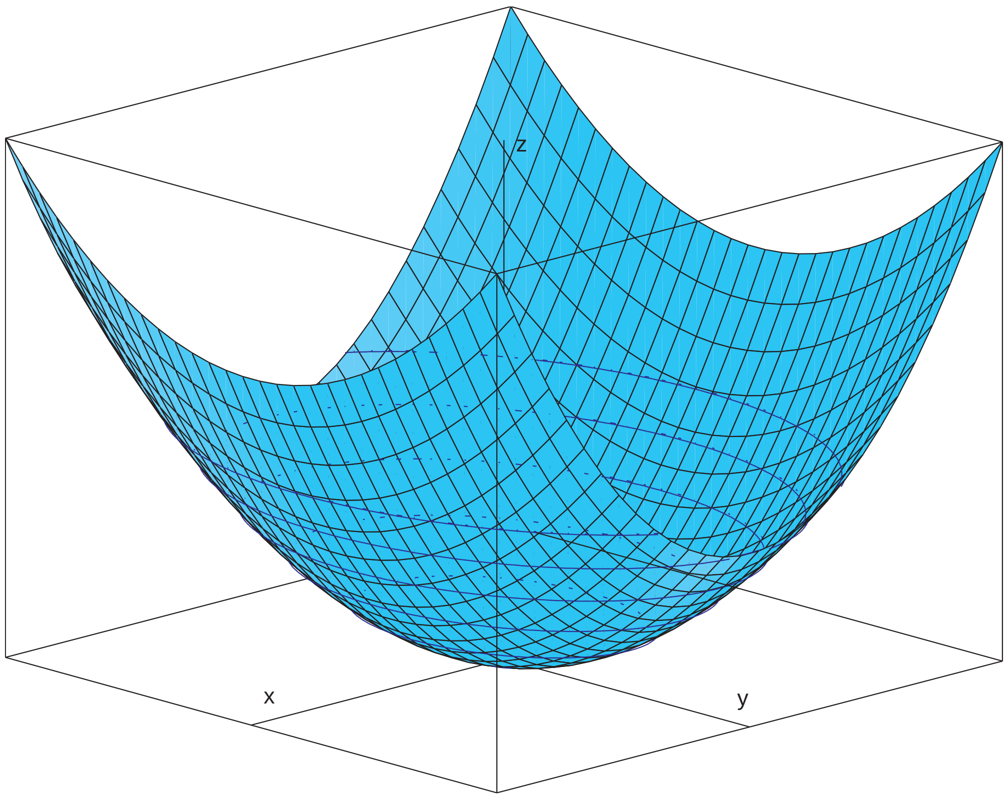


Figura 1.8: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.10 como curvas de nível do parabolóide elíptico $z = F(x,y) = 2x^2 + y^2$

(c) Determine os pontos onde a solução tem um máximo local.

(d) Faça um esboço do gráfico da solução.

Solução:

(a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2 - 3)y' = 2x - 1$$

Integrando-se em relação a x ambos os membros obtemos

$$\int (3y^2 - 3)y'\,dx = \int (2x - 1)dx + C.$$

Fazendo a substituição $y'dx = dy$ obtemos

$$\int (3y^2 - 3)\,dy = \int (2x - 1)dx + C.$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y = x^2 - x + C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 0$ substituímos $x = 1$ e $y = 0$ na solução geral obtendo $C = 0$. Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3 - 3y - x^2 + x = 0$$

(b) Para determinar o intervalo de validade da solução do PVI vamos determinar o maior intervalo que contem $x = 1$ em que a solução e sua derivada estão definidas. Pela equação $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{3y^2-3}$, temos que os pontos onde a derivada não está definida são aqueles tais que $3y^2 - 3 = 0$, ou seja, $y = \pm 1$. Como o ponto inicial é $(1,0)$, então a solução do PVI está contida na região do plano $-1 < y < 1$. Substituindo-se $y = -1$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2 - x - 2 = 0$, que tem solução $x = -1$ e $x = 2$. Substituindo-se $y = 1$ na equação que define a solução $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$ obtemos a equação $x^2 - x + 2 = 0$, que não tem solução real.

Como a solução está definida para todo x, mas a derivada não está definida para $x = -1$ e $x = 2$ e o ponto inicial $x_0 = 1$ está entre os valores $x = -1$ e $x = 2$ concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo $(-1, 2)$, que é o maior intervalo em que a solução $y(x)$ e a sua derivada estão definidas.

(c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde $\frac{dy}{dx} = 0$. Neste caso não precisamos calcular a derivada da solução, pois a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{3y^2 - 3}$$

Assim, a reta tangente é horizontal para x tal que $2x - 1 = 0$, ou seja, somente para $x = 1/2$.

(d) Nos pontos $x = -1$ e $x = 2$ a reta tangente à curva solução $y^3 - 3y - x^2 + x = 0$ é vertical, ou seja, $\frac{dx}{dy} = 0$, pois pela equação diferencial,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3y^2 - 3}{2x - 1},$$

para $x \neq 1/2$. Assim já sabemos pelo item (b) que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos $(-1, -1)$ e $(2, -1)$ onde a tangente é vertical, e que passa pelo ponto inicial $(1, 0)$. Neste ponto a inclinação da tangente é $-1/3$, pois substituindo-se $x = 1$ e $y = 0$ na equação diferencial obtemos $\frac{dy}{dx} = -1/3$. Além disso sabemos que o único ponto em que a tangente é horizontal ocorre para $x = 1/2$. Deduzimos daí que a solução é crescente até $x = 1/2$ depois começa a decrescer.

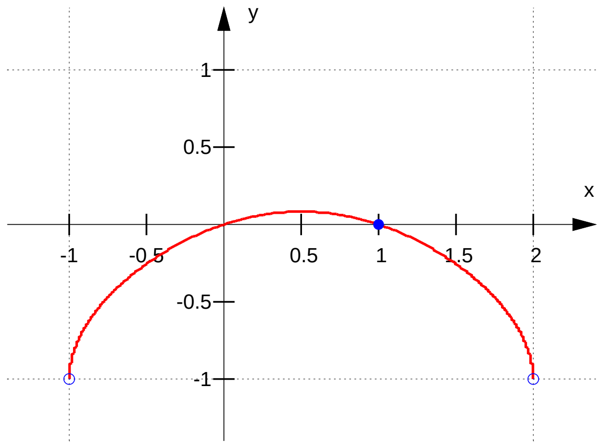


Figura 1.9: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.11

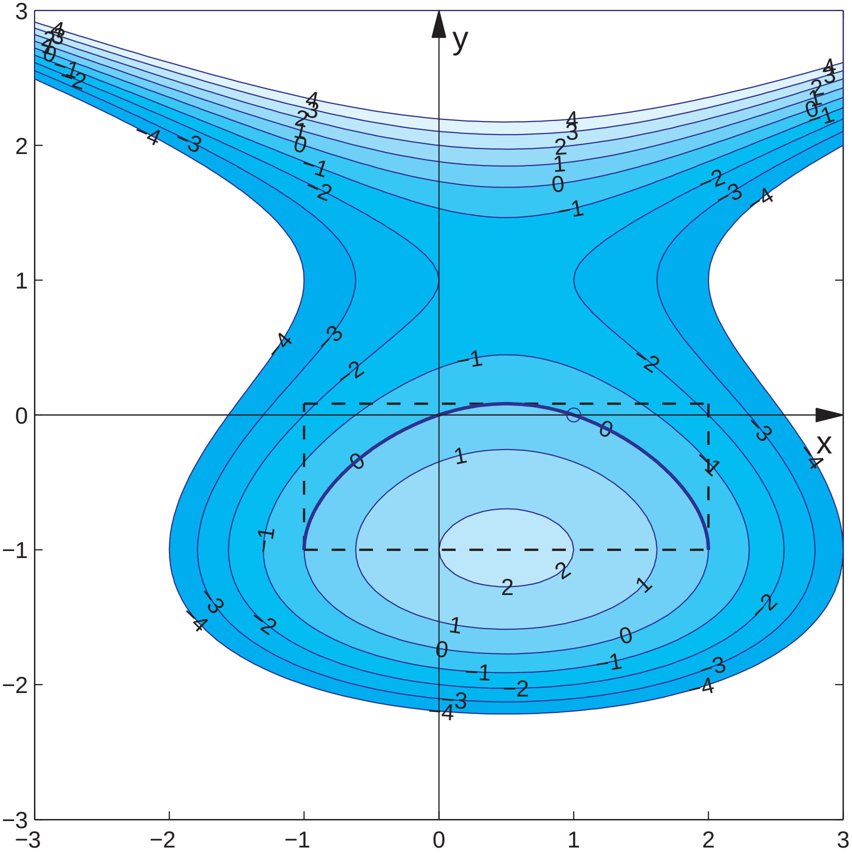


Figura 1.10: Soluções da equação diferencial e do problema de valor inicial do Exemplo 1.11

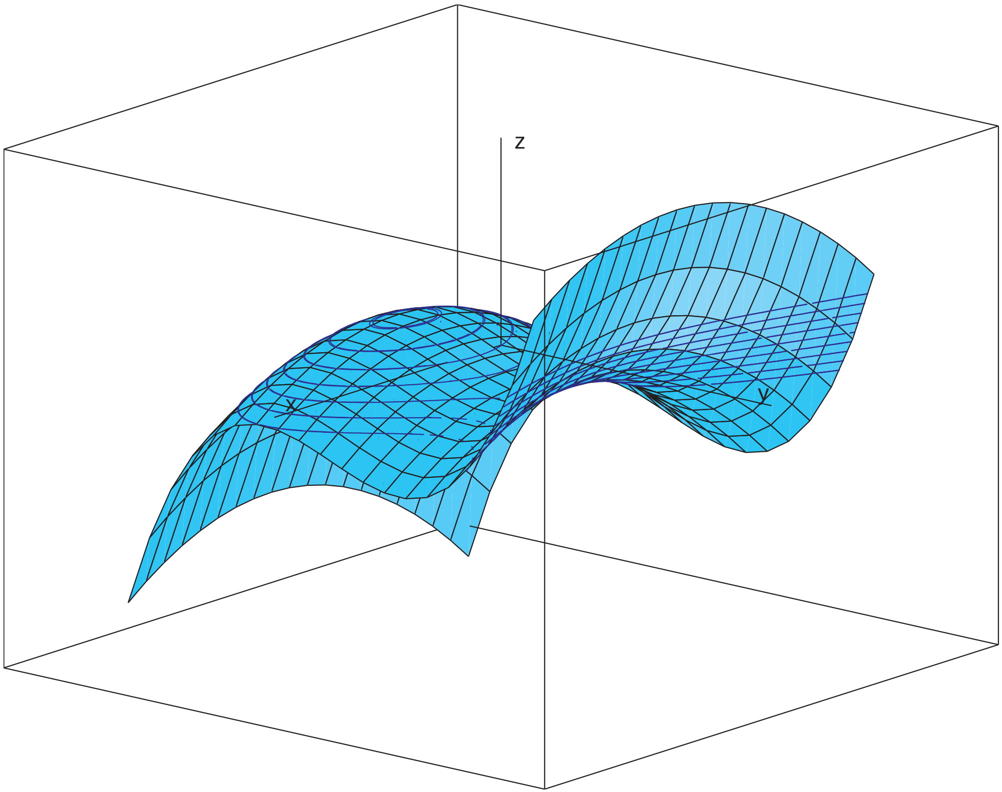


Figura 1.11: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.11 como curvas de nível de uma função de duas variáveis $z = f(x, y) = y^3 - 3y - x^2 + x$

Exercícios (respostas na página 166)

3.1. Resolva as equações:

(a) $(1+x^2)y' - xy = 0$.

(b) $y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0$.

(c) $(ayx^2 + by)y' - x = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(d) $(ax^2 + b)^{1/2} y' - xy^3 = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(e) $(ay^2 + b)^{1/2} - xyy' = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(f) $ay^2 + b - x^2 yy' = 0$ para $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

3.2. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+1}{3y^2-3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(b) Determine o intervalo de validade da solução.

(c) Determine os pontos onde a solução tem um máximo local.

(d) Faça um esboço do gráfico da solução.

3.3. Mostre que a equação linear $y' + p(t)y = q(t)$ é equivalente a uma equação separável se

(a) $p(t) = a$ e $q(t) = b$, para $a, b \in \mathbb{R}$;

(b) $p(t) = q(t)$;

(c) $q(t) = 0$.

1.4 Equações Exatas

As **equações exatas** são equações que podem ser escritas na forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.16}$$

em que as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ satisfazem

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{1.17}$$

em um retângulo

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \theta\},$$

em que $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas.
Nestas condições mostraremos depois que existe uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{1.18}$$

Substituindo-se estes valores de $M(x,y)$ e de $N(x,y)$ em (1.16) obtemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.19}$$

Mas, pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\left(\psi(x,y(x))\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Então (1.19) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(\psi(x,y(x))\right) = 0. \tag{1.20}$$

A equação (1.20) é do tipo (1.4), ou seja,

$$\frac{dY}{dx} = f(x),$$

em que $Y(x) = \psi(x, y(x))$ e $f(x) = 0$. Assim, a solução geral de (1.20) e portanto de (1.16) é dada por

$$\psi(x, y(x)) = C. \tag{1.21}$$

Vamos, agora, ver como encontrar a função $\psi(x, y)$. Integrando-se a 1ª equação de (1.18) em relação a x obtemos

$$\psi(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y), \tag{1.22}$$

em que $h(y)$ é uma função a ser determinada. $\psi(x, y)$ dada por (1.22) é solução da 1ª equação de (1.18) pois derivando a equação (1.22) em relação a x obtemos a 1ª equação de (1.18). Substituindo-se a função $\psi(x, y)$ encontrada em (1.22) na 2ª equação de (1.18) obtemos

$$N(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right) + \frac{dh}{dy} = \int \frac{\partial M}{\partial y}dx + \frac{dh}{dy}.$$

Daí obtemos uma equação diferencial para $h(y)$:

$$\frac{dh}{dy} = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx. \tag{1.23}$$

Se a equação (1.16) é exata o lado esquerdo de (1.23) não depende de x, pois usando (1.17) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \frac{\partial M}{\partial y}dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

A equação (1.23) é do tipo (1.4) na página 14, ou seja,

$$\frac{dZ}{dy} = f(y)$$

em que $Z(y) = h(y)$ e $f(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$. Assim, uma solução é dada por

$$h(y) = \int N(x,y)dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy.$$

Substituindo-se este valor de $h(y)$ em (1.22) obtemos

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy.$$

Portanto a solução geral da equação exata (1.16) é, por (1.21),

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int \left(\int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy = C$$

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida no final. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para resolver uma equação exata.

Exemplo 1.12. Considere a equação diferencial

$$\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1.$$

Para esta equação,

$$M(x,y) = -\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \quad \text{e} \quad N(x,y) = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}.$$

Assim,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-4xy}{(1+2x^2)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = y\frac{(-1)(4x)}{(1+2x^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+2x^2)^2}$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, para todo par $(x,y) \in \mathbb{R}$, então a equação é exata. Vamos encontrar uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = -\frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}$$

Integrando-se a 1ª equação em relação a x obtemos

$$\psi(x,y) = \int \left(\frac{-2xy^2}{(1+2x^2)^2} - 1 \right) dx = y^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2x^2} - x + h(y) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + h(y)$$

Substituindo-se a função $\psi(x,y)$ encontrada na equação $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = \dfrac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}$ obtemos

$$\frac{y}{1+2x^2} + \frac{dh}{dy} = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{dh}{dy} = \frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2} - \frac{y}{1+2x^2} = \frac{y+2x^2y}{1+2x^2} = y$$

que tem solução geral $h(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$. Assim, a solução geral da equação é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + \frac{y^2}{2} = C$$

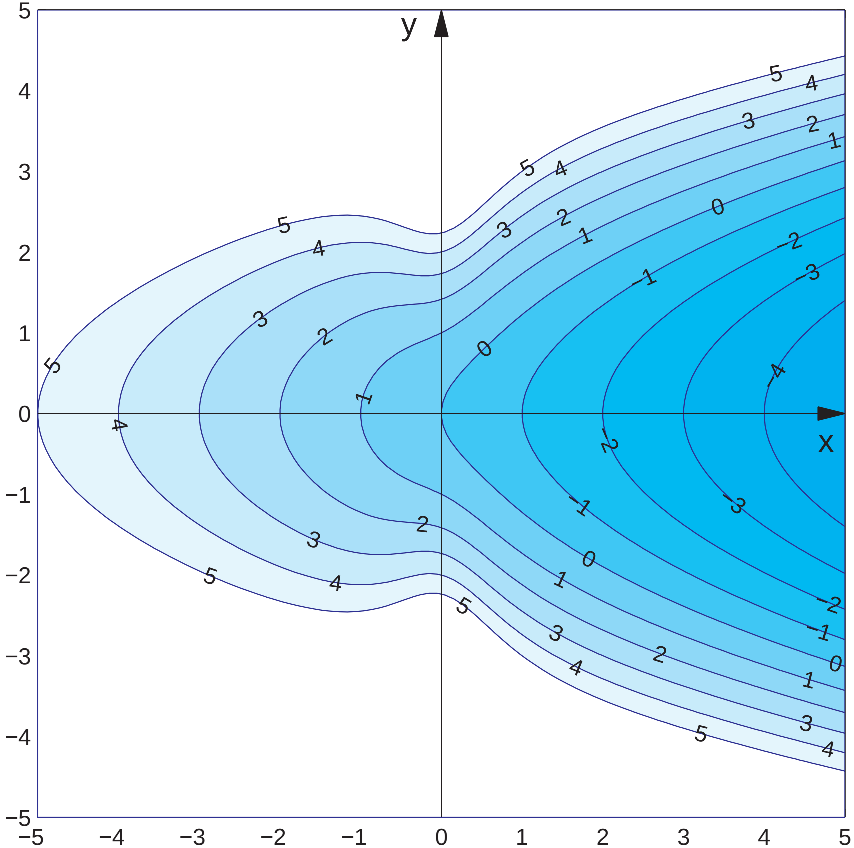


Figura 1.12: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.12

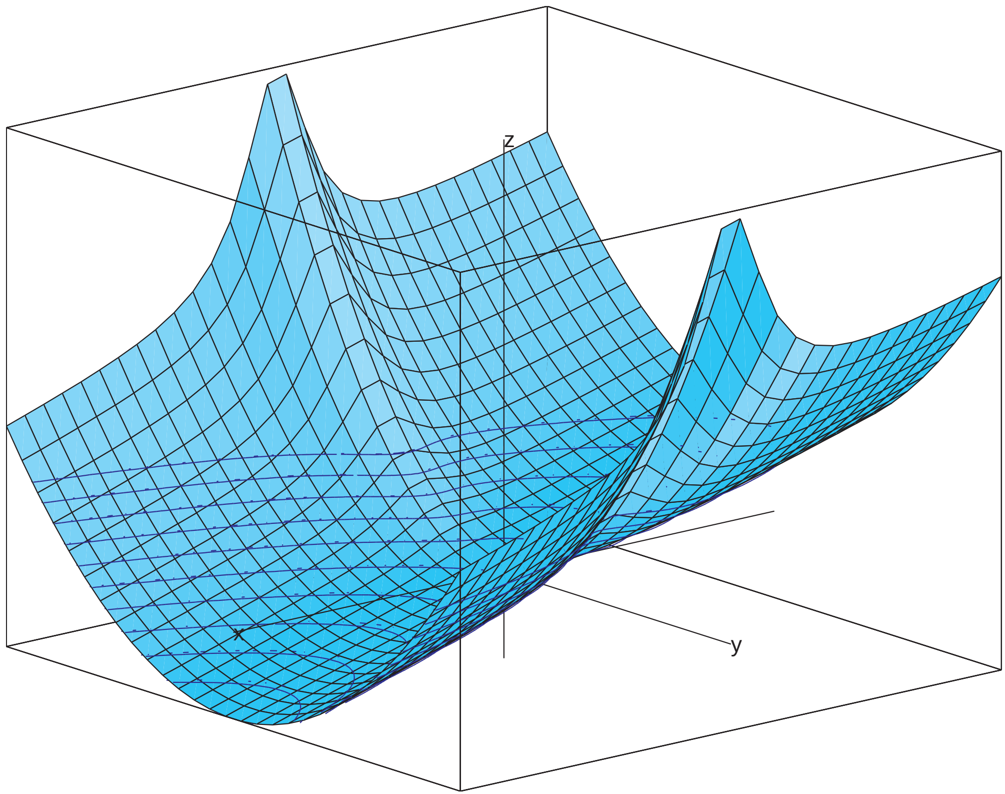


Figura 1.13: Soluções da equação diferencial do Exemplo 1.12 como curvas de nível de uma função de duas variáveis $z = \psi(x,y) = \frac{y^2}{2(1+2x^2)} - x + \frac{y^2}{2}$

1.4.1 Fatores Integrantes

Quando multiplicamos uma equação da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.24}$$

que não é exata por uma função $\mu(x,y)$ de forma que a nova equação seja exata, chamamos a função $\mu(x,y)$ de **fator integrante para equação exata**.

Exemplo 1.13. Considere a equação

$$2y(1+x^2)y' - \frac{2xy^2}{1+2x^2} = 1+2x^2. \tag{1.25}$$

Para esta equação

$$M(x,y) = -\frac{2xy^2}{1+2x^2} - 1 - 2x^2 \quad \text{e} \quad N(x,y) = 2y(1+x^2)$$

Assim,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-4xy}{1+2x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$$

e portanto a equação *não* é exata. Agora, multiplicando a equação (1.25) por

$$\mu(x) = \frac{1}{1+2x^2}$$

obtemos

$$\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1.$$

A nova equação é a do Exemplo 1.12 que, como já mostramos, é exata.

Quando a equação tem um fator integrante que depende apenas de uma das variáveis x ou y, podemos determiná-lo da forma como é mostrada a seguir.

Exemplo 1.14. Considere a equação do Exemplo 1.13

$$2y(1+x^2)y' - \frac{2xy^2}{1+2x^2} = 1+2x^2.$$

Vamos supor, apenas, que exista uma função $\mu(x)$ tal que ao multiplicarmos a equação por $\mu(x)$ a nova equação seja exata. Então

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

ou seja,

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{dx}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

Assim, $\mu(x)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\mu$$

Assim, reciprocamente, se

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

é uma função apenas de x, então uma solução da equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\mu \tag{1.26}$$

é um fator integrante para a equação diferencial.
Para a equação

$$2y(1+x^2)y' - \frac{2xy^2}{1+2x^2} = 1+2x^2$$

temos que

$$\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{\frac{-4xy}{1+2x^2} - 4xy}{2y(1+x^2)} = \frac{-4x}{1+2x^2}$$

Assim, a equação (1.26) torna-se

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{4x}{1+2x^2}\mu \tag{1.27}$$

que é uma equação separável que deve satisfazer o fator integrante $\mu(x)$ para a equação (1.25). Multiplicando a equação (1.27) por $1/\mu$ obtemos

$$\frac{1}{\mu}\mu' = -\frac{4x}{1+2x^2}$$

integrando-se em relação a x obtemos

$$\int \frac{1}{\mu}\mu' dx = -\int \frac{4x}{1+2x^2}dx + C$$

Fazendo-se a substituição $\mu' dx = d\mu$ obtemos

$$\int \frac{1}{\mu}d\mu = -\int \frac{4x}{1+2x^2}dx + C,$$

ou seja,

$$\ln|\mu(x)| = \int -\frac{4x}{1+2x^2}dx = -\ln|1+2x^2| + C_1.$$

Usando-se propriedades do logaritmo obtemos

$$\ln|\mu(x)(1+2x^2)| = C_1.$$

Aplicando-se a exponencial obtemos a solução geral para a equação (1.27)

$$\mu(x) = \frac{\pm e^{C_1}}{1+2x^2} = \frac{C}{1+2x^2}.$$

que inclui o fator integrante usado no Exemplo 1.13.

Exercícios (respostas na página 171)

4.1. Resolva as equações:

(a) $2xy - \operatorname{sen} x + (x^2 + e^y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

(b) $y^2 + \cos x + (2xy + e^y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

(c) $2xy^2 + \cos x + (2x^2y + \dfrac{1}{y})\dfrac{dy}{dx} = 0.$

(d) $2\left(xy^2 - \dfrac{1}{x^3}\right) + \left(2x^2y - \dfrac{1}{y^2}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

(e) $x + y + x\ln x\dfrac{dy}{dx} = 0.$ Sugestão: multiplique a equação por $1/x$.

(f) $2\left(xy^3 - \dfrac{1}{x^3}\right) + \left(3x^2y^2 - \dfrac{1}{y^2}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

(g) $xy^4 + \left(2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3\right)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

4.2. (a) Encontrar a solução geral da equação e a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y}{x-2y} \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

(b) Determinar o intervalo de validade da solução.

(c) Determinar os pontos onde a solução tem um máximo local.

(d) Esboçar o gráfico da solução.

4.3. (a) Encontre um fator de integração $\mu(y)$ para a equação

$$xy + \left(2x^2 + 3y^2 - 20\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

de forma a transformá-la numa equação exata.

(b) Verifique que a função $\mu(y)$ encontrada é realmente um fator integrante.

4.4. (a) Encontre um fator de integração $\mu(y)$ para a equação

$$x + \left(x^2y + 4y\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

de forma a transformá-la numa equação exata.

(b) Verifique que a função $\mu(y)$ encontrada é realmente um fator integrante.

4.5. Considere a seguinte equação diferencial:

$$2y^2 + \frac{2y}{x} + \left(2xy + 2 + \frac{y}{x}\right)\, y' = 0. \tag{1.28}$$

(a) Mostre que a equação diferencial (1.28) não é exata e que $\mu(x) = x$ é um fator integrante da mesma.

(b) Encontre a solução geral de (1.28).

(c) Encontre a solução de (1.28) que satisfaz $y(1) = 1$.

4.6. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{x^3} + \frac{e^y}{x} + \left(e^y + \frac{1}{xy}\right)\, y' = 0. \tag{1.29}$$

(a) Mostre que a equação diferencial (1.29) não é exata e que $\mu(x) = x$ é um fator integrante da mesma.

(b) Encontre a solução geral de (1.29).

(c) Encontre a solução de (1.29) que satisfaz $y(1) = 1$.

4.7. Considere a seguinte equação diferencial:

$$-2y + \left(x + \frac{y^3}{x}\right)\; y' = 0. \tag{1.30}$$

(a) Mostre que a equação diferencial (1.30) não é exata e que $\mu(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$ é um fator integrante da mesma.

(b) Encontre a solução geral de (1.30).

(c) Encontre a solução de (1.30) que satisfaz $y(1) = 1$.

4.8. Considere a seguinte equação diferencial:

$$e^{x^3} + \operatorname{sen} y + \frac{x}{3} \cos y \; y' = 0. \tag{1.31}$$

(a) Mostre que a equação diferencial (1.31) não é exata e que $\mu(x) = x^2$ é um fator integrante da mesma.

(b) Encontre a solução geral de (1.31).

(c) Encontre a solução de (1.31) que passa pelo ponto $(0, 0)$.

4.9. Considere a seguinte equação diferencial:

$$2 + \frac{e^y}{x} + (e^y + \frac{y}{x})y' = 0. \tag{1.32}$$

(a) Mostre que a equação diferencial (1.32) não é exata e que $\mu(x) = x$ é um fator integrante da mesma.

(b) Encontre a solução geral de (1.32).

(c) Encontre a solução de (1.32) que satisfaz $y(1) = 1$.

4.10. Mostre que toda equação diferencial separável

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

é também exata.

1.5 Substituições em Equações de 1ª Ordem

Vamos estudar algumas equações de 1ª ordem que podem ser transformadas em equações já estudadas em seções anteriores.

1.5.1 Equações Homogêneas de 1ª Ordem

As **equações homogêneas de 1ª ordem** são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dx} = F(y/x) \tag{1.33}$$

Ou seja, o lado direito da equação (1.33) apesar de depender de x e de y, depende apenas do quociente y/x. Seja

$$v = y/x.$$

Então

$$y = vx$$

e derivando o produto vx em relação a x obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v.$$

Substituindo-se este valor de $\frac{dy}{dx}$ e $y/x = v$ na equação (1.33) obtemos a equação

$$x\frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v.$$

Multiplicando-se por $\dfrac{1}{x(F(v)-v)}$ esta equação se torna

$$\frac{1}{F(v)-v}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}, \tag{1.34}$$

que é uma equação separável. Podemos encontrar a solução geral desta equação usando a técnica apresentada na Seção 1.3, página 25. Depois de encontrada a solução geral da equação (1.34) devemos substituir

$$v=y/x$$

para encontrar a solução geral de (1.33).

Exemplo 1.15. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}.$$

Dividindo numerador e denominador por x obtemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}.$$

Seja $v=\dfrac{y}{x}$. Então $y=vx$ e derivando o produto vx em relação a x obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v.$$

Substituindo-se este valor de $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{y}{x}=v$ na equação obtemos

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v-1}{v+1}$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = \frac{v^2+1}{-1-v}.$$

Multiplicando-se por $\dfrac{v+1}{x(v^2+1)}$ esta equação se torna

$$\frac{v+1}{v^2+1}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

Como

$$\int \frac{v+1}{v^2+1}dv = \int \frac{v}{v^2+1}dv + \int \frac{1}{v^2+1}dv = \frac{1}{2}\ln(v^2+1) + \arctan v,$$

então a equação diferencial tem solução

$$\frac{1}{2}\ln(v^2+1) + \arctan v = -\ln|x| + C,$$

ou

$$\ln\left|(v^2+1)^{1/2}x\right| + \arctan v = C.$$

Substituindo-se $v = \frac{y}{x}$ obtemos a solução

$$\ln\left|((y/x)^2+1)^{1/2}x\right| + \arctan(y/x) = C,$$

que pode ainda ser escrita como

$$\ln(y^2+1)^{1/2} + \arctan(y/x) = C.$$

1.5.2 Equações de Bernoulli

As **equações de Bernoulli** são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \tag{1.35}$$

em que n é um número real qualquer. Para $n = 0$ e $n = 1$ esta equação é linear. Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$, fazemos a mudança de variáveis $v = y^{1-n}$.
Multiplicando-se a equação de Bernoulli (1.35) por y^{-n} obtemos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \tag{1.36}$$

Derivando $v = y^{1-n}$ em relação a x obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

de onde obtemos que

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}.$$

Fazendo as substituições $y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$ e $y^{1-n} = v$ em (1.36) obtemos

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

que é uma equação linear. Depois de encontrada a solução geral desta equação, devemos substituir

$$v = y^{1-n}$$

para encontrar a solução geral de (1.35).

Exemplo 1.16. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2$$

fazendo a mudança de variáveis $v = y^{-1}$.
Se $v = y^{-1}$, então

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

Multiplicando-se a equação diferencial por y^{-2} obtemos

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = x.$$

Fazendo as substituições $y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}$ e $y^{-1} = v$ obtemos

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x.$$

Multiplicando esta equação por -1 obtemos

$$v' - \frac{1}{x}v = -x$$

que é uma equação linear e tem solução

$$v(x) = -x^2 + Cx.$$

Assim a solução da equação dada é

$$y(x) = \frac{1}{-x^2 + Cx}.$$

1.5.3 Equações de Ricatti

As **equações de Ricatti** são equações da forma

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + q(x)y + r(x)y^2. \tag{1.37}$$

Sendo conhecida uma solução particular da equação $y_1(x)$, a equação de Ricatti pode ser resolvida fazendo a substituição

$$y(x) = y_1(x) + v(x). \tag{1.38}$$

Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx}. \tag{1.39}$$

Substituindo-se (1.38) e (1.39) em (1.37) obtemos

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx} = p(x) + q(x)(y_1 + v) + r(x)(y_1 + v)^2.$$

Usando o fato de que $y_1(x)$ é solução da equação obtemos

$$\frac{dv}{dx} - (q(x) + 2y_1(x)r(x))v = r(x)v^2,$$

que é uma equação de Bernoulli com $n = 2$.

Exemplo 1.17. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2.$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que $y_1(x) = -e^x$ é uma solução desta equação. Fazendo a substituição

$$y(x) = -e^x + v(x),$$

obtemos a equação

$$\frac{dv}{dx} - v = v^2.$$

que pode ser resolvida como uma equação separável

$$\frac{1}{v^2+v}\frac{dv}{dx} = 1. \tag{1.40}$$

Decompondo $\frac{1}{v^2+v}$ em frações parciais obtemos

$$\frac{1}{v^2+v} = \frac{1}{v(v+1)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1}$$

Multiplicando-se por $v(v+1)$ obtemos

$$1 = A(v+1) + Bv.$$

Substituindo-se $v = 0, -1$ obtemos $A = 1$ e $B = -1$. Assim a equação (1.40) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|v| - \ln|v+1|\right) = 1.$$

Integrando-se obtemos

$$\ln\left|\frac{v}{v+1}\right| = x + c_1$$

Aplicando-se a exponencial obtemos

$$\frac{v}{v+1} = \pm e^{c_1}e^x = ce^x.$$

Substituindo-se $v = y + e^x$ obtemos que a solução da equação é dada implicitamente por

$$\frac{y+e^x}{y+1+e^x} = ce^x.$$

1.5.4 Outras Substituições

Exemplo 1.18. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y-x-1}.$$

Vamos resolvê-la fazendo a substituição $v = y - x$. O que implica que

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} + 1.$$

Substituindo-se $v = y - x$ e $y' = v' + 1$ na equação obtemos

$$\frac{dv}{dx} + 1 = \frac{v}{v-1}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v-1}$$

$$(v-1)\frac{dv}{dx} = 1$$

que é uma equação separável cuja solução é

$$\frac{v^2}{2} - v = x + c$$

Substituindo-se de volta $v = y - x$ obtemos que a solução da equação é dada implicitamente por

$$\frac{(y-x)^2}{2} - y = c.$$

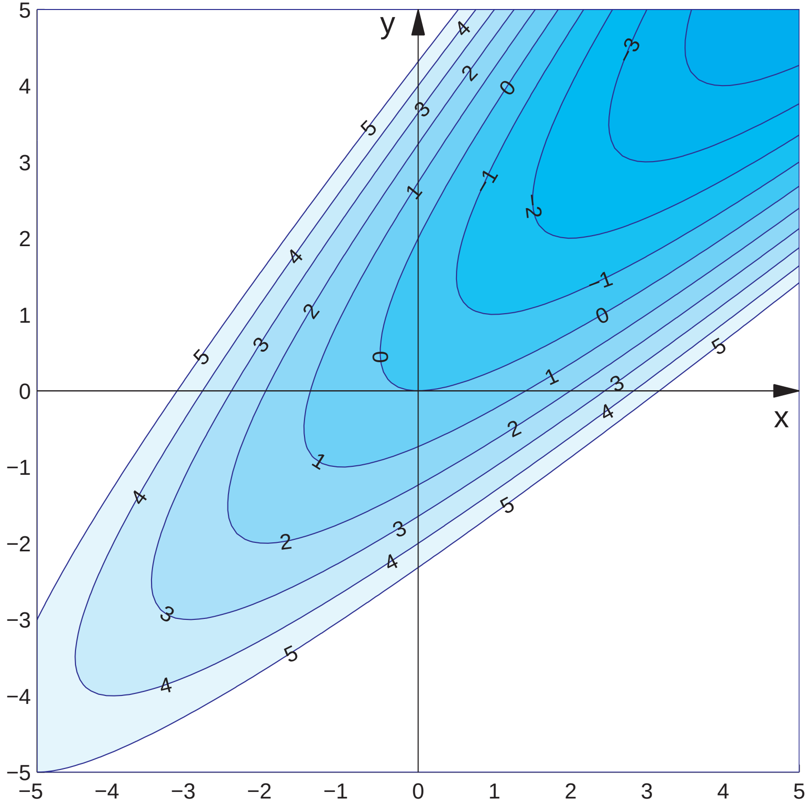


Figura 1.14: Soluções da equação do Exemplo 1.18

Exercícios (respostas na página 186)

5.1. Resolva as equações seguintes fazendo a mudança de variáveis $v = y/x$:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y + x}{3x + y}$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2 + 5y^2}{2xy}$

5.2. Resolva as equações fazendo as mudanças de variáveis sugeridas:

(a) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^3}$, $v = y^{-2}$.

(b) $y' + \dfrac{4}{x}y = -x^5 e^x y^2$, $v = y^{-1}$.

(c) $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2$, $y = 2x^{-1} + u$.

(d) $y' = (y - x)^2$, $v = y - x$.

(e) $xy' = e^{-xy} - y$, $v = xy$.

(f) $e^y y' = x(x + e^y) - 1$, $v = x + e^y$.

1.6 Aplicações

1.6.1 Dinâmica Populacional

Crescimento Exponencial

O modelo mais simples de **crescimento populacional** é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional a população presente naquele instante $y(t)$. Podemos descrever o problema de encontrar $y(t)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0. \tag{1.41}$$

Para resolvê-la vamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}.$$

Multiplicando-se a equação (1.41) por $\mu(t) = e^{-kt}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}y) = 0.$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{-kt}y(t) = C \quad \text{ou} \quad y(t) = Ce^{kt}.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = y_0$, obtemos

$$y_0 = Ce^{k\,0} = C.$$

Ou seja a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Exemplo 1.19. Consideremos uma situação formada por uma população de organismos zooplanctônicos. São colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores. Sabendo-se que em 10 dias havia 240 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à população atual (crescimento exponencial).
A população, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

que como vimos acima tem solução

$$y(t) = y_0 e^{kt} = 3e^{kt}.$$

Como em 10 dias a população é de 240 indivíduos, então substituindo-se $t = 10$ e $y = 240$ obtemos

$$240 = 3e^{10k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 80}{10}.$$

Assim, a função que descreve como a população de bactérias varia com o tempo é

$$y(t) = 3e^{\frac{\ln 80}{10}t} = 3 \cdot 80^{t/10}.$$

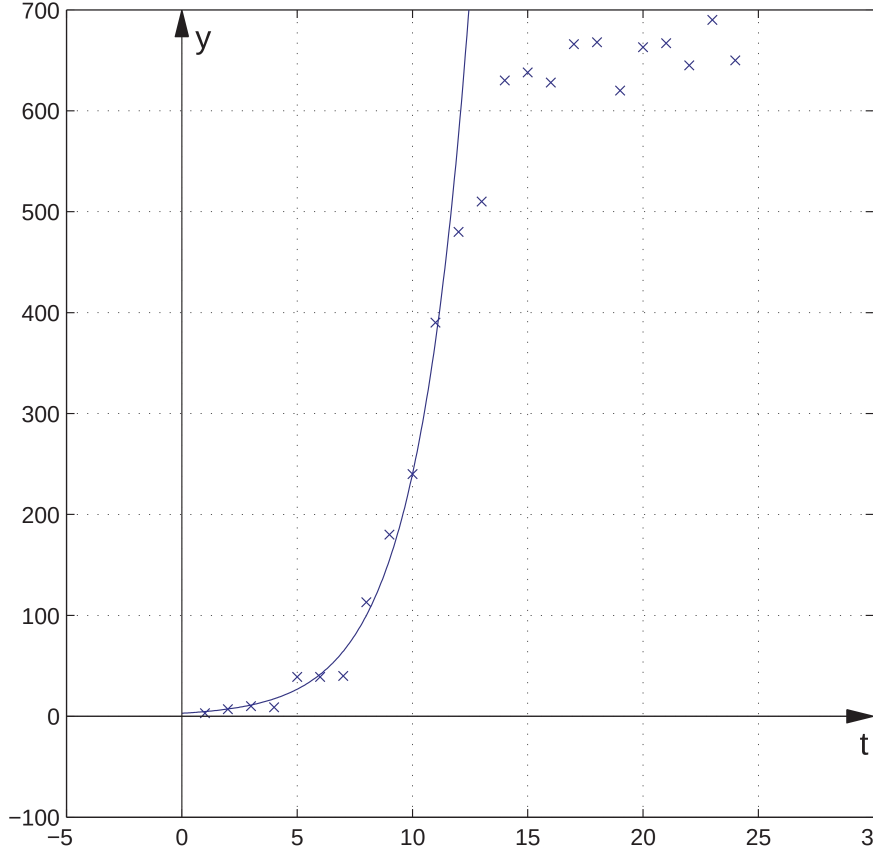


Figura 1.15: Solução do problema do Exemplo 1.19 e dados obtidos experimentalmente

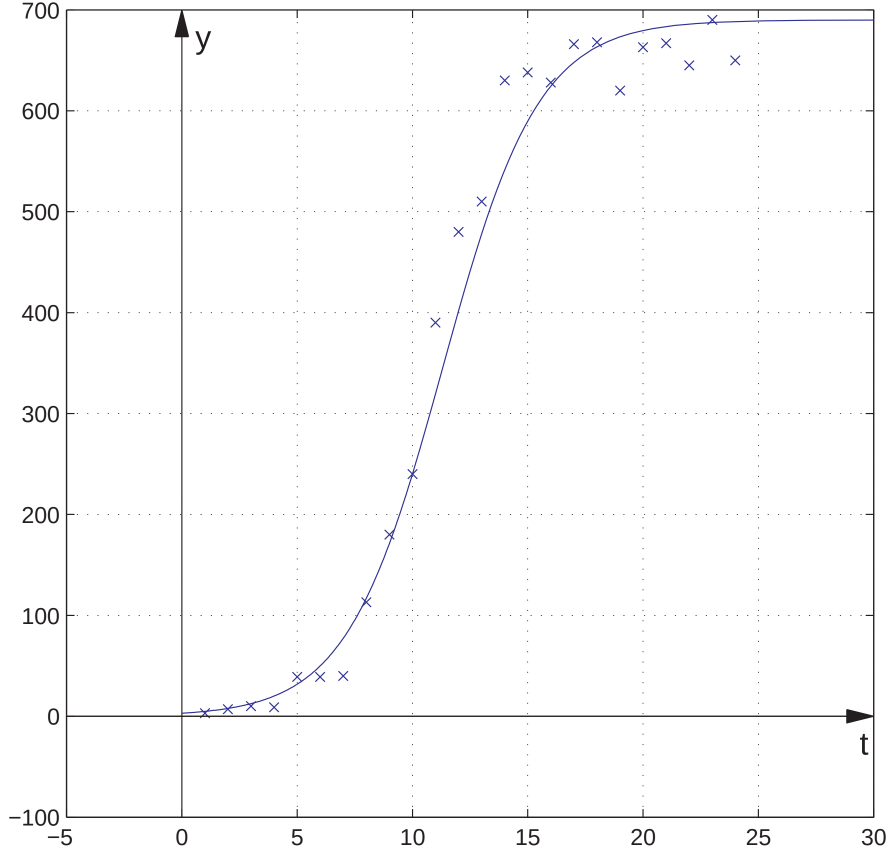


Figura 1.16: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.20 e dados obtidos experimentalmente

Tabela 1.1: Número de indivíduos por litro de uma população de cladóceros (Daphnia laevis) em experimento de laboratório (dados obtidos de [3])

Dias	População	Dias	População
1	3	13	510
2	7	14	630
3	10	15	638
4	9	16	628
5	39	17	666
6	39	18	668
7	40	19	620
8	113	20	663
9	180	21	667
10	240	22	645
11	390	23	690
12	480	24	650

Crescimento Logístico

Para levar em conta que a população $y(t)$ tem um valor máximo sustentável y_M podemos supor que a taxa de crescimento além de ser proporcional a população atual, é proporcional também à diferença entre y_M e a população presente. Neste caso a população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(y_M - y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{y(y_M-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{y(y_M - y)}y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} y' dt = \int k dt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y' dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \int k dt + C_1.$$

Para calcular a integral do lado esquerdo vamos decompor $\frac{1}{y(y_M - y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{y(y_M - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y_M - y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $y(y_M - y)$ obtemos

$$1 = A(y_M - y) + By$$

Substituindo-se $y = 0$ e $y = y_M$ obtemos $A = 1/y_M$ e $B = 1/y_M$. Assim,

$$\int \frac{1}{y(y_M - y)} dy = \frac{1}{y_M} \left(\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{y_M - y} dy \right) = \frac{1}{y_M} \left(\ln |y| - \ln |y_M - y| \right)$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln |y| - \ln |y_M - y| = k y_M t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln \left| \frac{y}{y_M - y} \right| = C_1 + k y_M t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{y}{y_M - y} = \pm e^{C_1} e^{y_M k t} = C e^{y_M k t}$$

Observe que como C_1 é uma constante, então $\pm e^{C_1}$ também é uma constante que chamamos de C. Substituindo-se $t = t_0$ e $y = y_0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{y_0}{y_M - y_0} e^{-y_M k t_0}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$y = (y_M - y) C e^{y_M k t} \quad \Rightarrow \quad y + C e^{y_M k t} y = y_M C e^{y_M k t}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{C y_M e^{y_M k t}}{1 + C e^{y_M k t}} = \frac{\frac{y_0 y_M}{y_M - y_0} e^{y_M k (t - t_0)}}{1 + \frac{y_0}{y_M - y_0} e^{y_M k (t - t_0)}} = \frac{y_0 y_M e^{y_M k (t - t_0)}}{y_M - y_0 + y_0 e^{y_M k (t - t_0)}}$$

Dividindo-se numerador e denominador por $e^{y_M k t}$ obtemos

$$y(t) = \frac{y_0 y_M}{y_0 + (y_M - y_0) e^{-y_M k (t - t_0)}}$$

Observe que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = y_M.$$

Exemplo 1.20. Consideremos a mesma situação do Exemplo 1.19, ou seja, são colocadas em um béquer 3 fêmeas partenogenéticas grávidas (não há necessidade de fecundação pelo macho) de um microcrustáceo chamado cladócero em condições ideais de alimentação, temperatura, aeração e iluminação e ausência de predadores.

Sabendo-se que essa população atinge o máximo de 690 indivíduos e que em 10 dias havia 240 indivíduos determine a população em função do tempo supondo-se que a taxa de crescimento da população é proporcional tanto a população atual quanto à diferença entre a população máxima e a população atual (crescimento logístico).
A população como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(690-y) \\ y(0)=3, \; y(10)=240 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{y(690-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{y(690-y)}y' = k \tag{1.42}$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{y(690-y)}y'dt = \int kdt + C$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{y(690-y)}dy = \int kdt + C.$$

Para calcular a integral do lado esquerdo vamos decompor $\frac{1}{y(690-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{y(690-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{690-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $y(690-y)$ obtemos

$$1 = A(690-y) + By$$

Substituindo-se $y = 0$ e $y = 690$ obtemos $A = 1/690$ e $B = 1/690$. Assim,

$$\int \frac{1}{y(690-y)}dy = \frac{1}{690}\left(\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{690-y}dy\right) = \frac{1}{690}\left(\ln|y| - \ln|690-y|\right)$$

Logo a equação (1.42) tem solução dada implicitamente por

$$\ln|y| - \ln|690-y| = k690t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{y}{690-y}\right| = C_1 + k690t.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{690-y} = \pm e^{C_1}e^{690kt} = Ce^{690kt}. \tag{1.43}$$

Observe que como C_1 é uma constante, então $\pm e^{C_1}$ também é uma constante que chamamos de C. Substituindo-se $t = 0$ e $y = 3$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{3}{690-3} = \frac{3}{687} = \frac{1}{229}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$y = (690-y)Ce^{690kt} \quad \Rightarrow \quad y + Ce^{690kt}y = 690Ce^{690kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{690Ce^{690kt}}{1+Ce^{690kt}} = \frac{690e^{690kt}}{1/C + e^{690kt}} = \frac{690e^{690kt}}{229 + e^{690kt}} = \frac{690}{229e^{-690kt}+1} \tag{1.44}$$

Para determinar o valor de k, vamos usar o fato de que em 10 dias havia 240 indivíduos. Substituindo-se $t = 10$ e $y = 240$ obtemos

$$240 = \frac{690}{229e^{-6900k}+1} \quad \Rightarrow \quad 229e^{-6900k} = \frac{690}{240} - 1 = \frac{23}{8} - 1 = \frac{15}{8} \quad \Rightarrow \quad -690k = \frac{\ln \frac{15}{1832}}{10}$$

Logo substituindo-se o valor de $-690k$ obtido acima na solução do PVI (1.44) obtemos que a população de cladóceros em função do tempo é dada por

$$y(t) = \frac{690}{229e^{\frac{\ln \frac{15}{1832}}{10}t}+1} = \frac{690}{229\left(\frac{15}{1832}\right)^{\frac{t}{10}}+1}$$

1.6.2 Datação por Carbono 14

A proporção de carbono 14 (radioativo) em relação ao carbono 12 presente nos seres vivos é constante. Quando um organismo morre a absorção de carbono 14 cessa e a partir de então o carbono 14 vai se transformando em carbono 12 a uma taxa que é proporcional a quantidade presente. Podemos descrever o problema de encontrar a quantidade de carbono 14 em função do tempo, $y(t)$, como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

A equação é a mesma do crescimento exponencial (trocando-se k por $-k$) e vimos na página 61 que este problema tem solução

$$y(t) = y_0 e^{-kt},$$

em que y_0 é a quantidade no instante $t = 0$.

Exemplo 1.21. Em um pedaço de madeira é encontrado $1/500$ da quantidade original de carbono 14. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5600 anos, ou seja, que em 5600 anos metade do carbono 14 presente transformou-se em carbono 12. Vamos determinar a idade deste pedaço de madeira.
O problema de valor inicial que descreve esta situação é

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que tem solução

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Substituindo-se $t = 5600$ e $y = y_0/2$ (meia-vida) obtemos

$$y_0/2 = y_0 e^{-k \cdot 5600} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{5600}$$

Agora substituindo-se $y = y_0/500$ obtemos

$$\frac{y_0}{500} = y_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 500}{k} = \frac{5600 \ln 500}{\ln 2} \approx 50200 \text{ anos}$$

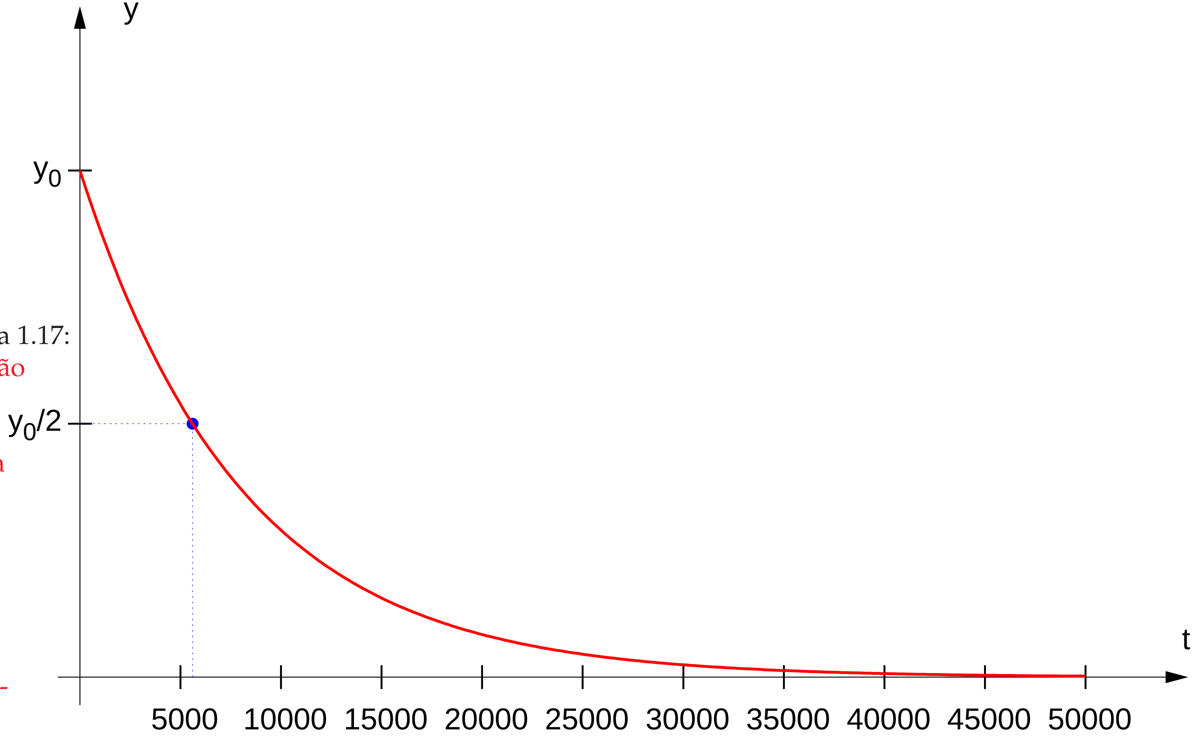


Figura 1.17: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.21

1.6.3 Misturas

Vamos supor que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial de V_0 litros e Q_0 gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de T_e litros por minuto possuindo uma concentração de C_e gramas de sal por litro. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de T_s litros por minuto.
A taxa de variação da quantidade de sal no tanque é igual a taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque.
A taxa com que entra sal no tanque é igual a taxa com que entra a mistura, T_e, vezes a concentração de entrada, C_e. E a taxa com que sai sal do tanque é igual a taxa com que sai a mistura do tanque, T_s, vezes a concentração de sal que sai do tanque, C_s. Como a solução é bem misturada esta concentração é igual a concentração de sal no tanque, ou seja,

$$C_s(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

Como o volume no tanque, $V(t)$, é igual ao volume inicial, V_0, somado ao volume que entra no tanque menos o volume que sai do tanque, então

$$V(t) = V_0 + T_e t - T_s t = V_0 + (T_e - T_s)t.$$

Assim, a quantidade de sal no tanque, $Q(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = T_e C_e - T_s \dfrac{Q}{V_0 + (T_e - T_s)t} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

Exemplo 1.22. Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. Água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa à razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme

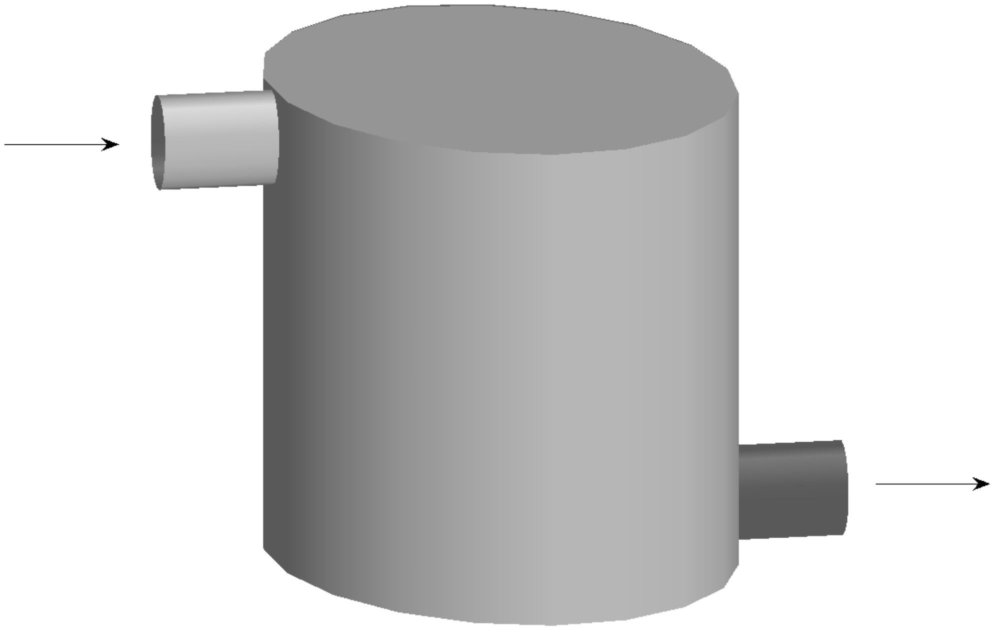


Figura 1.18:
Tanque

por agitação. Vamos determinar qual a concentração de sal no tanque ao fim de 50 minutos.
O problema pode ser modelado pelo seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -4\dfrac{Q}{100+2t} \\ Q(0) = 30 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser escrita como

$$\frac{dQ}{dt} + 4\frac{Q}{100+2t} = 0$$

Um fator integrante é neste caso

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t}dt} = e^{2\ln(100+2t)} = e^{\ln((100+2t)^2)} = (100+2t)^2.$$

Multiplicando-se a equação por $\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t}dt} = (100+2t)^2$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left((100+2t)^2 Q\right) = 0.$$

Integrando-se obtemos

$$(100+2t)^2 Q(t) = C$$

ou seja,

$$Q(t) = \frac{C}{(100+2t)^2}.$$

Substituindo $t = 0$ e $Q = 30$:

$$C = 30 \cdot 100^2 = 3 \cdot 10^5$$

Substituindo o valor de C encontrado:

$$Q(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100 + 2t)^2}$$

A concentração é o quociente da quantidade de sal pelo volume que é igual a $V(t) = 100 + 2t$. Assim

$$c(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100 + 2t)^3}$$

e após 50 minutos

$$c(50) = \frac{3 \cdot 10^5}{(200)^3} = \frac{3}{80} = 0,0375 \text{ gramas/litro}$$

1.6.4 Lei de Resfriamento de Newton

A **lei de resfriamento de Newton** diz que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo $T(t)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m, ou seja, a temperatura do corpo, $T(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

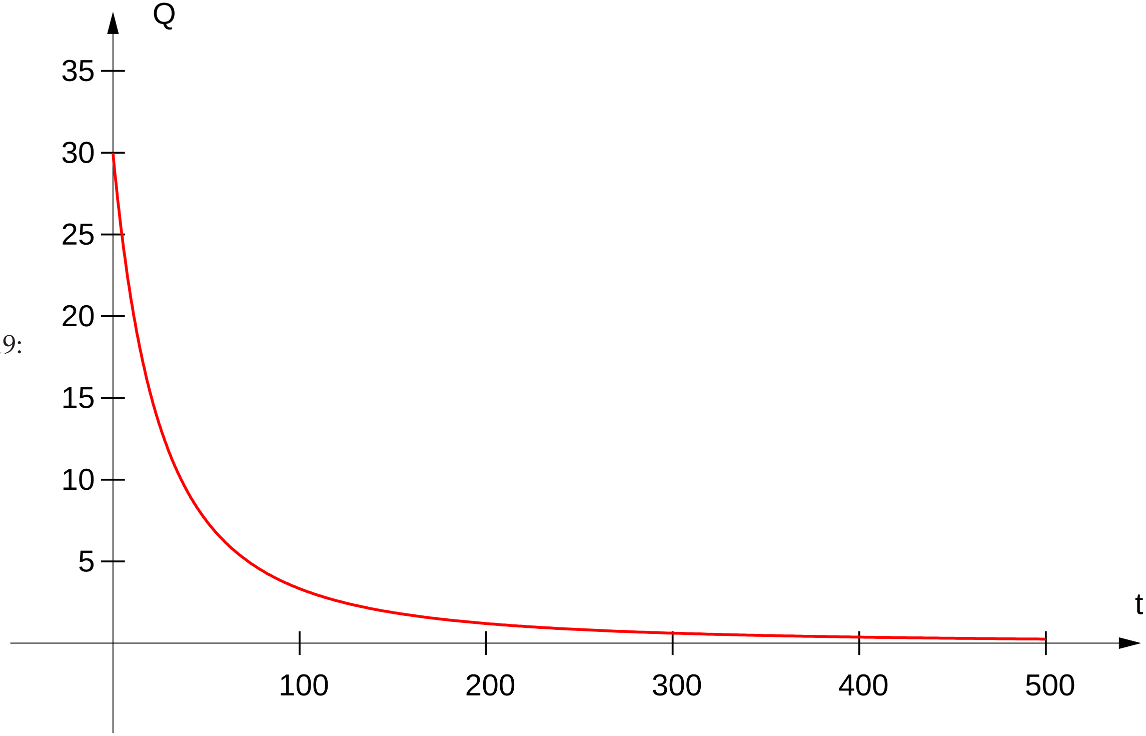


Figura 1.19: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.22

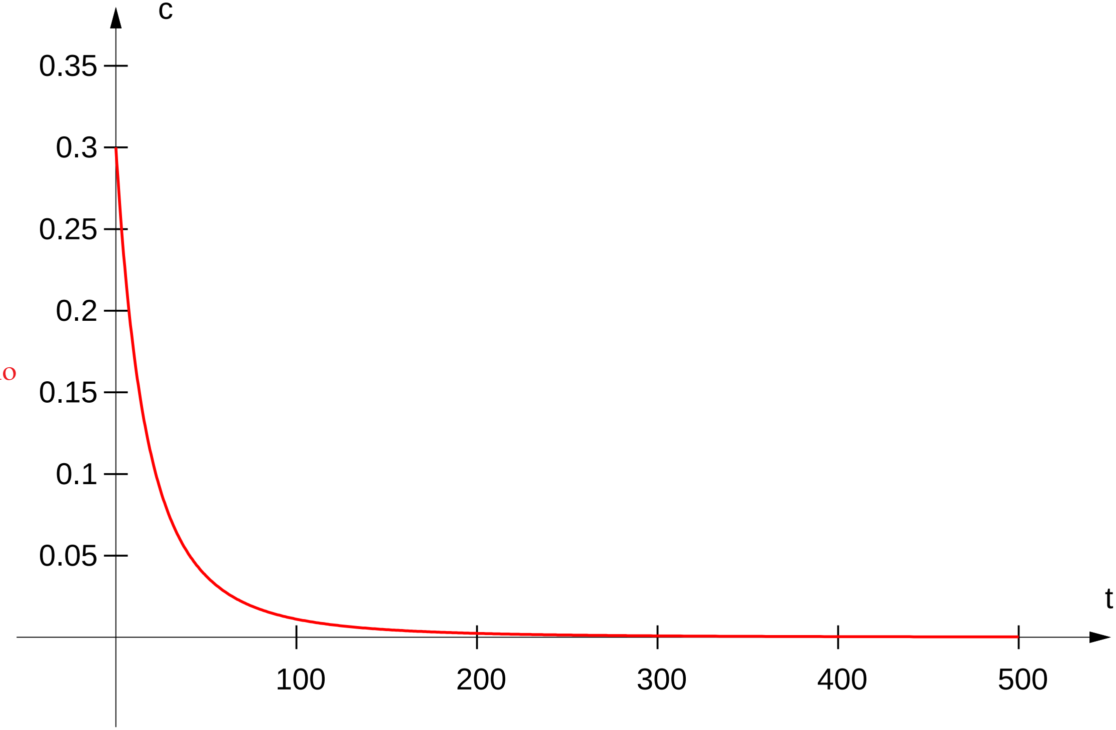


Figura 1.20: Concentração como função do tempo para o problema do Exemplo 1.22

Exemplo 1.23. O café está a 90° C logo depois de coado e, um minuto depois, passa para 85° C, em uma cozinha a 25° C. Vamos determinar a temperatura do café em função do tempo e o tempo que levará para o café chegar a 60° C.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T-25) \\ T(0) = 90, \ T(1) = 85 \end{cases}$$

Dividindo-se a equação por $T - 25$:

$$\frac{1}{T-25} T' = k$$

Integrando-se em relação a t

$$\int \frac{1}{T-25} T' dt = \int k dt$$

$$\int \frac{1}{T-25} dT = \int k dt$$

$$\ln |T-25| = kt + C_1$$

$$T(t) = 25 \pm e^{C_1} e^{kt} = 25 + Ce^{kt}$$

Substituindo $t = 0$ e $T = 90$:

$$90 = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = 65$$

$$T(t) = 25 + 65e^{kt}$$

Substituindo-se $t = 1$ e $T = 85$:

$$85 = 25 + 65e^{k} \quad \Rightarrow \quad k = \ln(\frac{60}{65})$$

Assim a temperatura do café em função do tempo é dada por

$$T(t) = 25 + 65e^{\ln(\frac{60}{65})t} = 25 + 65\left(\frac{60}{65}\right)^t$$

Substituindo $T = 60$:

$$60 = 25 + 65e^{\ln(\frac{60}{65})t}$$

Logo o tempo necessário para que o café atinja 60° é de

$$t = \frac{\ln(35/65)}{\ln(60/65)} \approx 8\,\text{min}$$

1.6.5 Lei de Torricelli

A **lei de Torricelli** diz que a taxa com que um líquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$. Ou seja,

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}.$$

Existe uma relação entre V e h, $V = V(h)$, que depende da forma do tanque. Como

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt},$$

então a altura, $h(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = k\dfrac{\sqrt{h}}{\frac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

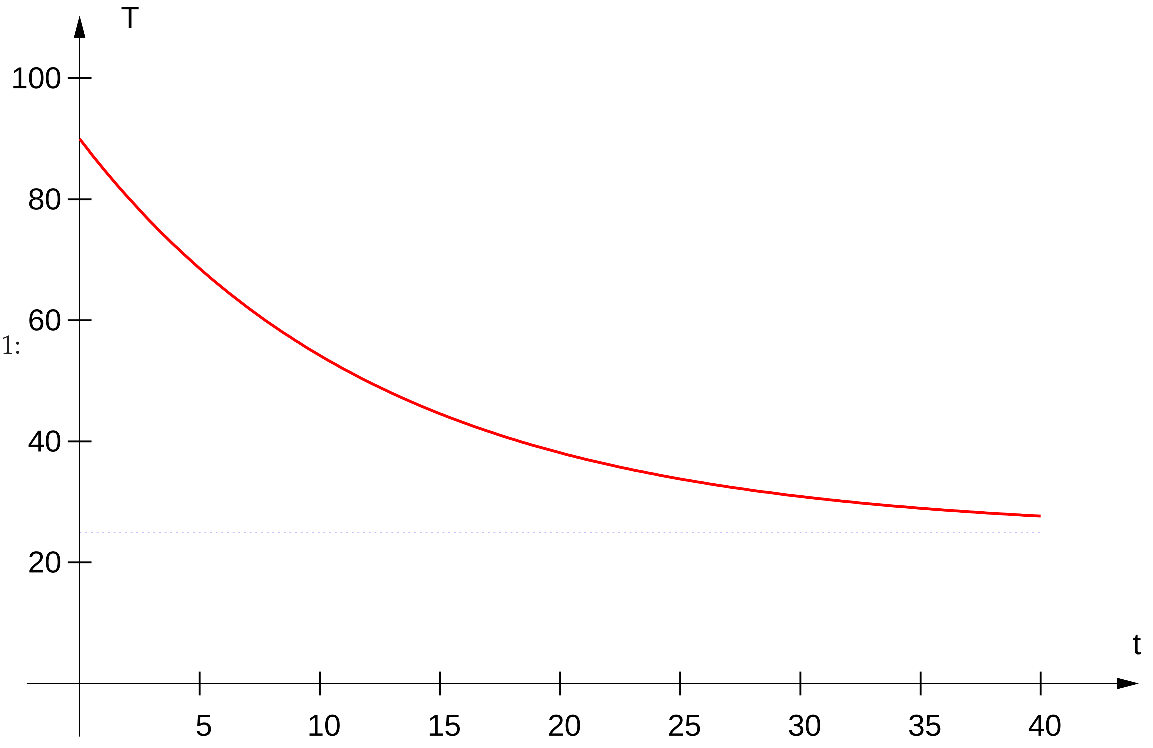


Figura 1.21: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.23

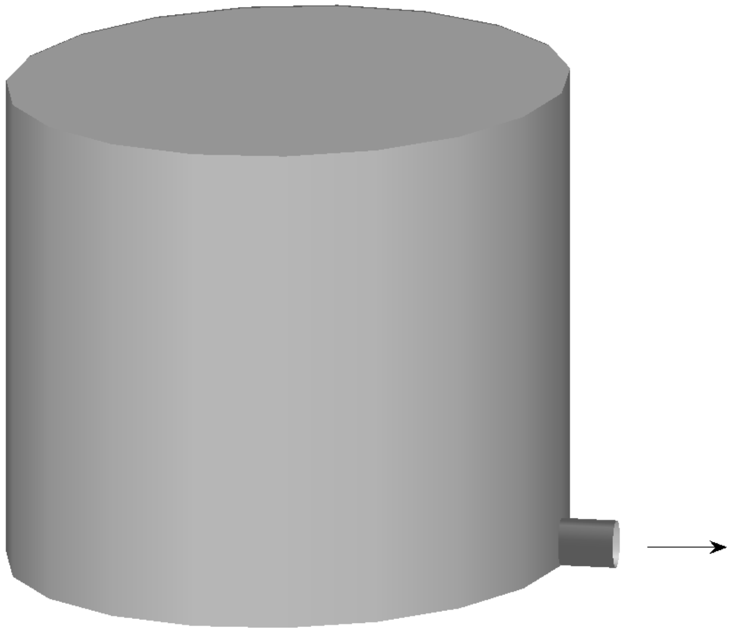


Figura 1.22: Tanque com um orifício

Exemplo 1.24. Um tambor cilíndrico, de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro, está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a água cair pela metade vamos determinar a altura h da água dentro do tambor em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia.
Como para o cilindro

$$V(h) = \pi R^2 h = \pi h$$

então

$$\frac{dV}{dh} = \pi.$$

Como uma constante sobre π é também uma constante, então o problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = k\sqrt{h} \\ h(0) = 2, \; h(30) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação por $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{h}} h' = k.$$

Integrando-se ambos os membros em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} h' dt = \int k dt.$$

Fazendo-se a substituição $h' dt = dh$ obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int k dt.$$

Calculando-se as integrais obtemos a solução geral na forma implícita

$$2\sqrt{h} = kt + C \tag{1.45}$$

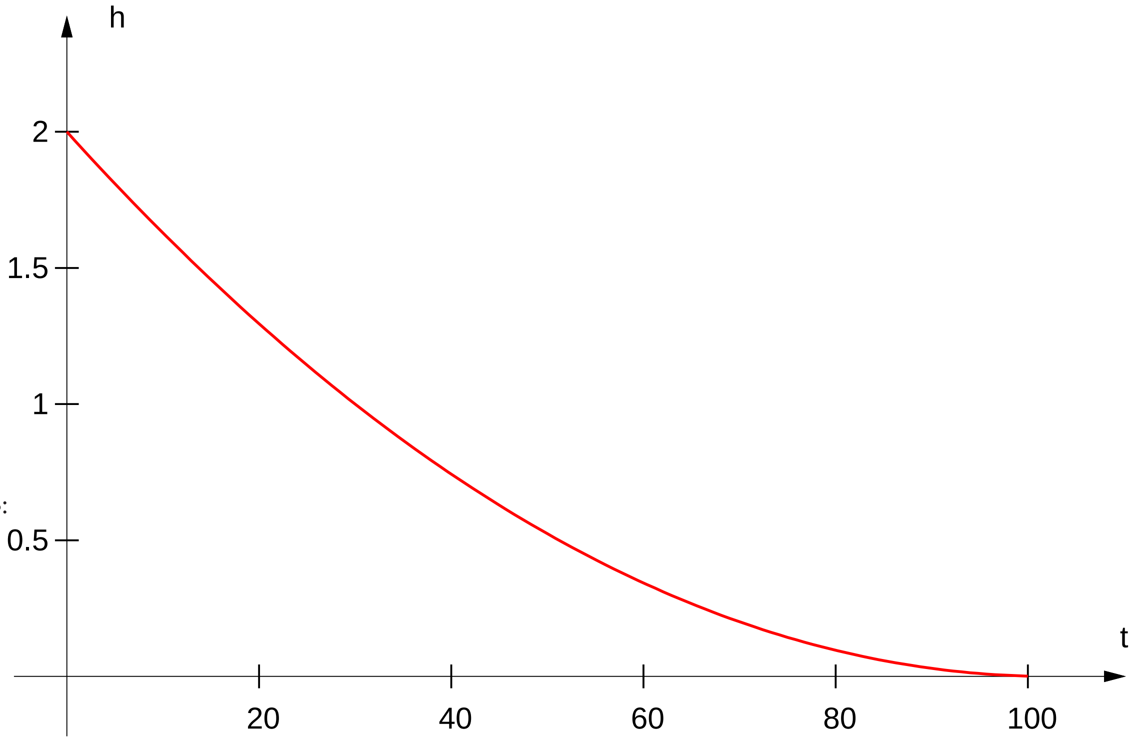


Figura 1.23: Solução do problema do Exemplo 1.24

ou explicitando-se a solução:

$$h(t) = (\frac{C+kt}{2})^2.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $h = 2$ em (1.45):

$$2\sqrt{2} = C$$

Substituindo-se $t = 30$ e $h = 1$ em (1.45):

$$C + 30k = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2-C}{30} = \frac{1-\sqrt{2}}{15}$$

Assim a função que descreve como a altura da coluna de água varia com o tempo é dada por

$$h(t) = (\frac{C+kt}{2})^2 = (\sqrt{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{30}t)^2$$

Substituindo-se $h = 0$:

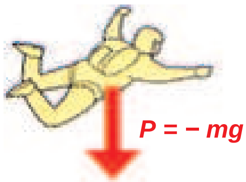
$$t = -\frac{C}{k} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \approx 102\,\text{min}$$

1.6.6 Resistência em Fluidos

Um corpo que se desloca em um meio fluido sofre uma força de resistência que é proporcional a velocidade do corpo. A velocidade, $v(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F - kv \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Para um corpo que cai a força F é igual ao peso do corpo. Para um barco que se desloca na água ou um carro em movimento a força F é igual a força do motor.



Exemplo 1.25. Um pára-quedista com o seu pára-quedas pesa 70 quilogramas e salta de uma altura de 1400 metros. O pára-quedas abre automaticamente após 5 segundos de queda. Sabe-se que a velocidade limite é de 5 metros por segundo. Vamos determinar a velocidade que o pára-quedista atinge no momento que o pára-quedas abre, quanto tempo demora para a velocidade chegar a 5,1 metros por segundo e como varia a altura em função do tempo.

Vamos convencionar que o sentido positivo é para cima e que a origem está na superfície da terra. Até o momento em que o pára-quedas abre a velocidade é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = P = -mg \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -10 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

o que leva a solução

$$v(t) = -10t.$$

Quando o pára-quedas abre a velocidade é então de

$$v(5) = -50\,\text{m/s}$$

Até este momento a altura do pára-quedista em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v(t) = -10t \\ h(0) = 1400 \end{cases}$$

cuja solução é

$$h(t) = 1400 - 5t^2$$

Assim até o momento que o pára-quedas abre o pára-quedista caiu

$$1400 - h(5) = 125\,\text{m}$$

Daí em diante a velocidade do pára-quedista é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - kv \\ v(5) = -50 \end{cases}$$

A força de resistência é igual a $-kv$, o sinal menos com uma constante positiva indica que a força de resistência é no sentido contrário ao da velocidade. Observe

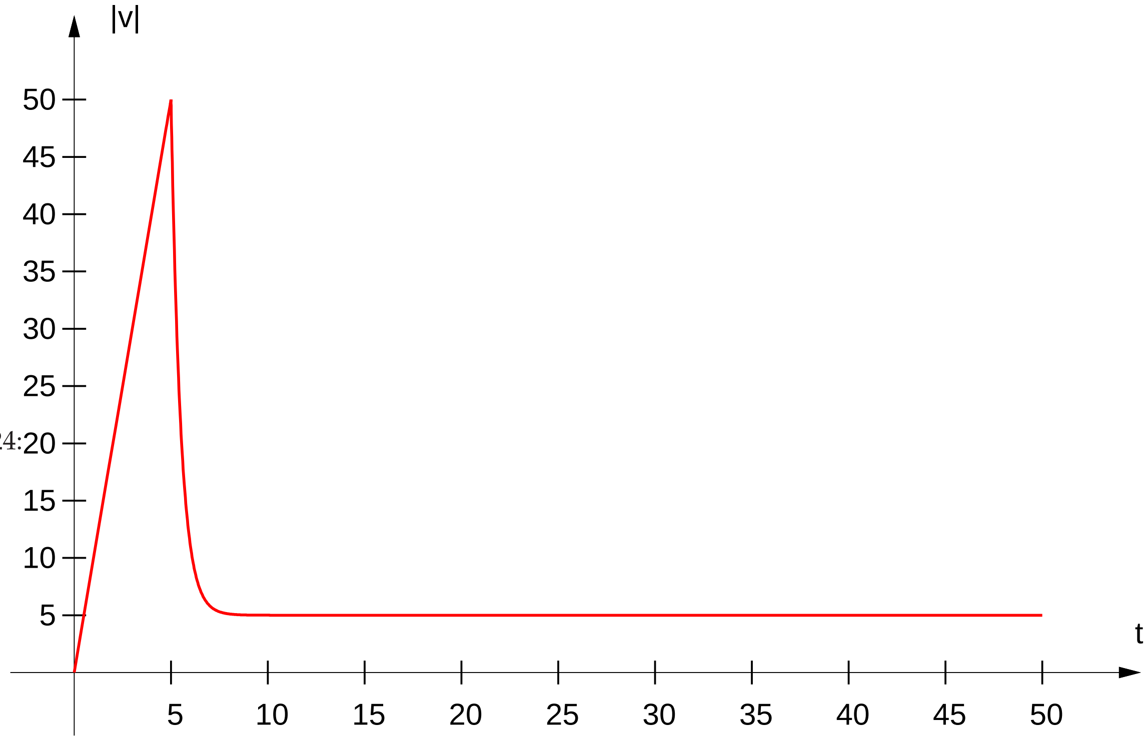


Figura 1.24: Módulo da velocidade do Exemplo 1.25

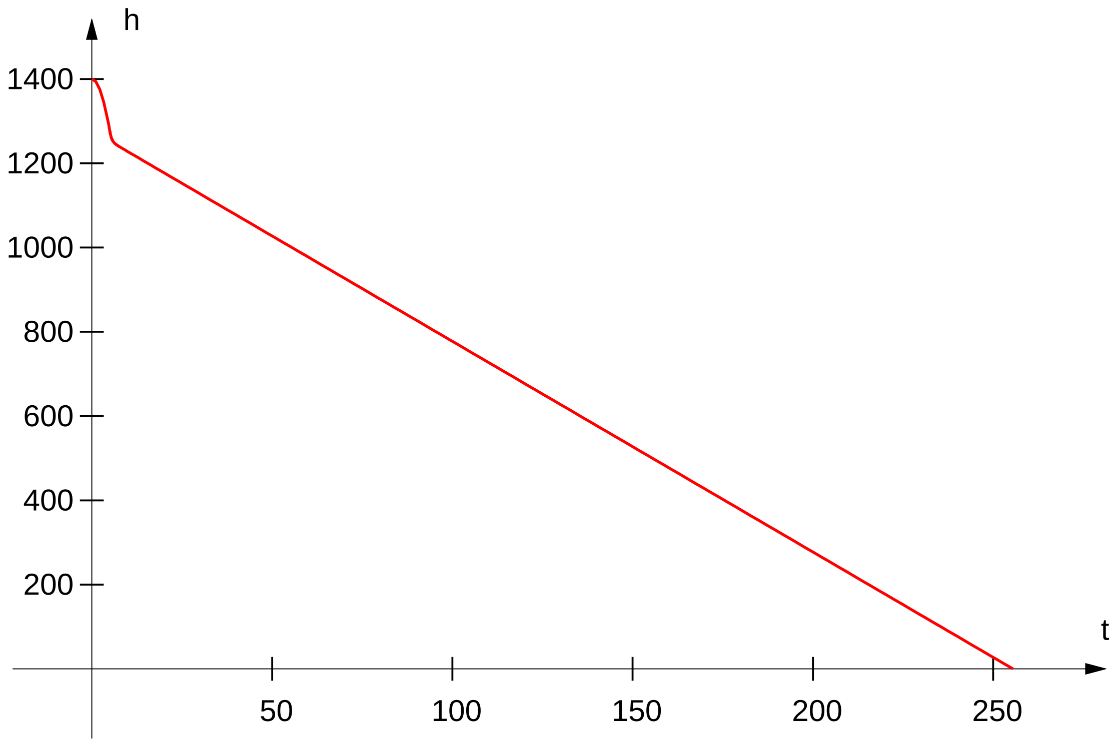


Figura 1.25: Altura do Exemplo 1.25

que a velocidade é negativa o que faz com que a força de resistência seja positiva, ou seja, para cima como convencionamos no início.

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -10 - \dfrac{k}{70}v = -10 - Kv, \quad K = k/70 \\ v(5) = -50 \end{cases}$$

A equação

$$\frac{dv}{dt} = -10 - Kv$$

pode ser reescrita como

$$\frac{1}{10 + Kv}v' = -1$$

Integrando-se

$$\ln|10 + Kv| = -Kt + C_1$$

$$10 + Kv = \pm e^{C_1}e^{-Kt}$$

$$v(t) = -\frac{10}{K} + Ce^{-Kt}$$

A velocidade limite é de -5 m/s, logo

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{10}{K} = -5 \quad \Rightarrow \quad K = 2$$

Substituindo-se $t = 5$ e $v = -50$ em $v(t) = -\frac{10}{K} + Ce^{-Kt}$:

$$-50 = -5 + Ce^{-5K} \quad \Rightarrow \quad C = -45e^{5K}$$

ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$v(t) = -5 - 45e^{-2(t-5)}$$

Substituindo-se $v = -5{,}1$ (lembre-se que é negativo por que é para baixo!) obtemos

$$-5{,}1 = -5 - 45e^{-2(t-5)} \quad \Rightarrow \quad t - 5 = \frac{\ln 450}{2} \approx 3\,\text{segundos},$$

ou seja, 3 segundos depois do pára-quedas aberto a velocidade já é de 5,1 m/s. Depois que o pára-quedas abre a altura em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = v(t) = -5 - 45e^{-2(t-5)} \\ h(5) = 1400 - 125 = 1275 \end{cases}$$

a solução geral da equação é

$$h(t) = -5(t-5) + \frac{45}{2}e^{-2(t-5)} + C$$

Substituindo-se $t = 5$ e $h = 1275$ obtemos $C = 2505/2$. Assim a solução deste problema de valor inicial é

$$h(t) = \frac{2505}{2} - 5(t-5) + \frac{45}{2}e^{-2(t-5)}, \quad \text{para } t > 5$$

1.6.7 Circuitos Elétricos

Um circuito RC é um circuito que tem um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C e um gerador que gera uma diferença de potencial ou força eletromotriz $V(t)$ ligados em série. A queda de potencial num resistor de resistência R é igual a RI e num capacitor de capacitância C é igual a $\dfrac{Q}{C}$.

Pela segunda lei de Kirchhoff (lei das malhas) a soma da forças eletromotrizes (neste caso apenas $V(t)$) é igual a soma das quedas de potencial (neste caso $R\,I$ na resistência e Q/C no capacitor), ou seja,

$$R\,I + \frac{Q}{C} = V(t).$$

Como $I(t) = \dfrac{dQ}{dt}$, então a carga $Q(t)$ no capacitor satisfaz a equação diferencial

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t).$$

Exemplo 1.26. Em um circuito RC uma bateria gera uma diferença de potencial de 10 volts enquanto a resistência é de 10^3 ohms e a capacitância é de 10^{-4} farads. Vamos encontrar a carga $Q(t)$ no capacitor em cada instante t, se $Q(0) = 0$ e o limite de $Q(t)$ quando t tende a mais infinito.

$$10^3\frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} + 10Q = 10^{-2}.$$

A equação é linear. Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{10t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{10t}Q\right) = 10^{-2}e^{10t}$$

integrando-se obtemos

$$e^{10t}Q(t) = 10^{-3}e^{10t} + k$$

ou

$$Q(t) = 10^{-3} + ke^{-10t}$$

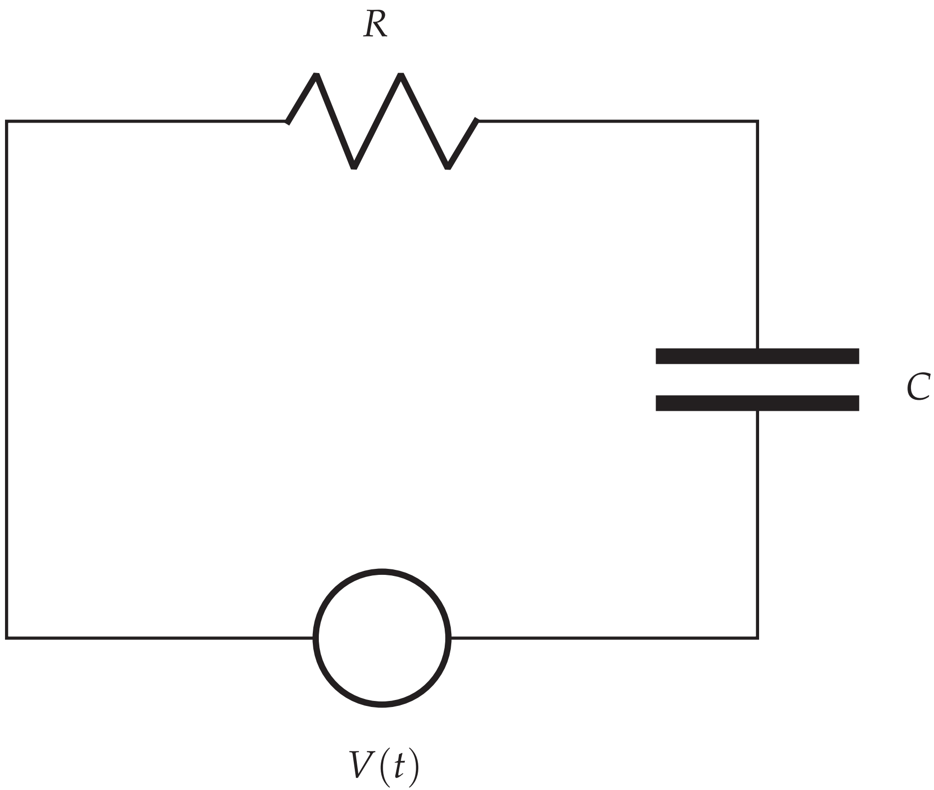


Figura 1.26: Circuito RC

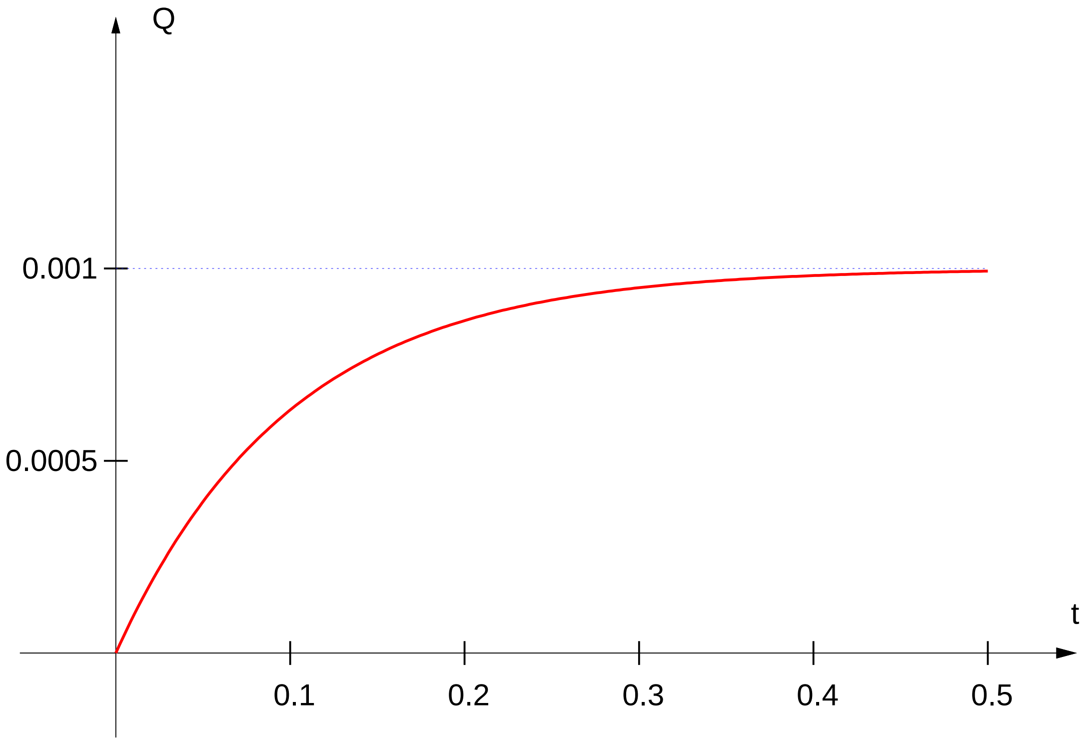


Figura 1.27: Solução do problema do Exemplo 1.26

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 0$ obtemos $k = -10^{-3}$ e assim a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 10^{-3}\left(1 - e^{-10t}\right) \text{ coulombs.}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = 10^{-3} \text{ coulombs.}$$

1.6.8 Juros

Vamos supor que façamos uma aplicação de uma quantia S_0 em um banco e que a taxa de variação do investimento $\frac{dS}{dt}$ é proporcional ao saldo em cada instante $S(t)$. Podemos descrever o problema de encontrar $S(t)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = rS. \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

Este problema já resolvemos antes e tem solução

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \tag{1.46}$$

Pode parecer que este modelo não seja muito realista, pois normalmente os juros são creditados em períodos inteiros igualmente espaçados. Ou seja, se j é a taxa de juros em uma unidade de tempo, então o saldo após n unidades de tempo $S(n)$ é dado por

$$\begin{aligned} S(1) &= S_0 + S_0 j = S_0(1+j) \\ S(2) &= S(1)(1+j) = S_0(1+j)^2 \\ \vdots \quad & \vdots \quad \quad \vdots \\ S(n) &= S(n-1)(1+j) = S_0(1+j)^n. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Substituindo-se t por n na solução do problema de valor inicial obtida (1.46) e comparando com (1.47) obtemos que

$$S_0 e^{rn} = S_0(1+j)^n$$

ou seja,

$$1 + j = e^r \quad \text{ou} \quad r = \ln(1+j) \tag{1.48}$$

Assim, a hipótese inicial de que os juros são creditados continuamente é realista desde que a constante de proporcionalidade na equação diferencial r e a taxa de juros j estejam relacionadas por (1.48). Para pequenas taxas de juros os dois valores são muito próximos. Por exemplo, $j = 4\,\%$ corresponde a $r = 3{,}9\,\%$ e $j = 1\,\%$ corresponde a $r \approx 1\,\%$.

Exemplo 1.27. Vamos supor que uma aplicação renda juros de 1 % ao mês (continuamente). Vamos encontrar o saldo como função do tempo e o saldo após 12 meses se o saldo inicial é de R\$ 100, 00.
Podemos descrever o problema de encontrar $S(t)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 0,01\, S \\ S(0) = 100 \end{cases}$$

Este problema já resolvemos antes e tem solução

$$S(t) = 100 e^{0,01\, t}.$$

Assim em 12 meses o saldo é

$$S(12) = 100 e^{0,01 \cdot 12} \approx \text{R\$ } 112,75.$$

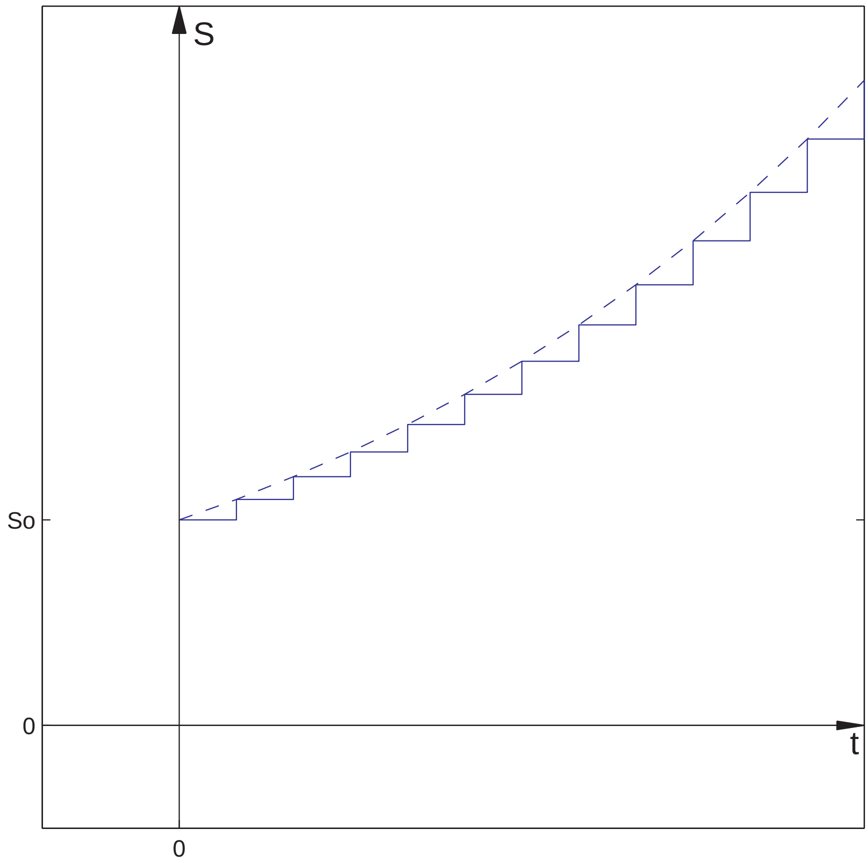


Figura 1.28: Saldo em função do tempo quando não há depósitos

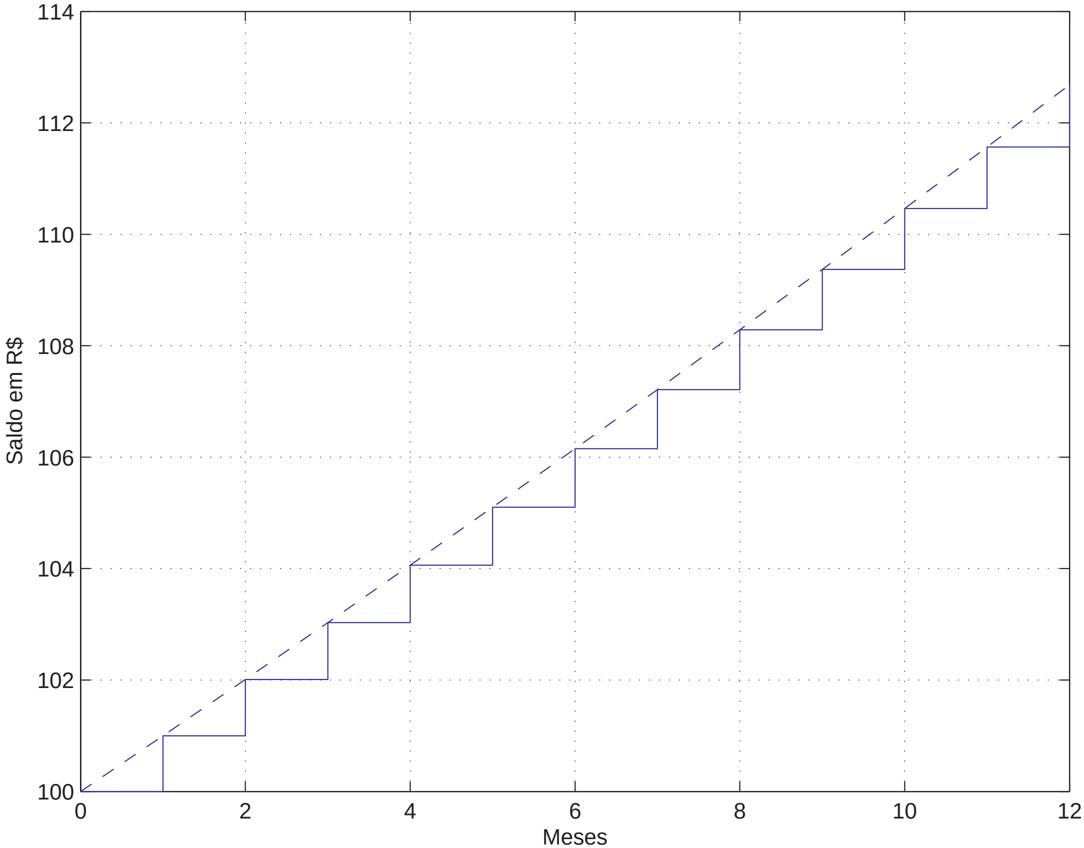


Figura 1.29: Saldo em função do tempo para o problema do Exemplo 1.27

Vamos supor, agora, que além do investimento inicial S_0 façamos depósitos ou saques continuamente a uma taxa constante d (positivo no caso de depósitos e negativo no caso de saques), então neste caso o modelo que descreve esta situação é o do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = rS + d \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dS}{dt} - rS = d. \tag{1.49}$$

Para resolvê-la vamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -rdt} = e^{-rt}$$

Multiplicando-se a equação (1.49) por $\mu(t) = e^{-rt}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-rt}S) = de^{-rt}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{-rt}S(t) = -\frac{d}{r}e^{-rt} + C \quad \text{ou} \quad S(t) = Ce^{rt} - \frac{d}{r}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $S = S_0$, obtemos

$$S_0 = Ce^{r\,0} - \frac{d}{r} \quad \Rightarrow \quad C = S_0 + \frac{d}{r}$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$S(t) = S_0e^{rt} + \frac{d}{r}(e^{rt} - 1). \tag{1.50}$$

Vamos comparar este resultado com o caso em que além dos juros serem creditados em intervalos constantes os depósitos ou saques de valor D são feitos em intervalos constantes. Neste caso o saldo após n unidades de tempo é dado por

$$\begin{aligned}
S(1) &= S_0(1+j)+D \\
S(2) &= S_0(1+j)^2+D(1+j)+D \\
\vdots \quad & \vdots \quad \quad \vdots \\
S(n) &= S_0(1+j)^n+D((1+j)^{n-1}+\ldots+1) \\
S(n) &= S_0(1+j)^n+D\frac{(1+j)^n-1}{j}. \qquad (1.51)
\end{aligned}$$

Foi usada a soma de uma progressão geométrica. Substituindo-se t por n na solução do problema de valor inicial (1.50) e comparando-se com a equação (1.51) obtemos que

$$S_0e^{rn}+\frac{d}{r}(e^{rn}-1)=S_0(1+j)^n+D\frac{(1+j)^n-1}{j}$$

ou seja

$$\frac{d}{r}=\frac{D}{j}$$

Usando (1.48) obtemos

$$d=\frac{\ln(1+j)D}{j} \quad \text{ou} \quad D=\frac{(e^r-1)d}{r}. \qquad (1.52)$$

Assim podemos também neste caso usar o modelo contínuo em que os depósitos ou saques são feitos continuamente desde que a taxa contínua de depósitos d e os depósitos constantes D estejam relacionados por (1.52).

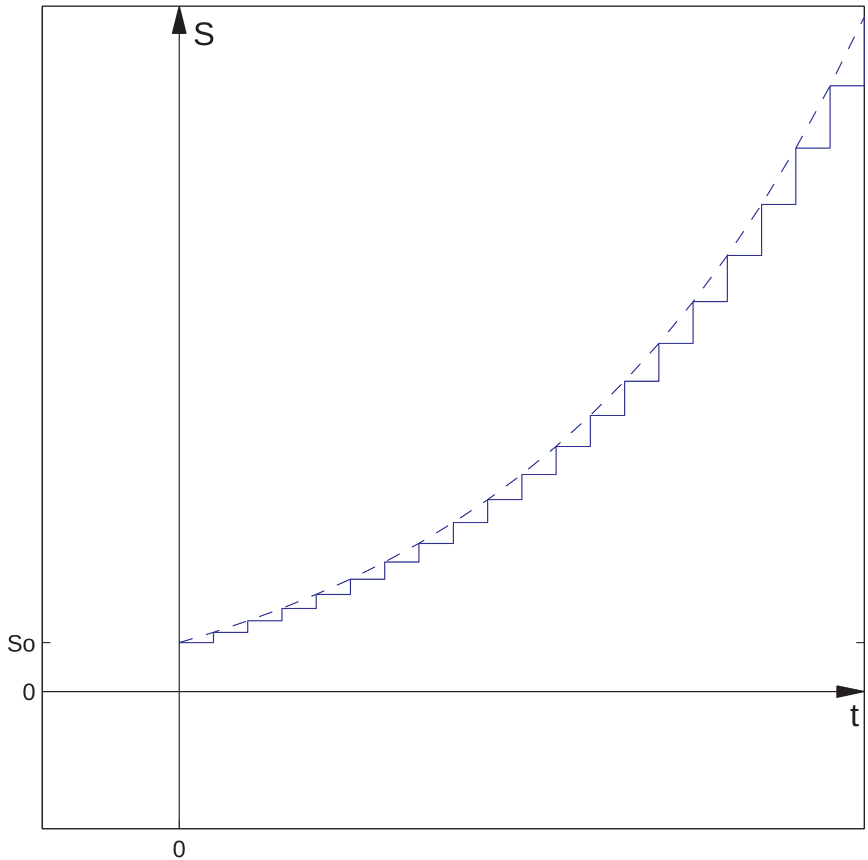


Figura 1.30: Saldo em função do tempo quando são feitos depósitos a uma taxa constante

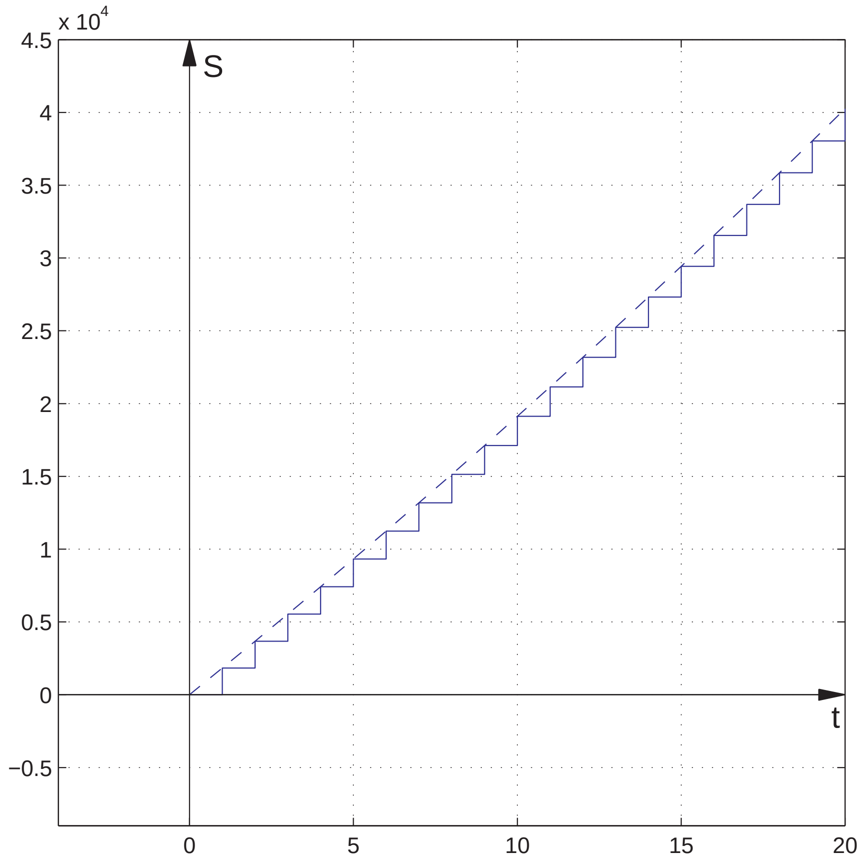


Figura 1.31: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.28

Exemplo 1.28. Suponha que seja aberta uma caderneta de poupança com o objetivo de no futuro adquirir um bem no valor de R\$ 40.000,00. Suponha que os juros sejam creditados continuamente a uma taxa de $r = 1\,\%$ ao mês e que os depósitos também sejam feitos continuamente a uma taxa constante, sendo no início o saldo igual a zero. Vamos determinar de quanto deve ser a taxa de depósito mensal para que em 20 meses consiga atingir o valor pretendido.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{100}S + d \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dS}{dt} - \frac{1}{100}S = d. \tag{1.53}$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{100}dt} = e^{-\frac{1}{100}t}$$

Multiplicando-se a equação (1.53) por $\mu(t) = e^{-\frac{1}{100}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-\frac{1}{100}t}S) = de^{-\frac{1}{100}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{-\frac{1}{100}t}S(t) = -100de^{-\frac{1}{100}t} + C \quad \text{ou} \quad S(t) = Ce^{\frac{1}{100}t} - 100d$$

Substituindo-se $t = 0$ e $S = 0$, obtemos

$$0 = Ce^{\frac{1}{100}0} - 100d \quad \Rightarrow \quad C = 100d$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$S(t) = 100d(e^{\frac{1}{100}t} - 1). \tag{1.54}$$

Substituindo-se $t = 20$ e $S = 40000$:

$$40000 = 100d(e^{\frac{2}{10}} - 1)$$

$$d = \frac{400}{e^{\frac{2}{10}} - 1} \approx \frac{400}{0{,}22} \approx \text{R\$}\,1818{,}18$$

Esta é a taxa de depósito mensal, supondo-se que os depósitos sejam realizados continuamente. Vamos determinar o depósito mensal correspondente.

$$D = \frac{(e^r - 1)d}{r} = \frac{(e^{0{,}01} - 1)1818{,}18}{0,01} \approx \text{R\$}\,1827,30$$

1.6.9 Reações Químicas

Um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada m gramas de A, n gramas de B são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Inicialmente havia α_0 gramas de A e β_0 gramas de B.
Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ as quantidades de A e B não transformadas, respectivamente e $y(t)$ a quantidade de C obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \tag{1.55}$$

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ a quantidade de A e B transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{m}{n}.$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{m}{m+n} y(t), \quad b(t) = \frac{n}{m+n} y(t). \tag{1.56}$$

Mas as quantidades de A e B não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = \alpha_0 - a(t), \quad \beta(t) = \beta_0 - b(t). \tag{1.57}$$

Substituindo-se (1.56) em (1.57) e (1.57) em (1.55) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(\alpha_0 - \frac{m}{m+n} y\right) \left(\beta_0 - \frac{n}{m+n} y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(\alpha_0 \frac{m+n}{m} - y\right) \left(\beta_0 \frac{m+n}{n} - y\right).$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(\alpha' - y)(\beta' - y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{em que } k > 0,\ \alpha' = \alpha_0 \frac{m+n}{m} \text{ e } \beta' = \beta_0 \frac{m+n}{n}.$$

(a) Se $\alpha' = \beta'$. Neste caso os reagentes foram colocados em quantidades estequiométricas, ou seja, de forma que não haverá sobra de reagentes.
A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(\alpha'-y)^2}$ obtemos

$$\frac{1}{(\alpha' - y)^2} y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)^2} y' dt = \int k dt + C$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha' - y)^2} dy = \int k dt + C.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{\alpha' - y} = kt + C.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{\alpha'}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$\alpha' - y = \frac{1}{kt + C}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \alpha' - \frac{1}{kt + C}$$

Substituindo-se o valor de C obtido:

$$y(t) = \alpha' - \frac{\alpha'}{\alpha' kt + 1}$$

Observe que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \alpha' = \beta',$$

$$\lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \lim_{t \to \infty} (\alpha_0 - \frac{m}{m+n} y(t)) = 0,$$

$$\lim_{t \to \infty} \beta(t) = \lim_{t \to \infty} (\beta_0 - \frac{n}{m+n} y(t)) = 0.$$

(b) Se $\alpha' \neq \beta'$. Neste caso os reagentes foram colocados em quantidades não estequiométricas e haverá sobra de um dos reagentes.
A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}y'dt = \int kdt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}dy = \int kdt + C_1.$$

Vamos decompor $\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)} = \frac{A}{\alpha'-y} + \frac{B}{\beta'-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $(\alpha'-y)(\beta'-y)$ obtemos

$$1 = A(\beta'-y) + B(\alpha'-y)$$

Substituindo-se $y = \alpha'$ e $y = \beta'$ obtemos $A = 1/(\beta'-\alpha')$ e $B = 1/(\alpha'-\beta')$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(\alpha'-y)(\beta'-y)}dy &= \frac{1}{\beta'-\alpha'}\left(\int \frac{1}{\alpha'-y}dy - \int \frac{1}{\beta'-y}dy\right)\\ &= -\frac{1}{\beta'-\alpha'}\left(\ln|\alpha'-y| - \ln|\beta'-y|\right)\end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln|\alpha' - y| - \ln|\beta' - y| = -k(\beta' - \alpha')t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{\alpha' - y}{\beta' - y}\right| = C_1 - k(\beta' - \alpha')t.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{\alpha' - y}{\beta' - y} = \pm e^{C_1} e^{-(\beta' - \alpha')kt} = Ce^{-(\beta' - \alpha')kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$\alpha' - y = (\beta' - y)Ce^{-(\beta' - \alpha')kt} \quad \Rightarrow \quad y - Ce^{-(\beta' - \alpha')kt}y = \alpha' - \beta' Ce^{-(\beta' - \alpha')kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{\alpha' - \beta' Ce^{-(\beta' - \alpha')kt}}{1 - Ce^{-(\beta' - \alpha')kt}}$$

Substituindo-se o valor de C obtido:

$$y(t) = \beta'\alpha' \frac{1 - e^{-(\beta' - \alpha')kt}}{\beta' - \alpha' e^{-(\beta' - \alpha')kt}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{cases} \alpha' = \alpha_0 \frac{m+n}{m}, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ \beta' = \beta_0 \frac{m+n}{n}, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases},$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (\alpha_0 - \frac{m}{m+n} y(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ \alpha_0 - \frac{m}{n}\beta_0, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases},$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (\beta_0 - \frac{n}{m+n} y(t)) = \begin{cases} \beta_0 - \frac{n}{m}\alpha_0, & \text{se } \beta' > \alpha' \\ 0, & \text{se } \alpha' > \beta' \end{cases}.$$

Exemplo 1.29. Um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada grama de B, 2 gramas de A são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Inicialmente havia 40 gramas de A e 50 gramas de B. Vamos determinar a quantidade de C em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 10 gramas de C.
Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ as quantidades de A e B não transformadas, respectivamente e $y(t)$ a quantidade de C obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \tag{1.58}$$

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ a quantidade de A e B transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad a(t) = 2b(t).$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{2}{3}y(t), \quad b(t) = \frac{1}{3}y(t). \tag{1.59}$$

Mas as quantidades de A e B não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = 40 - a(t), \quad \beta(t) = 50 - b(t). \tag{1.60}$$

Substituindo-se (1.71) em (1.72) e (1.72) em (1.70) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(40 - \frac{2}{3}y\right)\left(50 - \frac{1}{3}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (60 - y)\,(150 - y)\,.$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(60-y)(150-y) \\ y(0) = 0, \quad y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(60-y)(150-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{(60-y)(150-y)}y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(60-y)(150-y)}y'dt = \int kdt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(60-y)(150-y)}dy = \int kdt + C_1.$$

Vamos decompor $\frac{1}{(60-y)(150-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{(60-y)(150-y)} = \frac{A}{60-y} + \frac{B}{150-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $(60-y)(150-y)$ obtemos

$$1 = A(150-y) + B(60-y)$$

Substituindo-se $y = 60$ e $y = 150$ obtemos $A = 1/90$ e $B = -1/90$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(60-y)(150-y)}dy &= \frac{1}{90}\left(\int \frac{1}{60-y}dy - \int \frac{1}{150-y}dy\right) \\
&= -\frac{1}{90}\left(\ln|60-y| - \ln|150-y|\right)
\end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln|60-y| - \ln|150-y| = -90kt + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{60-y}{150-y}\right| = C_1 - 90kt.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{60-y}{150-y} = \pm e^{C_1} e^{-90kt} = Ce^{-90kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{2}{5}.$$

Substituindo-se $C = \frac{2}{5}$, $t = 10$ e $y = 10$ na equação acima obtemos

$$\frac{25}{28} = e^{-900k}$$

ou

$$90k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{28}{25}\right).$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$60 - y = (150 - y)Ce^{-90kt} \quad \Rightarrow \quad y - Ce^{-90kt}y = 60 - 150Ce^{-90kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{60 - 150Ce^{-90kt}}{1 - Ce^{-90kt}}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = \frac{300(1 - e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{28}{25}\right)t})}{5 - 2e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{28}{25}\right)t}} = \frac{300(1 - \left(\frac{28}{25}\right)^{-t/10})}{5 - 2\left(\frac{28}{25}\right)^{-t/10}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 60 \text{ gramas}$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty}(40 - \frac{2}{3}y(t)) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty}(50 - \frac{1}{3}y(t)) = 30 \text{ gramas}$$

Portanto a quantidade inicial de A será toda consumida na reação, entretanto sobrará ainda 30 gramas de B.

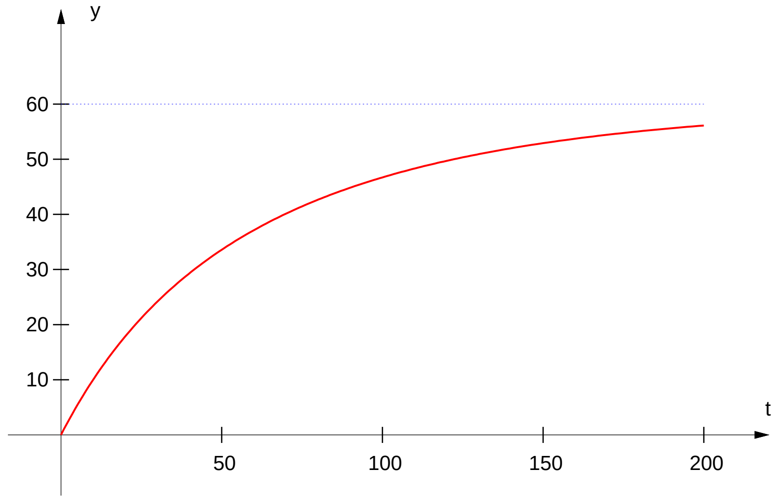


Figura 1.32: Função do Exemplo 1.29

Exemplo 1.30. Nas mesmas condições de exemplo anterior, um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada grama de B, 2 gramas de A são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Mas agora vamos supor que havia inicialmente 40 gramas de A e 20 gramas de B. Vamos determinar a quantidade de C em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 10 gramas de C.

Temos então

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(40 - \frac{2}{3}y\right)\left(20 - \frac{1}{3}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (60-y)^2 .$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k\,(60-y)^2 \\ y(0) = 0, \; y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(60-y)^2}$ obtemos

$$\frac{1}{(60-y)^2} y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(60-y)^2} y' dt = \int k dt + C$$

fazendo-se a substituição $y' dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(60-y)^2} dy = \int k dt + C.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{60-y} = kt + C.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{60}.$$

Substituindo-se $C = \frac{1}{60}$, $t = 10$ e $y = 10$ na equação acima obtemos

$$k = \frac{1}{500} - \frac{1}{600} = \frac{1}{3000}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$60 - y = \frac{1}{kt + C}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 60 - \frac{1}{kt + C}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = 60 - \frac{3000}{t + 50}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 60,$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (40 - \frac{2}{3}y(t)) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (20 - \frac{1}{3}y(t)) = 0.$$

1.6.10 Trajetórias Ortogonais

Considere uma família $\mathcal{F}$ de curvas que pode ser representada por uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1.61}$$

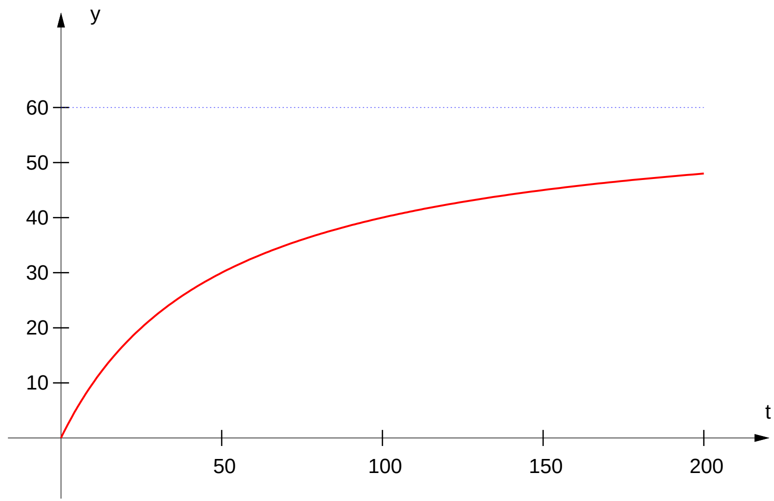


Figura 1.33: Função do Exemplo 1.30

Dado um ponto qualquer (x_0, y_0), o coeficiente angular da reta tangente a uma curva da família $\mathcal{F}$ que passa por este ponto é dado por $\tan\alpha = f(x_0, y_0)$, pois como a curva satisfaz (1.61), este é o valor da derivada $\dfrac{dy}{dx}$ em (x_0, y_0). Uma curva que passa por (x_0, y_0) de forma que a sua tangente neste ponto seja ortogonal à tangente da curva da família $\mathcal{F}$ tem reta tangente com coeficiente angular dado então por $\tan\beta = -1/f(x_0, y_0)$. Assim a equação diferencial que representa a família de curvas que interceptam ortogonalmente as curvas da família $\mathcal{F}$ é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

As curvas que são solução desta equação são chamadas **trajetórias ortogonais** às curvas da família $\mathcal{F}$.

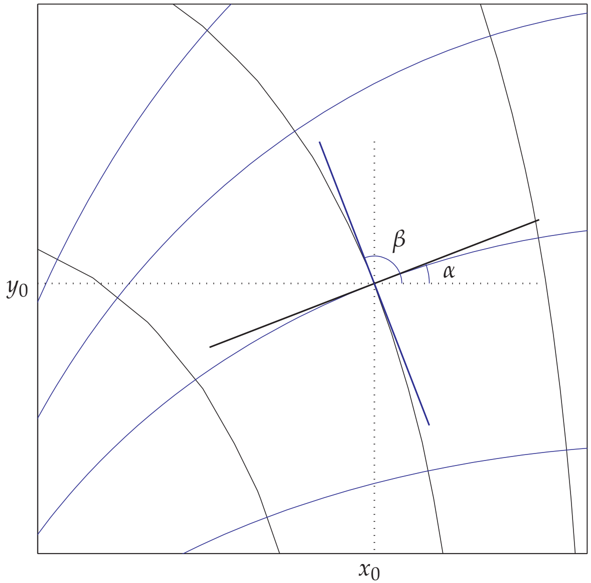


Figura 1.34: Trajetórias Ortogonais: a curva que passa por (x_0, y_0) que tem reta tangente com inclinação $\tan\alpha = f(x_0, y_0)$ é ortogonal à curva que passa por (x_0, y_0) que tem inclinação $\tan\beta = -\dfrac{1}{f(x_0, y_0)}$.

Exemplo 1.31. Vamos encontrar a família de trajetórias ortogonais da família de parábolas $y = cx^2$. Derivando a equação que define as parábolas obtemos

$$\frac{dy}{dx} = 2cx$$

Da equação das parábolas temos que $c = y/x^2$ que sendo substituído na equação acima produz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

Esta equação diferencial caracteriza as parábolas dadas. Assim a equação que caracteriza as suas trajetórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad \Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = -x$$

Assim as trajetórias ortogonais da família de parábolas dadas são

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = c,$$

ou seja, elipses.

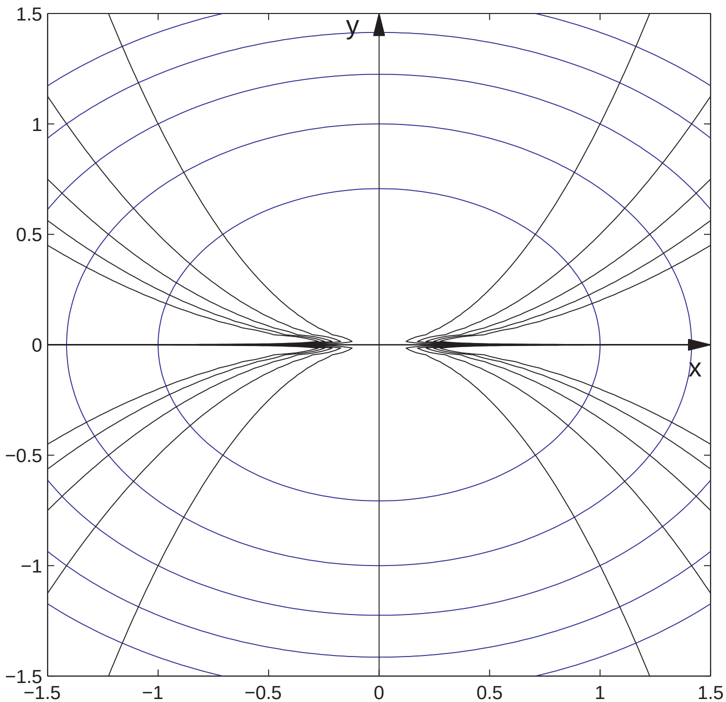


Figura 1.35: As elipses de equações $x^2 + 2y^2 = c$ são as trajetórias ortogonais das parábolas de equações $y = cx^2$.

Exercícios (respostas na página 192)

6.1. Um tanque contém 100 litros de uma solução a uma concentração de 1 grama por litro. Uma solução com uma concentração de $2te^{-\frac{1}{100}t}$ gramas por litro entra no tanque a uma taxa constante de 1 litro por minuto, enquanto que a solução bem misturada sai à mesma taxa.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) Calcule a concentração de sal no tanque $t = 10$ minutos após o início do processo.

6.2. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água pura. Então, água salgada, contendo $30\,e^{-\frac{2}{10}t}$ gramas de sal por litro, passa a ser bombeada para o tanque a uma taxa de 10 litros por minuto. Simultaneamente a solução passa a ser agitada e retirada do tanque na mesma taxa.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) Calcule em que instante a concentração de sal no tanque será de 7,5 gramas por litro.

6.3. Um tanque contém inicialmente 100 litros de água e 100 gramas de sal. Então uma mistura de água e sal na concentração de 5 gramas de sal por litro é bombeada para o tanque a uma taxa de 4 litros por minuto. Simultaneamente a solução (bem misturada) é retirada do tanque na mesma taxa.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) Calcule a concentração limite de sal no tanque quando $t \to \infty$ e o tempo necessário para que a concentração atinja metade deste valor.

6.4. Suponha que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial 100 litros e 10 gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto possuindo uma concentração de 1 grama de sal por litro. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de 2 litros por minuto.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) De qual valor se aproxima a concentração quando o tanque está enchendo, se a sua capacidade é de 200 litros?

6.5. Suponha que um tanque contenha uma mistura de água e sal com um volume inicial 100 litros e 10 gramas de sal e que água pura seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 1 litro por minuto. Suponha que a solução bem misturada sai a uma taxa de 2 litros por minuto.

(a) Determine a quantidade de sal no tanque em cada instante t, onde t é contado a partir do início do processo.

(b) De qual valor se aproxima a concentração quando o tanque se aproxima de ficar vazio?

6.6. Dentro da Terra a força da gravidade é proporcional à distância ao centro. Um buraco é cavado de polo a polo e uma pedra é largada na borda do buraco.

(a) Determine a velocidade da pedra em função da distância.

(b) Com que velocidade a pedra atinge o centro da Terra? Com que velocidade atinge o outro polo?

(Sugestão: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ e $v = \frac{dx}{dt}$)

6.7. A taxa com que uma gota esférica se evapora ($\frac{dV}{dt}$) é proporcional a sua área. Determine o raio da gota em função do tempo, supondo que no instante $t = 0$ o seu raio é r_0 e que em uma hora o seu raio seja a metade.

6.8. Num processo químico, uma substância se transforma em outra, a uma taxa proporcional à quantidade de substância não transformada. Se esta quantidade é 48 ao fim de 1 hora, e 27, ao fim de 3 horas, qual a quantidade inicial da substância?

6.9. A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias no instante t. Após três horas, observou-se a existência de 400 bactérias. Após 9 horas, 2500 bactérias. Qual era o número inicial de bactérias?

6.10. Suponha que um automóvel sofre depreciação continuamente numa taxa que é proporcional ao seu valor num instante t. Este automóvel novo custa R$ 35000,00. Após um ano de uso o seu valor é R$ 30000,00. Qual será o valor do automóvel após dois anos de uso?

6.11. Uma população de bactérias cresce a uma taxa proporcional a população presente. Sabendo-se que após uma hora a população é 2 vezes a população inicial, determine a população como função do tempo e o tempo necessário para que a população triplique. Faça um esboço do gráfico da população em função do tempo.

6.12. Suponha que em uma comunidade de 100 pessoas inicialmente apenas uma pessoa seja portador de um vírus e que a taxa com que o vírus se espalha na comunidade seja proporcional tanto ao número de pessoas infectadas como também ao número de pessoas não infectadas. Se for observado que após 4 semanas 5 pessoas estão infectadas. Determine o número de pessoas infectadas em função do tempo. Faça um esboço do gráfico da solução.

6.13. Na tabela abaixo estão os dados dos 6 últimos recenseamentos realizados no Brasil.

Ano	População
1950	52 milhões
1960	70 milhões
1970	93 milhões
1980	119 milhões
1991	147 milhões
2000	170 milhões

Podemos escrever o modelo logístico na forma

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = ay + b$$

em que $a = -k$ e $b = ky_M$. Usando a tabela anterior, podemos aproximar a derivada $y'(t_i)$, para $t_i = 1950, 1960, 1970, 1980, 1991, 2000$, pela diferença finita para frente

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

ou pela diferença finita para trás

$$\frac{dy}{dt}(t_i) \approx \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

Complete a tabela seguinte

t_i	y_i	$g_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i}$	$h_i = \frac{1}{y_i}\frac{y_i-y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}$	$\frac{g_i+h_i}{2}$
1950	52 milhões	$0,0346$	-	
1960	70 milhões	$0,0329$	$0,0257$	
1970	93 milhões	$0,0280$	$0,0247$	
1980	119 milhões	$0,0214$	$0,0218$	
1991	149 milhões	$0,0174$	$0,0173$	
2000	170 milhões	-	$0,0150$	

Assim

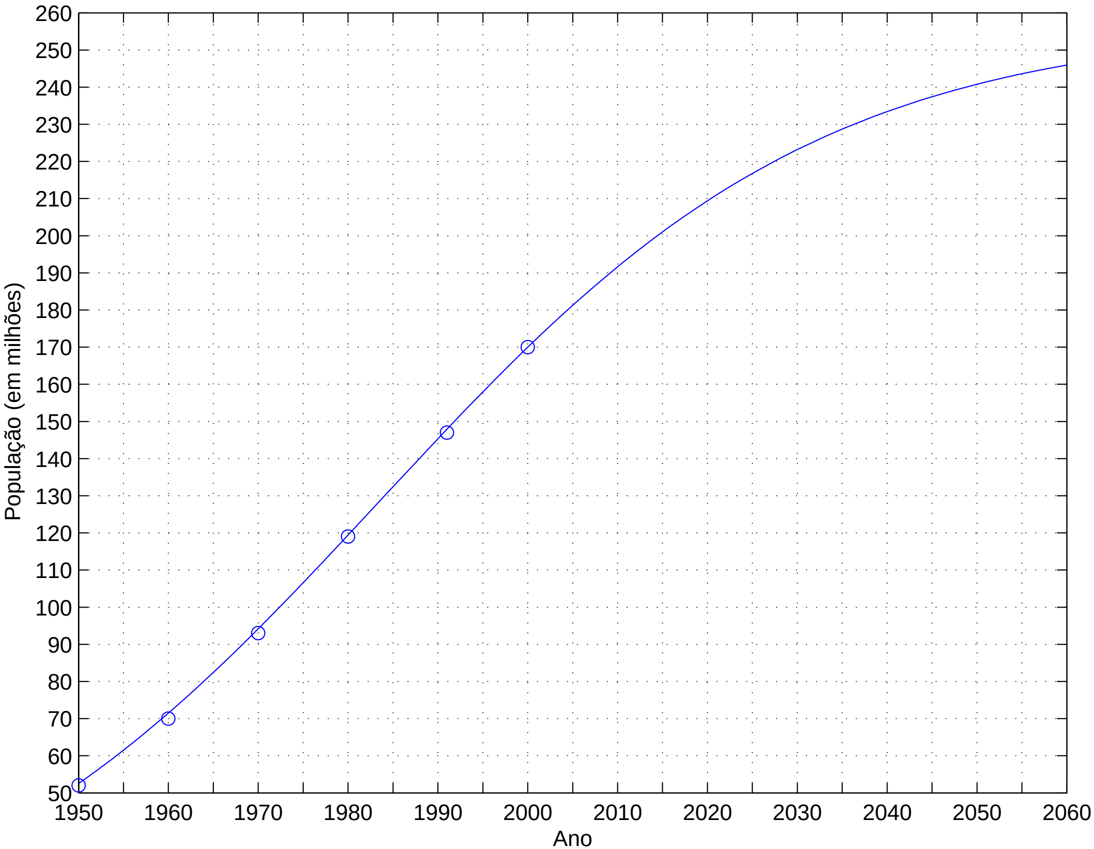
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}(t_i) = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2},$$

para $t_i = 1960, 1970, 1980, 1991$. Usando quadrados mínimos encontre a melhor reta, $z = ay + b$, que se ajusta ao conjunto de pontos $(y_i, \frac{g_i+h_i}{2})$, para $y_i = 1960, 1970, 1980, 1991$. Determine k e y_M a partir dos valores de a e b encontrados.

Usando $t_0 = 2000$, $y_0 = 170$ milhões obtenha

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,51 \cdot e^{-0,04(t-2000)}}$$

Determine a estimativa para a população do ano 2008, $y(2008)$. Compare com a estimativa dada pelo IBGE no dia 29 de agosto de 2008 de $189,6$ milhões de habitantes.



6.14. Um tambor cônico com vértice para baixo, de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro, está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a altura da coluna de água cair pela metade determinar a altura h em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia. A **lei de Torricelli** diz que a taxa com que um líquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$.

6.15. Um termômetro é levado de uma sala onde a temperatura é de 20° C para fora onde a temperatura é de 5° C. Após $1/2$ minuto o termômetro marca 15° C.

(a) Determine a temperatura marcada no termômetro como função do tempo.

(b) Qual será a leitura do termômetro após 1 minuto?

(c) Em quanto tempo o termômetro irá marcar 10° C?

6.16. Um bote motorizado e seu tripulante têm uma massa de 120 quilogramas e estava inicialmente no repouso. O motor exerce uma força constante de 10 newtons, na direção do movimento. A resistência exercida pela água, ao movimento, é, em módulo, igual ao dobro da velocidade.

(a) Determine a velocidade do bote em função do tempo.

(b) Determine a velocidade limite do bote.

(c) Faça um esboço do gráfico da velocidade em função do tempo.

6.17. Com o objetivo de fazer uma previdência particular uma pessoa deposita uma quantia de R\$ $100,00$ por mês durante 20 anos (suponha que o depósito é feito continuamente a uma taxa de R\$ $100,00$ por mês).

(a) Supondo que neste período a taxa de juros seja de 1 % ao mês (contínua), qual o valor que esta pessoa iria ter ao fim deste período.

(b) Se após o período anterior esta pessoa quisesse fazer retiradas mensais, qual deveria ser o valor destas retiradas para que em 20 anos tenha desaparecido o capital, se a taxa de juros continuasse em 1 % (contínua)?

6.18. Em um circuito RC uma bateria gera uma diferença de potencial de 10 volts enquanto a resistência é de 200 ohms e a capacitância é de 10^{-4} farads. Encontre a carga $Q(t)$ no capacitor em cada instante t, se $Q(0) = 0$. Encontre também a corrente $I(t)$ em cada instante t.

6.19. Considere o circuito elétrico abaixo formado por um resistor, um indutor e uma fonte de tensão externa ligados em série. A bateria gera uma diferença de potencial de $V(t) = 10$ volts, enquanto a resistência R

é de 100 ohms e a indutância L é de 0,5 henrys. Sabendo-se que a queda de potencial em um indutor é igual a $L\dfrac{dI}{dt}$ encontre a corrente $I(t)$ em cada instante t, se $I(0) = 0$.

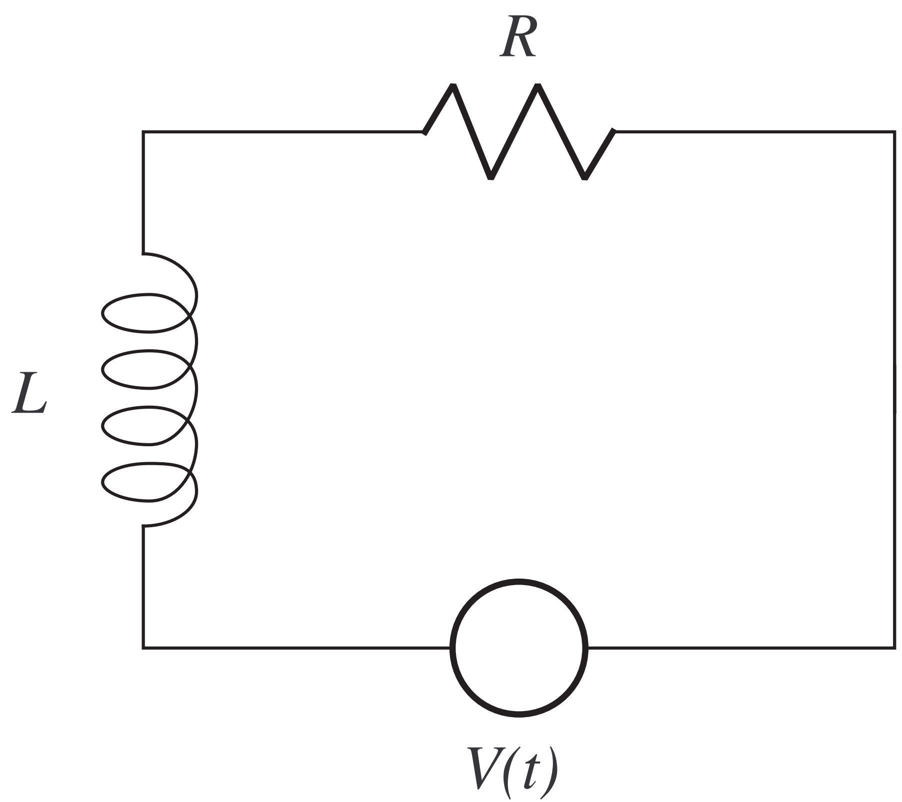


Figura 1.36: Circuito RL

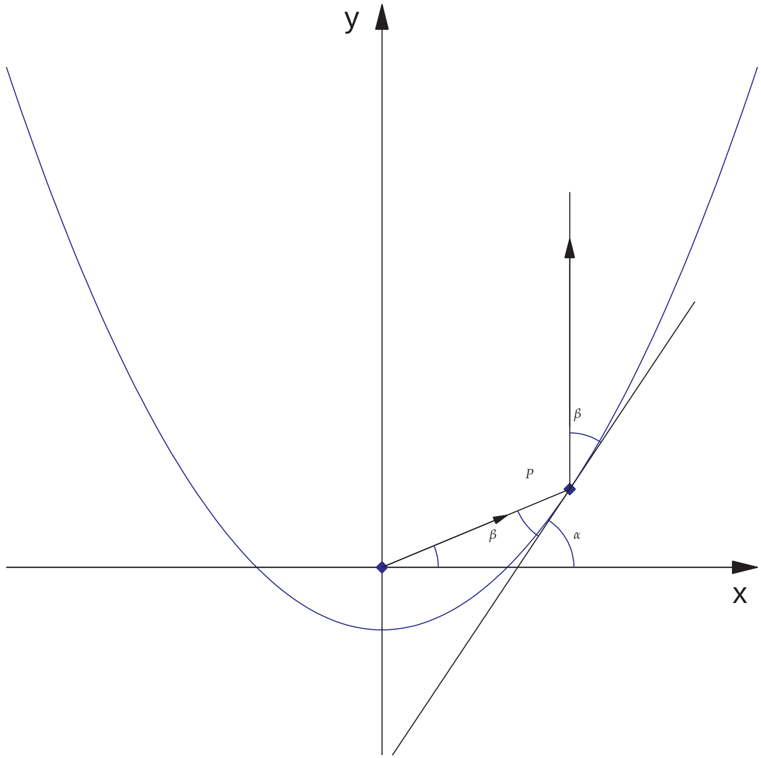


Figura 1.37: Curva refletindo raios que partem da origem na direção do eixo y.

6.20. Um composto C é formado da reação de duas substâncias A e B. A reação ocorre de forma que para cada grama de B, 4 gramas de A são usadas. A taxa com que se obtém a substância C é proporcional tanto a quantidade de A quanto a quantidade de B **não** transformadas. Inicialmente havia 32 gramas de A e 50 gramas de B.

(a) Determine a quantidade de C em função do tempo, sabendo-se que em 10 minutos são formados 30 gramas de C. Qual a quantidade limite de C após um longo período. Quanto restará de A e B após um longo período.

(b) Repita o item anterior se estão presentes inicialmente 32 gramas de A e 8 gramas de B.

6.21. Suponha que raios refletem numa curva de forma que o ângulo de incidência seja igual ao ângulo de reflexão. Determine as curvas que satisfazem a propriedade de que os raios incidentes partindo da origem refletem na curva na direção vertical seguindo os seguintes passos:

(a) Mostre que a equação do raio que parte da origem e incide na curva no ponto $P = (x, y)$ é

$$y = \frac{y'^2 - 1}{2y'}x,$$

usando o fato de que

$$\tan(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cot(2\alpha) = \frac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha}.$$

(b) Resolvendo a equação do raio incidente para y' mostre que a curva satisfaz as equações diferenciais

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} \tag{1.62}$$

(c) Resolva as equações (1.62) fazendo a mudança de variáveis $v = y/x$ e usando o fato de que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \text{arcsenh}\, x.$$

Explicite as soluções.

6.22. Determine as trajetórias ortogonais às famílias de curvas dadas. Faça esboço dos gráficos.

(a) $y = c/x$

(b) $x^2 + (y - c)^2 = c^2$

1.7 Análise Qualitativa

1.7.1 Equações Autônomas

As **equações autônomas** são equações da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \tag{1.63}$$

Vamos supor que $f(y)$ seja derivável com derivada contínua no intervalo de estudo. Para as equações autônomas podemos esboçar várias soluções sem ter que resolver a equação, pois a equação diferencial fornece a inclinação da reta tangente às soluções, $\frac{dy}{dt}$, como função de y e assim podemos saber como varia com y o crescimento e o decrescimento das soluções. Além disso podemos saber os valores de y para os quais as soluções têm pontos de inflexão e como varia a concavidade das soluções com y, pois

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(y)$$

e pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}f(y) = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y)f(y).$$

Assim,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f'(y)f(y).$$

Observe que se $y_1, \ldots, y_k$ são zeros da função $f(y)$, então $y(t) = y_i$ são soluções constantes da equação (1.63), para $i = 1, \ldots, k$ (verifique!).

Definição 1.1. (a) Sejam $y_1, \ldots, y_k$ zeros da função $f(y)$. Os pontos y_i são chamados **pontos críticos** ou **de equilíbrio** da equação (1.63) e as soluções $y(t) = y_i$ são chamadas **soluções de equilíbrio** ou **estacionárias** da equação (1.63).

(b) Um ponto de equilíbrio y_i é chamado **estável** se para $y(t_0)$ um pouco diferente de y_i, $y(t)$ se aproxima de y_i, quando t cresce.

(c) Um ponto de equilíbrio y_i é chamado **instável** se para $y(t_0)$ um pouco diferente de y_i, $y(t)$ se afasta de y_i, quando t cresce.

O ponto de equilíbrio y_i é estável se $f(y) < 0$ para y próximo de y_i com $y > y_i$ e $f(y) > 0$ para para y próximo de y_i com $y < y_i$. Pois neste caso

- Se $y(t_0)$ é um pouco maior do que y_i, então a derivada $\frac{dy}{dt} = f(y)$ é negativa e portanto a solução $y(t)$ é decrescente e assim $y(t)$ se aproxima de y_i, quando t cresce.
- Se $y(t_0)$ é um pouco menor do que y_i, então a derivada $\frac{dy}{dt} = f(y)$ é positiva e portanto a solução $y(t)$ é crescente e assim $y(t)$ se aproxima de y_i, quando t cresce.

O ponto de equilíbrio y_i é instável se $f(y) > 0$ para y próximo de y_i com $y > y_i$ e $f(y) < 0$ para para y próximo de y_i com $y < y_i$. Pois neste caso

- Se $y(t_0)$ é um pouco maior do que y_i, então a derivada $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ é positiva e portanto a solução $y(t)$ é crescente e assim $y(t)$ se afasta de y_i, quando t cresce.
- Se $y(t_0)$ é um pouco menor do que y_i, então a derivada $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ é negativa e portanto a solução $y(t)$ é decrescente e assim $y(t)$ se afasta de y_i, quando t cresce.

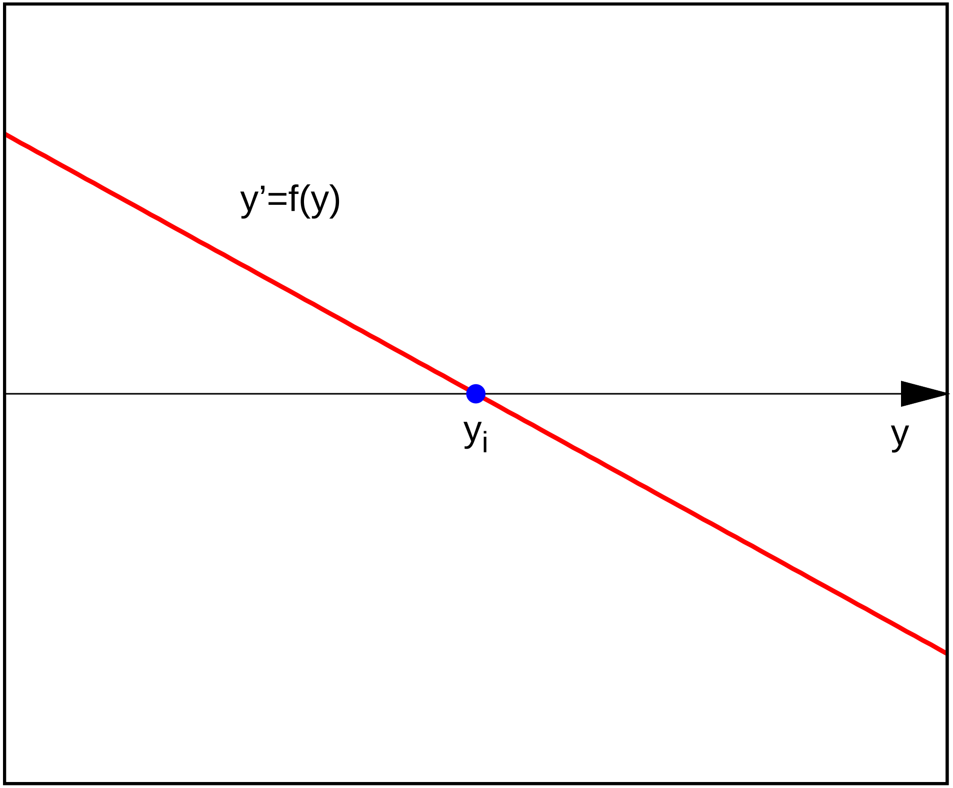


Figura 1.38: $\frac{dy}{dt} = f(y)$ nas proximidades de um ponto de equilíbrio estável

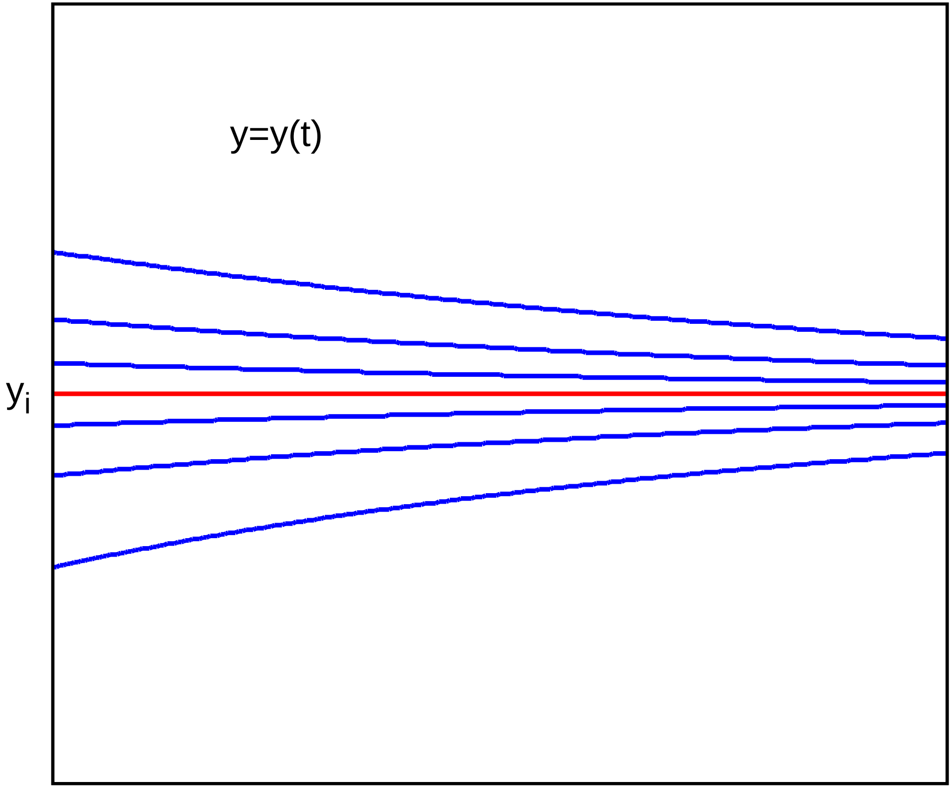


Figura 1.39: Soluções de $\frac{dy}{dt} = f(y)$ nas proximidades de um ponto de equilíbrio estável

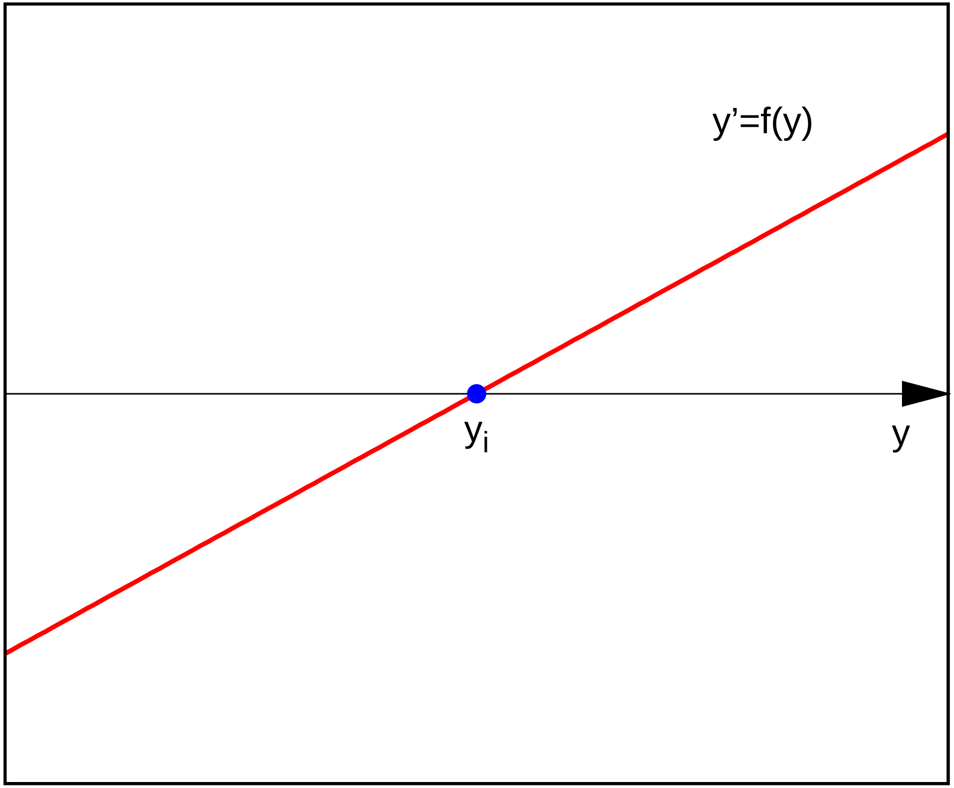


Figura 1.40: $\frac{dy}{dt} = f(y)$ nas proximidades de um ponto de equilíbrio instável

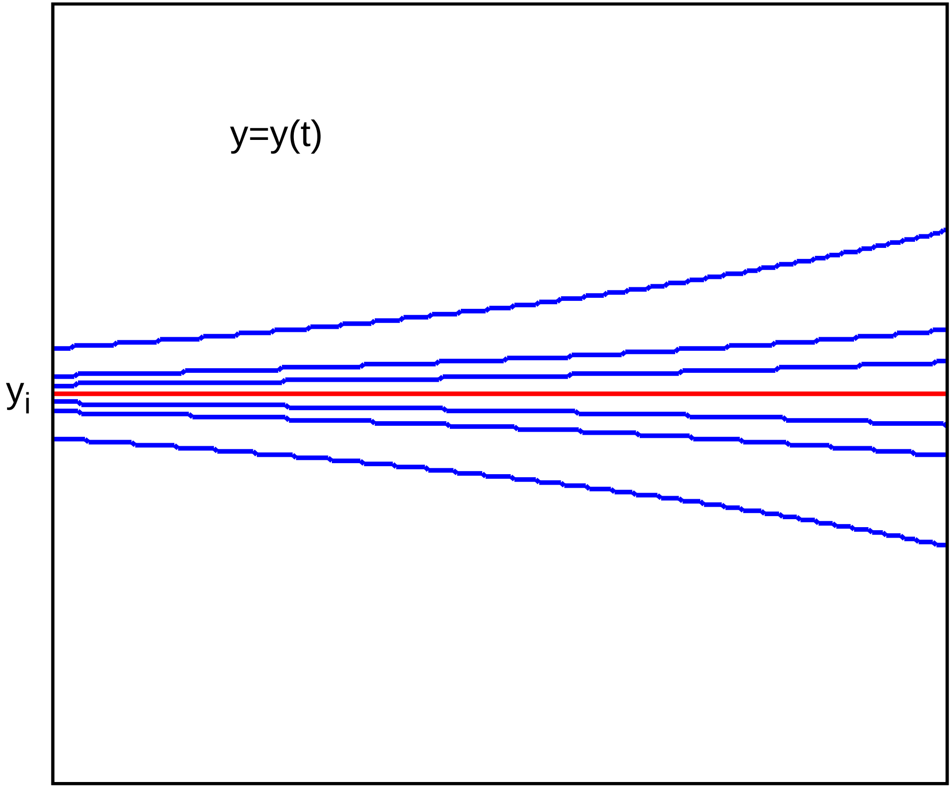


Figura 1.41: Soluções de $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$ nas proximidades de um ponto de equilíbrio instável

Exemplo 1.32. Considere a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - y. \tag{1.64}$$

Vamos esboçar várias soluções da equação. Para isto vamos determinar os pontos de equilíbrio. Depois vamos determinar como varia o crescimento e o decrescimento das soluções com y. E finalmente para quais valores de y as soluções têm ponto de inflexão.

Os pontos de equilíbrio são as raízes de $y^2 - y = 0$, ou seja, $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$.

Como $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - y < 0$, para $0 < y < 1$, então as soluções são decrescentes para $0 < y < 1$.

Como $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - y > 0$, para $y < 0$ e para $y > 1$, então as soluções são crescentes para $y < 0$ e para $y > 1$.

Vamos determinar para quais valores de y as soluções têm pontos de inflexão e como varia a concavidade das soluções com y calculando a segunda derivada.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y^2 - y).$$

Mas pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}(y^2 - y) = (2y - 1)\frac{dy}{dt} = (2y - 1)(y^2 - y).$$

Assim

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (2y - 1)(y^2 - y).$$

Logo as soluções têm pontos de inflexão para $y = 1/2$, $y = 0$ e $y = 1$.

Observamos que o ponto de equilíbrio $y_1 = 0$ é estável pois para valores de y próximos de $y_1 = 0$ as soluções correspondentes $y(t)$ estão se aproximando de

$y_1 = 0$, quando t cresce. O ponto de equilíbrio $y_2 = 1$ é instável pois para valores de y próximos de $y_2 = 1$ as soluções correspondentes $y(t)$ estão se afastando de $y_2 = 1$, quando t cresce. Com as informações sobre os pontos críticos, regiões de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão podemos fazer um esboço dos gráficos de algumas soluções.

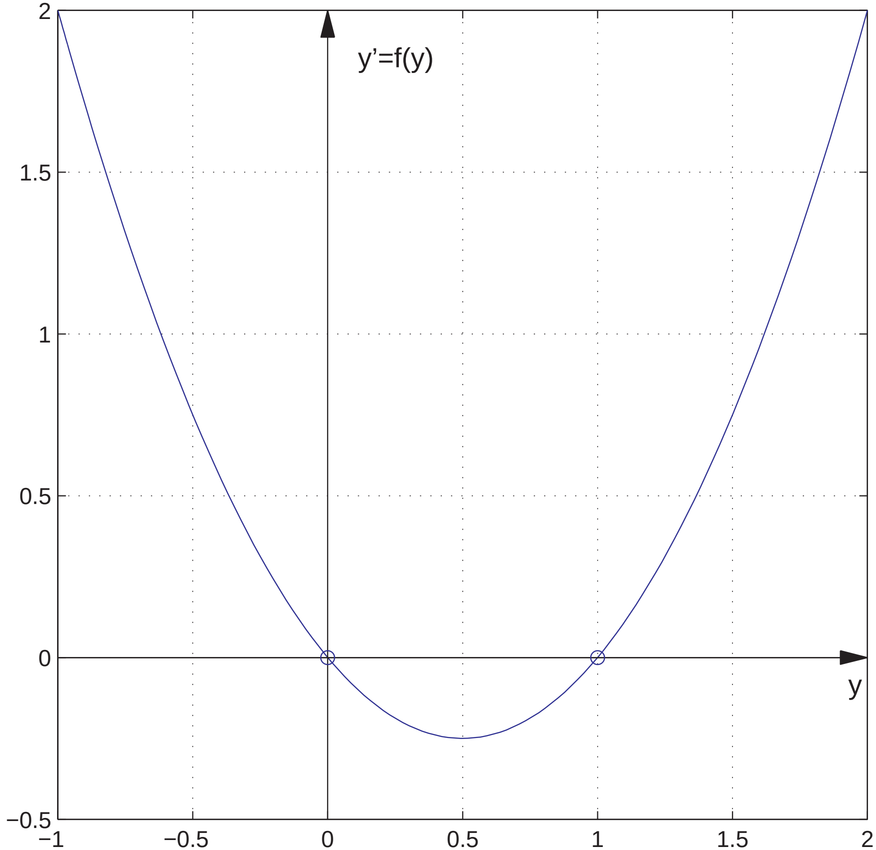


Figura 1.42: $\frac{dy}{dt} = f(y)$ da equação 1.64

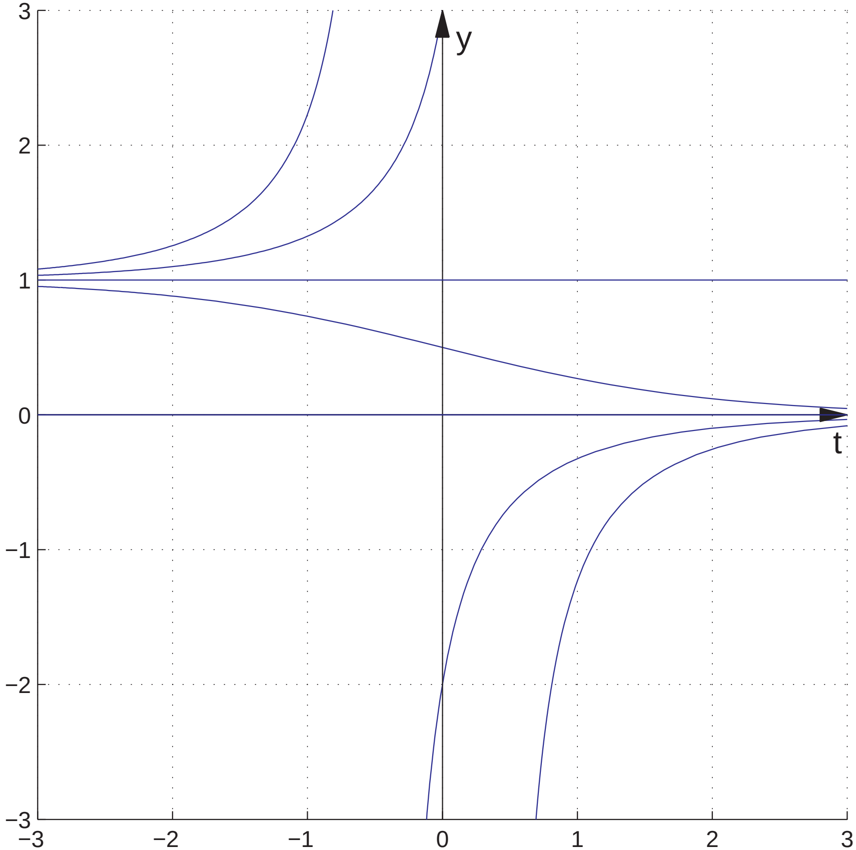


Figura 1.43: Algumas soluções da equação 1.64

1.7.2 Campo de Direções

Uma maneira de se ter uma idéia do comportamento das soluções de uma equação diferencial de 1ª ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

sem ter de resolvê-la é desenhar o **campo de direções**

$$(t,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}(1,\frac{dy}{dt}) = \frac{1}{\sqrt{1+(f(t,y))^2}}(1,f(t,y))$$

da seguinte forma:

(a) Constrói-se uma malha retangular consistindo em pelo menos uma centena de pontos igualmente espaçados;

(b) Em cada ponto da malha desenha-se um segmento orientado unitário que tem inclinação igual a da reta tangente à solução da equação que pelo ponto da malha, ou seja, na direção e sentido de

$$(1,\frac{dy}{dt}) = (1,f(t,y))$$

e com comprimento igual a 1.

Desenhar o campo de direções é, como está dito em [1], "uma tarefa para a qual o computador é particularmente apropriado e você deve, em geral, usar o computador para desenhar um campo de direções." Por isso escrevemos uma função para o MATLAB® que está no pacote GAAL e que torna esta tarefa mais fácil chamada `campo(f,[xmin xmax],[ymin ymax])`.
Entretanto, para as equações autônomas, como as que estudamos na seção anterior, é fácil desenhar o campo de direções, pois as inclinações variam somente com y.
Para a equação do Exemplo 1.32 está desenhado a seguir o campo de direções.

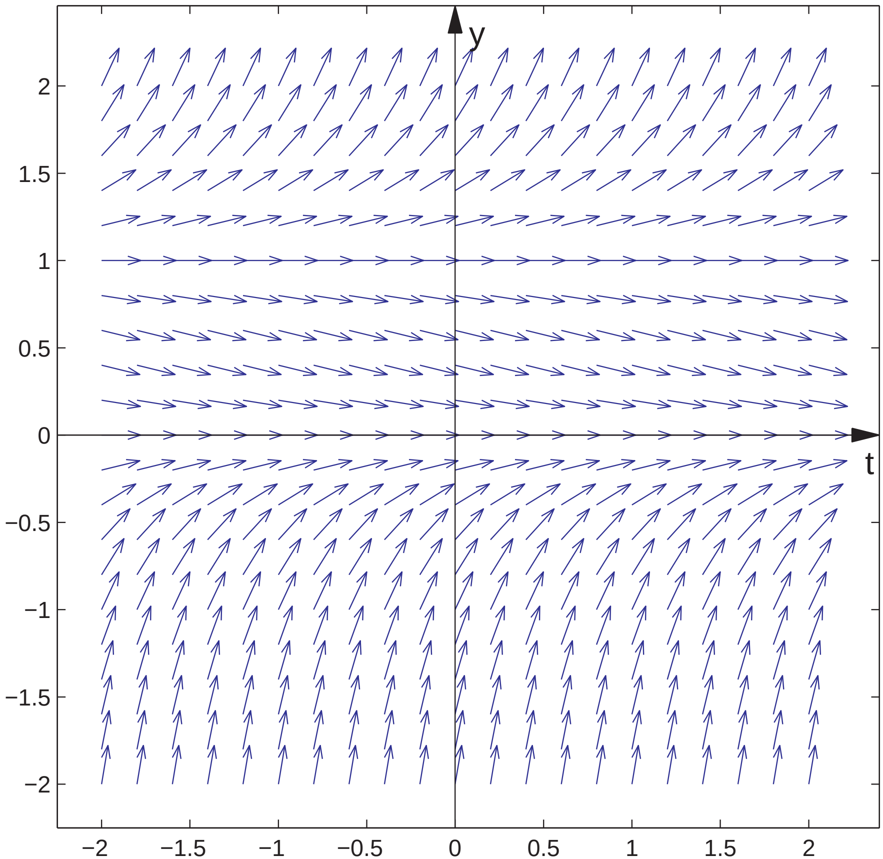


Figura 1.44: Campo de Direções da equação do Exemplo 1.32

Exercícios (respostas na página 225)

Para as equações diferenciais autônomas dadas

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

(a) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos de equilíbrio e classifique cada um dos pontos de equilíbrio como assintoticamente estável ou instável. Justifique.

(b) Determine como varia o crescimento das soluções com y.

(c) Determine para quais valores de y as soluções têm pontos de inflexão.

(d) Esboce algumas soluções da equação usando os resultados dos itens anteriores.

7.1. $\dfrac{dy}{dt} = y - y^2$.

7.2. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - y^2$.

7.3. $\dfrac{dy}{dt} = -y - y^2$.

7.4. $\dfrac{dy}{dt} = y + y^2$.

Para as equações diferenciais autônomas dadas

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos de equilíbrio e classifique cada um deles como assintoticamente estável ou instável. Justifique.

7.5. $\dfrac{dy}{dt} = (y^2 - 4)(y^2 + y)$

7.6. $\dfrac{dy}{dt} = (e^y - 1)(y + 4)$

7.7. $\dfrac{dy}{dt} = f(y) = y(y^2 + 3y + 2)$

1.8 Existência e Unicidade de Soluções

Considere novamente o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{1.65}$$

Nem sempre este problema tem uma única solução como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.33. Considere o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

Este problema tem duas soluções (verifique!)

$$y_1(t) = \frac{t^2}{4}, \quad \text{para } t \geq 0$$

e

$$y_2(t) = 0.$$

Se a função $f(t,y)$ e a sua derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em um retângulo em torno de (t_0, y_0) o que ocorreu no exemplo anterior não acontece como estabelecemos no próximo teorema que será demonstrado apenas ao final da seção.

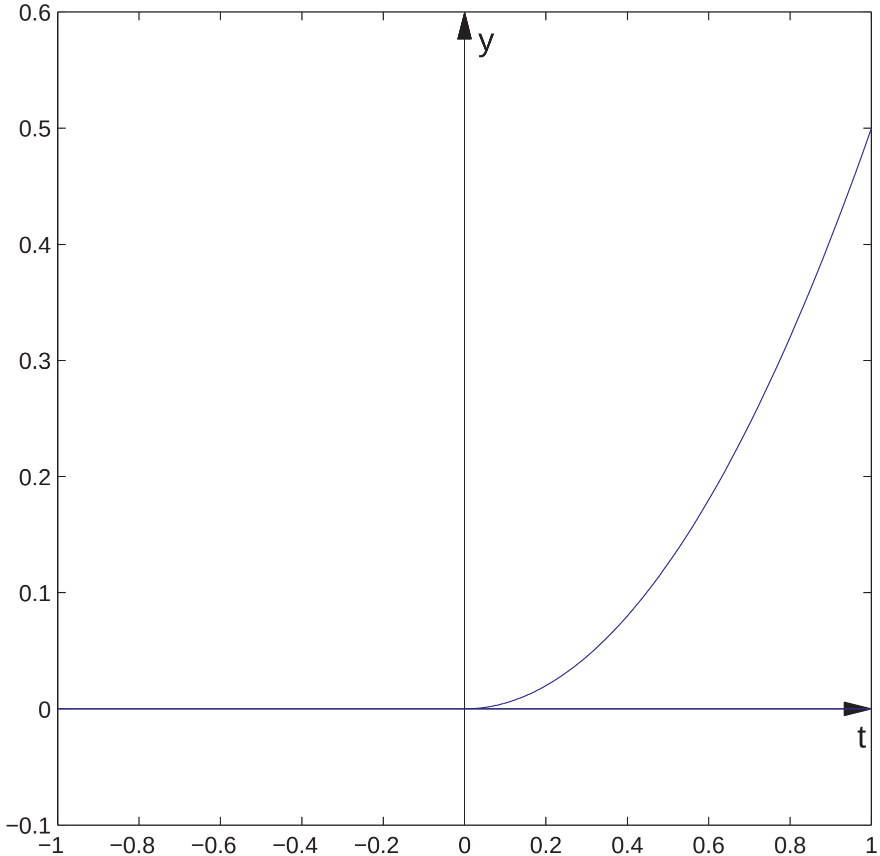


Figura 1.45: Duas soluções do problema de valor inicial do Exemplo 1.33

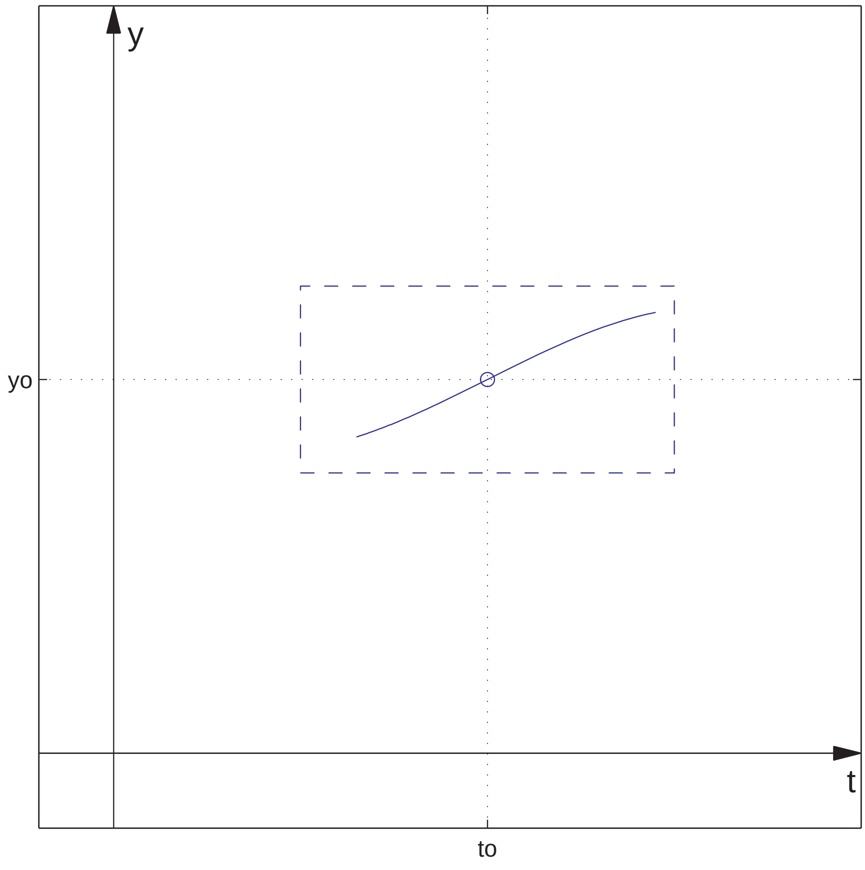


Figura 1.46: Retângulo em torno de (t_0, y_0) onde o problema de valor inicial tem uma única solução

Teorema 1.1 (Existência e Unicidade). *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.66}$$

Se $f(t,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas no retângulo*

$$R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta,\ \delta < y < \gamma\}$$

contendo (t_0, y_0)*, então o problema (1.66) tem uma única solução em um intervalo contendo* t_0*.*

Exemplo 1.34. Para o problema de valor inicial do Exemplo 1.33 mas com o ponto inicial (t_0, y_0)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{y} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f(t, y) = \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Vemos que se (t_0, y_0) é tal que $y_0 > 0$, então o problema de valor inicial acima tem solução única.

Exemplo 1.35. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.1 o problema de valor inicial acima tem uma única solução para todo $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Mas, por exemplo, para $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$ o problema tem solução $y(t) = \dfrac{-1}{t-1}$ (verifique!) e é válida somente no intervalo $t < 1$.

No exemplo anterior apesar do Teorema 1.1 garantir que em todo ponto $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe uma solução localmente (num intervalo em torno de t_0) estas soluções não se juntam de modo a formar soluções globais (que existam para todo $t \in \mathbb{R}$). Isto não ocorre para equações lineares como provamos a seguir.

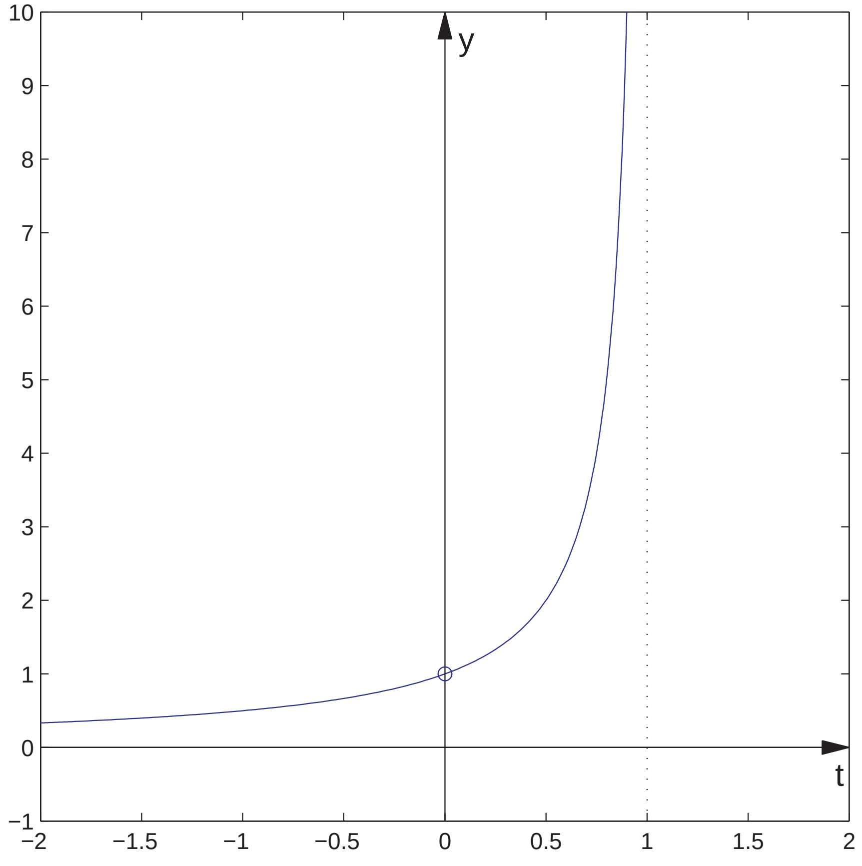


Figura 1.47: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.35 para $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$.

Teorema 1.2 (Existência e Unicidade para Equações Lineares). *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0, então o problema de valor inicial tem uma única solução neste intervalo.

Demonstração. A unicidade segue-se do Teorema 1.1 na página 147. Vamos provar a existência exibindo a solução do problema de valor inicial. Seja

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int_{t_0}^{t} \mu(s)q(s)ds + y_0 \right), \quad \text{em que} \quad \mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}.$$

Por hipótese a função $y(t)$ está bem definida. Vamos mostrar que $y(t)$ é solução do problema de valor inicial.

$$\mu(t)y(t) = \int_{t_0}^{t} \mu(s)q(s)ds + y_0$$

Como $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, então

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right) = \mu(t)q(t)$$

Derivando o produto obtemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t).$$

Mas $\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t)$, então a equação acima pode ser escrita como

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t).$$

Dividindo-se por $\mu(t)$ obtemos a equação dada.
Agora, como $y(t_0) = y_0$ segue-se que $y(t)$ dado é a solução do problema de valor inicial. ■

Exemplo 1.36. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{2}{t}y = t \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$p(t) = \dfrac{2}{t}$ e $q(t) = t$. $p(t)$ é contínua para $t \neq 0$. Para $t_0 = 2$, por exemplo, o problema de valor inicial tem uma única solução para $t > 0$ e para $t_0 = -3$, o problema de valor inicial tem uma única solução para $t < 0$. Para tirarmos esta conclusão não é necessário resolver o problema de valor inicial, apesar dele estar resolvido no Exemplo 1.8 na página 18.

1.8.1 Demonstração do Teorema de Existência e Unicidade

Demonstração do Teorema 1.1 na página 147.

(a) **Existência:**
Defina a seqüência de funções $y_n(t)$ por

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Como $f(t, y)$ é contínua no retângulo R, existe uma constante positiva b tal que

$$|f(t, y)| \leq b, \quad \text{para } (t, y) \in R.$$

Assim

$$|y_1(t) - y_0| \leq b|t - t_0|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo R, existe uma constante positiva a (por que?) tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a\,|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Assim

$$
\begin{aligned}
|y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0| ds \leq ab \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds = ab \frac{|t - t_0|^2}{2}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|y_3(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)| ds \\
&\leq a^2 b \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^2}{2} ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6}.
\end{aligned}
$$

Vamos supor, por indução, que

$$
|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
|y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s)) - y_{n-2}(s)| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!}
\end{aligned} \tag{1.67}
$$

Estas desigualdades são válidas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$ em que α' e β' são tais que $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$ (por que existem α' e β' ?).

Segue-se de (1.67) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

então $y_n(t)$ é convergente. Seja

$$y(t) = \lim_{n \to \infty} y_n(t).$$

Como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!},$$

então passando ao limite quando m tende a infinito obtemos que

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!} \tag{1.68}$$

Logo dado um $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(t) - y_n(t)| < \epsilon/3$, para $\alpha' < t < \beta'$. Daí segue-se que $y(t)$ é contínua, pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente próximo de t, temos que $|y_n(t) - y_n(s)| < \epsilon/3$ e para n suficientemente grande $|y(t) - y_n(t)| < \epsilon/3$ e $|y(s) - y_n(s)| < \epsilon/3$, o que implica que

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \epsilon.$$

Além disso para $\alpha' < t < \beta'$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

pois, por (1.68), temos que

$$\begin{aligned}\left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right| & \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|ds \\ &\leq a \int_{t_0}^{t} |y_n(s) - y(s)|ds \\ &\leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}\end{aligned}$$

que tende a zero quando n tende a infinito. Portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds = \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \end{aligned}$$

Derivando em relação a t esta equação vemos que $y(t)$ é solução do problema de valor inicial.

(b) **Unicidade:**
Vamos supor que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial. Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|ds.$$

Assim, como

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \quad z(t) = \int_{t_0}^{t} z'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds,$$

então

$$\begin{aligned} u'(t) = |y(t) - z(t)| & \\ & \leq \int_{t_0}^{t} |y'(s) - z'(s)|ds = \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds \\ & \qquad \leq a \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t).$$

Subtraindo-se $au(t)$ e multiplicando-se por e^{-at} obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que $e^{-at}u(t) = 0$ (lembre-se que $u(t) \geq 0$) e portanto que $u(t) = 0$, para todo t. Assim $y(t) = z(t)$, para todo t.

■

Exercícios (respostas na página 249)

8.1. Determine os pontos (t_0, y_0) para os quais podemos garantir que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução.

(a) Se $f(t,y) = \sqrt{y^2 - 4}$

(b) Se $f(t,y) = \sqrt{ty}$

(c) Se $f(t,y) = \dfrac{y^2}{t^2 + y^2}$

(d) Se $f(t,y) = t\sqrt{y^2 - 1}$

8.2. Determine o maior intervalo em que os problemas de valor inicial abaixo têm solução, sem resolvê-los:

(a) $\begin{cases} (t^2-1)\dfrac{dy}{dt} + (t-2)y = t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (t^2-1)\dfrac{dy}{dt} + ty = t^2 \\ y(2) = y_0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (t^2-t)\dfrac{dy}{dt} + (t+1)y = e^t \\ y(-1) = y_0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (t^2-t)\dfrac{dy}{dt} + (t+3)y = \cos t \\ y(2) = y_0 \end{cases}$

8.3. Mostre que se $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo

$$R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta,\ \delta < y < \gamma\},$$

então existe uma constante positiva a tal que

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq a\,|y - z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y, z < \gamma.$$

Sugestão: Para t fixo, use o Teorema do Valor Médio para f como função somente de y. Escolha a como sendo o máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no retângulo.

8.4. Mostre que se $f(t,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas no retângulo

$$R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < t < \beta,\ \gamma < y < \delta\}$$

e a e b são constantes positivas tais que

$$|f(t,y)| \leq b, \quad |f(t,y) - f(t,z)| \leq a\,|y-z|, \quad \text{para } \alpha < t < \beta \text{ e } \delta < y,z < \gamma,$$

então existem α' e β' com $\alpha \leq \alpha' < t_0 < \beta' \leq \beta$ tais que a seqüência

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

satisfaz $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$. Sugestão: mostre que

$$|y_n(t) - y_0| \leq \left(\frac{b}{a} - 1\right) e^{a|t-t_0|}.$$

1.9 Respostas dos Exercícios

1. Introdução às Equações Diferenciais (página 13)

1.1. (a) Equação diferencial ordinária de 1a. ordem não linear.

(b) Equação diferencial ordinária de 2a. ordem linear.

1.2. $(x+3)y_1'' + (x+2)y_1' - y_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = x^2 + 6x + 6 \neq 0$
$(x+3)y_2'' + (x+2)y_2' - y_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$
$(x+3)y_3'' + (x+2)y_3' - y_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$
Logo, $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $y_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

(a) Substituindo-se $y = e^{rt}$ e $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e na equação obtemos

$$are^{rt} + be^{rt} = (ar+b)e^{rt} = 0,$$

pois por hipótese $ar + b = 0$.

(b) Substituindo-se $y = e^{rt}$, $\dfrac{dy}{dt} = re^{rt}$ e $\dfrac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$ na equação obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0,$$

pois por hipótese $ar^2 + br + c = 0$.

(c) Substituindo-se $y = x^r$, $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ em (2.18) obtemos

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$r(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right)x^r = 0,$$

pois por hipótese $r^2 + (b-1)r + c = 0$.

1.3. (a) Substituindo-se $y = e^{rt}$ e $\frac{dy}{dt} = re^{rt}$ na equação diferencial obtemos

$$are^{rt} + be^{rt} = (ar + b)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$ar + b = 0$$

(b) Substituindo-se $y = e^{rt}$, $\frac{dy}{dt} = re^{rt}$ e $\frac{d^2y}{dt^2} = r^2e^{rt}$ na equação diferencial obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0$$

(c) Substituindo-se $y = x^r$, $\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ na equação diferencial obtemos

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right) x^r = 0.$$

Como $x^r \neq 0$, então $y = x^r$ é solução da equação diferencial se, e somente se, r é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

1.4. (a)

$$0 = y' + ty^2 = \frac{-2tr}{(t^2-3)^2} + \frac{tr^2}{(t^2-3)^2} = \frac{(-2r + r^2)t}{(t-3)^2} \quad \forall\, t$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 2r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2$$

(b)

$$0 = y' - 2ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{2tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-2r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall\, t$$
$$\Rightarrow \quad r^2 + r = 0$$
$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1$$

(c)

$$0 = y' - 6ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+1)^2} - \frac{6tr^2}{(t^2+1)^2} = \frac{(-2r-6r^2)t}{(t^2+1)^2} \quad \forall\, t$$
$$\Rightarrow \quad 3r^2 + r = 0$$
$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -1/3$$

(d)

$$0 = y' - ty^2 = \frac{-2rt}{(t^2+2)^2} - \frac{tr^2}{(t^2+2)^2} = \frac{(-2r-r^2)t}{(t^2+2)^2}, \quad \forall\, t$$
$$\Rightarrow \quad r^2 + 2r = 0$$
$$\Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{ou} \quad r = -2$$

2. Equações Lineares de 1ª Ordem (página 23)

2.1. (a)

$$\mu(x) = e^{\int (1-2x)dx} = e^{x-x^2}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{x-x^2}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x-x^2}y\right) = e^{x-x^2}xe^{-x} = xe^{-x^2}$$

$$e^{x-x^2}y(x) = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + Ce^{x^2-x}$$

$$2 = y(0) = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 5/2$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}e^{x^2-x}$$

(b)

$$\mu(t) = e^{\int 3t^2 dt} = e^{t^3}$$

Multiplicando a equação por $\mu(t) = e^{t^3}$:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^3} y\right) = e^{t^3} e^{-t^3+t} = e^t$$

$$e^{t^3} y(t) = \int e^t \, dt = e^t + C$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + Ce^{-t^3}$$

$$2 = y(0) = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$y(t) = e^{t-t^3} + e^{-t^3}$$

(c)

$$\mu(t) = e^{\int -\cos t \, dt} = e^{-\operatorname{sen} t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\operatorname{sen} t} y\right) = e^{-\operatorname{sen} t} t e^{t^2 + \operatorname{sen} t} = t e^{t^2}$$

$$e^{-\operatorname{sen} t} y(t) = \int t e^{t^2} \, dt = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{t^2 + \operatorname{sen} t} + C e^{\operatorname{sen} t}$$

$$2 = y(0) = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 3/2$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{t^2 + \operatorname{sen} t} + \frac{3}{2} e^{\operatorname{sen} t}$$

(d)

$$\mu(x) = e^{\int x^4 \, dx} = e^{\frac{x^5}{5}}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{\frac{x^5}{5}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^5}{5}} y\right) = e^{\frac{x^5}{5}} x^4 e^{\frac{4x^5}{5}} = x^4 e^{x^5}$$

$$e^{\frac{x^5}{5}} y(x) = \int x^4 e^{x^5} \, dx = \frac{1}{5} e^{x^5}$$

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{4x^5}{5}} + C e^{-\frac{x^5}{5}}$$

$$1 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = 4/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{4x^5}{5}} + \frac{4}{5} e^{-\frac{x^5}{5}}$$

2.2. (a)

$$y' - \frac{4}{x} y = -\frac{2}{x^3}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-4}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4} y\right) = -\frac{2}{x^7}$$

Integrando-se

$$x^{-4} y(x) = \int -\frac{2}{x^7} dx = \frac{1}{3x^6} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{3x^2} + C x^4$$

(b)

$$y' - \frac{1}{x}y = -x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-1}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-1}y\right) = -1$$

Integrando-se

$$x^{-1}y(x) = -\int dx = -x + C$$

$$y(x) = -x^2 + Cx$$

(c)

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^{-4}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}y\right) = xe^x$$

Integrando-se

$$x^{-4}y(x) = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$y(x) = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

2.3. (a)

$$\mu(x) = e^{\int 5x^4\,dx} = e^{x^5}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = e^{x^5}$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^5}y\right) = e^{x^5}x^4 = x^4e^{x^5}$$

$$e^{x^5}y(x) = \int x^4e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}e^{x^5} + C$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + Ce^{-x^5}$$

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{5} + C \Rightarrow C = y_0 - 1/5$$

$$y(x) = \frac{1}{5} + \left(y_0 - \frac{1}{5}\right)e^{-x^5}$$

(b) $y'(x) = -5x^4\left(y_0 - \frac{1}{5}\right)e^{-x^5}$. Para $y_0 > 1/5$ a solução é decrescente e para $y_0 < 1/5$ a solução é crescente.

(c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1/5$ e claramente independe do valor de y_0.

2.4. (a)

$$y' + \frac{x}{x^2-9}y = 0$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x}{x^2-9}dx} = e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-9|} = \sqrt{x^2-9}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = \sqrt{x^2-9}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-9}\,y\right) = 0$$

$$\sqrt{x^2-9}\,y(x) = C$$

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$y_0 = y(5) = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4y_0$$

$$y(x) = \frac{4y_0}{\sqrt{x^2-9}}$$

(b) $x > 3$, para $y_0 \neq 0$ e $-\infty < x < \infty$, para $y_0 = 0$.

(c) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ e claramente independe do valor de y_0.

2.5. (a) $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}(y_1(t) + y_2(t)) + p(t)(y_1(t) + y_2(t)) = \left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = 0 + 0 = 0$

(b) $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}\left(cy_1(t)\right) + p(t)(cy_1(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) = c0 = 0$

2.6. $\frac{dy}{dt} + p(t)y = \frac{d}{dt}\left(cy_1(t) + y_2(t)\right) + p(t)(cy_1(t) + y_2(t)) = c\left(\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1\right) + \left(\frac{dy_2}{dt} + p(t)y_2\right) = c0 + q(t) = q(t)$

3. Equações Separáveis (página 36)

3.1. (a)

$$\begin{aligned}
(1+x^2)y' - xy &= 0 \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{1+x^2} \\
\frac{d}{dx}\left(\ln|y|\right) &= \frac{x}{1+x^2} \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1 \\
\ln\left(\frac{|y|}{(1+x^2)^{1/2}}\right) &= C_1 \\
\frac{y}{(1+x^2)^{1/2}} &= \pm e^{C_1} = C \\
y &= C(1+x^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
y^2 - 1 - (2y + xy)y' &= 0 \\
\frac{y}{y^2-1}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2+x} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln|y^2-1|\right) &= \frac{1}{2+x} \\
\frac{1}{2}\ln|y^2-1| &= \ln|2+x| + C_1 \\
\ln\left(\frac{|y^2-1|^{1/2}}{|2+x|}\right) &= C_1 \\
\frac{|y^2-1|^{1/2}}{2+x} &= \pm e^{C_1} = C \\
\sqrt{y^2-1} &= C(2+x)
\end{aligned}$$

(c)

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{ax^2+b}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right) = \frac{x}{ax^2+b}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C_1$$

$$y^2 - \frac{1}{a}\ln|ax^2+b| = C$$

(d)

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(ax^2+b)^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}y^{-2}\right) = \frac{x}{(ax^2+b)^{1/2}}$$

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{a}(ax^2+b)^{1/2} + C$$

$$-\frac{1}{2}y^{-2} - \frac{1}{a}(ax^2+b)^{1/2} = C$$

(e)

$$\frac{y}{\sqrt{ay^2+b}}y' - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sqrt{ay^2+b}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{ay^2+b} = \ln|x| + C$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{ay^2+b} - \ln|x| = C$$

(f)

$$\frac{y}{ay^2+b}y' - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2a}\ln|ay^2+b|\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{2a}\ln|ay^2+b| = -x^{-1} + C$$

$$\frac{1}{2a}\ln|ay^2+b| + x^{-1} = C$$

3.2. (a) Podemos reescrever a equação como

$$(3y^2-3)\frac{dy}{dx} = 2x+1$$

ou

$$\frac{d}{dy}\left(y^3-3y\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2+x\right)$$

que pela regra da cadeia pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(y^3-3y-x^2-x\right) = 0$$

Assim a solução geral é dada implicitamente por

$$y^3-3y-x^2-x = C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial $y(0)=0$ substituímos $x=0$ e $y=0$ na solução geral obtendo $C=0$. Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^3-3y-x^2-x = 0$$

(b) Para determinar o intervalo de validade da solução vamos determinar os pontos onde a derivada não está definida, ou seja, $3y^2-3=0$, ou seja, $y=\pm 1$. Substituindo-se $y=-1$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2+x-2=0$, que tem solução $x=-2$ e $x=1$. Substituindo-se $y=1$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2+x+2=0$, que não tem solução real.
Como o ponto inicial tem $x=0$ que está entre os valores $x=-2$ e $x=1$ concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo $(-2,1)$, que é o maior intervalo em que a solução $y(x)$ e a sua derivada estão definidas.

(c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde $\frac{dy}{dx} = 0$. Neste caso não precisamos calcular a derivada da solução, pois a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

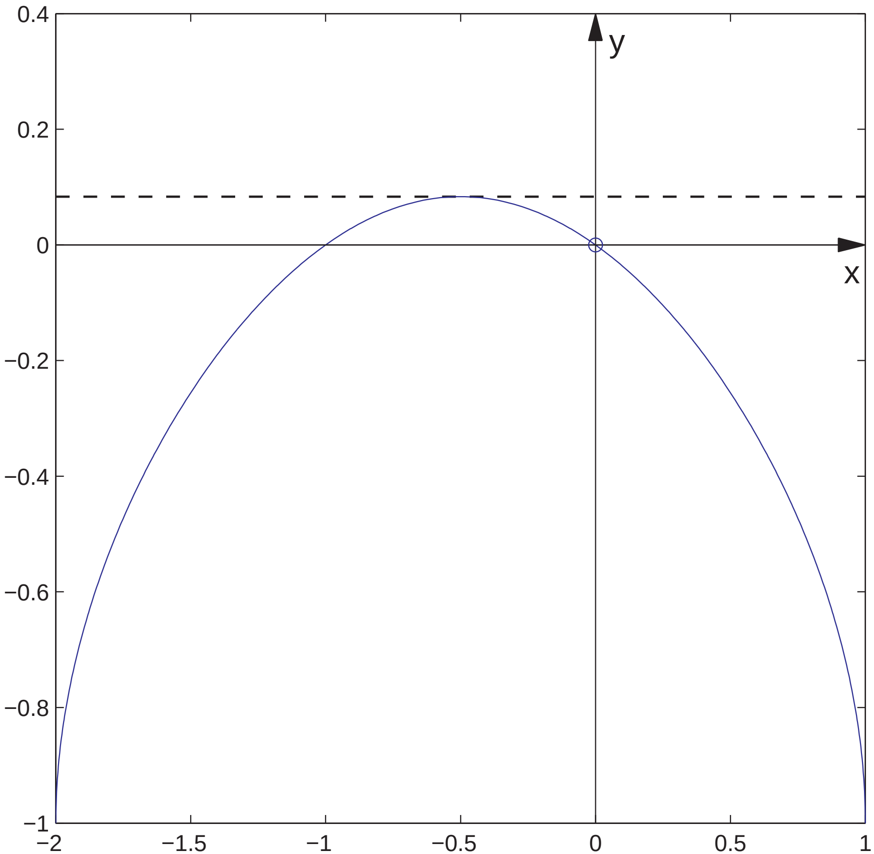
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2-3}$$

Assim, a reta tangente é horizontal para x tal que $2x + 1 = 0$, ou seja, somente para $x = -1/2$.

(d) A reta tangente à curva integral é vertical ($\frac{dx}{dy} = 0$) para $x = -2$ e $x = 1$, pois pela equação diferencial, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2-3}$, então

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{3y^2-3}{2x+1}$$

para $x \neq -1/2$. Assim já sabemos que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos $(-2,-1)$ e $(1,-1)$ onde a tangente é vertical, pelo ponto inicial $(0,0)$. Neste ponto a inclinação da tangente é $-1/3$, pois substituindo-se $x = 0$ e $y = 0$ na equação diferencial obtemos $\frac{dy}{dx} = -1/3$. Além disso sabemos que o único ponto em que a tangente é horizontal ocorre para $x = -1/2$. Deduzimos daí que a solução é crescente até $x = -1/2$ depois começa a decrescer.



3.3. (a) A equação é equivalente a $\frac{1}{b-ay}y' = 1$

(b) A equação é equivalente a $\frac{1}{1-y}y' = q(t)$

(c) A equação é equivalente a $\frac{1}{y}y' = -p(t)$

4. Equações Exatas (página 48)

4.1. (a)

$$M = 2xy - \operatorname{sen} x \quad N = x^2 + e^y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

$$\psi(x, y) = \int M dx = x^2 y + \cos x + h(y)$$

$$N = x^2 + e^y = x^2 + h'(y)$$

$$h'(y) = e^y$$

$$h(y) = e^y$$

$$\psi(x, y) = x^2 y + \cos x + e^y = C$$

(b)

$$M = y^2 + \cos x \quad N = 2xy + e^y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

$$\psi(x, y) = \int M dx = xy^2 + \operatorname{sen} x + h(y)$$

$$N = 2xy + e^y = 2xy + h'(y)$$

$$h'(y) = e^y$$

$$h(y) = e^y$$

$$\psi(x, y) = xy^2 + \operatorname{sen} x + e^y = C$$

(c)

$$M = 2xy^2 + \cos x \quad N = 2x^2y + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$$

$$\psi(x, y) = \int M dx = x^2y^2 + \operatorname{sen} x + h(y)$$

$$N = 2x^2y + \frac{1}{y} = 2x^2y + h'(y)$$

$$h(y) = \ln|y|$$

$$\psi(x, y) = x^2y^2 + \operatorname{sen} x + \ln|y| = C$$

(d)

$$M = 2\left(xy^2 - \frac{1}{x^3}\right) \quad N = 2x^2y - \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

$$\psi(x, y) = \int M dx = x^2y^2 + \frac{1}{x^2} + h(y)$$

$$N = 2x^2y - \frac{1}{y^2} = 2x^2y + h'(y)$$

$$h'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$h(y) = \frac{1}{y}$$

$$\psi(x,y) = x^2y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = C$$

(e) Multiplicando a equação

$$x + y + x \ln x \frac{dy}{dx} = 0$$

por $1/x$ obtemos

$$1 + \frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$M = 1 + \frac{y}{x} \qquad N = \ln x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

Vamos encontrar uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 1 + \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = \ln x$$

Integrando-se a 1ª equação em relação a x obtemos

$$\psi(x,y) = \int M dx = x + y \ln x + h(y)$$

Substituindo-se a função $\psi(x,y)$ encontrada na equação de $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = N = \ln x$ obtemos

$$N = \ln x = \ln x + h'(y)$$

$$h'(y) = 0$$

O que implica que

$$h(y) = C_1$$

Assim a solução da equação é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = x + y \ln x = C$$

(f)

$$M = 2\left(xy^3 - \frac{1}{x^3}\right) \quad N = 3x^2y^2 - \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

$$\psi(x, y) = \int M dx = x^2y^3 + \frac{1}{x^2} + h(y)$$

$$N = 3x^2y^2 - \frac{1}{y^2} = 3x^2y^2 + h'(y)$$

$$h'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$h(y) = \frac{1}{y}$$

$$\psi(x, y) = x^2y^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = C$$

(g)

$$M = xy^4 \quad N = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

$$\psi(x,y) = \int M dx = \frac{1}{2}x^2y^4 + h(y)$$

$$N = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3 = 2x^2y^3 + h'(y)$$

$$h'(y) = 3y^5 - 20y^3$$

$$h(y) = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4$$

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = C$$

4.2. (a) Podemos reescrever a equação como

$$2x - y + (2y - x)\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$M = 2x - y \quad N = 2y - x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

Vamos encontrar uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y) = 2x - y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y) = 2y - x$$

Integrando-se a 1ª equação em relação a x obtemos

$$\psi(x,y) = \int M dx = x^2 - yx + h(y)$$

Substituindo-se a função $\psi(x,y)$ encontrada na equação de $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N = 2y - x$ obtemos

$$N = 2y - x = -x + h'(y)$$

$$h'(y) = 2y$$

O que implica que

$$h(y) = y^2 + C_1$$

E a solução geral da equação é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = x^2 - xy + y^2 = C$$

Para encontrar a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 3$ substituímos $x = 1$ e $y = 3$ na solução geral obtendo $C = 1 - 3 + 9 = 7$. Assim a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

(b) Para determinar o intervalo de validade da solução vamos determinar os pontos onde a derivada não está definida, pela equação diferencial, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y}$, não está definida se, e somente se, $x - 2y = 0$, ou seja, $y = x/2$. Substituindo-se $y = x/2$ na equação que define a solução obtemos a equação $x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 7$, que tem solução $x = \pm\sqrt{28/3}$. Como o ponto inicial tem $x = 1$ que está entre os valores $x = -\sqrt{28/3}$ e $x = \sqrt{28/3}$ concluímos que o intervalo de validade da solução é o intervalo $(-\sqrt{28/3}, \sqrt{28/3})$, que é o maior intervalo em que a solução $y(x)$ e a sua derivada estão definidas.
A reta tangente à curva integral $x^2 - xy + y^2 = 7$ é vertical ($\frac{dx}{dy} = 0$) para $x = -\sqrt{28/3}$ e $x = \sqrt{28/3}$, pois

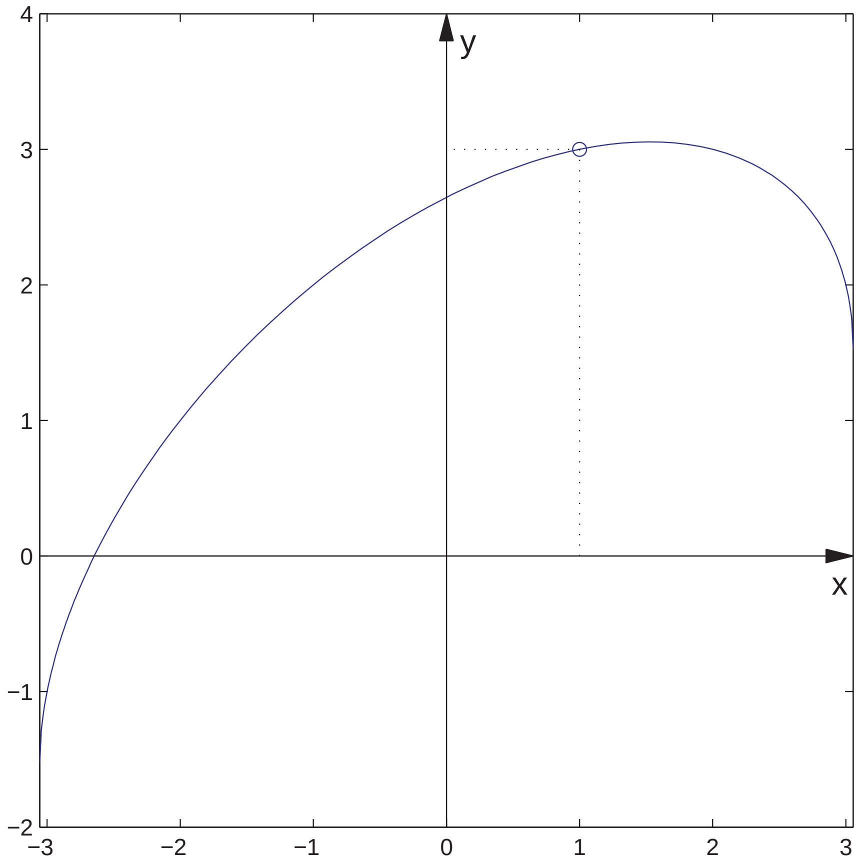
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{x - 2y}{2x - y}, \quad \text{para } x \neq y/2.$$

(c) Nos pontos onde a solução tem máximo local a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, pontos onde $\frac{dy}{dx} = 0$. Como a derivada já está dada pela equação diferencial, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

Assim, a reta tangente é horizontal para x tal que $2x - y = 0$, ou seja, somente para $y = 2x$. Substituindo-se $y = 2x$ na equação $x^2 - xy + y^2 = 7$ obtemos a equação $x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 7$, que tem solução $x = \pm\sqrt{7/3}$.
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) = \frac{(2-y')(x-2y)-(2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$
Como $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{y=2x} = \frac{-2}{3x}$, então o ponto de máximo ocorre em $x = +\sqrt{7/3}$.

(d) Já sabemos que a solução está contida em uma curva que passa pelos pontos $(-\sqrt{28/3}, -\sqrt{28/3}/2)$ e $(\sqrt{28/3}, \sqrt{28/3}/2)$ onde a tangente é vertical, pelo ponto inicial $(1, 3)$. Neste ponto a inclinação da tangente é $1/5$, pois substituindo-se $x = 1$ e $y = 3$ na equação diferencial obtemos $\frac{dy}{dx} = 1/5$. Além disso sabemos que o único ponto em que a solução tem máximo local ocorre para $x = \sqrt{7/3}$. Deduzimos daí que a solução é crescente até $x = \sqrt{7/3}$ depois começa a decrescer.



4.3. (a) Vamos supor que exista uma função $\mu(y)$ tal que ao multiplicarmos a equação por $\mu(y)$ a nova equação seja exata. Então

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{dy}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

Assim, $\mu(y)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu$$

Como

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{4x - x}{xy} = 3/y,$$

então $\mu(y)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{3}{y}\mu$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{3}{y}$$

$$\ln|\mu| - 3\ln y = C$$

Assim

$$\mu(y) = y^3$$

é um fator integrante para a equação diferencial.

(b)

$$\tilde{M} = y^3(xy) \quad \text{e} \quad \tilde{N} = y^3\left(2x^2 + 3y^2 - 20\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 4xy^3 \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 4xy^3$$

4.4. (a) Vamos supor que exista uma função $\mu(y)$ tal que ao multiplicarmos a equação por $\mu(y)$ a nova equação seja exata. Então

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{dy}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

Assim, $\mu(y)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu$$

Como

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2xy}{x} = 2y,$$

então $\mu(y)$ deve satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dy} = 2y\mu$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = 2y$$

$$\ln|\mu| - y^2 = C$$

Assim

$$\mu(y) = e^{y^2}$$

é um fator integrante para a equação diferencial.

4.5. (a)

$$M = 2y^2 + \frac{2y}{x}, \quad N = 2xy + 2 + \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y + \frac{2}{x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação não é exata!}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x$ obtemos

$$2xy^2 + 2y + \left(2x^2y + 2x + y\right)\ y' = 0.$$

$$\tilde{M} = xM = 2xy^2 + 2y, \quad \tilde{N} = xN = 2x^2y + 2x + y$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 4xy + 2, \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 4xy + 2$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A nova equação é exata!}$$

(b)

$$\psi(x, y) = \int \tilde{M} dx = x^2y^2 + 2xy + h(y)$$

$$\tilde{N} = 2x^2y + 2x + y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y + 2x + h'(y)$$

$$h'(y) = y \quad \Rightarrow \quad h(y) = y^2/2 + C_1$$

A solução geral da equação é dada implicitamente por

$$x^2y^2 + 2xy + y^2/2 = C$$

(c) Substituindo-se $x = 1$ e $y = 1$ na solução acima

$$1 + 2 + 1/2 = C$$

Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$x^2y^2 + 2xy + y^2/2 = 7/2$$

4.6. (a)

$$M = \frac{1}{x^3} + \frac{e^y}{x}, \quad N = e^y + \frac{1}{xy}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{e^y}{x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação não é exata!}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x$ obtemos

$$\frac{1}{x^2} + e^y + \left(xe^y + \frac{1}{y}\right) y' = 0.$$

$$\tilde{M} = xM = x^{-2} + e^y, \quad \tilde{N} = xN = xe^y + y^{-1}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = e^y$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A nova equação é exata!}$$

(b)

$$\psi(x,y) = \int \tilde{M} dx = -x^{-1} + xe^y + h(y)$$

$$\tilde{N} = xe^y + y^{-1} = xe^y + h'(y)$$

$$h'(y) = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad h(y) = \ln y + C_1$$

A solução geral da equação é dada implicitamente por

$$-x^{-1} + xe^y + \ln|y| = C$$

(c) Substituindo-se $x = 1$ e $y = 1$ na solução acima

$$-1 + e = C$$

Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$-x^{-1} + xe^y + \ln|y| = e - 1$$

4.7. (a)

$$M = -2y, \quad N = x + \frac{y^3}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - \frac{y^3}{x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação não é exata!}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ obtemos

$$-\frac{2x}{y} + \left(\frac{x^2}{y^2} + y\right) y' = 0.$$

$$\tilde{M} = \frac{x}{y^2}M = -\frac{2x}{y}, \quad \tilde{N} = \frac{x}{y^2}N = \frac{x^2}{y^2} + y$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{2x}{y^2}, \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = \frac{2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A nova equação é exata!}$$

(b)

$$\psi(x,y) = \int \tilde{M} dx = -\frac{x^2}{y} + h(y)$$

$$\tilde{N} = \frac{x^2}{y^2} + y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2} + h'(y)$$

$$h'(y) = y \quad \Rightarrow \quad h(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$$

A solução geral da equação é dada implicitamente por

$$-\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{2} = C$$

(c) Substituindo-se $x = 1$ e $y = 1$ na solução acima

$$-1 + \frac{1}{2} = C$$

Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$-\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}$$

4.8. (a)

$$M = e^{x^3} + \operatorname{sen} y, \quad N = \frac{x}{3}\cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{3}\cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação não é exata!}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x^2$ obtemos

$$x^2 e^{x^3} + x^2 + \left(\frac{x^3}{3}\cos y\right)\, y' = 0.$$

$$\tilde{M} = xM = x^2 e^{x^3} + x^2 \operatorname{sen} y, \quad \tilde{N} = xN = \frac{x^3}{3}\cos y$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = x^2\cos y, \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = x^2\cos y$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A nova equação é exata!}$$

(b)

$$\psi(x,y) = \int \tilde{M} dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + \frac{x^3}{3}\operatorname{sen} y + h(y)$$

$$\tilde{N} = \frac{x^3}{3}\cos y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x^3}{3}\cos y + h'(y)$$

$$h'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) = C_1$$

A solução geral da equação é dada implicitamente por

$$\frac{1}{3}e^{x^3} + \frac{x^3}{3}\operatorname{sen} y = C$$

(c) Substituindo-se $x = 0$ e $y = 0$ na solução acima

$$\frac{1}{3} = C$$

Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{3}e^{x^3} + \frac{x^3}{3}\operatorname{sen} y = \frac{1}{3}$$

4.9. (a)

$$M = 2 + \frac{e^y}{x} \quad N = e^y + \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{e^y}{x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação não é exata!}$$

Multiplicando a equação por $\mu(x) = x$ obtemos

$$2x + e^y + (xe^y + y)\ \ y' = 0.$$

$$\tilde{M} = xM = 2x + e^y \quad \tilde{N} = xN = xe^y + y$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = e^y$$

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A nova equação é exata!}$$

(b)

$$\psi(x, y) = \int \tilde{M} dx = x^2 + xe^y + h(y)$$

$$\tilde{N} = xe^y + 2y = \frac{\partial \psi}{\partial y} = xe^y + h'(y)$$

$$h'(y) = y \quad \Rightarrow \quad h(y) = y^2/2 + C_1$$

A solução geral da equação é dada implicitamente por

$$x^2 + xe^y + y^2/2 = C$$

(c) Substituindo-se $x = 1$ e $y = 1$ na solução acima

$$1 + e + 1/2 = C$$

Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$x^2 + xe^y + y^2/2 = e + 3/2$$

4.10. A equação

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

pode ser escrita na forma

$$f(x) - g(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Para esta equação $M(x, y) = f(x)$ e $N(x, y) = -g(y)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{A equação é exata!}$$

5. Substituições em Equações de 1ª Ordem (página 60)

5.1. (a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y + x}{3x + y}$$

Dividindo numerador e denominador por x obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\frac{y}{x} + 1}{3 + \frac{y}{x}}.$$

Seja $v = \dfrac{y}{x}$. Então $y = vx$ e derivando o produto vx em relação a x obtemos

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v.$$

Substituindo-se este valor de $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{y}{x} = v$ na equação obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{3v + 1}{3 + v}$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v+1}{3+v} - v = -\frac{v^2-1}{3+v}$$

Multiplicando-se por $\dfrac{3+v}{x(v^2-1)}$ esta equação se torna

$$\frac{3+v}{v^2-1}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{3+v}{v^2-1} = \frac{3+v}{(v-1)(v+1)} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+1}$$

Multiplicando-se por $(v-1)(v+1)$ obtemos

$$3+v = A(v+1) + B(v-1)$$

Substituindo-se $v=-1$ e $v=1$ obtemos $B=-1$ e $A=2$. Assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{3+v}{v^2-1}dv &= 2\int \frac{1}{v-1}dv - \int \frac{1}{v+1}dv \\
&= 2\ln|v-1| - \ln|v+1| \\
&= \ln\left|\frac{(v-1)^2}{v+1}\right|
\end{aligned}$$

Logo a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\frac{(v-1)^2}{v+1}\right|\right) = -\frac{1}{x}$$

Integrando-se obtemos

$$\ln\left|\frac{(v-1)^2}{v+1}\right| = -\ln|x| + C_1$$

$$\ln\left|\frac{x(v-1)^2}{v+1}\right| = C_1$$

$$\frac{x(v-1)^2}{v+1} = C$$

Substituindo-se $v = \frac{y}{x}$ obtemos

$$\frac{x(\frac{y}{x} - 1)^2}{\frac{y}{x} + 1} = C$$

Multiplicando-se numerador e denominador por x:

$$(y - x)^2 = C(y + x)$$

(b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + 5y^2}{2xy}$$

Dividindo numerador e denominador por x^2 obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + 5\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}.$$

Seja $v = \frac{y}{x}$. Então $y = vx$ e derivando o produto vx em relação a x obtemos

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v.$$

Substituindo-se este valor de $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{y}{x} = v$ na equação obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{2 + 5v^2}{2v}$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2 + 5v^2}{2v} - v = \frac{3v^2 + 2}{2v}$$

Multiplicando-se por $\frac{3v^2 + 2}{2xv}$ esta equação se torna

$$\frac{2v}{3v^2 + 2}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{2v}{3v^2+2}dv = \frac{1}{3}\ln|3v^2+2| = \ln|3v^2+2|^{1/3}$$

Logo a equação acima pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|3v^2+2|^{1/3}\right) = \frac{1}{x}$$

Integrando-se obtemos

$$\ln|3v^2+2|^{1/3} = \ln|x| + C_1$$

$$\ln\left|\frac{(3v^2+2)^{1/3}}{x}\right| = C_1$$

$$\frac{(3v^2+2)^{1/3}}{x} = C$$

Substituindo-se $v = \dfrac{y}{x}$ obtemos

$$\frac{(3(y/x)^2+2)^{1/3}}{x} = C$$

$$(3y^2+2x^2)^{1/3} = Cx^{5/3}$$

5.2. (a)

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^3}$$

Fazendo a mudança de variáveis $v = y^{-2}$, então

$$\frac{dv}{dx} = (-2)y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

Multiplicando-se a equação acima por y^{-3} obtemos

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^3}$$

Fazendo as substituições $y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$ e $y^{-2} = v$ obtemos

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^3}$$

Multiplicando esta equação por -2 obtemos

$$v' - \frac{4}{x}v = -\frac{2}{x^3}$$

que é uma equação linear e tem solução

$$v(x) = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$$

Assim a solução da equação dada é

$$y^{-2} = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$$

(b)

$$y' + \frac{4}{x}y = -x^5e^xy^2$$

Fazendo a mudança de variáveis $v = y^{-1}$, então

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Multiplicando-se a equação acima por y^{-2} obtemos

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y^{-1} = -x^5e^x$$

Fazendo as substituições $y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}$ e $y^{-1} = v$ obtemos

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{4}{x}v = -x^5e^x$$

Multiplicando esta equação por -1 obtemos

$$v' - \frac{4}{x}v = x^5e^x$$

que é uma equação linear e tem solução

$$v(x) = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4$$

Assim a solução da equação dada é

$$y(x) = \frac{1}{x^5e^x - x^4e^x + Cx^4}$$

(c)

$$y = \frac{2}{x} + u$$

$$y' = -\frac{2}{x} + u'$$

Substituindo-se na equação

$$-\frac{2}{x^2} + u' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}(\frac{2}{x} + u) + (\frac{2}{x} + u)^2$$

$$u' - \frac{3}{x}u = u^2$$

Esta é uma equação de Bernoulli. Fazendo a substituição $v = u^{-1}$ obtemos

$$v' + \frac{3}{x}v = -1$$

Esta equação é linear. O fator integrante é $\mu(x) = x^3$. Multiplicando-se a equação por $\mu(x)$ obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 v\right) = -x^3$$

Integrando-se obtemos

$$x^3 v(x) = -\frac{x^4}{4} + c$$

$$v(x) = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}$$

Substituindo-se $v = u^{-1} = (y - \frac{2}{x})^{-1}$ obtemos que a solução da equação é dada implicitamente por

$$\frac{1}{y - \frac{2}{x}} = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}$$

(d) Substituindo-se $y - x = v$ e $y' = 1 + v'$ na equação $y' = (y - x)^2$ obtemos

$$1 + v' = v^2$$

$$\frac{1}{v^2 - 1}v' = 1$$

$$\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| = 2x + c_1$$

$$\frac{v-1}{v+1} = ce^{2x}$$

$$\frac{y-x-1}{y-x+1} = ce^{2x}$$

(e) Substituindo-se $vy = v$ e $y + xy' = v'$ na equação $xy' = e^{-xy} - y$ obtemos

$$v' = e^{-v}$$

$$e^{v}v' = 1$$

$$e^{v} = x + c$$

$$e^{xy} = x + c$$

(f) Substituindo-se $x + e^{y} = v$ e $1 + e^{y}y' = v'$ na equação obtemos

$$v' = xv$$

$$\frac{1}{v} = v' = x$$

$$\ln|v| = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$v = ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$x + e^{y} = ce^{\frac{x^2}{2}}$$

6. Aplicações (página 120)

6.1. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 2te^{-\frac{1}{100}t} - \dfrac{Q}{100}. \\ Q(0) = 100 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{100} = 2te^{-\frac{1}{100}t}.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{100} dt} = e^{\frac{1}{100} t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{\frac{1}{100} t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{100} t} Q) = 2t$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{100} t} Q(t) = t^2 + C$$

ou

$$Q(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100} t} + C e^{-\frac{1}{100} t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 100$, obtemos

$$100 = C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = t^2 e^{-\frac{1}{100} t} + 100 e^{-\frac{1}{100} t}.$$

(b) A concentração em $t = 10$ min é dada por

$$c(10) = \frac{Q(10)}{100} = (\frac{10^2}{100} + 1) e^{-\frac{1}{100} 10} = 2e^{-\frac{1}{10}} \text{ gramas/litro}$$

6.2. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 300 e^{-\frac{2}{10} t} - 10 \dfrac{Q}{100}. \\ Q(0) = 0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10} = 300 e^{-\frac{2}{10} t}.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{10} dt} = e^{\frac{1}{10} t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{\frac{1}{10}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{10}t}Q) = 300e^{\frac{1}{10}t}e^{-\frac{2}{10}t} = 300e^{-\frac{1}{10}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{10}t}Q(t) = -3000e^{-\frac{1}{10}t} + C$$

ou

$$Q(t) = -3000e^{-\frac{2}{10}t} + Ce^{-\frac{1}{10}t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 0$, obtemos

$$0 = -3000 + C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 3000(e^{-\frac{1}{10}t} - e^{-\frac{2}{10}t}).$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100} = 30(e^{-\frac{1}{10}t} - e^{-\frac{2}{10}t})$$

Se $x = e^{-\frac{1}{10}t}$. Então $c(t) = 7{,}5$ se, e somente se, $x - x^2 = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$ ou $x = 1/2$ ou $\frac{1}{10}t = \ln 2$ ou $t = 10\ln 2$ min.

6.3. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 20 - \dfrac{Q}{25}. \\ Q(0) = 100 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{25} = 20.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{25}dt} = e^{\frac{1}{25}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{\frac{1}{25}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{25}t}Q) = 20e^{\frac{1}{25}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{\frac{1}{25}t}Q(t) = 500e^{\frac{1}{25}t} + C$$

ou

$$Q(t) = 500 + Ce^{-\frac{1}{25}t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 100$, obtemos

$$100 = 500 + C$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 500 - 400e^{-\frac{1}{25}t}.$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{Q(t)}{100} = 5 - 4e^{-\frac{1}{25}t} \text{ gramas por litro}$$

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = 5 \text{ gramas por litro}$$

$c(t) = \frac{5}{2}$ se, e somente se, $Q(t) = 250 = 500 - 400e^{-\frac{1}{25}t}$ ou

$$e^{-\frac{1}{25}t} = \frac{250}{400} = \frac{5}{8}$$

ou

$$-\frac{1}{25}\,t = \ln\frac{5}{8}$$

ou

$$t = 25\ln\frac{8}{5} \quad \text{min.}$$

6.4. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = 3 - 2\dfrac{Q}{100+t}. \\ Q(0) = 10 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dQ}{dt} + 2\frac{Q}{100+t} = 3.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{100+t}dt} = e^{2\ln|100+t|} = (100+t)^2$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = (100+t)^2$ obtemos

$$\frac{d}{dt}((100+t)^2 Q) = 3(100+t)^2$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$(100+t)^2 Q(t) = (100+t)^3 + C$$

ou

$$Q(t) = 100 + t + C(100+t)^{-2}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 10$, obtemos

$$10 = 100 + C10^{-4} \quad \Rightarrow \quad C = -9\ 10^5$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 100 + t - 9\ 10^5(100+t)^{-2} \quad \text{gramas.}$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100+t} = 1 - 9\ 10^5(100+t)^{-3}$$

O tanque estará cheio para $t = 100$.

$$\lim_{t\to 100} c(t) = 1 - \frac{9}{80} = \frac{71}{80} \quad \text{gramas/litro}$$

6.5. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -2\dfrac{Q}{100-t}. \\ Q(0) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável e pode ser reescrita como

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = -\frac{2}{100-t}.$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}(\ln|Q|) = -\frac{2}{100-t}$$

Integrando-se obtemos

$$\ln|Q(t)| = 2\ln|100-t| + C_1$$

ou

$$Q(t) = C(100-t)^2$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 10$, obtemos

$$10 = C10^4 \quad \Rightarrow \quad C = 10^{-3}$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 10^{-3}(100-t)^2 \quad \text{gramas.}$$

(b) A concentração de sal no tanque é dada por

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100-t} = 10^{-3}(100-t)$$

O tanque estará vazio para $t = 100$.

$$\lim_{t\to 100} c(t) = 0 \quad \text{grama/litro.}$$

6.6. (a)

$$m\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -kx$$

$$\frac{d}{dx}\left(mv^2/2\right) = -kx$$

$$mv^2/2 = -kx^2/2 + C$$

$$mv^2/2 + kx^2/2 = C$$

Substituindo-se $x = R$, $v = 0$:

$$kR^2/2 = C$$

$$mv^2/2 = kR^2/2 - kx^2/2$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{k(R^2-x^2)}{m}}$$

(b) Substituindo-se $x = 0$:

$$v(0) = \sqrt{\frac{kR^2}{m}}$$

Substituindo-se $x = -R$:

$$v(-R) = 0.$$

6.7.

$$\frac{dV}{dt} = kA = k4\pi r^2$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{dr}{dt} = k$$

$$r(t) = kt + C$$

Substituindo $t = 0$ e $r = r_0$:

$$r_0 = C$$

Substituindo $t = 1$ e $r = r_0/2$:

$$r_0/2 = k + r_0$$

$$k = -r_0/2$$

$$r(t) = r_0(1 - t/2)$$

6.8.

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$48 = y(1) = y_0 e^{k}$$

$$27 = y(3) = y_0 e^{3k}$$

$$\frac{48}{27} = e^{-2k}$$

$$k = -\frac{1}{2}\ln\frac{48}{27} = -\frac{1}{2}\ln\frac{16}{9} = \ln\frac{3}{4}$$

$$y_0 = 48e^{-k} = 48\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}} = 48\frac{4}{3} = 64$$

6.9.
$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

$$400 = y_0 e^{3k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(400/y_0)}{3}$$

$$2500 = y_0 e^{9k} \quad \Rightarrow \quad 2500 = y_0 \left(\frac{400}{y_0}\right)^3$$

$$y_0^{-2} = \frac{2500}{400^3}$$

$$y_0 = \left(\frac{400^3}{2500}\right)^{1/2} = \frac{20^3}{50} = 160$$

6.10.
$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$y(t) = 35000 e^{kt}$$

$30000 = 35000 e^{k} \quad \Rightarrow \quad k = \ln(30000/35000) = \ln(6/7)$

$y(2) = 35000 e^{2k} = 35000 \left(\frac{6}{7}\right)^2 = 5000\frac{36}{7} = \frac{180000}{7} \approx \text{R\$ } 25714,00$

6.11. A população cresce a uma taxa proporcional a população presente o que significa que a população, $y(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que como vimos acima tem solução

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Como em uma hora a população é o dobro da população original, então substituindo-se $t = 1$ e $y = 2y_0$ obtemos

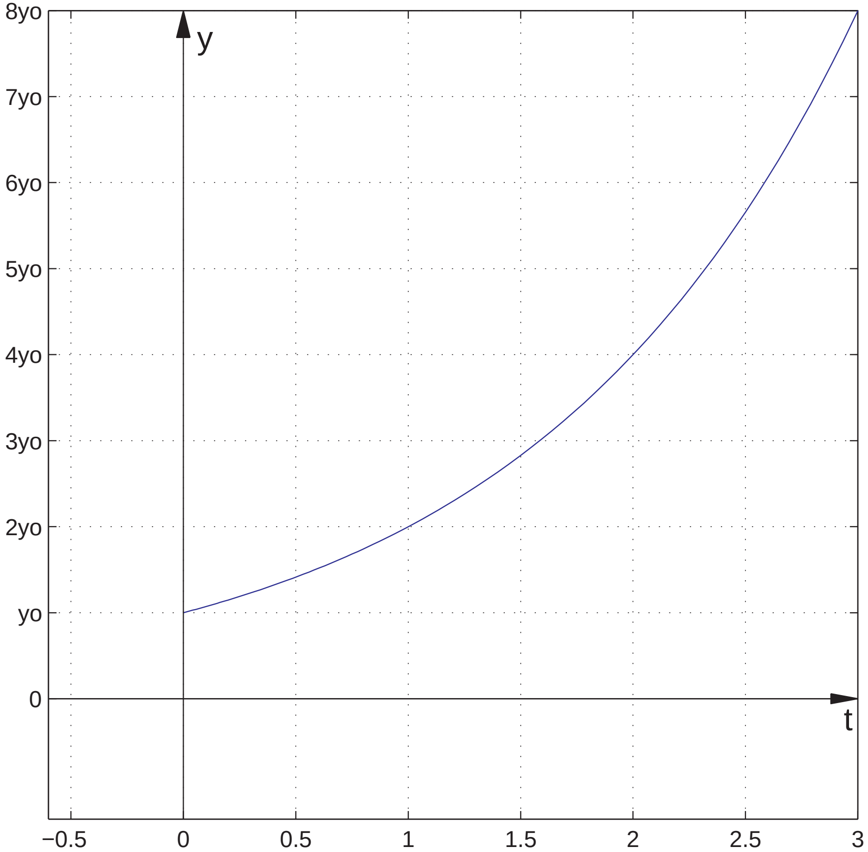
$$2y_0 = y_0 e^k \quad \Rightarrow \quad k = \ln 2$$

Assim, a equação que descreve como a população de bactérias varia com o tempo é

$$y(t) = y_0 e^{(\ln 2)t} = y_0 \cdot 2^t$$

Agora para sabermos em quanto tempo a população triplica substituímos $y = 3y_0$ e determinamos t que é

$$t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585 \text{ horas} \approx 1 \text{ hora e } 35 \text{ minutos.}$$


8yo
7yo
6yo
5yo
4yo
3yo
2yo
yo
0
y
t
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

6.12. O número de pessoas infectadas como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = ky(100-y). \\ y(0) = 1, \; y(4) = 5 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{y(100-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{y(100-y)}\frac{dy}{dt} = k \tag{1.69}$$

Vamos decompor $\frac{1}{y(100-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{y(100-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{100-y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $y(100-y)$ obtemos

$$1 = A(100-y) + By$$

Substituindo-se $y = 0$ e $y = 100$ obtemos $A = 1/100$ e $B = 1/100$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(100-y)}dy &= \frac{1}{100}\left(\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{100-y}dy\right) \\ &= \frac{1}{100}\left(\ln|y| - \ln|100-y|\right) \end{aligned}$$

Logo a equação (1.69) pode ser escrita como

$$\frac{1}{100}\left(\frac{d}{dy}\left(\ln|y| - \ln|100-y|\right)\right)\frac{dy}{dt} = k$$

ou ainda como

$$\frac{d}{dt}\left(\ln|y| - \ln|100-y|\right) = k100$$

que tem solução

$$\ln|y| - \ln|100-y| = k100t + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{y}{100-y}\right| = C_1 + k100t.$$

Aplicando a exponencial a ambos os membros obtemos

$$\frac{y}{100-y} = \pm e^{C_1}e^{100kt} = Ce^{100kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 1$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{100-1} = \frac{1}{99}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$y = (100-y)Ce^{100kt} \quad \Rightarrow \quad y + Ce^{100kt}y = 100Ce^{100kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

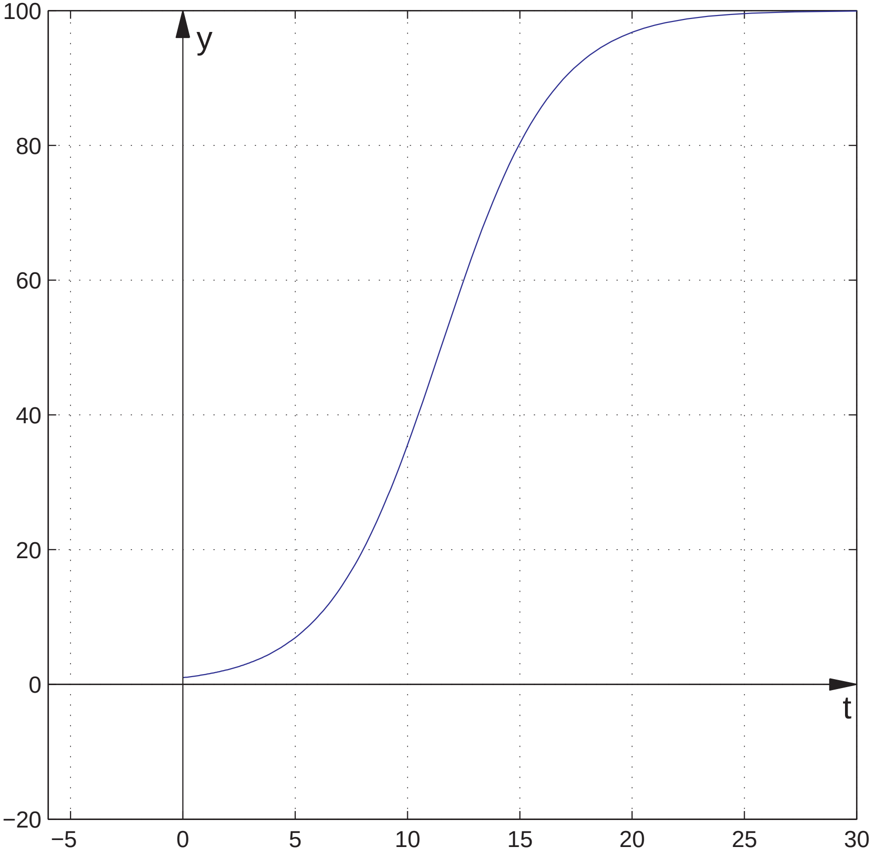
$$y(t) = \frac{C100e^{100kt}}{1+Ce^{100kt}} = \frac{\frac{100}{99}e^{100kt}}{1+\frac{1}{99}e^{100kt}} = \frac{100e^{100kt}}{99+e^{100kt}} = \frac{100}{99e^{-100kt}+1}$$

Substituindo-se $t = 4$ e $y = 5$ obtemos

$$5 = \frac{100}{99e^{-400k}+1} \quad \Rightarrow \quad e^{-400k} = \frac{19}{99} \quad \Rightarrow \quad -100k = \frac{\ln\frac{19}{99}}{4}$$

Logo

$$y(t) = \frac{100}{99e^{\frac{\ln\frac{19}{99}}{4}t}+1} = \frac{100}{99\cdot\left(\frac{19}{99}\right)^{t/4}+1}$$


100
80
60
40
20
0
−20
−5
0
5
10
15
20
25
30
y
t

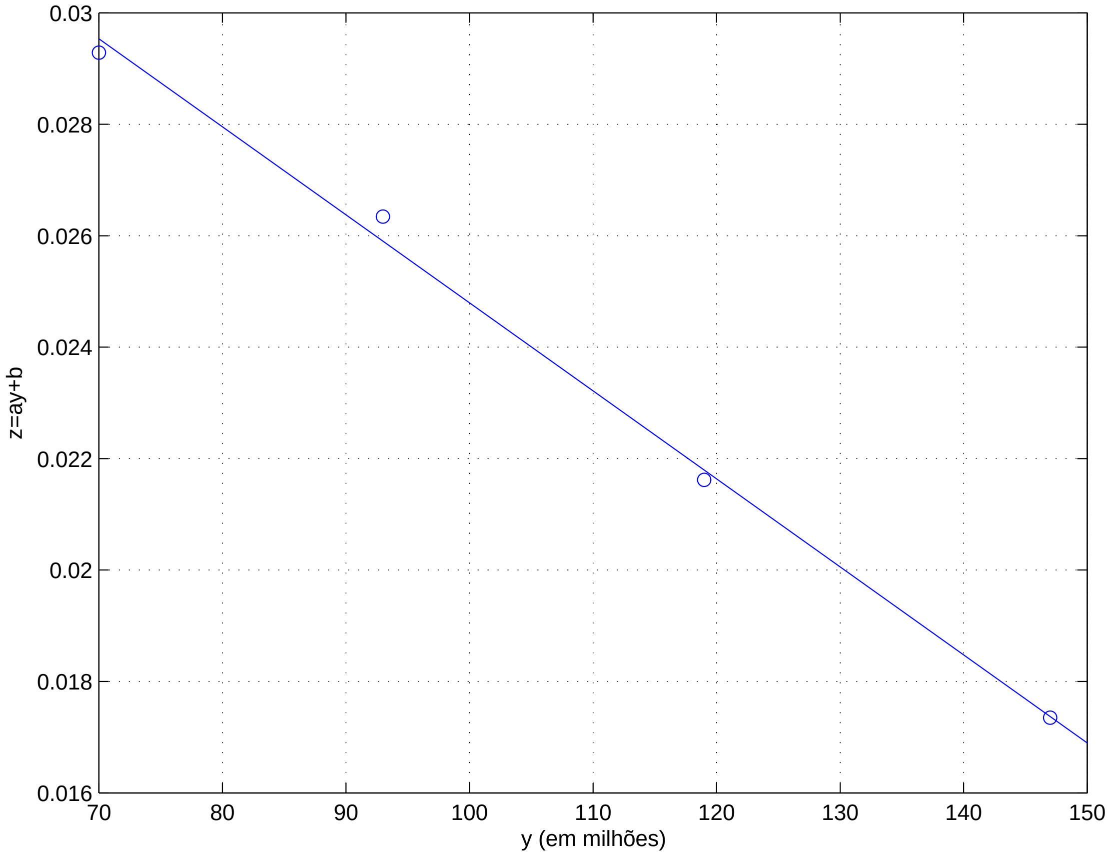
6.13.

t_i	y_i	g_i	h_i	$\frac{g_i+h_i}{2}$
1950	52 milhões	$0,0346$	-	
1960	70 milhões	$0,0329$	$0,0257$	$0,0293$
1970	93 milhões	$0,0280$	$0,0247$	$0,0263$
1980	119 milhões	$0,0214$	$0,0218$	$0,0216$
1991	147 milhões	$0,0174$	$0,0173$	$0,0174$
2000	170 milhões	-	$0,0150$	

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}(t_i) = ay(t_i) + b \approx \frac{g_i + h_i}{2},$$

para $t_i = 1960, 1970, 1980, 1991$. Usando quadrados mínimos vamos encontrar a melhor reta que se ajusta ao conjunto de pontos

y_i	$\frac{g_i+h_i}{2}$
70 milhões	0.0293
93 milhões	0.0263
119 milhões	0.0216
147 milhões	0.0174



encontrando $a = -1,58 \cdot 10^{-10}$, $b = 0,04$. Assim obtemos $k = 1,58 \cdot 10^{-10}$ e $y_M = 257$ milhões.

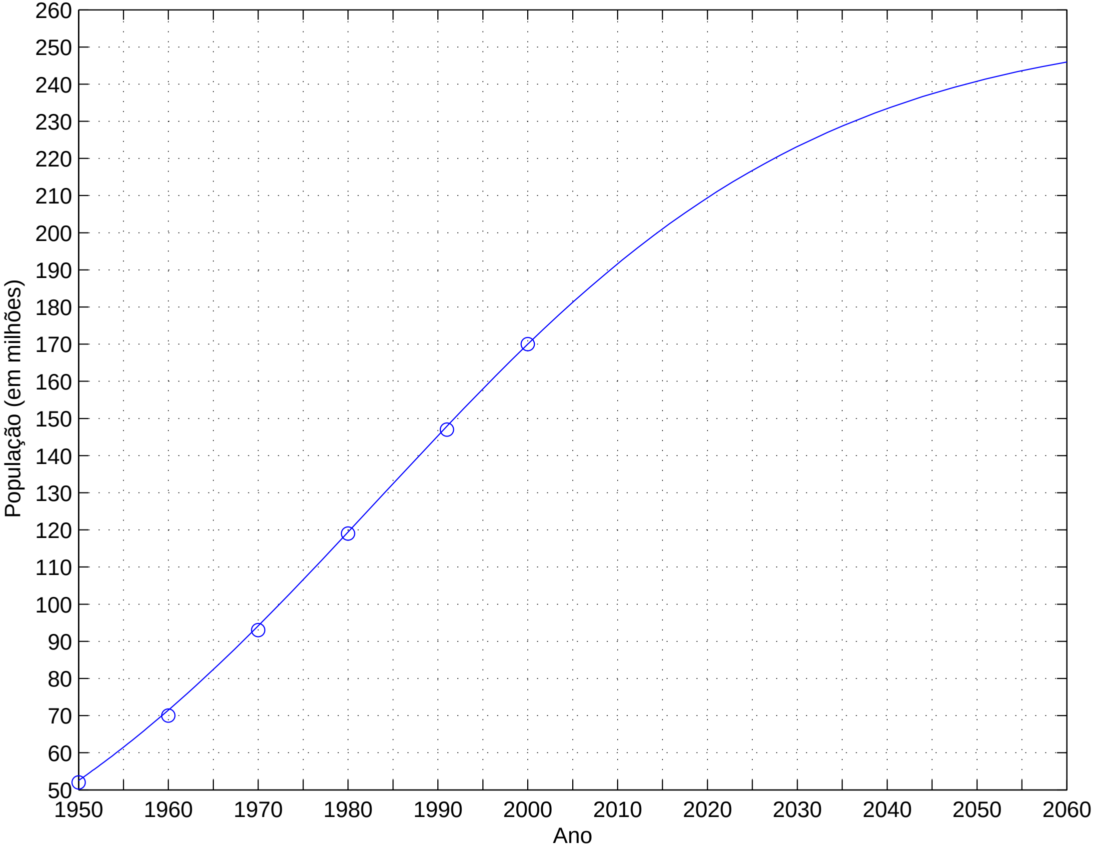
Usando $t_0 = 2000$, $y_0 = 170$ milhões obtemos

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,51 \cdot e^{-0,04(t-2000)}}$$

Para $t = 2008$ temos

$$y(2008) = 187 \text{ milhões de habitantes.}$$

Uma diferença de $1,5$ %.



260
250
240
230
220
210
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
População (em milhões)
1950
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
2030
2040
2050
2060
Ano

6.14.

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = k\dfrac{\sqrt{h}}{\frac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

Como para o cone

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{hR}{H}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 h^3$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 h^2$$

então o problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = kh^{-3/2} \\ h(0) = 2,\ h(30) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a equação por $h^{3/2}$

$$h^{3/2}\frac{dh}{dt} = k$$

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{2}{5}h^{5/2}\right)\frac{dh}{dt} = k$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}h^{5/2}\right) = k$$

Integrando-se ambos os lados

$$\frac{2}{5}h^{5/2} = kt + C$$

ou

$$h(t) = (C' + k't)^{2/5}$$

Substituindo $t = 0$ e $h = 2$:

$$2^{5/2} = C'$$

Substituindo $t = 30$ e $h = 1$:

$$C' + 30k' = 1 \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{1 - C'}{30} = \frac{1 - 2^{5/2}}{30}$$

Assim a função que descreve como a altura varia com o tempo é dada por

$$h(t) = (C' + k't)^{2/5} = (2^{5/2} + \frac{1 - 2^{5/2}}{30} t)^{2/5}$$

Substituindo $h = 0$:

$$t = -\frac{C'}{k'} = -\frac{30 \cdot 2^{5/2}}{1 - 2^{5/2}} \approx 36\,\text{min}$$

6.15. (a) A temperatura registrada no termômetro, $T(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - 5). \\ T(0) = 20 \end{cases}$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5)$$

$$\frac{1}{T - 5} \frac{dT}{dt} = k$$

$$\frac{d}{dt}(\ln |T - 5|) = k$$

$$\ln |T - 5| = kt$$

$$\ln |T - 5| = C_1 + kt$$

$$T(t) = 5 + Ce^{kt}$$

Substituindo $t = 0$ e $T = 20$:

$$20 = 5 + C \quad \Rightarrow \quad C = 15$$

$$T(t) = 5 + 15e^{kt}$$

Substituindo $t = 1/2$ e $T = 15$:

$$15 = 5 + 15e^{k/2} \quad \Rightarrow \quad k = 2\ln(2/3)$$

Assim a temperatura do café em função do tempo é dada por

$$T(t) = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t} = 5 + 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}$$

(b) Após 1 minuto o termômetro deve marcar

$$T(1) = 5 + 15\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{105}{9} \approx 11{,}7^\circ\,\mathrm{C}$$

(c) Substituindo $T = 10$ em $T(t) = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t}$:

$$10 = 5 + 15e^{2\ln(2/3)t}$$

Logo o tempo necessário para que o termômetro marque 10° é de

$$t = \frac{\ln(1/3)}{2\ln(2/3)} \approx 1\,\text{min e } 20\,\text{segundos}$$

6.16. (a)

$$120\frac{dv}{dt} = 10 - 2v$$

$$\frac{120}{10-2v}\frac{dv}{dt} = 1$$

$$\frac{d}{dt}\left(-60\ln|10-2v|\right) = 1$$

$$60\ln|10-2v| = -t + C_1$$

$$\ln|10-2v| = \frac{C_1 - t}{60}$$

$$v(t) = 5 - Ce^{-\frac{t}{60}}$$

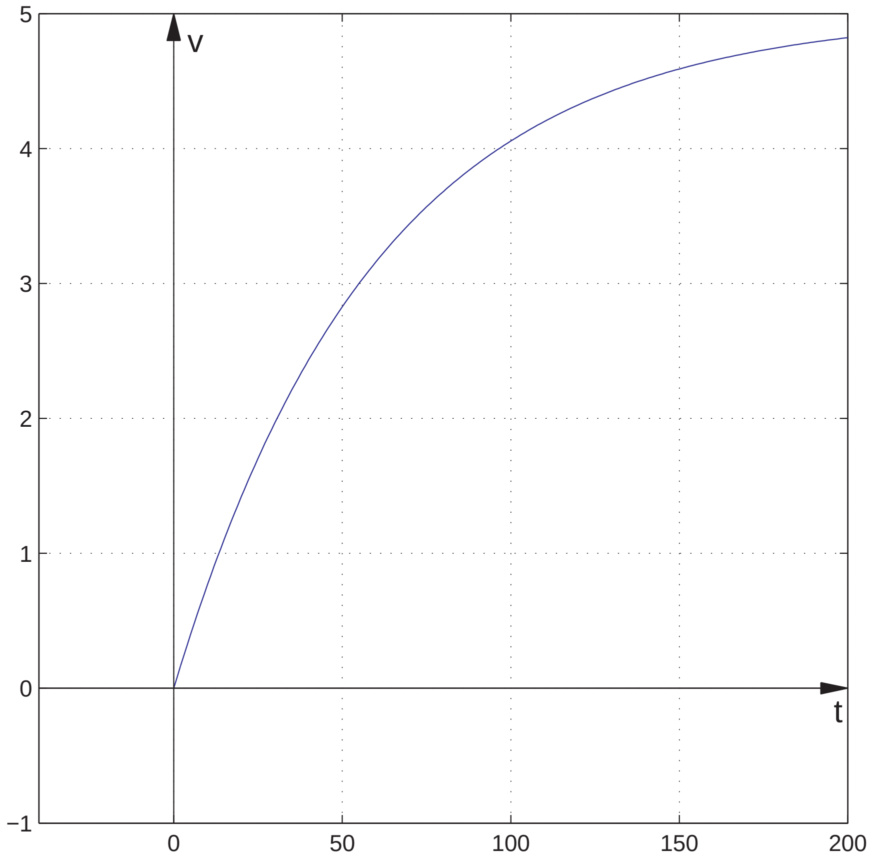
Substituindo-se $t = 0$ e $v = 0$:

$$0 = 5 - C \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$v(t) = 5 - 5e^{-\frac{t}{60}}$$

(b)

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left(5 - 5e^{-\frac{t}{60}}\right) = 5\ \mathrm{m/s}$$



6.17. (a)

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{100}S + d. \\ S(0) = 0 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dS}{dt} - \frac{1}{100}S = d.$$

Para resolvê-la precisamos determinar o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{100}dt} = e^{-\frac{1}{100}t}$$

Multiplicando-se a equação diferencial por $\mu(t) = e^{-\frac{1}{100}t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-\frac{1}{100}t}S) = de^{-\frac{1}{100}t}$$

Integrando-se ambos os membros obtemos

$$e^{-\frac{1}{100}t}S(t) = -100de^{-\frac{1}{100}t} + C$$

ou

$$S(t) = Ce^{\frac{1}{100}t} - 100d$$

Substituindo-se $t = 0$ e $S = 0$, obtemos

$$0 = Ce^{\frac{1}{100}0} - 100d \quad \Rightarrow \quad C = 100d$$

Ou seja, a solução do problema de valor inicial é

$$S(t) = 100d(e^{\frac{1}{100}t} - 1).$$

Substituindo-se $d = 100$, $t = 20 \cdot 12 = 240$ obtemos

$$S(240) = 10000(e^{2,4} - 1) \approx \text{R\$}\,100231,00$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{100}S - d. \\ S(0) = 100231 \end{cases}$$

A solução da equação é obtida da anterior trocando-se d por $-d$.

$$S(t) = Ce^{\frac{1}{100}t} + 100d$$

Substituindo-se $t = 0$ e $S = 100231$ obtemos

$$100231 = C + 100d \quad \Rightarrow \quad C = 100231 - 100d$$

Assim

$$S(t) = (100231 - 100d)e^{\frac{1}{100}t} + 100d$$

Substituindo-se $t = 20 \cdot 12 = 240$ e $S = 0$ obtemos

$$0 = (100231 - 100d)e^{2,4} + 100d$$

$$d = \frac{100231e^{2,4}}{100(e^{2,4} - 1)} \approx \text{R\$}\,1102,00$$

6.18.

$$200\frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 10.$$

$$\frac{dQ}{dt} + 50Q = 5 \cdot 10^{-2}.$$

A equação é linear. Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{50t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{50t}Q\right) = 5 \cdot 10^{-2}e^{50t}$$

integrando-se obtemos

$$e^{50t}Q(t) = 10^{-3}e^{50t} + k$$

ou

$$Q(t) = 10^{-3} + ke^{-50t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $Q = 0$ obtemos $k = -10^{-3}$ e assim a solução do problema de valor inicial é

$$Q(t) = 10^{-3}\left(1 - e^{-50t}\right) \text{ coulombs.}$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 5 \cdot 10^{-2}e^{-50t} \text{ amperes}$$

6.19. Para este circuito a segunda lei de Kirchhoff nos dá

$$R\,I + L\frac{dI}{dt} = V(t).$$

Ou seja,

$$5 \cdot 10^{-1}\frac{dI}{dt} + 10^2 I = 10.$$

$$\frac{dI}{dt} + 200I = 20.$$

A equação é linear. Multiplicando-se a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{200t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{200t} I\right) = 20e^{200t}$$

integrando-se obtemos

$$e^{200t} I(t) = 10^{-1}e^{200t} + k$$

ou

$$I(t) = 10^{-1} + ke^{-200t}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $I = 0$ obtemos $k = -10^{-1}$ e assim a solução do problema de valor inicial é

$$I(t) = 10^{-1}\left(1 - e^{-200t}\right) \text{ amperes.}$$

6.20. (a) Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ as quantidades de A e B não transformadas, respectivamente e $y(t)$ a quantidade de C obtida. Então

$$\frac{dy}{dt} \propto \alpha(t)\beta(t). \tag{1.70}$$

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ a quantidade de A e B transformadas. Então

$$a(t) + b(t) = y(t), \quad a(t) = 4b(t).$$

De onde segue-se que

$$a(t) = \frac{4}{5}y(t), \quad b(t) = \frac{1}{5}y(t). \tag{1.71}$$

Mas as quantidades de A e B não transformadas e transformadas estão relacionadas por

$$\alpha(t) = 32 - a(t), \quad \beta(t) = 50 - b(t). \tag{1.72}$$

Substituindo-se (1.71) em (1.72) e (1.72) em (1.70) obtemos

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(32 - \frac{4}{5}y\right)\left(50 - \frac{1}{5}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (40 - y)\,(250 - y)\,.$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(40 - y)(250 - y) \\ y(0) = 0, \quad y(10) = 30 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(40-y)(250-y)}$ obtemos

$$\frac{1}{(40 - y)(250 - y)}y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(40 - y)(250 - y)}y'dt = \int kdt + C_1$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(40 - y)(250 - y)}dy = \int kdt + C_1.$$

Vamos decompor $\frac{1}{(40-y)(250-y)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{(40 - y)(250 - y)} = \frac{A}{40 - y} + \frac{B}{250 - y}$$

Multiplicando-se a equação acima por $(40 - y)(250 - y)$ obtemos

$$1 = A(250 - y) + B(40 - y)$$

Substituindo-se $y = 40$ e $y = 250$ obtemos $A = 1/210$ e $B = -1/210$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(40-y)(250-y)}dy &= \frac{1}{210}\left(\int \frac{1}{40-y}dy - \int \frac{1}{250-y}dy\right)\\ &= -\frac{1}{210}\left(\ln|40-y| - \ln|250-y|\right)\end{aligned}$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\ln|40-y| - \ln|250-y| = -210kt + C_1.$$

Usando propriedades do logaritmo podemos reescrever como

$$\ln\left|\frac{40-y}{250-y}\right| = C_1 - 210kt.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos

$$\frac{40-y}{250-y} = \pm e^{C_1}e^{-210kt} = Ce^{-210kt}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{4}{25}.$$

Substituindo-se $t = 10$ e $y = 30$ na equação acima obtemos

$$\frac{25}{88} = e^{-2100k}$$

ou

$$210k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{88}{25}\right).$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$40 - y = (250-y)Ce^{-210kt} \quad \Rightarrow \quad y - Ce^{-210kt}y = 40 - 250Ce^{-210kt}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{40 - 250Ce^{-210kt}}{1 - Ce^{-210kt}}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = \frac{1000(1 - e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{88}{25}\right)t})}{25 - 4e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{88}{25}\right)t}} = \frac{1000(1 - \left(\frac{88}{25}\right)^{-t/10})}{25 - 4\left(\frac{88}{25}\right)^{-t/10}}$$

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 40 \text{ gramas}$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty}(32 - \frac{4}{5}y(t)) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty}(50 - \frac{1}{5}y(t)) = 42 \text{ gramas}$$

Portanto a quantidade inicial de A será toda consumida na reação, entretanto sobrará ainda 42 gramas de B.

(b) Temos então

$$\frac{dy}{dt} \propto \left(32 - \frac{4}{5}y\right)\left(8 - \frac{1}{5}y\right),$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dt} \propto (40 - y)^2.$$

Neste caso a quantidade da substância C como função do tempo, $y(t)$, é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = k(40 - y)^2 \\ y(0) = 0,\ y(10) = 10 \end{cases}$$

A equação é separável. Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{(40-y)^2}$ obtemos

$$\frac{1}{(40 - y)^2}y' = k$$

Integrando-se em relação a t obtemos

$$\int \frac{1}{(40 - y)^2}y'dt = \int kdt + C$$

fazendo-se a substituição $y'dt = dy$ obtemos

$$\int \frac{1}{(40-y)^2} dy = \int k dt + C.$$

Logo a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$\frac{1}{40-y} = kt + C.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 0$ na equação acima obtemos

$$C = \frac{1}{40}.$$

Substituindo-se $C = \frac{1}{40}$, $t = 10$ e $y = 10$ na equação acima obtemos

$$k = \frac{1}{300} - \frac{1}{400} = \frac{1}{1200}.$$

Vamos explicitar $y(t)$.

$$40 - y = \frac{1}{kt + C}$$

Portanto a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 40 - \frac{1}{kt + C}$$

Substituindo-se os valores de C e k obtidos:

$$y(t) = 40 - \frac{1200}{t + 30}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 40,$$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} (32 - \frac{4}{5} y(t)) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \lim_{t\to\infty} (8 - \frac{1}{5} y(t)) = 0.$$

6.21. (a) A equação do raio incidente é

$$y = \tan(2\alpha - \frac{\pi}{2})x$$

Como $\tan\alpha = y'$, então
$\tan(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cot(2\alpha) = -\frac{1}{\tan(2\alpha)} = \frac{y'^2-1}{2y'}$.
Daí segue-se que a equação do raio incidente é

$$y = \frac{y'^2 - 1}{2y'}x$$

(b) A equação anterior pode ser reescrita como

$$xy'^2 - 2yy' - x = 0$$

que é uma equação do segundo grau em y' resolvendo-a obtemos

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}$$

(c) Fazendo $y = vx$ temos que $y' = v + xv'$ e as equações se transformam em

$$v + xv' = v \pm \sqrt{v^2+1}$$

$$xv' = \pm\sqrt{v^2+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}\frac{dv}{dx} = \pm\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsenh} v) = \pm\frac{1}{x}$$

$$\pm\operatorname{arcsenh} v = \ln x + \tilde{c}$$

$$\pm v = \operatorname{senh}(\ln x + \tilde{c})$$

Substituindo-se $v = y/x$:

$$\pm\frac{y}{x} = \operatorname{senh}(\ln x + \tilde{c})$$

$$\pm\frac{y}{x} = \frac{e^{\ln x + \tilde{c}} - e^{-(\ln x + \tilde{c})}}{2} = \frac{cx - (cx)^{-1}}{2}$$

$$\pm y = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c}$$

que são parábolas.

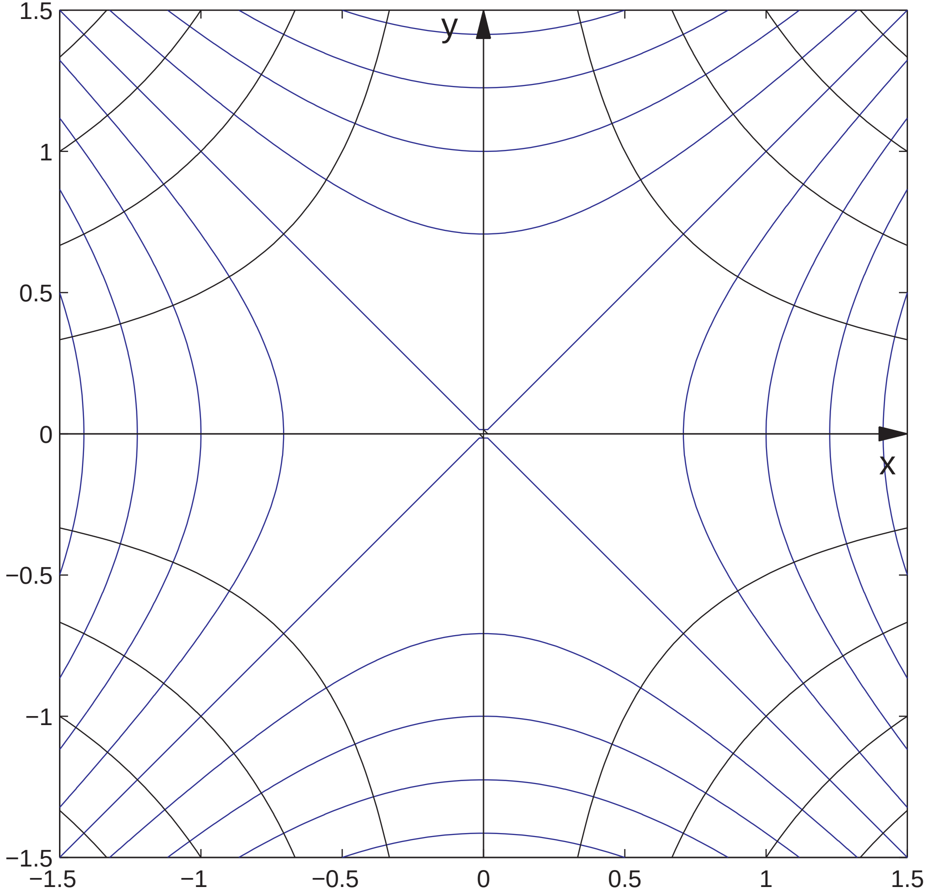
6.22. (a) Da equação das hipérboles obtemos que $c = xy$. Derivando a equação da família dada obtemos a equação diferencial para as hipérboles dadas é

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

Portanto a equação diferencial para as trajetórias ortogonais é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c$$



1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
y
x

(b) Da equação da família dada temos que $c = \frac{x^2-y^2}{2y}$. Derivando a equação da família dada obtemos

$$2x + 2(y-c)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

Assim a equação diferencial para a família de curvas dadas é

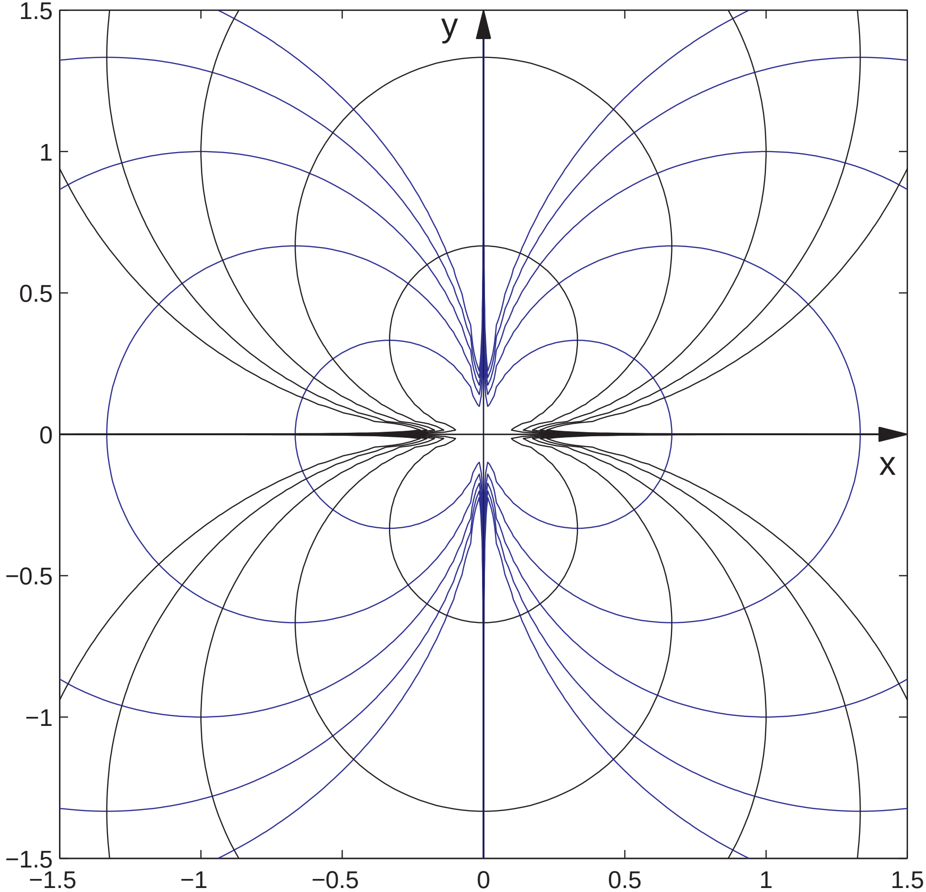
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

E para a família de trajetórias ortogonais

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2-y^2}{2xy}$$

cuja solução é

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2$$


y
x
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

7. Análise Qualitativa de Equações Autônomas (página 143)

7.1. (a) Os pontos de equilíbrio são $y_1 = 0$ e $y_2 = 1$.

$y_1 = 0$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_1 = 0$ temos

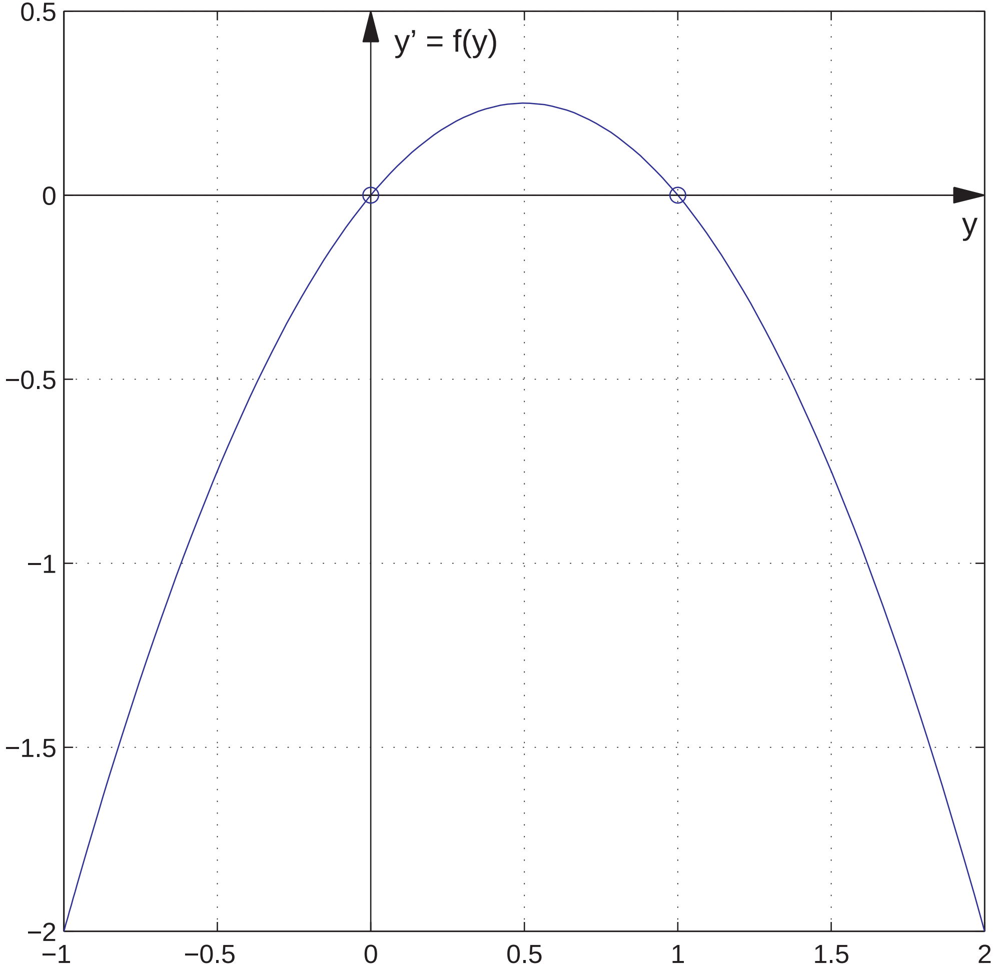
- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y < y_1 = 0$
- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y > y_1 = 0$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_1 = 0$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_1 = 0$, quando t cresce.

$y_2 = 1$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_2 = 1$ temos

- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y < y_2 = 1$
- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y > y_2 = 1$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_2 = 1$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_2 = 1$, quando t cresce.


y' = f(y)
y
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

(b) Como $\frac{dy}{dt} = y - y^2 > 0$, para $0 < y < 1$, então as soluções são crescentes para $0 < y < 1$. Como $\frac{dy}{dt} = y - y^2 < 0$, para $y < 0$ e para $y > 1$, então as soluções são decrescentes para $y < 0$ e para $y > 1$.

(c)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y - y^2).$$

Mas pela regra da cadeia

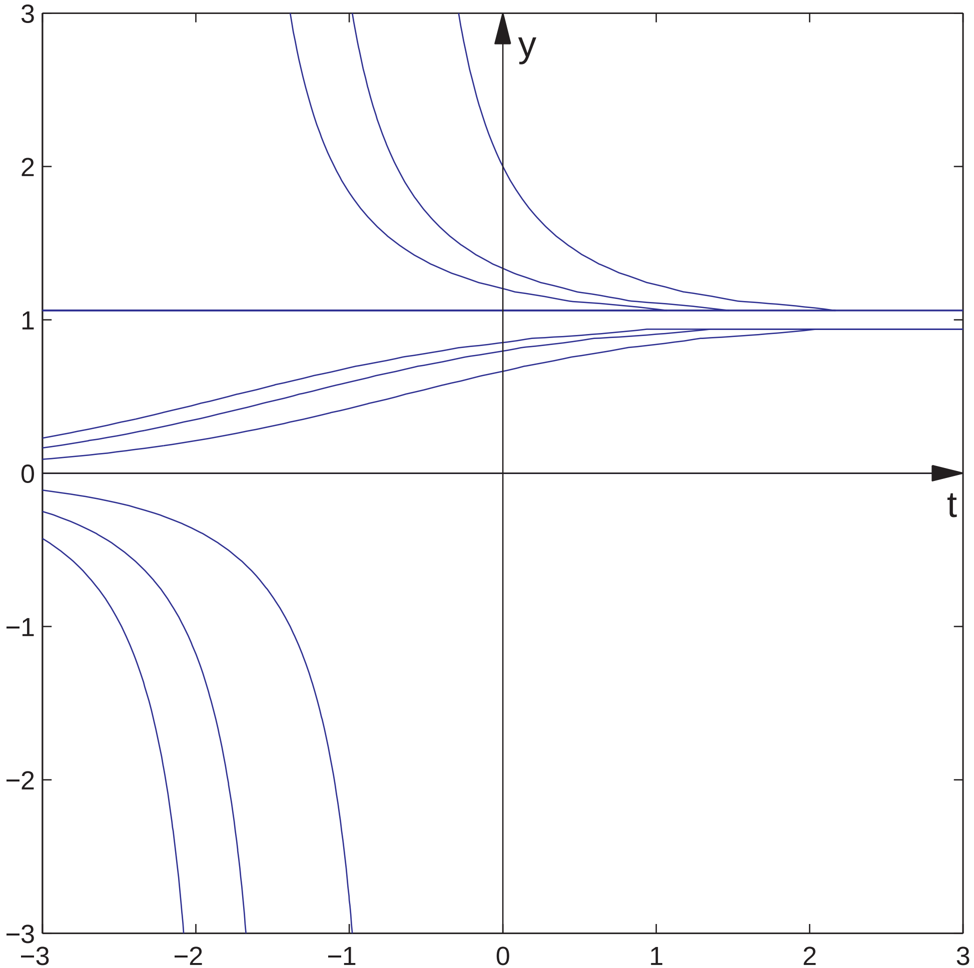
$$\frac{d}{dt}(y - y^2) = (1 - 2y)\frac{dy}{dt} = (1 - 2y)(y - y^2).$$

Assim

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (1 - 2y)(y - y^2).$$

Logo as soluções têm pontos de inflexão para $y = 1/2$, $y = 0$ e $y = 1$.

(d)


3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3
y
t

7.2. (a) Os pontos de equilíbrio são $y_1 = -1$ e $y_2 = 1$.

$y_1 = -1$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_1 = -1$ temos

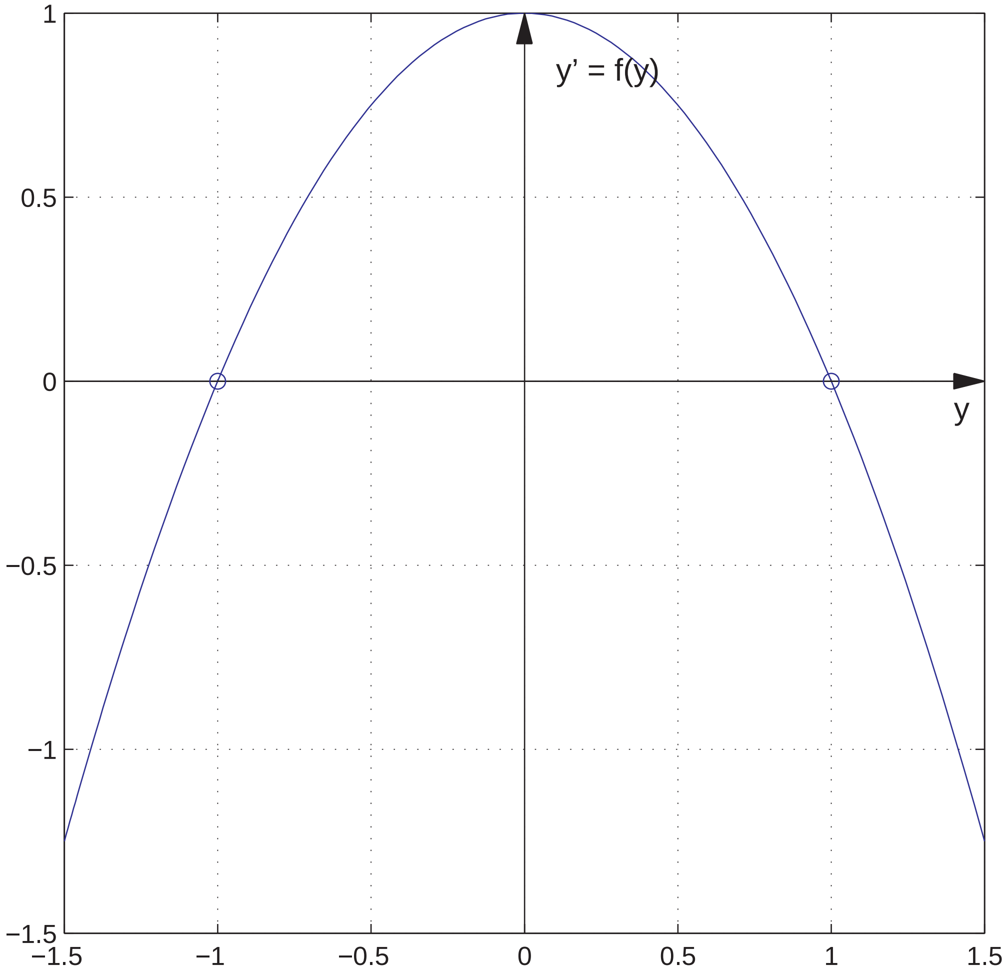
- $\frac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y < y_1 = -1$
- $\frac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y > y_1 = -1$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_1 = -1$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_1 = -1$, quando t cresce.

$y_2 = 1$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_2 = 1$ temos

- $\frac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y < y_2 = 1$
- $\frac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y > y_2 = 1$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_2 = 1$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_2 = 1$, quando t cresce.



y' = f(y)
y
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

(b) Como $\frac{dy}{dt} = 1 - y^2 > 0$, para $-1 < y < 1$, então as soluções são crescentes para $-1 < y < 1$. Como $\frac{dy}{dt} = 1 - y^2 < 0$, para $y < -1$ e para $y > 1$, então as soluções são decrescentes para $y < -1$ e para $y > 1$.

(c)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(1 - y^2).$$

Mas pela regra da cadeia

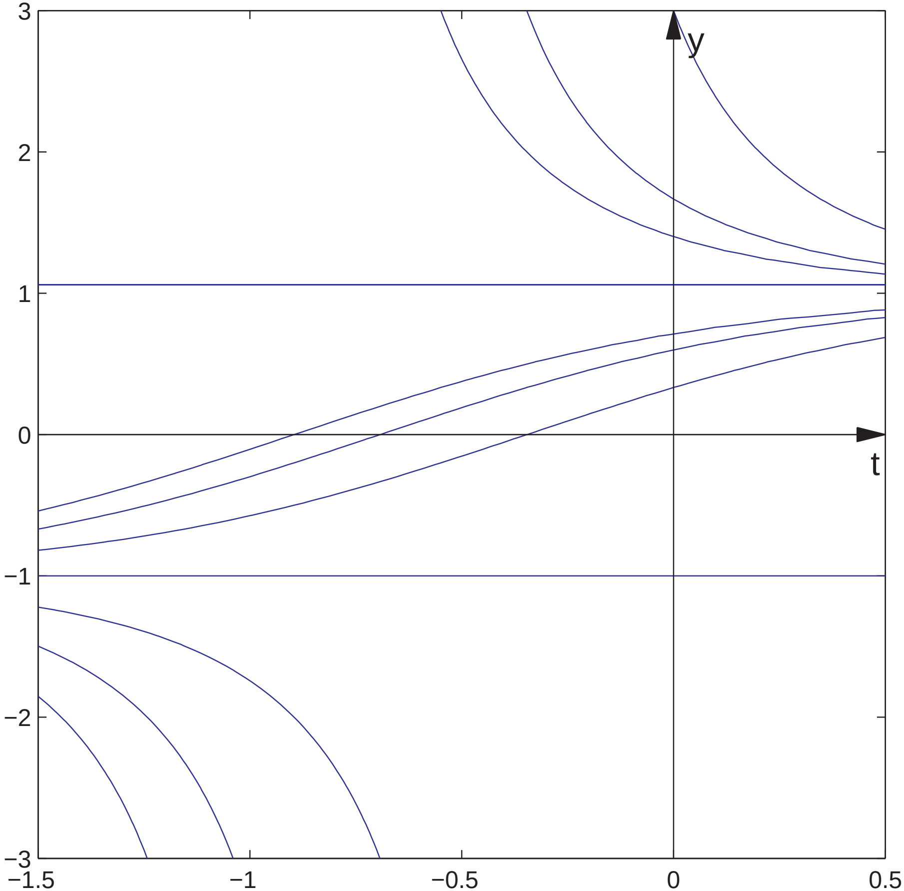
$$\frac{d}{dt}(1 - y^2) = -2y\frac{dy}{dt} = -2y(1 - y^2).$$

Assim

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2y(1 - y^2).$$

Logo as soluções têm pontos de inflexão para $y = -1$, $y = 0$ e $y = 1$.

(d)



3
2
1
0
−1
−2
−3
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
y
t

7.3. (a) Os pontos de equilíbrio são $y_1 = -1$ e $y_2 = 0$.

$y_1 = -1$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_1 = -1$ temos

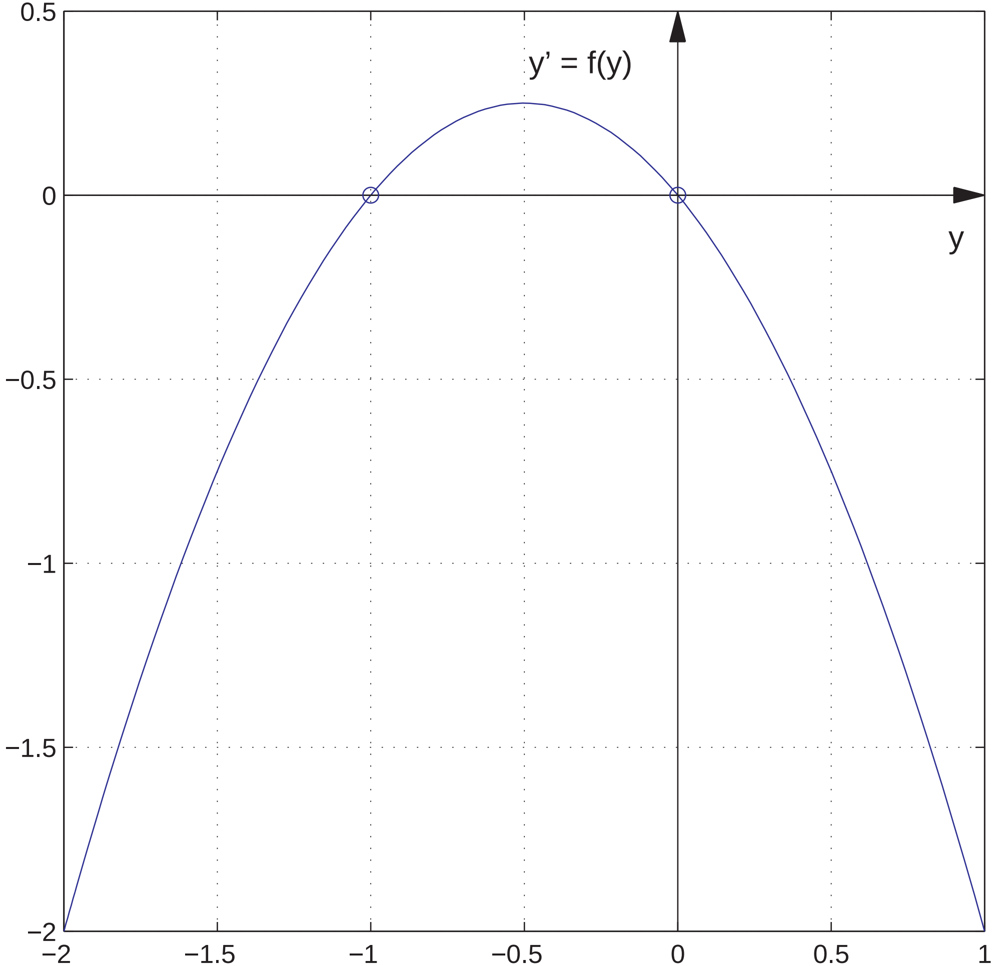
- $\frac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y < y_1 = -1$
- $\frac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y > y_1 = -1$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_1 = -1$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_1 = -1$, quando t cresce.

$y_2 = 0$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_2 = 10$ temos

- $\frac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y < y_2 = 0$
- $\frac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y > y_2 = 0$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_2 = 0$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_2 = 0$, quando t cresce.


y' = f(y)
y
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1

(b) Como $\frac{dy}{dt} = -y - y^2 > 0$, para $-1 < y < 0$, então as soluções são crescentes para $-1 < y < 0$. Como $\frac{dy}{dt} = -y - y^2 < 0$, para $y < -1$ e para $y > 0$, então as soluções são decrescentes para $y < -1$ e para $y > 0$.

(c)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-y^2 - y).$$

Mas pela regra da cadeia

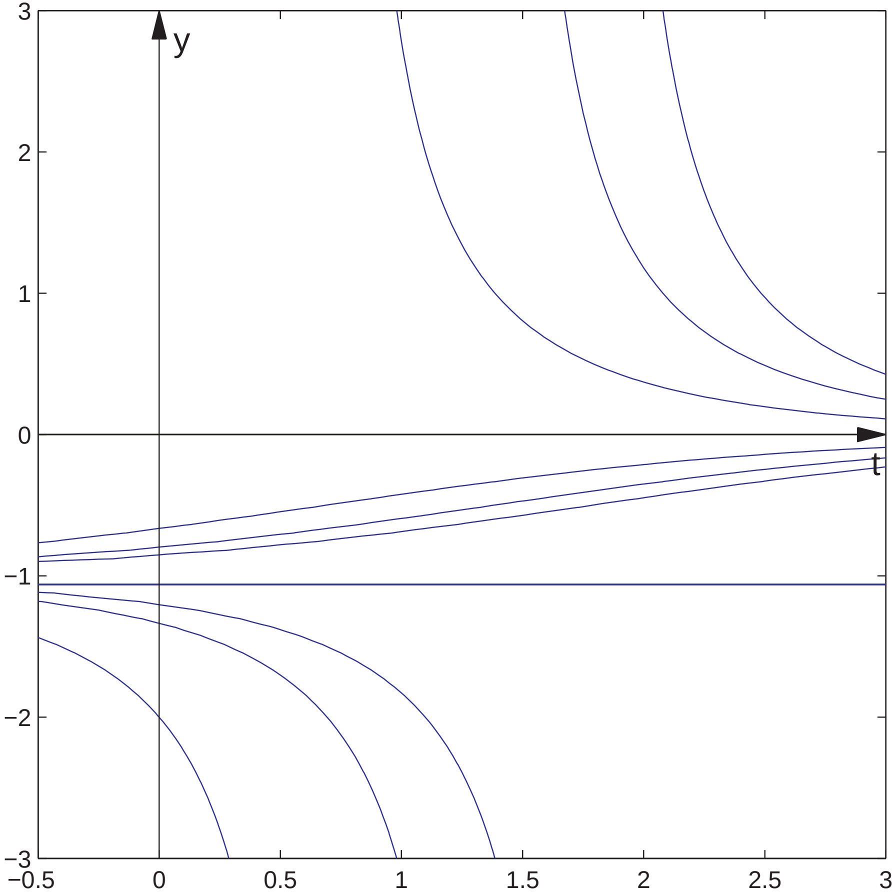
$$\frac{d}{dt}(-y^2 - y) = -(2y+1)\frac{dy}{dt} = (2y+1)(y^2+y).$$

Assim

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (2y+1)(y^2+y).$$

Logo as soluções têm pontos de inflexão para $y = -1$, $y = 0$ e $y = -1/2$.

(d)



y
t
3
2
1
0
−1
−2
−3
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

7.4. (a) Os pontos de equilíbrio são $y_1 = -1$ e $y_2 = 0$.

$y_1 = -1$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_1 = -1$ temos

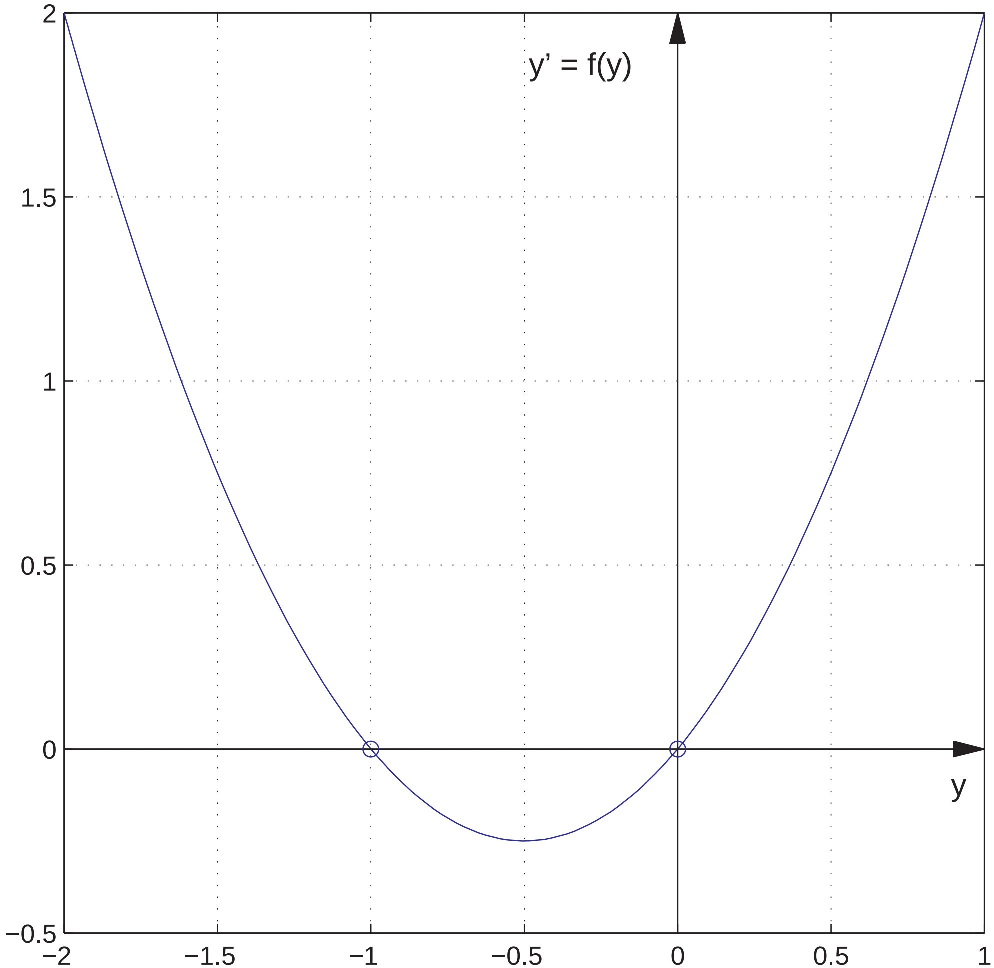
- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y < y_1 = -1$
- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y > y_1 = -1$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_1 = -1$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_1 = -1$, quando t cresce.

$y_2 = 0$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_2 = 10$ temos

- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) < 0$, para $y < y_2 = 0$
- $\dfrac{dy}{dt} = f(y) > 0$, para $y > y_2 = 0$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_2 = 0$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_2 = 0$, quando t cresce.


y' = f(y)
y
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1

(b) Como $\frac{dy}{dt} = y + y^2 < 0$, para $-1 < y < 0$, então as soluções são decrescentes para $-1 < y < 0$. Como $\frac{dy}{dt} = y + y^2 < 0$, para $y < -1$ e para $y > 0$, então as soluções são crescentes para $y < -1$ e para $y > 0$.

(c)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y^2 + y).$$

Mas pela regra da cadeia

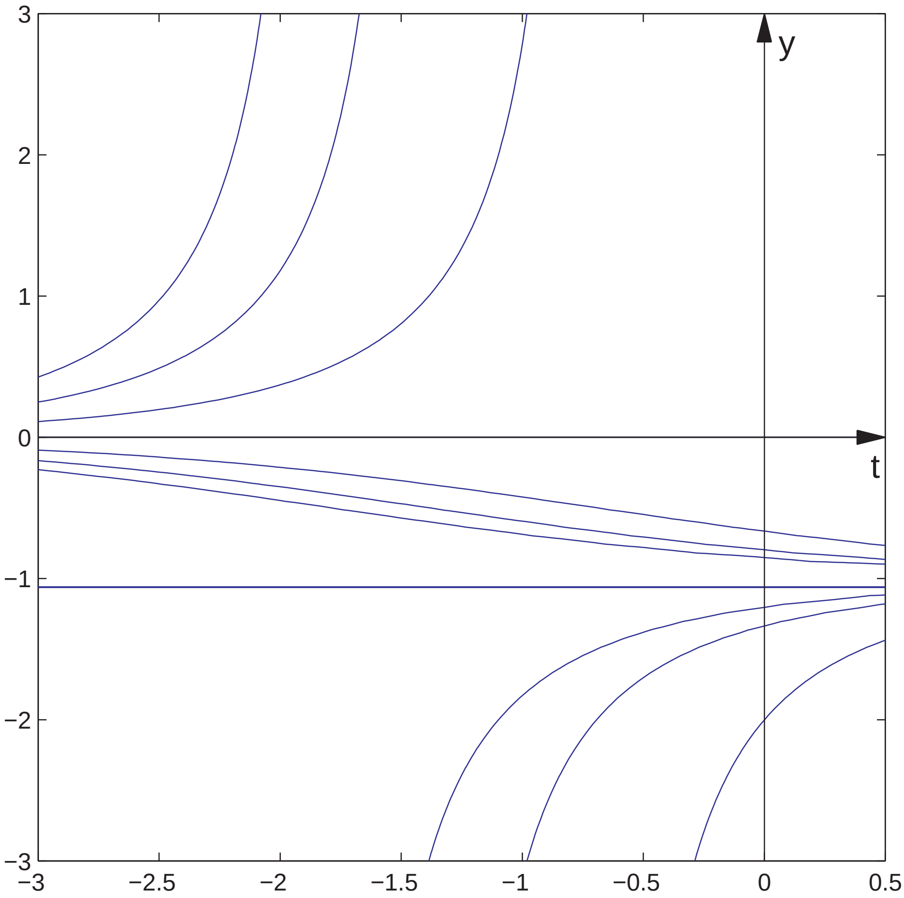
$$\frac{d}{dt}(y^2 + y) = (2y + 1)\frac{dy}{dt} = (2y + 1)(y^2 + y).$$

Assim

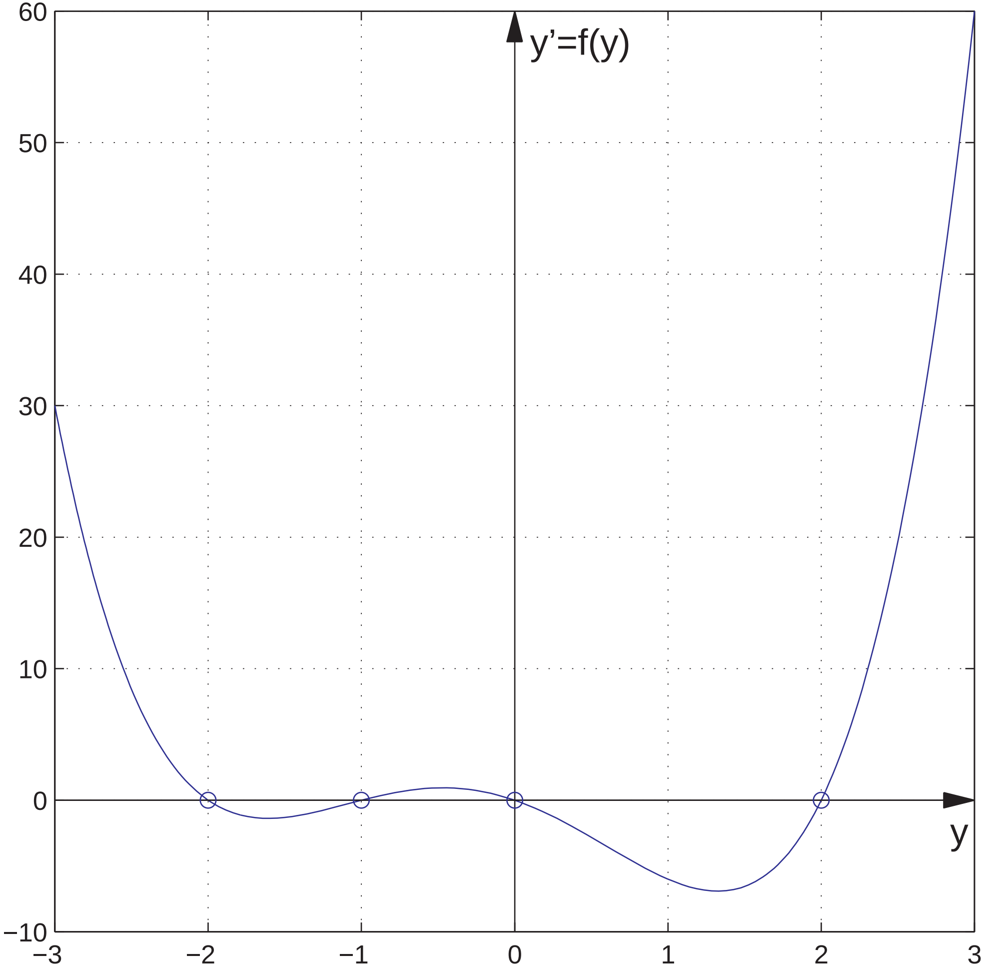
$$\frac{d^2y}{dt^2} = (2y + 1)(y^2 + y).$$

Logo as soluções têm pontos de inflexão para $y = -1$, $y = 0$ e $y = -1/2$.

(d)


3
2
1
0
−1
−2
−3
y
t
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5

7.5.



Os pontos de equilíbrio são as raízes de $f(y) = (y^2 - 4)(y^2 + y)$, ou seja, $y_1 = -2$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$ e $y_4 = 2$.

(a) $y_1 = -2$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_1 = -2$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_1 = -2$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_1 = -2$.

O que implica que se $y_0 = y(0)$ é próximo de $y_1 = -2$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_1 = -2$, quando t cresce.

(b) $y_2 = -1$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_2 = -1$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_2 = -1$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_2 = -1$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_2 = -1$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_2 = -1$, quando t cresce.

(c) $y_3 = 0$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_3 = 0$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_3 = 0$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_3 = 0$.

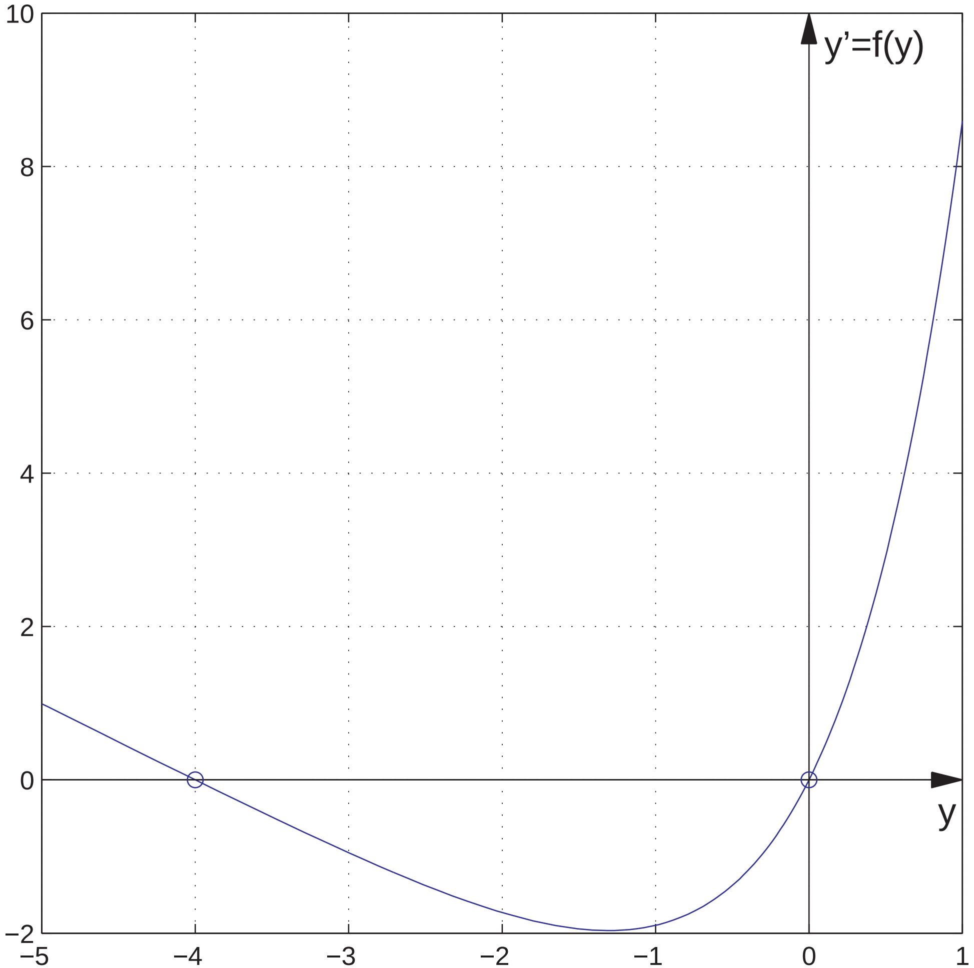
O que implica que se $y_0 = y(0)$ é próximo de $y_3 = 0$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_3 = 0$, quando t cresce.

(d) $y_4 = 2$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_4 = 2$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_4 = 2$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_4 = 2$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_4 = 2$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_4 = 2$, quando t cresce.

7.6.



Os pontos de equilíbrio são as raízes de $f(y) = (e^y - 1)(y + 4)$, ou seja, $y_1 = -4$ e $y_2 = 0$.

(a) $y_1 = -4$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_1 = -4$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_1 = -4$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_1 = -4$.

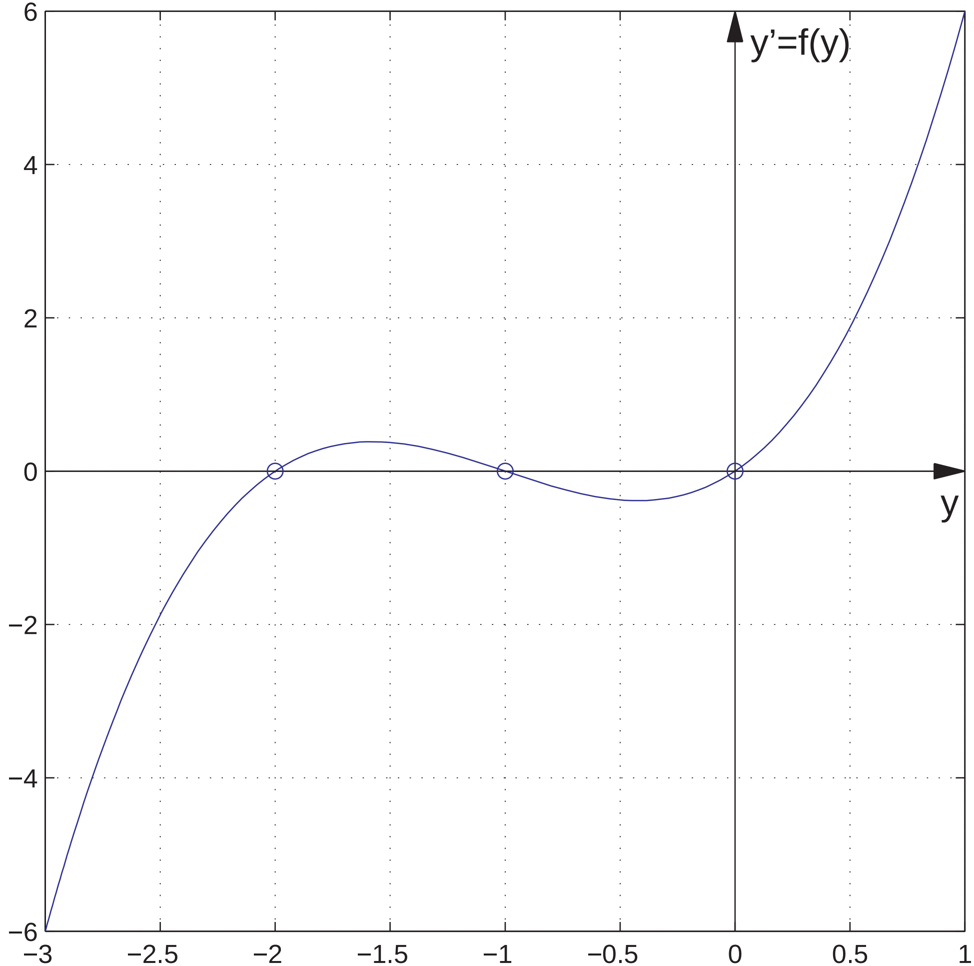
O que implica que se $y_0 = y(0)$ é próximo de $y_1 = -4$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_1 = -4$, quando t cresce.

(b) $y_2 = 0$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_2 = 0$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_2 = 0$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_2 = 0$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_2 = 0$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_2 = 0$, quando t cresce.

7.7.



Os pontos de equilíbrio são as raízes de $f(y) = y(y^2 + 3y + 2)$, ou seja, $y_1 = -2$, $y_2 = -1$ e $y_3 = 0$.

(a) $y_1 = -2$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_1 = -2$ temos

- $y' = f(y) < 0$, para $y < y_1 = -2$
- $y' = f(y) > 0$, para $y > y_1 = -2$.

O que implica que se $y_0 = y(0)$ é próximo de $y_1 = -2$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_1 = -2$, quando t cresce.

(b) $y_2 = -1$ é ponto de equilíbrio estável pois para valores de y próximos de $y_2 = -1$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_2 = -1$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_2 = -1$.

O que implica que se $y_0 = y(0)$ é próximo de $y_2 = -1$ a solução correspondente $y(t)$ está se aproximando de $y_2 = -1$, quando t cresce.

(c) $y_3 = 0$ é ponto de equilíbrio instável pois para valores de y próximos de $y_3 = 0$ temos

- $y' = f(y) > 0$, para $y < y_3 = 0$
- $y' = f(y) < 0$, para $y > y_3 = 0$.

O que implica que se $y(0)$ é próximo de $y_3 = 0$ a solução correspondente $y(t)$ está se afastando de $y_3 = 0$, quando t cresce.

8. Existência e Unicidade (página 157)

8.1. (a)

$$f(t,y) = \sqrt{y^2 - 4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4}}.$$

Para os pontos $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y_0 < -2$ ou $y_0 > 2$ o problema de valor inicial tem solução única.

(b)

$$f(t,y) = \sqrt{ty} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{2\sqrt{ty}}.$$

Para os pontos $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y_0 t_0 > 0$ o problema de valor inicial tem solução única.

(c)

$$f(t,y) = \frac{y^2}{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2t^2 y}{(t^2 + y^2)^2}.$$

Para os pontos $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $(t_0, y_0) \neq (0,0)$ o problema de valor inicial tem solução única.

(d)

$$f(t,y) = t\sqrt{1-y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{ty}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Para os pontos $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que $-1 < y_0 < 1$ o problema de valor inicial tem solução única.

8.2. (a)

$$p(t) = \frac{t-2}{t^2-1} = \frac{t-2}{(t-1)(t+1)}$$

$$q(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}.$$

Como $t_0 = 0$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $-1 < t < 1$.

(b)

$$p(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}$$

$$q(t) = \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{(t-1)(t+1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

(c)

$$p(t) = \frac{t+1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{e^t}{t^2-t} = \frac{e^t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = -1$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t < 0$.

(d)

$$p(t) = \frac{t+3}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$

$$q(t) = \frac{\cos t}{t^2-t} = \frac{\cos t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

8.3. Seja t fixo, tal que $\alpha < t < \beta$. Pelo Teorema do Valor Médio, dados y e z com $\delta < y, z < \gamma$ existe ξ entre y e z tal que

$$f(t,y) - f(t,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\,(y-z).$$

Seja $a = \max\limits_{\delta<w<\gamma}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,w)\right|$. Tomando-se o módulo da equação acima obtemos

$$|f(t,y) - f(t,z)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right|\,|y-z| \leq a\,|y-z|.$$

8.4. Seja α' o máximo entre α, o valor de $t < t_0$ tal que $\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \gamma$ e o valor de $t < t_0$ tal que $-\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \delta$. Seja β' o mínimo entre β, o valor de $t > t_0$ tal que $\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \gamma$ e o valor de $t > t_0$ tal que $-\frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) = \delta$. Vamos mostrar, por indução, que

$$|y_n(t) - y_0| \leq \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right), \quad \text{para } \alpha' < t < \beta'$$

e assim que $\delta < y_n(t) < \gamma$, para $\alpha' < t < \beta'$.

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0| &\leq b|t-t_0| \\ &= b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}|t-t_0|^n}{n!} = \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right) \end{aligned}$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2}b\frac{|t-t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

e

$$|y_k(t) - y_0| \leq \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|}-1\right),$$

para $k = 1, \ldots, n-1$ e $\alpha' < t < \beta'$ e assim que $\delta < y_k(t) < \gamma$, para $k = 1, \ldots, n-1$ e $\alpha' < t < \beta'$. Então por (1.67) na página 153,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq a^{n-1}b\frac{|t-t_0|^n}{n!}$$

e assim

$$
\begin{aligned}
|y_n(t) - y_0| &\leq \sum_{k=1}^{n} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \\
&= b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}|t-t_0|^n}{n!} = \frac{b}{a}\left(e^{a|t-t_0|} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

Para as equações diferenciais lineares de 2ª ordem é válido um resultado semelhante ao que é válido para equações lineares de 1ª ordem (Teorema 1.2 na página 150) com relação a existência e unicidade de soluções, mas a demonstração, infelizmente, não é tão simples quanto naquele caso e será apresentada somente ao final do Capítulo 4.

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade). *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

para $p(t), q(t)$ e $f(t)$ funções contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0 tem uma única solução neste intervalo.

Exemplo 2.1. Vamos determinar o intervalo máximo em que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (t^2-4)y'' + y' + (\operatorname{sen} t)y = \dfrac{e^t}{t} \\ y(1) = y_0, \quad y'(1) = y'_0 \end{cases}$$

tem solução. Para esta equação

$$p(t) = \frac{1}{t^2-4}, \quad q(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t^2-4}, \quad f(t) = \frac{e^t}{t(t^2-4)}.$$

Assim $p(t), q(t)$ e $f(t)$ são contínuas para $t \neq \pm 2, 0$. Como $t_0 = 1$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $0 < t < 2$, que é o maior intervalo contendo $t_0 = 1$ onde $p(t), q(t)$ e $f(t)$ são contínuas.

2.1 Equações Homogêneas

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é **homogênea** se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2.1}$$

Para as equações lineares homogêneas é válido o **princípio da superposição**.

Teorema 2.2 (Princípio da Superposição). *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de (2.1), então*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{2.2}$$

para c_1 e c_2 constantes, também o é.

Demonstração. Vamos verificar que realmente $y(t)$ dado por (2.2) é solução de (2.1).

$$\begin{aligned}
& y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = \\
& \quad = \quad (c_1y_1(t) + c_2y_2(t))'' + p(t)\,(c_1y_1(t) + c_2y_2(t))' + q(t)\,(c_1y_1(t) + c_2y_2(t)) \\
& \quad = \quad c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1p(t)y_1'(t) + c_2p(t)y_2'(t) + c_1q(t)y_1(t) + c_2q(t)y_2(t) \\
& \quad = \quad c_1\underbrace{\left(y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right)}_{=0} + c_2\underbrace{\left(y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right)}_{=0} \\
& \quad = \quad c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

pois $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de (2.1). ■

Usando a linguagem da Álgebra Linear podemos dizer que o conjunto das soluções de uma equação diferencial linear homogênea é um subespaço vetorial.

2.1.1 Soluções Fundamentais

Considere, agora, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{2.3}$$

em que y_0 e y_0' são condições iniciais dadas no problema.

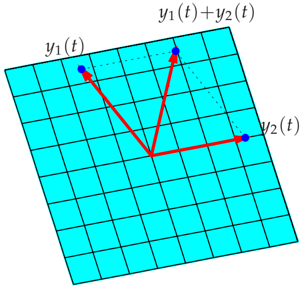


Figura 2.1: Soma de soluções de uma equação diferencial homogênea

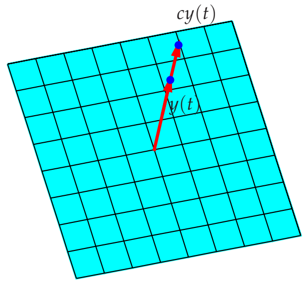


Figura 2.2: Multiplicação de solução de uma equação diferencial homogênea por escalar

Vamos determinar condições sobre duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para que existam constantes c_1 e c_2 tais que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ seja solução do problema de valor inicial (2.3).

Substituindo-se $t = t_0$ na solução $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ e na derivada de $y(t)$, $y'(t) = c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t)$ obtemos o sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} c_1y_1(t_0) & + & c_2y_2(t_0) & = & y_0 \\ c_1y_1'(t_0) & + & c_2y_2'(t_0) & = & y_0' \end{array}\right.$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema A é invertível, então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o sistema tem uma única solução (c_1, c_2) (A solução é $X = A^{-1}B$). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Ou seja, se

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ é solução do problema de valor inicial (2.3).

Acabamos de provar o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação (2.1) tais que, em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

tem uma única solução da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Definição 2.1. (a) O determinante

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}$$

é chamado **wronskiano** das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em t_0.

(b) Se duas *soluções* $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de (2.1) são tais que o seu wronskiano é diferente de zero em um ponto t_0 dizemos que elas são **soluções fundamentais** de (2.1).

(c) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de (2.1), então a família de soluções

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{2.4}$$

para constantes c_1 e c_2 é chamada **solução geral** de (2.1).

Assim para encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem (2.1) em um intervalo I, precisamos encontrar duas soluções fundamentais da equação (2.1), ou seja, duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ tais que em um ponto $t_0 \in I$

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Exemplo 2.2. Seja b um número real não nulo. Vamos mostrar que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais da equação

$$y'' + b^2 y = 0.$$

Como $y_1'(t) = -b \operatorname{sen} bt$, $y_1''(t) = -b^2 \cos bt$, $y_2'(t) = b \cos bt$ e $y_2''(t) = -b^2 \operatorname{sen} bt$, então

$$y_1'' + b^2 y_1 = -b^2 \cos bt + b^2 \cos bt = 0$$

e

$$y_2'' + b^2 y_2 = -b^2 \operatorname{sen} bt + b^2 \operatorname{sen} bt = 0.$$

Assim, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação $y'' + b^2 y = 0$. Além disso,

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos bt & \operatorname{sen} bt \\ -b \operatorname{sen} bt & b \cos bt \end{bmatrix} = b(\cos^2 bt + \operatorname{sen}^2 bt) = b \neq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2 y = 0$.

Dependência Linear

Dizemos que duas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são **linearmente dependentes (L.D.)** em um intervalo I, se uma das funções é um múltiplo escalar da outra, ou seja, se

$$y_1(t) = \alpha y_2(t) \quad \text{ou} \quad y_2(t) = \alpha y_1(t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Caso contrário, dizemos que elas são **linearmente independentes (L.I.)**.
Se duas funções são L.D. em um intervalo I, então

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = 0, \quad \text{para todo } t \in I$$

pois uma coluna da matriz acima é um múltiplo escalar da outra. Assim, vale o seguinte resultado.

Teorema 2.4. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são funções tais que*

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0, \quad \textit{para algum } t_0 \in I,$$

então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independentes (L.I.) em I.

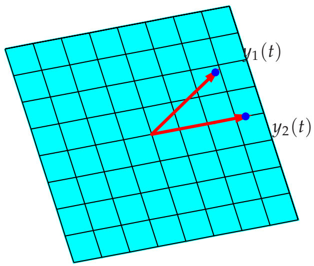


Figura 2.3: $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais de uma equação diferencial linear homogênea

Usando a linguagem da Álgebra Linear podemos dizer que duas soluções fundamentais formam uma base para o subespaço das soluções de uma equação homogênea (2.1), pois elas são L.I. e geram o subespaço (toda solução é uma combinação linear delas).

Observe que o wronskiano pode ser calculado para quaisquer par de funções mesmo que elas não sejam soluções de uma equação diferencial. Também os conceitos de dependência e independência linear são definidos para duas funções que podem ou não ser soluções de uma equação diferencial.

Exemplo 2.3. Seja b um número real não nulo. Mostramos no exemplo anterior que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções L.I. da equação

$$y'' + b^2 y = 0.$$

A recíproca do Teorema 2.4 não é verdadeira, ou seja, mesmo que

$$W[y_1, y_2](t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

não significa que as funções sejam linearmente dependentes. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 2.4. Sejam $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0 \end{cases}$.

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{bmatrix} = 0.$$

Apesar do wronskiano ser zero para todo $t \in \mathbb{R}$ as funções y_1 e y_2 são L.I., pois uma função não é múltiplo escalar da outra. Para $t \geq 0$, $y_2(t) = y_1(t)$ e para $t < 0$, $y_2(t) = -y_1(t)$.

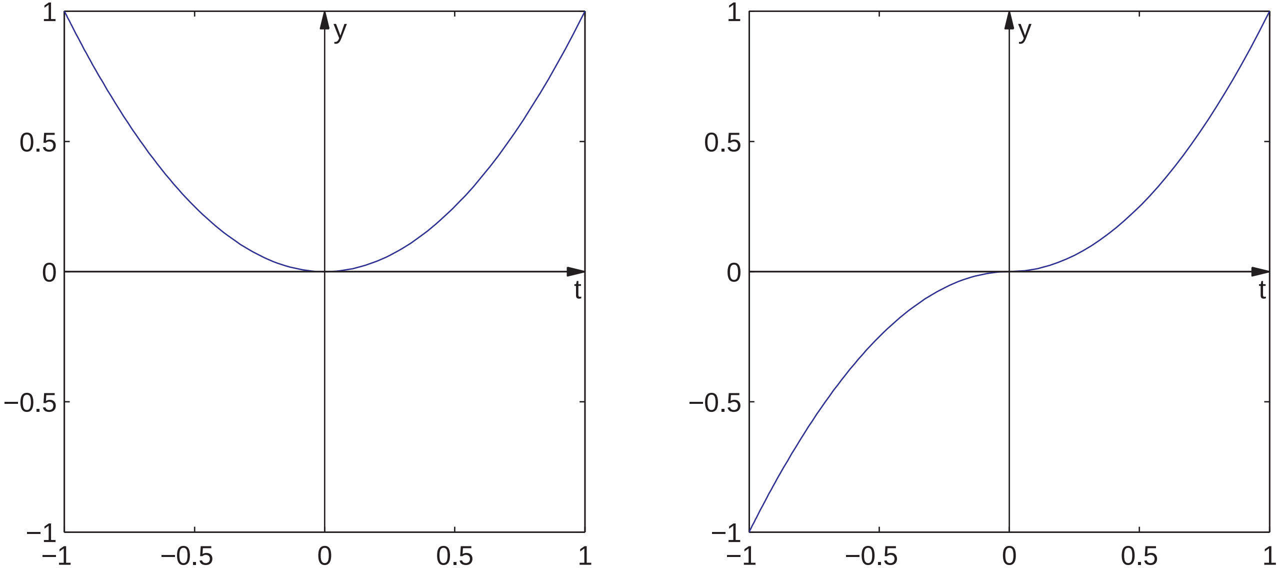


Figura 2.4: $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t|t|$ são L.I. mas o wronskiano é igual a zero para todo t

2.1.2 Fórmula de Euler

Queremos definir a função exponencial $y(t) = e^{rt}$ para números complexos $r = a + ib$ de forma que satisfaça as propriedades

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{rt}\right) = re^{rt} \tag{2.6}$$

Sendo assim, a função $z(t) = e^{ibt}$ é solução da equação $y'' + b^2y = 0$. Pois pela propriedade (2.6)

$$z'(t) = ibe^{ibt}, \quad z''(t) = -b^2e^{ibt} = -b^2z(t)$$

e assim

$$z''(t) + b^2z(t) = 0.$$

Assim $z(t) = e^{ibt}$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + b^2y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = ib \end{cases}$$

Agora, como mostramos no Exemplo 2.2 que $y_1(t) = \cos bt$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} bt$ são soluções fundamentais de $y'' + b^2y = 0$, então pelo Teorema 2.3 existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$z(t) = e^{ibt} = c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt. \tag{2.7}$$

Vamos determinar estas constantes c_1 e c_2. Substituindo-se $t = 0$ na equação (2.7) obtemos que $c_1 = 1$. Derivando a equação (2.7) em relação a t obtemos

$$ibe^{ibt} = -c_1b \operatorname{sen} bt + c_2b \cos bt. \tag{2.8}$$

Substituindo-se $t = 0$ na equação (2.8) obtemos que $c_2 = i$. Assim substituindo-se $c_1 = 1$ e $c_2 = i$ já obtidos na equação (2.7) obtemos

$$e^{ibt} = \cos bt + i \operatorname{sen} bt.$$

Portanto, pela propriedade (2.5),

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt). \tag{2.9}$$

Tomando $t = 1$ temos

$$e^{a+ib} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Esta equação é conhecida como **fórmula de Euler**.

Exemplo 2.5. Usando a fórmula de Euler temos que

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{\ln 2 + \frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

que foram obtidas tomando

$$a = 0,\ b = \pi; \quad a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}; \quad a = \ln 2,\ b = \frac{\pi}{4},$$

respectivamente.

2.1.3 Obtendo uma Segunda Solução

Considere uma equação linear de 2a. ordem homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2.10}$$

Seja $y_1(t)$ uma solução conhecida da equação acima num intervalo I tal que $y_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t).$$

Como

$$y'(t) = vy_1' + y_1v' \quad \text{e} \quad y''(t) = vy_1'' + 2y_1'v' + y_1v'',$$

então $y(t)$ é solução da equação se, e somente se,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = y_1 v'' + v'(2y_1' + p(t)y_1) + v(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1) = 0.$$

Como $y_1(t)$ é solução da equação (2.10), então $y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0$ e assim a equação anterior se torna

$$y_1 v'' + v'(2y_1' + p(t)y_1) = 0. \tag{2.11}$$

Seja $w(t) = v'(t)$. Então a equação (2.11) pode ser escrita como

$$y_1 w' + (2y_1' + p(t)y_1)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável que pode ser escrita como

$$\frac{w'}{w} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p(t)$$

Integrando-se obtemos

$$\ln |w| = -2\ln |y_1| - \int p(t)dt + C$$

que usando propriedade do logaritmo pode ser reescrita como

$$\ln \left| w y_1^2 \right| = -\int p(t)dt + C.$$

Explicitando $w(t)$ obtemos

$$w(t) = C_1 \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}$$

Como $w(t) = v'(t)$, resolvendo a equação para $v(t)$:

$$v(t) = C_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2} dt + C_2.$$

Substituindo-se $v(t)$ em $y(t) = v(t)y_1(t)$ obtemos

$$y(t) = v(t)y_1(t) = C_1 y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt + C_2 y_1(t)$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos uma segunda solução da equação (2.10)

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt \tag{2.12}$$

Vamos ver que $y_1(t)$ dada e $y_2(t)$ obtida por (2.12) são soluções fundamentais da equação (2.10).

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](t) &= \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt \\ y_1'(t) & y_1'(t) \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)^2}\, dt + \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1(t)} \end{bmatrix} \\ &= e^{-\int p(t)dt} \neq 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim se $y_1(t)$ é uma solução conhecida da equação (2.10) e $y_2(t)$ é dada por (2.12) então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

é solução geral da equação (2.10).

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida para $y_2(t)$. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para encontrar uma segunda solução da equação linear homogênea de 2ª ordem.

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

Exemplo 2.6. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tais que } b^2 - 4ac = 0 \text{ e } a \neq 0.$$

Deixamos como exercício verificar que $y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}$ é uma solução da equação acima.
Vamos procurar uma segunda solução da forma

$$y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{rt}, \text{em que } r = \frac{-b}{2a}.$$

Como

$$y'(t) = v'(t)e^{rt} + rv(t)e^{rt} \quad \text{e} \quad y''(t) = v''(t)e^{rt} + 2rv'(t)e^{rt} + r^2v(t)e^{rt}$$

então $y(t)$ é solução da equação se, e somente se,

$$ay'' + by' + cy = a(v'' + 2rv' + r^2v) + b(v' + rv) + cv = av'' + (2ar + b)v' + (ar^2 + br + c)v = 0.$$

Como $r = \frac{-b}{2a}$ é solução da equação $ar^2 + br + c = 0$ e $2ar + b = 0$, então

$$v''(t) = 0.$$

Seja $w(t) = v'(t)$. Então a equação $v''(t) = 0$ torna-se $w'(t) = 0$ que tem solução $w(t) = C_1$. Resolvendo a equação $v'(t) = w(t) = C_1$ obtemos

$$v(t) = C_1t + C_2 \quad \text{e} \quad y(t) = (C_1t + C_2)e^{rt}.$$

Tomando-se $C_2 = 0$ e $C_1 = 1$ obtemos

$$y_2(t) = te^{rt}.$$

Vamos ver que $y_1(t) = e^{rt}$ e $y_2(t) = te^{rt}$, em que $r = -\dfrac{b}{2a}$, são soluções fundamentais da equação

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix} \\
&= e^{2rt} \det \begin{bmatrix} 1 & t \\ r & (1+rt) \end{bmatrix} \\
&= e^{2rt} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Assim

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}, \quad \text{em que } r = -\frac{b}{2a}$$

é a solução geral da equação $ay'' + by' + cy = 0$, tal que $b^2 - 4ac = 0$ e $a \neq 0$.

2.1.4 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar de equações da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0. \tag{2.13}$$

Para esta equação existem valores constantes de r tais que $y(t) = e^{rt}$ é uma solução. Substituindo-se $y(t) = e^{rt}$, $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2 e^{rt}$ em (2.13) obtemos

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução de (2.13) se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.14}$$

que é chamada **equação característica** de (2.13).

Observe que a equação característica pode ser obtida da equação diferencial com coeficientes constantes trocando-se y'' por r^2, y' por r e y por 1.
Como uma equação de 2º grau pode ter duas raízes reais, somente uma raíz real ou duas raízes complexas, usando a equação característica podemos chegar a três situações distintas.

A Equação Característica Tem Duas Raízes Reais

Se a equação característica de (2.13) tem duas raízes reais (distintas), r_1 e r_2, então

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

são soluções fundamentais, pois

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes reais distintas r_1 e r_2,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

é a solução geral de (2.13).

Exemplo 2.7. Seja ω um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' - \omega^2 y = 0.$$

A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 - \omega^2 = 0$$

que tem como raízes $r_1 = \omega$ e $r_2 = -\omega$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}.$$

A Equação Característica Tem Somente Uma Raiz Real

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, então a equação característica (2.14) tem somente uma raiz real $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$. Neste caso,

$$y_1(t) = e^{r_1 t}$$

é solução da equação diferencial (2.13).
No Exemplo 2.6 na página 267 mostramos como encontrar uma segunda solução para esta equação. Lá mostramos que $y_2(t) = te^{r_1 t}$ também é solução da equação (2.13) e que são soluções fundamentais da equação diferencial (2.13).
Portanto no caso em que a equação característica tem somente uma raíz real $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}$$

é a solução geral de (2.13).

Exemplo 2.8. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

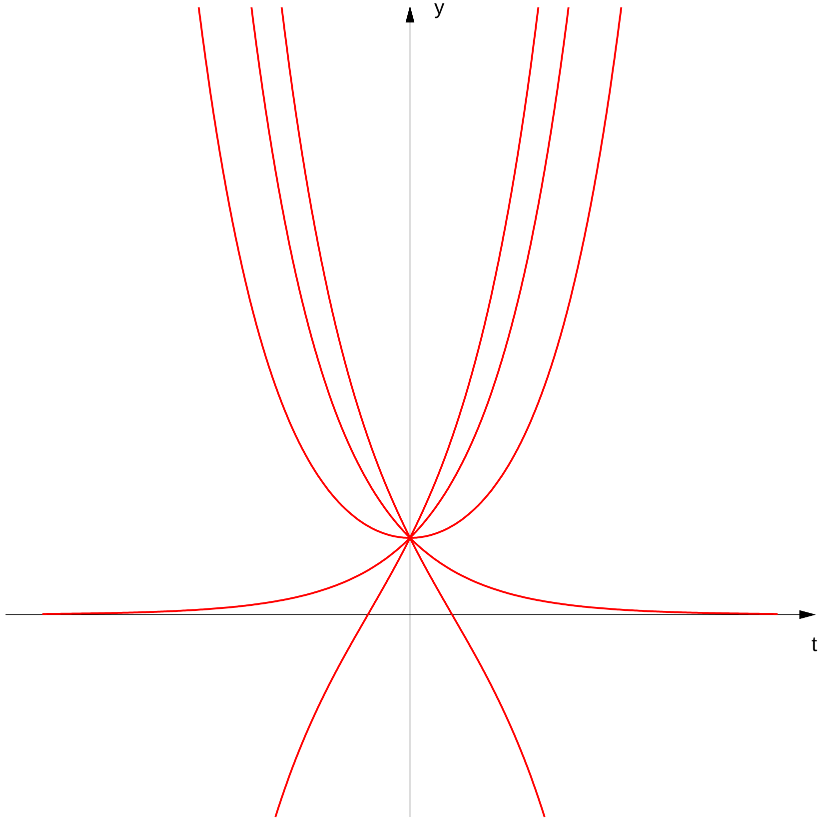


Figura 2.5: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.7

que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

A Equação Característica Tem Duas Raízes Complexas

Se a equação característica de (2.13) tem duas raízes complexas, então elas são números complexos conjugados, ou seja, se $r_1 = \alpha + i\beta$ é uma raiz da equação característica (2.14), então a outra raiz é $r_2 = \alpha - i\beta$. Neste caso, pela fórmula de Euler (2.9) temos:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{r_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\text{sen}\,\beta t) \quad \text{e} \\ y_2(t) &= e^{r_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i\,\text{sen}(-\beta t)) = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\,\text{sen}\,\beta t). \end{aligned}$$

Pela análise feita no início dessa seção sabemos que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções complexas da equação diferencial (2.13). Além disso,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} \\ &= e^{r_1 t} e^{r_2 t} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} = (-2i\beta) e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou seja, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de (2.13). Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

é a solução geral complexa de (2.13).

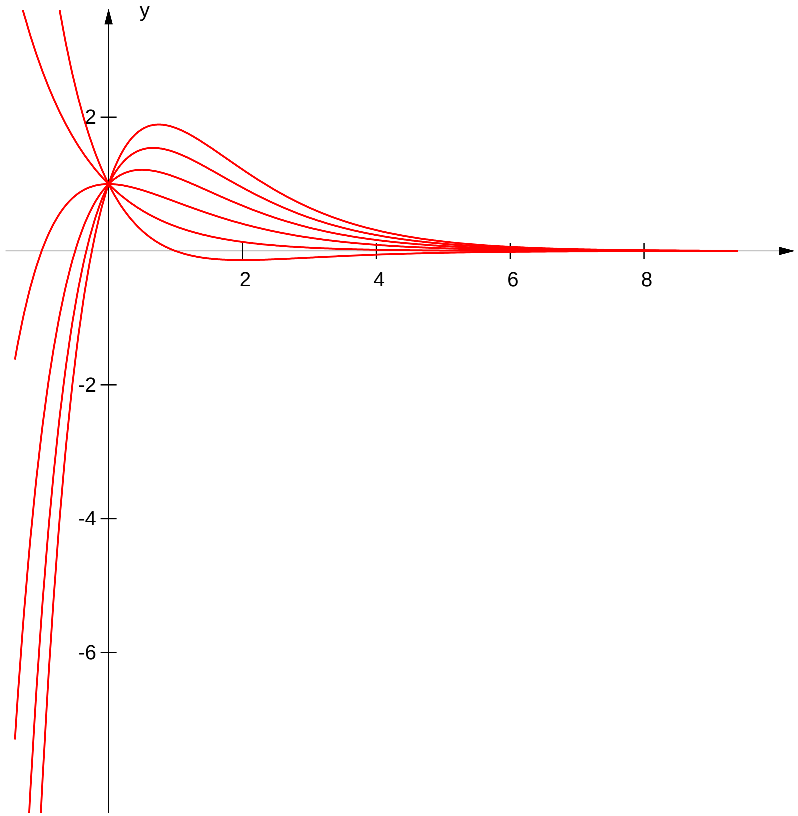


Figura 2.6: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.8

Vamos encontrar um conjunto fundamental de soluções reais. A solução geral complexa pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= C_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t) + C_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\operatorname{sen}\beta t) \\ &= (C_1 + C_2)e^{\alpha t}\cos\beta t + i(C_1 - C_2)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \end{aligned} \tag{2.15}$$

Tomando $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ em (2.15), temos a solução real

$$u(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t.$$

Tomando $C_1 = \dfrac{1}{2i}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{2i}$, temos a solução real

$$v(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t.$$

Vamos mostrar, agora, que se as raízes da equação característica são complexas, então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções fundamentais de (2.13).

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\operatorname{sen}\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\operatorname{sen}\beta t + \beta\cos\beta t) \end{bmatrix} \\ &= e^{2\alpha t}\left(\alpha\det\begin{bmatrix} \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \\ \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \end{bmatrix} + \beta\det\begin{bmatrix} \cos\beta t & \operatorname{sen}\beta t \\ -\operatorname{sen}\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}\right) \\ &= \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim no caso em que a equação característica tem duas raízes complexas $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$$

é a solução geral de (2.13).

Exemplo 2.9. Seja ω um número real positivo. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

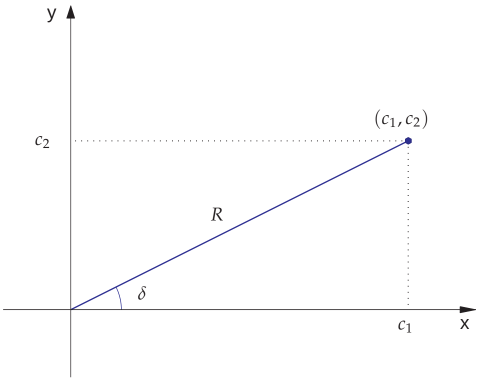
A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

que tem como raízes $r_1 = i\omega$ e $r_2 = -i\omega$. Assim, a solução geral da equação diferencial acima é

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{2.16}$$

Escrevendo o par (c_1, c_2) em coordenadas polares temos que



$$\begin{cases} c_1 = R\cos\delta, \\ c_2 = R \operatorname{sen} \delta. \end{cases} \tag{2.17}$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 na equação (2.16) obtemos

$$y(t) = R\left(\cos\delta \cos(\omega t) + \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}(\omega t)\right) = R\cos(\omega t - \delta),$$

em que $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e δ são obtidos de (2.17).

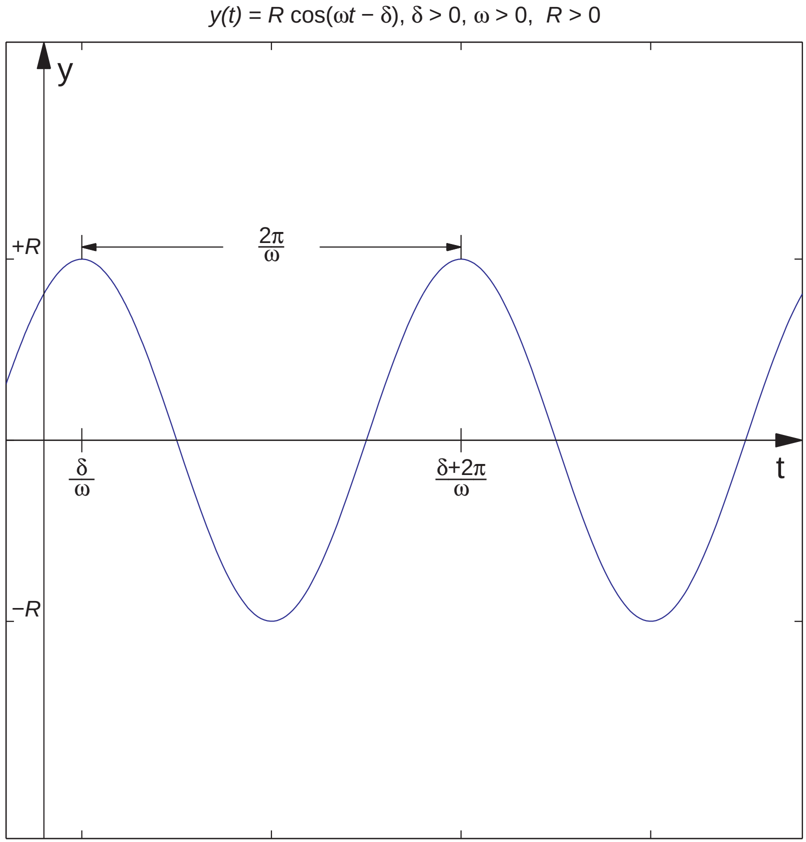


Figura 2.7: Uma solução da equação do Exemplo 2.9

Exercícios (respostas na página 368)

1.1. Mostre que $y_1(x) = x^3$ é solução da equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' - 9y = 0.$$

Encontre uma função $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais.

1.2. Mostre que $y_1(x) = x^{-1}$, $x > 0$, é solução da equação diferencial

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Encontre uma função $u(x)$ tal que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ seja solução da equação dada. Prove que as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais.

1.3. Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para $\alpha > 1$, para $\alpha = 1$ e para $\alpha < 1$.

1.4. (a) Determine qual ou quais das funções $z_1(x) = x^2$, $z_2(x) = x^3$ e $z_3(x) = e^{-x}$ são soluções da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

(b) Seja $y_1(x)$ uma das soluções obtidas no item anterior. Determine uma segunda solução $y_2(x)$ de forma que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sejam soluções fundamentais da equação.

(c) Determine a solução geral da equação

$$(x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0$$

e obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x+3)y'' + (x+2)y' - y = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

Justifique sua resposta!

1.5. (a) Mostre que $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$ são soluções da equação

$$x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0.$$

(b) Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' - 6xy' + 10y = 0, \\ y(1) = 3, \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

Justifique sua resposta!

1.6. Mostre que a solução do problema $y'' + 2y' = 0, y(0) = a, y'(0) = b$ tende para uma constante quando $t \to +\infty$. Determine esta constante.

1.7. Mostre que se $0 < b < 2$, então toda solução de $y'' + by' + y = 0$ tende a zero quando $t \to +\infty$.

1.8. Considere o problema $y'' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = b \neq 0$. Mostre que $y(t) \neq 0$ para todo $t \neq 0$.

1.9. Considere o problema $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = b$. Determine os valores de b para os quais a solução $y(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

1.10. Considere a equação $y'' + 2by' + y = 0$. Para quais valores de b a solução $y(t)$ tende a zero quando $t \to +\infty$, independente das condições iniciais.

1.11. Baseado no Teorema 2.1 na página 253, determine um intervalo em que os problemas de valor inicial abaixo têm uma única solução, sem resolvê-los:

(a) $\begin{cases} (t^2 - 1)y'' + (t-2)y = t \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0' \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (t^2 - 1)y'' + y' + ty = t^2 \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y_0' \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (t^2 - t)y'' + (t+1)y' + y = e^t \\ y(-1) = y_0, \quad y'(-1) = y_0' \end{cases}$

(d) $\begin{cases} (t^2 - t)y' + (t+3)y' + 2y = \cos t \\ y(2) = y_0, \quad y'(2) = y_0' \end{cases}$

1.12. As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{2.18}$$

em que b e c são constantes reais.

Mostre que existem valores constantes de r tais que $y(x) = x^r$ é uma solução de (2.18). Além disso mostre que $y(x) = x^r$ é solução da equação (2.18) se, e somente se,

$$r^2 + (b-1)r + c = 0, \tag{2.19}$$

A equação (2.19) é chamada **equação indicial de** (2.18).

1.13. Mostre que se a equação indicial (2.19) tem duas raízes reais (distintas), r_1 e r_2, então

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^{r_2}$$

são soluções fundamentais de (2.18) e portanto

$$y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$$

é a solução geral de (2.18), para $x > 0$.

1.14. Se a equação indicial (2.19) tem duas raízes complexas, $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, use a fórmula de Euler para escrever a solução geral complexa em termos das soluções reais, para $x > 0$,

$$u(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{e} \quad v(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Mostre que estas soluções são soluções fundamentais de (2.18) e portanto

$$y(x) = c_1x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x)$$

é a solução geral de (2.18), para $x > 0$.

1.15. Se a equação indicial (2.19) tem somente uma raíz real, $r_1 = \dfrac{1-b}{2}$, determine uma segunda solução linearmente independente da forma $y_2(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{\frac{1-b}{2}}$, para $x > 0$. Mostre que $y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}}$ e $y_2(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$ são soluções fundamentais de (2.18) e portanto a solução geral de (2.18), para $x > 0$, é

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1-b}{2}} + c_2 x^{\frac{1-b}{2}} \ln x.$$

1.16. Use os exercícios anteriores para encontrar a solução geral das seguintes equações:

(a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

(c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

1.17. (Teorema de Abel) Considere a equação homogênea $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, com $p(t)$ e $q(t)$ funções contínuas num intervalo I. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções desta equação no intervalo I. Seja $W[y_1, y_2](t)$ o wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ no intervalo I. Mostre que:

(a) $W[y_1, y_2]'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t)$

(b) $W[y_1, y_2](t)$ satisfaz a equação diferencial $y' + p(t)y = 0$ no intervalo I.

(c) $W[y_1, y_2](t) = ce^{-\int p(t)dt}$.

(d) $W[y_1, y_2](t) = 0$, para todo $t \in I$ ou $W[y_1, y_2](t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

2.2 Equações Não Homogêneas

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é **não homogênea** se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t). \tag{2.20}$$

com $f(t)$ uma função não-nula.

Teorema 2.5. *Seja $y_p(t)$ uma solução particular da equação (2.20). Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então a solução geral da equação não homogênea (2.20) é*

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Demonstração. Seja $y(t)$ uma solução qualquer de (2.20) e $y_p(t)$ uma solução particular de (2.20). Vamos mostrar que $Y(t) = y(t) - y_p(t)$ é solução da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} Y''(t) + p(t)Y'(t) + q(t)Y(t) &= (y(t) - y_p(t))'' + p(t)(y(t) - y_p(t))' + q(t)(y(t) - y_p(t)) \\ &= \underbrace{\left(y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)\right)}_{=f(t)} - \underbrace{\left(y_p''(t) + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t)\right)}_{=f(t)} \\ &= f(t) - f(t) = 0. \end{aligned}$$

Assim se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea associada (2.21), existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$Y(t) = y(t) - y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

ou seja, se $y(t)$ é uma solução qualquer de (2.20) e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea associada (2.21), então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t). \tag{2.22}$$

■

Portanto para encontrar a solução geral de uma equação linear de 2ª ordem não homogênea precisamos encontrar uma solução particular e duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

Teorema 2.6 (Princípio da Superposição para Equações Não Homogêneas). *Se $y_p^{(1)}(t)$ é uma solução de*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e $y_p^{(2)}(t)$ é uma solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t),$$

então $y_p(t) = y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)$ é solução de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t) + f_2(t).$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
& y_p(t)'' + p(t)y_p'(t) + q(t)y_p(t) = \\
&\quad = \quad (y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))'' + p(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t))' + q(t)(y_p^{(1)}(t) + y_p^{(2)}(t)) = \\
&\quad = \quad \underbrace{y_p^{(1)}(t)'' + p(t)y_p^{(1)}(t)' + q(t)y_p^{(1)}(t)}_{=f_1(t)} + \underbrace{y_p^{(2)}(t)'' + p(t)y_p^{(2)}(t)' + q(t)y_p^{(2)}(t)}_{=f_2(t)} = \\
&\quad = \quad f_1(t) + f_2(t),
\end{aligned}
$$

pois $y_p^{(1)}(t)$ é solução da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_1(t)$$

e $y_p^{(2)}(t)$, da equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f_2(t).$$

■

Exemplo 2.10. A função $y_1(t) = \dfrac{t}{4}$ é solução da equação diferencial

$$y'' + 4\,y = t$$

(verifique!) e a função $y_2(t) = \dfrac{t}{2}\,\mathrm{sen}(2t)$ é solução da equação

$$y'' + 4\,y = 2\cos(2t)$$

(verifique!). Pelo Princípio da Superposição para Equações Não Homogêneas (Teorema 2.6) $y(t) = \dfrac{t}{4} + \dfrac{t}{2}\,\mathrm{sen}(2t)$ é solução da equação

$$y'' + 4\,y = 2\cos(2t) + t.$$

2.2.1 Método de Variação dos Parâmetros

Este método funciona para qualquer equação linear de 2a. ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

para qual se conheça duas soluções fundamentais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação homogênea correspondente em um intervalo I, onde o wronskiano $W[y_1, y_2](t) \neq 0$, para todo $t \in I$.
Lembramos que neste caso a solução geral da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea que tenha a forma da solução geral da homogênea, mas substituindo os parâmetros (constantes) c_1 e c_2 por funções a determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente, ou seja, da forma

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \tag{2.23}$$

com a condição de que

$$y'(t) = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t),$$

ou equivalentemente que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0 \tag{2.24}$$

Assim,

$$y''(t) = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t)$$

Substituindo-se $y(t), y'(t)$ e $y''(t)$ na equação obtemos

$$\begin{aligned} u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t) \\ + p(t)\left(u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t)\right) \\ + q(t)\left(u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)\right) = f(t) \end{aligned}$$

Agrupando os termos que contém $u_1'(t)$, $u_2'(t)$, $u_1(t)$ e $u_2(t)$ obtemos a equação diferencial de 1a. ordem para $u_1(t)$ e $u_2(t)$

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_1(t)\underbrace{\left(y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\right)}_{=0} + u_2(t)\underbrace{\left(y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)\right)}_{=0} = f(t)$$

Portanto $u_1(t)$ e $u_2(t)$ satisfazem além da equação (2.24) a equação

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = f(t) \tag{2.25}$$

Assim juntando as equações (2.24) e (2.25) obtemos o sistema de equações lineares para $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} y_1(t)u_1'(t) & + & y_2(t)u_2'(t) & = & 0 \\ y_1'(t)u_1'(t) & + & y_2'(t)u_2'(t) & = & f(t) \end{array}\right.$$

que pode ser escrito na forma

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

que tem solução

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} &= X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} B = \frac{1}{W[y_1,y_2](t)}\begin{bmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{W[y_1,y_2](t)}\begin{bmatrix} -y_2(t)f(t) \\ y_1(t)f(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtemos assim duas equações diferenciais de 1a. ordem

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

$$u_2'(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

que podem ser resolvidas simplesmente integrando-se

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt$$

Substituindo $u_1(t)$ e $u_2(t)$ na equação (2.23) obtemos uma solução particular

$$y_p(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt.$$

Atenção: Não se deve memorizar a fórmula obtida. O que fizemos aqui foi mostrar o caminho que deve ser seguido para encontrar uma solução particular da equação linear não homogênea de 2ª ordem.

No próximo exemplo vamos seguir os mesmos passos que seguimos no caso geral.

Exemplo 2.11. Vamos resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = \sec t \\ y(0) = 1, \; y'(0) = -2 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea correspondente, $y'' + y = 0$, é

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \operatorname{sen} t \tag{2.26}$$

com a condição

$$y'(t) = u_1(t)(-\operatorname{sen} t) + u_2(t) \cos t \tag{2.27}$$

ou equivalentemente

$$u_1'(t) \cos t + u_2'(t) \operatorname{sen} t = 0 \tag{2.28}$$

Assim,

$$y''(t) = u_1'(t)(-\operatorname{sen} t) + u_1(t)(-\cos t) + u_2'(t) \cos t + u_2(t)(-\operatorname{sen} t)$$

Substituindo-se $y(t), y'(t)$ e $y''(t)$ na equação obtemos

$$\begin{aligned} u_1'(t)(-\operatorname{sen} t) + u_1(t)(-\cos t) + u_2'(t) \cos t + u_2(t)(-\operatorname{sen} t) + & \\ + u_1(t) \cos t + u_2(t) \operatorname{sen} t &= \sec t \end{aligned}$$

Simplificando-se obtemos

$$u_1'(t)(-\operatorname{sen} t) + u_2'(t) \cos t = \sec t \tag{2.29}$$

Resolvendo-se o sistema linear obtido das equações (2.28) e (2.29) obtemos

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Integrando-se cada equação obtemos

$$u_1(t) = \int -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\, dt = \ln|\cos t| + c_1, \quad u_2(t) = \int 1\, dt = t + c_2,$$

Tomando $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ e substituindo-se em (2.26) obtemos a solução particular

$$y_p(t) = (\ln|\cos t|)\cos t + t \operatorname{sen} t.$$

Portanto a solução geral da equação é

$$y(t) = (\ln|\cos t|)\cos t + t \operatorname{sen} t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t. \tag{2.30}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 1$ em (2.30) obtemos $c_1 = 1$. Por (2.27), a derivada da solução particular é

$$y_p'(t) = -u_1(t) \operatorname{sen} t + u_1(t) \cos t = -(\ln|\cos t|) \operatorname{sen} t + t \cos t$$

e assim a derivada da solução geral (2.30) é dada por

$$y'(t) = -(\ln|\cos t|) \operatorname{sen} t + t \cos t - c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t. \tag{2.31}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y' = -2$ em (2.31) obtemos $c_2 = -2$. Logo a solução do PVI é

$$y(t) = (\ln|\cos t|)\cos t + t \operatorname{sen} t + \cos t - 2 \operatorname{sen} t, \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

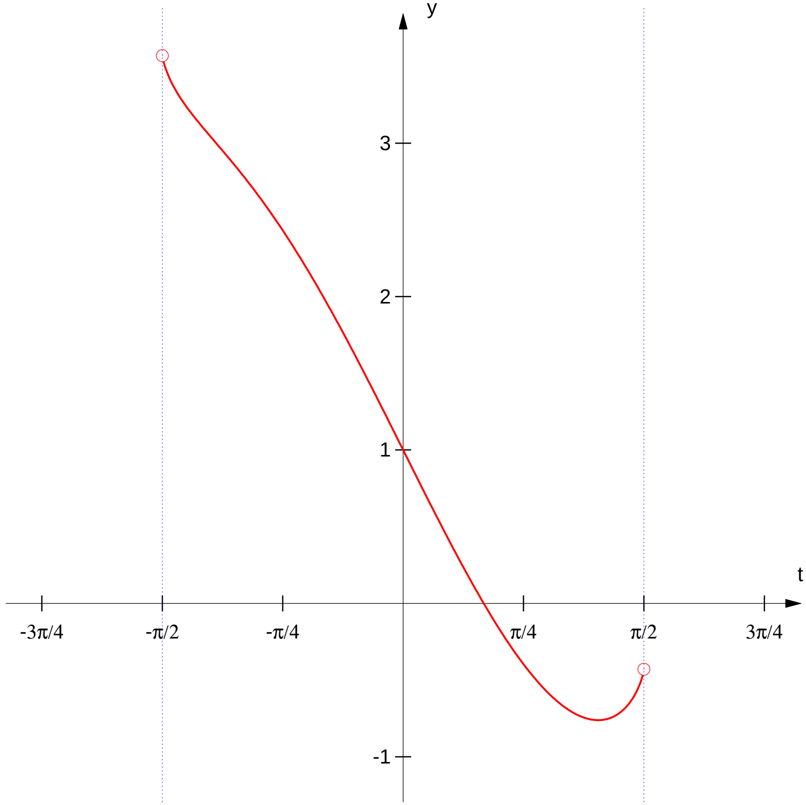


Figura 2.8: A solução do problema de valor inicial do Exemplo 2.11

2.2.2 Equações Não Homogêneas com Coeficientes Constantes

Vamos tratar equações da forma

$$ay'' + by' + cy = f(t). \tag{2.32}$$

em que a, b e c são números reais, $a \neq 0$.

Este método funciona quando a função $f(t)$ tem uma das seguintes formas:

(1) $f(t) = a_0 + \ldots + a_n t^n$, em que $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s(A_0 + \ldots + A_n t^n),$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (2.32). O Exemplo 2.12 ilustra este caso.

(2) $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)e^{\alpha t}$, em que $a_0, \ldots, a_n, \alpha \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s(A_0 + \ldots + A_n t^n)e^{\alpha t},$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (2.32). O Exemplo 2.13 ilustra este caso.

(3) $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)e^{\alpha t} \cos \beta t$ ou $f(t) = (a_0 + \ldots + a_n t^n)e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$, em que $a_0, \ldots, a_n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Neste caso deve-se procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s[(A_0 + \ldots + A_n t^n)e^{\alpha t} \cos \beta t + (B_0 + \ldots + B_n t^n)e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t],$$

em que s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_n$ são coeficientes a serem determinados substituindo-se $y_p(t)$ na equação (2.32). O Exemplo 2.14 ilustra este caso.

Exemplo 2.12. Vamos encontrar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y' = 2 + t^2 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + y' = 0$. A equação característica é

$$r^2 + r = 0$$

que tem como raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + y' = 0$ é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

O segundo membro da equação diferencial, $2 + t^2$, é da forma (1). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^1(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = A_0 t + A_1 t^2 + A_2 t^3$$

O valor de s é igual a 1, pois para $s = 0$, a parcela A_0 é solução da equação homogênea ($c_2 = 0$ e $c_1 = A_0$).

$$y_p'(t) = A_0 + 2A_1 t + 3A_2 t^2$$

$$y_p''(t) = 2A_1 + 6A_2 t.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + y' = 2 + t^2$ obtemos

$$(2A_1 + 6A_2 t) + (A_0 + 2A_1 t + 3A_2 t^2) = (A_0 + 2A_1) + (2A_1 + 6A_2)t + 3A_2 t^2 = 2 + t^2$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} A_0 & + & 2A_1 & & & = & 2 \\ & & 2A_1 & + & 6A_2 & = & 0 \\ & & & & 3A_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A_0 = 4$, $A_1 = -1$ e $A_2 = 1/3$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 \tag{2.33}$$

Para resolvermos o problema de valor inicial vamos calcular a derivada da solução geral da equação não homogênea

$$y'(t) = -c_2\, e^{-t} + t^2 - 2\, t + 4 \tag{2.34}$$

Substituindo-se $t = 0$ e $y = 1$ em (2.33) e $t = 0$ e $y' = 2$ em (2.34) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} c_1 & + & c2 & = & 1 \\ 4 & - & c2 & = & 2 \end{array} \right.$$

de onde obtemos $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$. Logo a solução do PVI é

$$y(t) = -1 + 2e^{-t} + 4t - t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

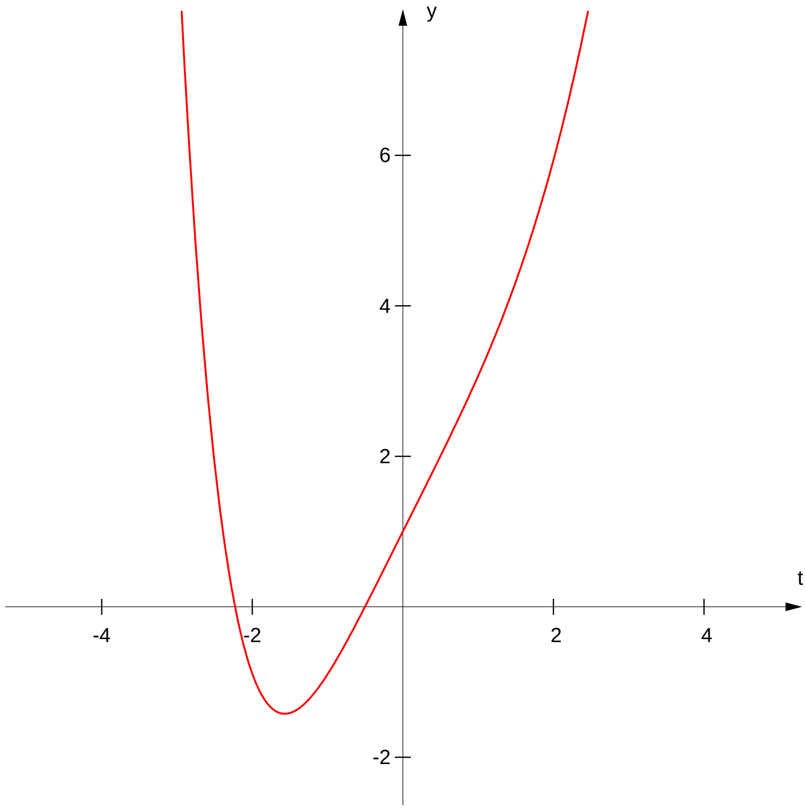


Figura 2.9: A solução do problema de valor inicial do Exemplo 2.12

Exemplo 2.13. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + y = (2+t)e^{-t}.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + y = 0$. A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

que tem como raiz $r_1 = -1$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + y = 0$ é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

O segundo membro da equação diferencial, $(2+t)e^{-t}$, é da forma (2). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^2(A_0 + A_1 t)e^{-t} = (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t}$$

O valor de s é igual a 2, pois para $s = 0$ as parcelas $A_0 e^{-t}$ e $A_1 t e^{-t}$ são soluções da equação homogênea ($c_1 = A_0,\ c_2 = 0$ e $c_1 = 0,\ c_2 = A_1$) e para $s = 1$ a parcela $A_0 t e^{-t}$ é solução da equação homogênea ($c_1 = 0$ e $c_2 = A_0$).

$$y_p'(t) = \left(2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3\right) e^{-t}$$

$$y_p''(t) = \left(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3\right) e^{-t}.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + 2y' + y = (2+t)e^{-t}$ obtemos

$$\begin{aligned}\left(2A_0 + (6A_1 - 4A_0)t + (A_0 - 6A_1)t^2 + A_1 t^3\right) e^{-t} + \\ + 2\left(2A_0 t + (3A_1 - A_0)t^2 - A_1 t^3\right) e^{-t} + \\ + (A_0 t^2 + A_1 t^3)e^{-t} &= (2+t)e^{-t}\end{aligned}$$

Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(2A_0 + 6A_1 t)\, e^{-t} = (2+t)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad 2A_0 + 6A_1 t = 2 + t$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2A_0 & & & = & 2 \\ & & 6A_1 & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A_0 = 1$ e $A_1 = 1/6$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = (t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + (t^2 + \frac{1}{6}t^3)e^{-t}$$

Exemplo 2.14. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = e^t \cos t.$$

Precisamos encontrar a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + 2y = 0$. A equação característica é

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

que tem como raízes $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. Assim a solução geral da equação homogênea correspondente $y'' + 2y' + 2y = 0$ é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t.$$

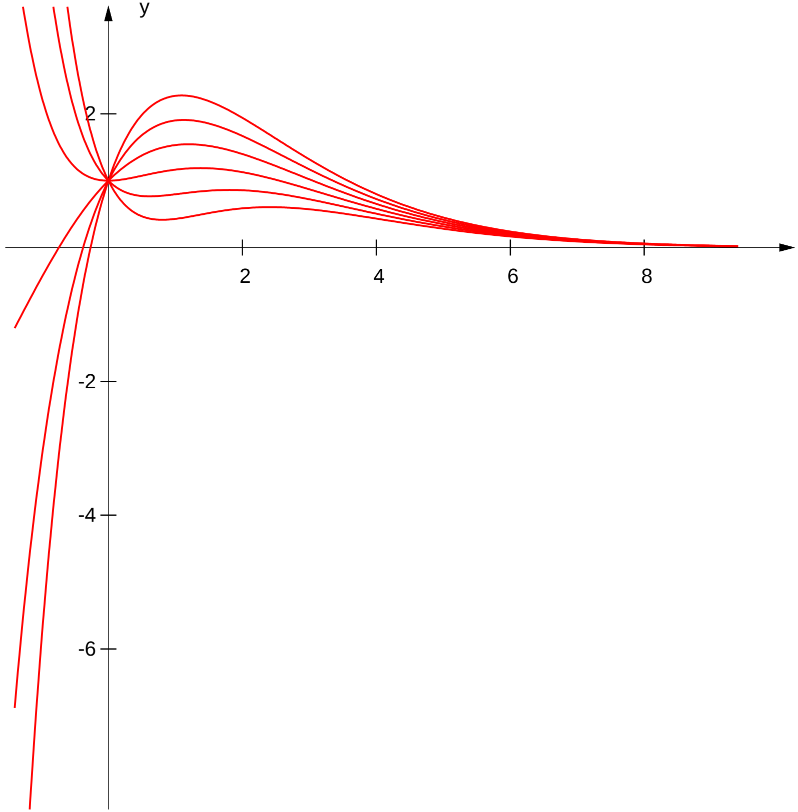


Figura 2.10: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.13

O segundo membro da equação diferencial, $e^t \cos t$, é da forma (3). Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^0(Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t$$

O valor de s é igual a 0, pois nenhuma parcela de $y_p(t)$ é solução da equação homogênea.

$$y_p'(t) = A(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t) + B(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t +) = (A+B)e^t \cos t + (B-A)e^t \operatorname{sen} t$$

$$y_p''(t) = 2Be^t \cos t - 2Ae^t \operatorname{sen} t.$$

Substituindo $y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação $y'' + 2y' + y = e^t \cos t$ obtemos

$$2Be^t \cos t - 2Ae^t \operatorname{sen} t + 2\left((A+B)e^t \cos t + (B-A)e^t \operatorname{sen} t\right) \\ + 2(Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t) = e^t \cos t$$

Simplificando o primeiro membro obtemos

$$(4A + 4B)e^t \cos t + (4B - 4A)e^t \operatorname{sen} t = e^t \cos t$$

Comparando os coeficientes de $e^t \cos t$ e de $e^t \operatorname{sen} t$ obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 4A & + & 4B & = & 1 \\ -4A & + & 4B & = & 0 \end{array} \right.$$

que tem solução $A = 1/8$ e $B = 1/8$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = \frac{1}{8}e^t \cos t + \frac{1}{8}e^t \operatorname{sen} t$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t + \frac{1}{8}e^t(\cos t + \operatorname{sen} t)$$

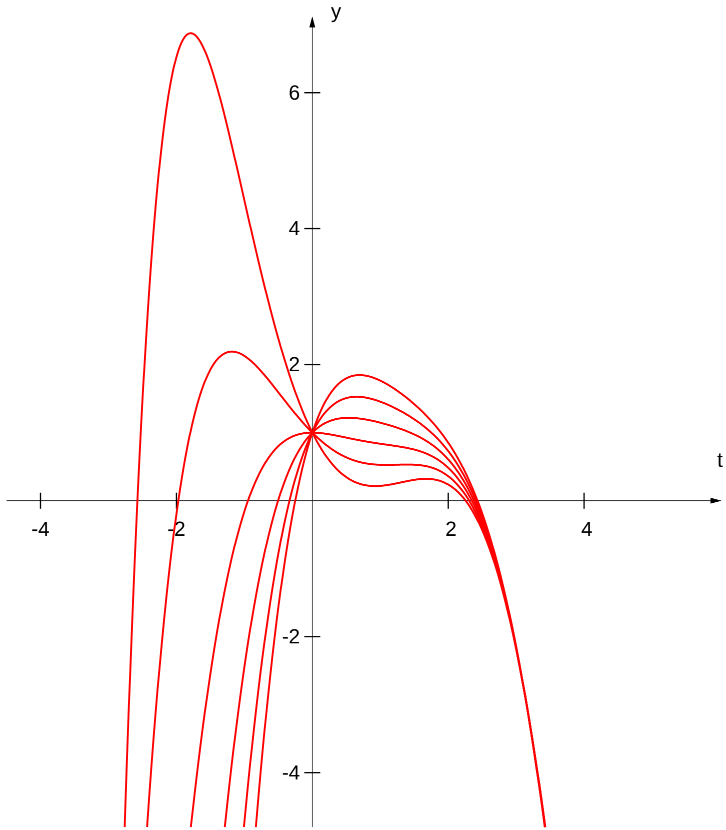


Figura 2.11: Algumas soluções da equação do Exemplo 2.14

Exercícios (respostas na página 379)

2.1. Encontre a solução geral das equações:

(a) $y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x}$.

(b) $y'' - 4y' + 6y = 3x$.

(c) $y'' + y = \operatorname{cosec} t$

(d) $y'' - y = (1 + e^{-t})^{-2}$

(e) $y'' + 4\,y = 2\operatorname{sen}(2t) + t$

(f) $y'' + 2y = e^t + 2$

2.2. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y' - 2y = t^2 + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(b) $y'' + 2\,y' + y = 3\operatorname{sen}(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(c) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 3e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(d) $2y'' + 2y' + y = t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

2.3. (a) Encontre a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = 0$$

para $\alpha > 1$, para $\alpha = 1$ e para $\alpha < 1$.

(b) Determine a forma adequada para uma solução particular da equação

$$y'' + 2y' + \alpha y = te^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha - 1}\,t)$$

para $\alpha > 1$.

(c) Para quais valores de α todas as soluções tendem a zero quando $t \to +\infty$.

2.3 Oscilações

Considere um sistema massa-mola na vertical. Seja L o alongamento provocado na mola pela colocação da massa m quando o sistema está em equilíbrio. Neste caso a magnitude da força elástica é igual a magnitude do peso, ou seja,

$$mg = kL. \tag{2.35}$$

Aqui k é chamada **constante da mola**. Seja $y(t)$ o alongamento da mola em um instante t. Defina a nova função

$$u(t) = y(t) - L.$$

Sobre a massa agem o seu peso,

$$P = mg,$$

a força da mola que é proporcional ao seu alongamento e tem sentido oposto a ele,

$$F_e = -ky(t) = -k(u(t) + L),$$

uma força de resistência proporcional a velocidade,

$$F_r = -\gamma y'(t) = -\gamma u'(t)$$

e uma força externa F_{ext}. Aqui γ é a **constante de amortecimento**.
Pela segunda lei de Newton, temos que

$$my''(t) = mg - ky(t) - \gamma y'(t) + F_{ext}$$

ou escrevendo em termos de $u(t) = y(t) - L$:

$$mu''(t) = mg - k(L + u(t)) - \gamma u'(t) + F_{ext} \tag{2.36}$$

Assim, por (2.35) e (2.36), $u(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_{ext}. \tag{2.37}$$

que é a mesma equação que satisfaz $x(t)$ no caso da mola estar na posição horizontal. Verifique!

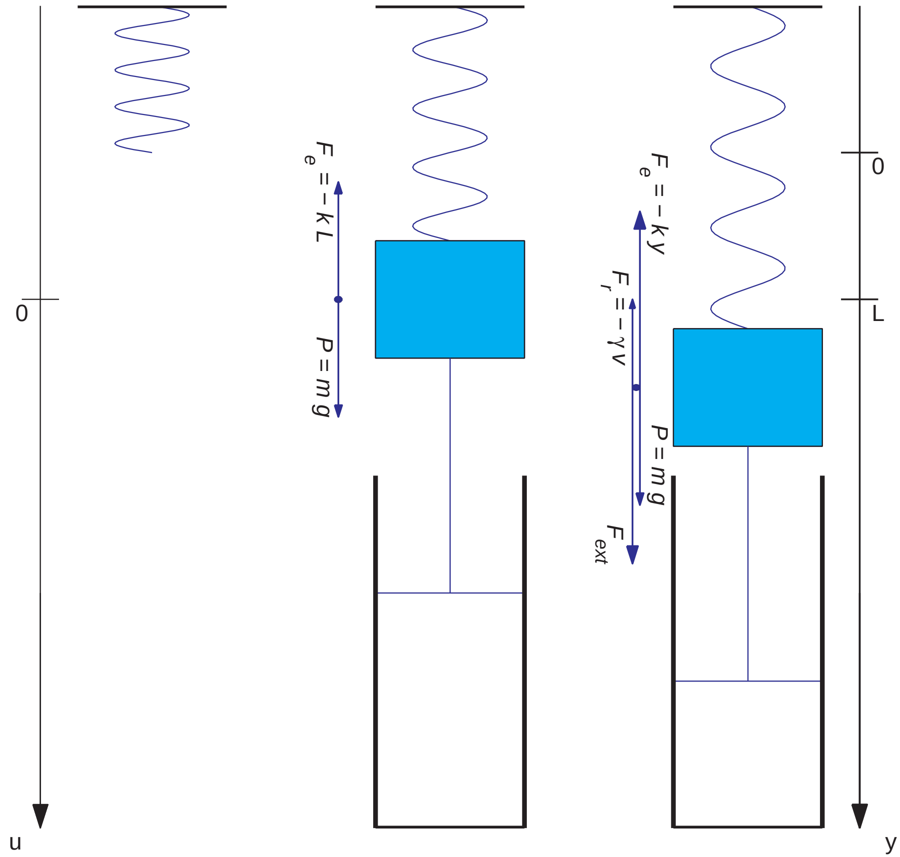


Figura 2.12: Sistema massa-mola na vertical

2.3.1 Oscilações Livres

Sem Amortecimento

Como as oscilações são livres, $F_{ext} = 0$ e como são não amortecidas, $\gamma = 0$. Assim a equação (2.37) para o movimento da massa é

$$mu'' + ku = 0$$

A equação característica é

$$mr^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$$

Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Seja $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Então a equação acima pode ser escrita em termos de ω_0 como

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)\,. \tag{2.38}$$

Marcando o ponto (c_1, c_2) no plano e escrevendo em coordenadas polares temos que

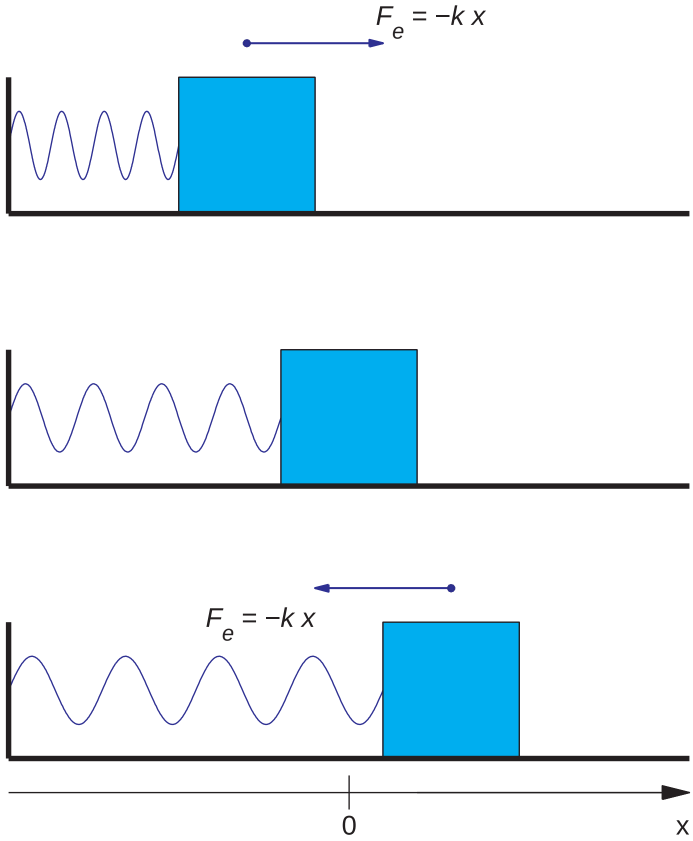
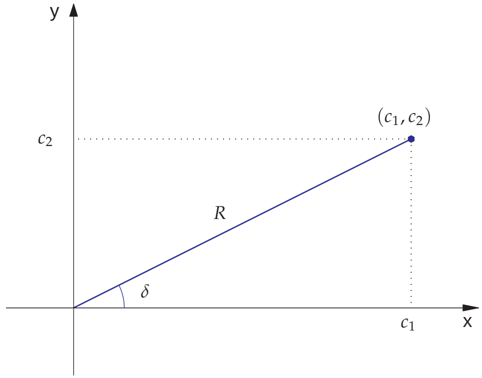


Figura 2.13: Sistema massa-mola livre não amortecido



$$\begin{cases} c_1 = R\cos\delta, \\ c_2 = R\,\mathrm{sen}\,\delta. \end{cases} \tag{2.39}$$

Substituindo-se os valores de c_1 e c_2 obtidos de (2.39) na equação (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= R\cos\delta\cos(\omega_0 t) + R\,\mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t) \\ &= R\,(\cos\delta\cos(\omega_0 t) + \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)) \\ &= R\cos(\omega_0 t - \delta), \end{aligned}$$

Aqui foi usada a relação

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b.$$

ω_0 é chamada **frequência natural** do sistema, δ a **fase** e R a **amplitude**.
Neste caso a solução da equação é periódica de **período** $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Este movimento oscilatório é chamado **movimento harmônico simples**.

Exemplo 2.15. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

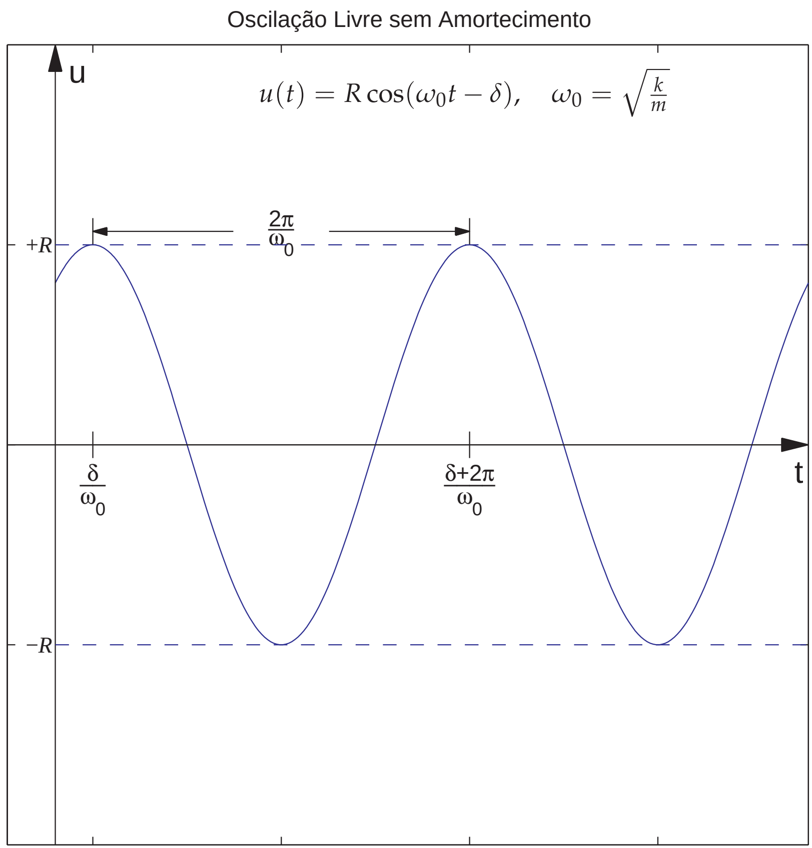


Figura 2.14: Solução do sistema massa-mola livre não amortecido

(a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

Solução:

(a) Equação característica é $r^2 + 2 = 0$, que tem como raízes $r = \pm\sqrt{2}i$.
Logo a solução geral da equação diferencial é :

$$y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{2}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right).$$

Para resolver o PVI precisamos calcular a derivada da solução geral:

$$y'(t) = -c_1\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right) + c_2\sqrt{2} \cos\left(\sqrt{2}\, t\right)$$

Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 1$ obtemos:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solução do PVI:

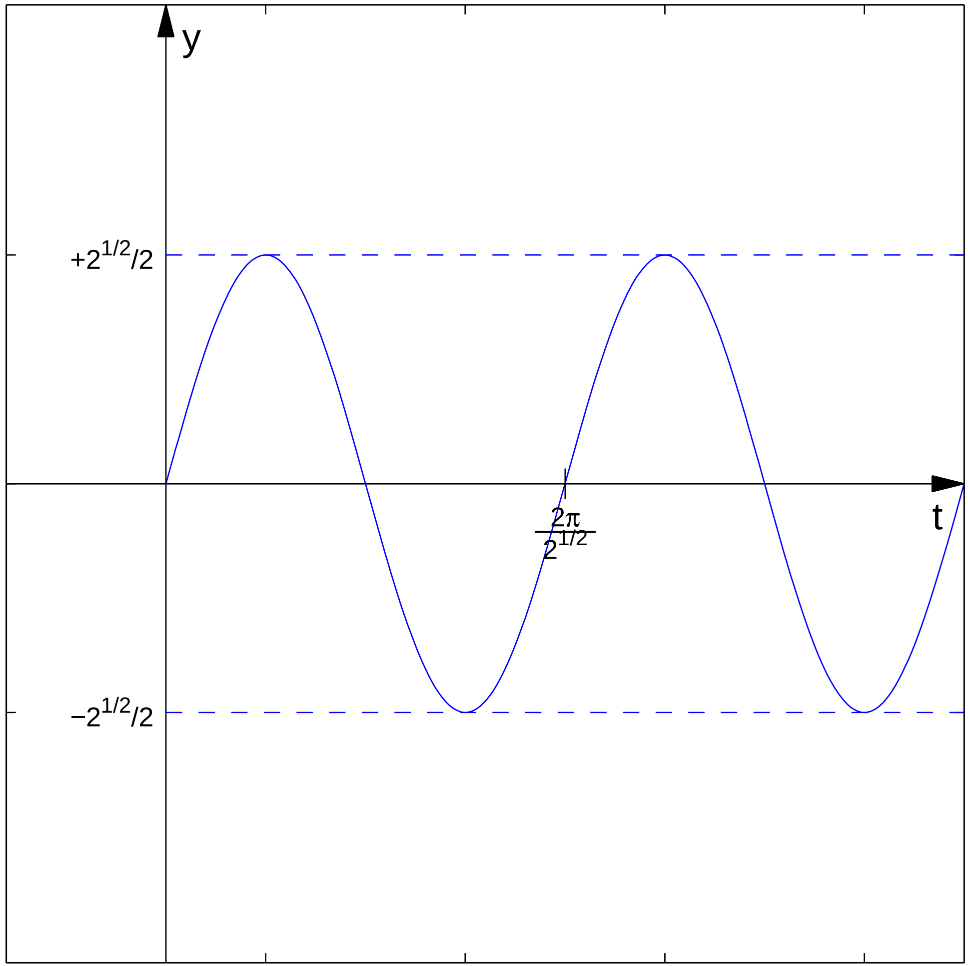
$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right).$$

Marcando o ponto $(c_1, c_2) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ no plano obtemos que $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$, ou seja,

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\, t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\sqrt{2}\, t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A amplitude é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a frequência é igual a $\sqrt{2}$, a fase é igual a $\pi/2$ e o período é igual a $2\pi/\sqrt{2}$.

(b)


y
$+2^{1/2}/2$
$-2^{1/2}/2$
$\frac{2\pi}{2^{1/2}}$
t

Com Amortecimento

Como as oscilações são livres, $F_{ext} = 0$. Assim a equação (2.37) para o movimento da massa é

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0$$

A equação característica é $mr^2 + \gamma r + k = 0$ e $\Delta = \gamma^2 - 4km$

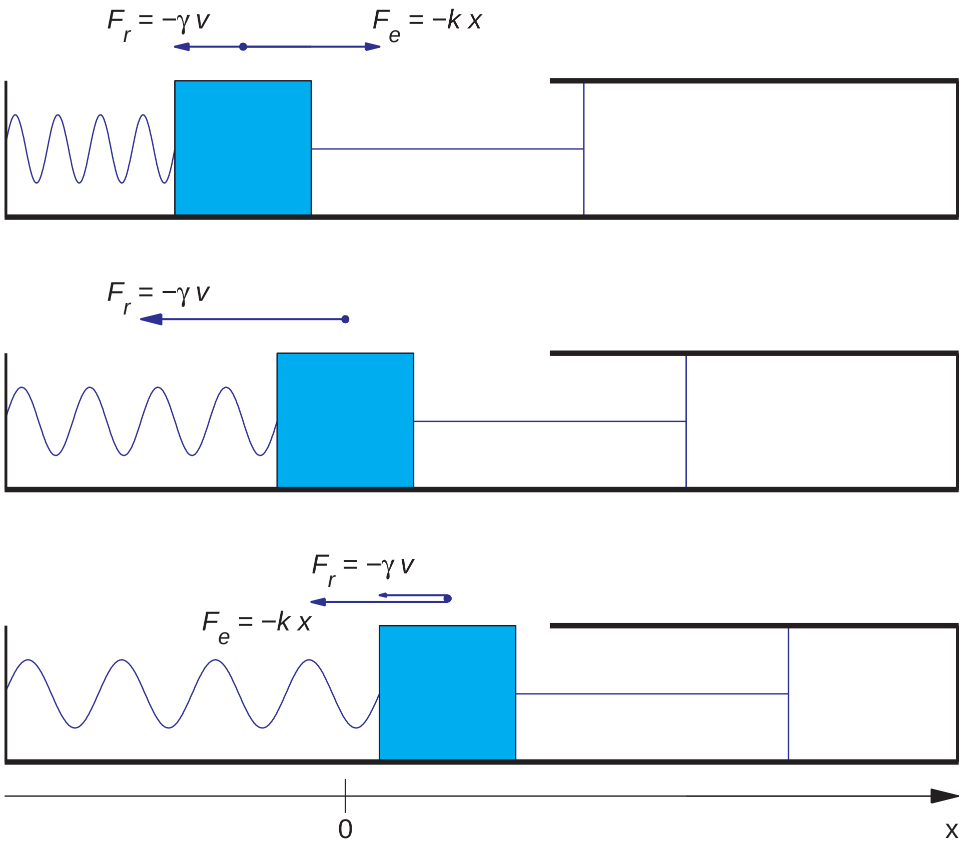


Figura 2.15: Sistema massa-mola livre com amortecimento

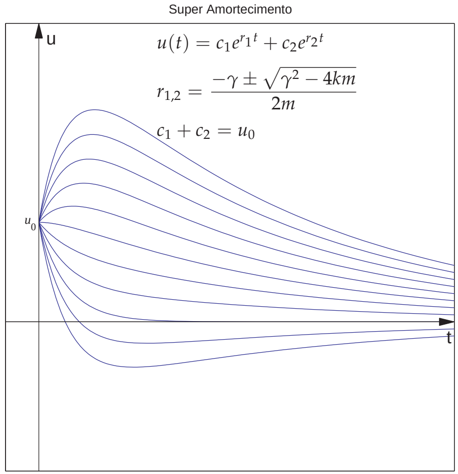


Figura 2.16: Algumas soluções do sistema massa-mola livre com superamortecimento

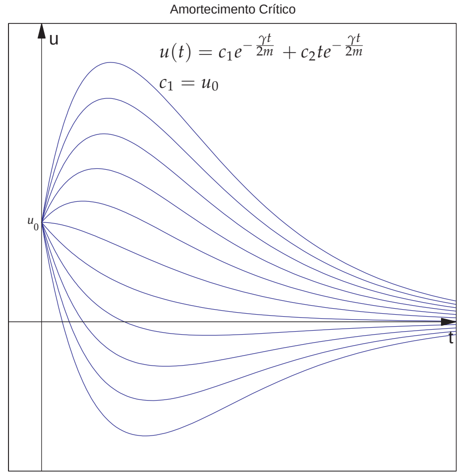


Figura 2.17: Algumas soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento crítico

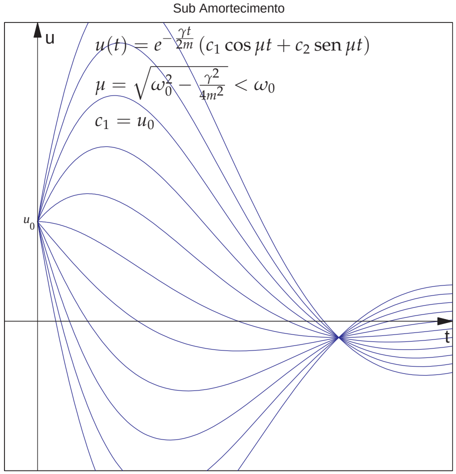


Figura 2.18: Algumas soluções do sistema massa-mola livre com subamortecimento

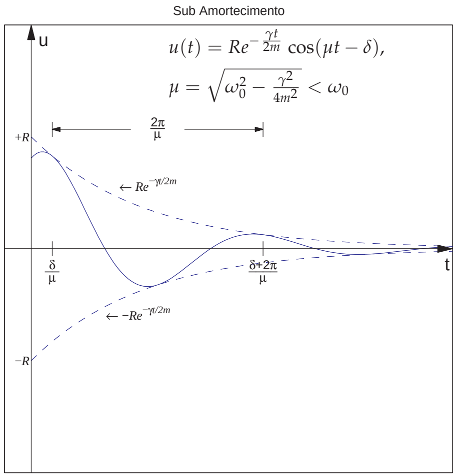


Figura 2.19: Solução típica do sistema massa-mola livre com subamortecimento

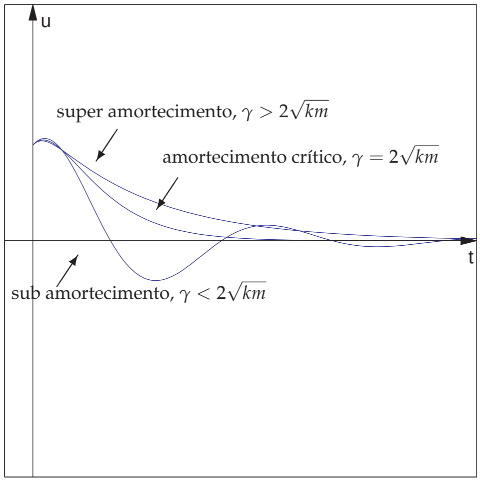


Figura 2.20: Comparação das soluções do sistema massa-mola livre com amortecimento para diferentes valores da constante de amortecimento γ

2.3.2 Oscilações Forçadas

Vamos supor que uma força externa periódica da forma $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t)$ é aplicada à massa. Então a equação (2.37) para o movimento da massa é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Oscilações Forçadas sem Amortecimento

Neste caso a equação diferencial para o movimento da massa é

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t) \tag{2.40}$$

Sabemos que as soluções são da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + u_p(t)$$

em que, pelo método das constantes a determinar,

$$u_p(t) = t^s[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)]$$

é uma solução particular e s é o menor inteiro não negativo que garanta que nenhuma parcela de $u_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e A e B são coeficientes a serem determinados substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (2.40).

Temos dois casos a considerar:

(a) Se $\omega \neq \omega_0$. Neste caso $s = 0$, pois nenhuma das parcelas de $u_p(t)$ é solução da equação homogênea correspondente. Então a solução particular é da forma

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (2.40) encontramos

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{e} \quad B = 0.$$

Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

Neste caso a solução $u(t)$ é oscilatória e limitada.

(b) Se $\omega = \omega_0$. Neste caso $s = 1$, pois para $s = 0$ as parcelas, $A\cos(\omega_0 t)$ e $B\operatorname{sen}(\omega_0 t)$, de $u_p(t)$, são soluções da equação homogênea correspondente. Então a solução particular é da forma

$$u_p(t) = t[A\cos(\omega t) + B\operatorname{sen}(\omega t)]$$

e a solução geral da equação é da forma

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + t[A\cos(\omega_0 t) + B\operatorname{sen}(\omega_0 t)]$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que substituindo-se $u_p(t)$ na equação diferencial (2.40) encontramos

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B = \frac{F_0}{2m\omega_0}.$$

Assim

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Neste caso $u(t)$ é oscilatória, mas fica ilimitada quando t tende a $+\infty$. Este fenômeno é conhecido como **ressonância** e a frequência $\omega = \omega_0$ é chamada **frequência de ressonância**.

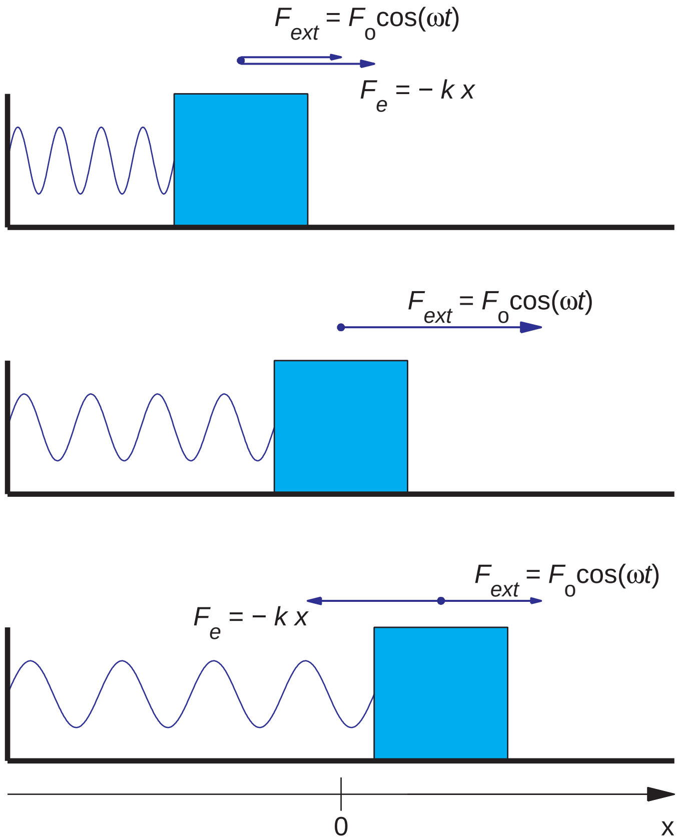


Figura 2.21: Sistema massa-mola forçado sem amortecimento

Exemplo 2.16. Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\begin{cases} mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

Temos dois casos a considerar:

(a) Se $\omega \neq \omega_0$. A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que (verifique!)

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \right).$$

Como

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

então

$$u(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \operatorname{sen}(\omega_2 t)$$

em que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0 - \omega}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0 + \omega}{2}.$$

Como $\omega_1 = \frac{\omega_0 - \omega}{2}$ é menor do que $\omega_2 = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$, então o movimento é uma oscilação de frequência ω_2 com uma amplitude também oscilatória $R(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen}(\omega_1 t)$ de frequência ω_1. Este movimento é chamado **batimento**.

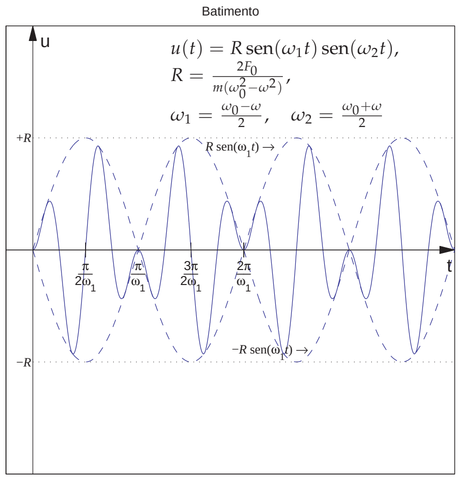


Figura 2.22: Solução do sistema massa-mola, para $u(0) = u'(0) = 0$, no caso de batimento

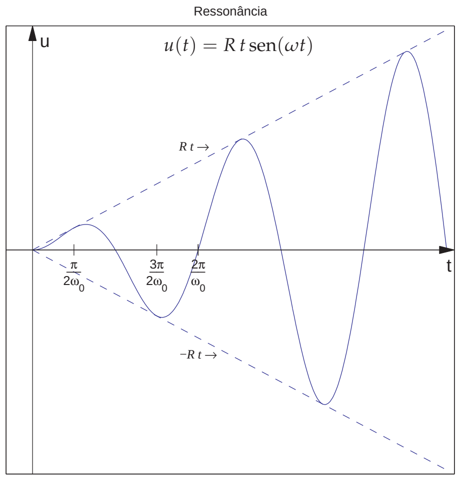


Figura 2.23: Solução do sistema massa-mola, para $u(0) = u'(0) = 0$, no caso de ressonância

(b) Se $\omega = \omega_0$. A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Já vimos que neste caso $u(t)$ fica ilimitada quando t tende a $+\infty$ que é o fenômeno da ressonância. Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que (verifique!)

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

Este movimento é uma oscilação de frequência ω_0 com uma amplitude $R(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t$ que aumenta proporcionalmente a t.

Oscilações Forçadas com Amortecimento

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Seja $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ a solução da equação homogênea correspondente. Então a solução geral desta equação é

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + u_p(t)$$

em que $u_p(t)$ é uma solução particular. Pelo método das constantes a determinar

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t).$$

Substituindo-se $u_p(t)$ e sua derivada na equação encontramos

$$A = \frac{F_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad B = \frac{F_0 \gamma \omega}{\Delta},$$

em que $\Delta = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$. Podemos escrever

$$u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) = R\cos(\omega t - \delta)$$

em que $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ e δ é tal que $A = R\cos\delta$ e $B = R\,\mathrm{sen}\,\delta$. Neste caso

$$R = \frac{F_0}{\sqrt{\Delta}}, \quad \delta = \arccos\frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{\Delta}}.$$

Assim a solução geral da equação é

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + R\cos(\omega t - \delta).$$

A solução geral da equação homogênea correspondente, $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$, é a solução do problema de oscilação livre amortecida e já mostramos que tende a zero quando t tende a $+\infty$, por isso é chamada **solução transiente**, enquanto a solução particular, $R\cos(\omega t - \delta)$, permanece e por isso é chamada **solução estacionária**.

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + R\cos(\omega t - \delta) \approx R\cos(\omega t - \delta), \quad \text{para } t \text{ suficientemente grande.}$$

Vamos analisar como varia a amplitude da solução estacionária R com a frequência da força externa ω.

$$R'(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta'(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0^2 - \omega^2 = \frac{\gamma^2}{2m^2},$$

ou seja, $R'(\omega) = 0$ se, e somente se,

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2}$$

Assim se $\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} \geq 0$ ou $\gamma \leq \sqrt{2m^2\omega_0^2} = \sqrt{2km}$, então a amplitude da solução estacionária é máxima para

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2}}.$$

Se $\gamma > \sqrt{2m^2\omega_0^2} = \sqrt{2km}$, então a amplitude da solução estacionária é decrescente e portanto seu máximo ocorre para $\omega = 0$.

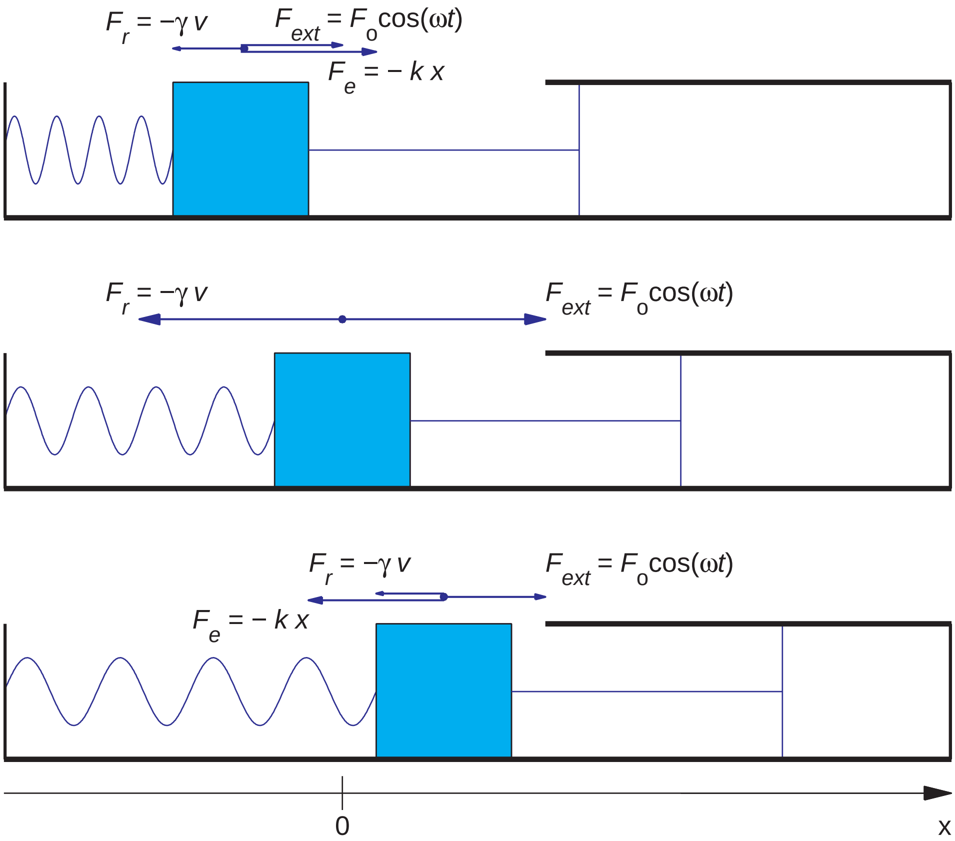


Figura 2.24: Sistema massa-mola forçado com amortecimento

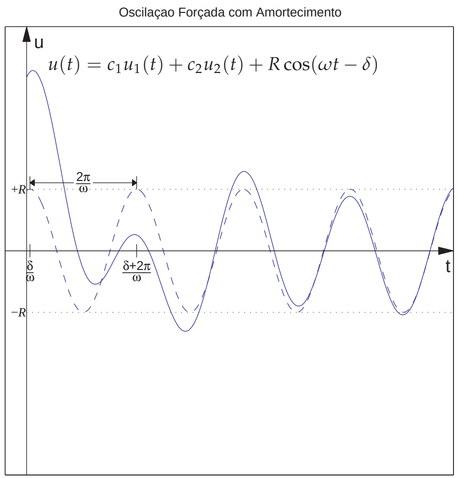


Figura 2.25: Solução do sistema massa-mola forçado com amortecimento

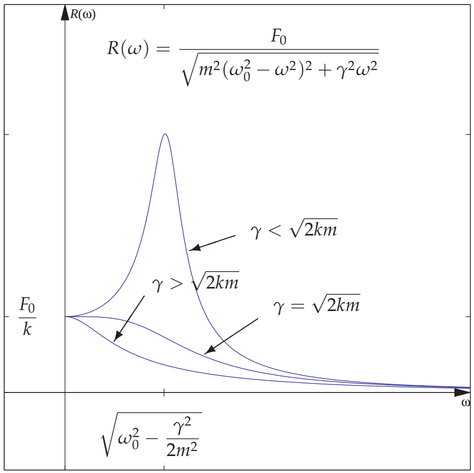


Figura 2.26: Amplitude da solução estacionária em função da frequência da força do sistema massa-mola forçado com amortecimento

2.3.3 Circuitos Elétricos

Considere um circuito elétrico formado por um capacitor, um resistor e um indutor ligados em série a um gerador como mostrado na Figura 2.27.
A queda de potencial num resistor de resistência R é igual a RI, num capacitor de capacitância C é igual a $\frac{Q}{C}$ e em um indutor de indutância L é igual a $L\frac{dI}{dt}$. Pela segunda lei de Kirchhoff (lei das malhas) a soma da forças eletromotrizes (neste caso apenas $V(t)$) é igual a soma das quedas de potencial (neste caso $R\,I$ na resistência, Q/C no capacitor e $L\frac{dI}{dt}$ no indutor), ou seja,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t) \tag{2.41}$$

Substituindo-se $I = \frac{dQ}{dt}$ obtemos uma equação diferencial de 2a. ordem para a carga elétrica no capacitor.

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t) \tag{2.42}$$

com condições iniciais $Q(0) = Q_0$ e $Q'(0) = I_0$. Uma equação diferencial de 2a. ordem para a corrente elétrica no circuito pode ser obtida derivando-se a equação (2.41), ou seja,

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt}(t)$$

e substituindo-se $I = \frac{dQ}{dt}$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dV}{dt}(t)$$

com condições iniciais $I(0) = I_0$ e $I'(0) = \frac{V(0) - RI_0 - Q_0/C}{L}$. A última condição é obtida usando a equação (2.42).

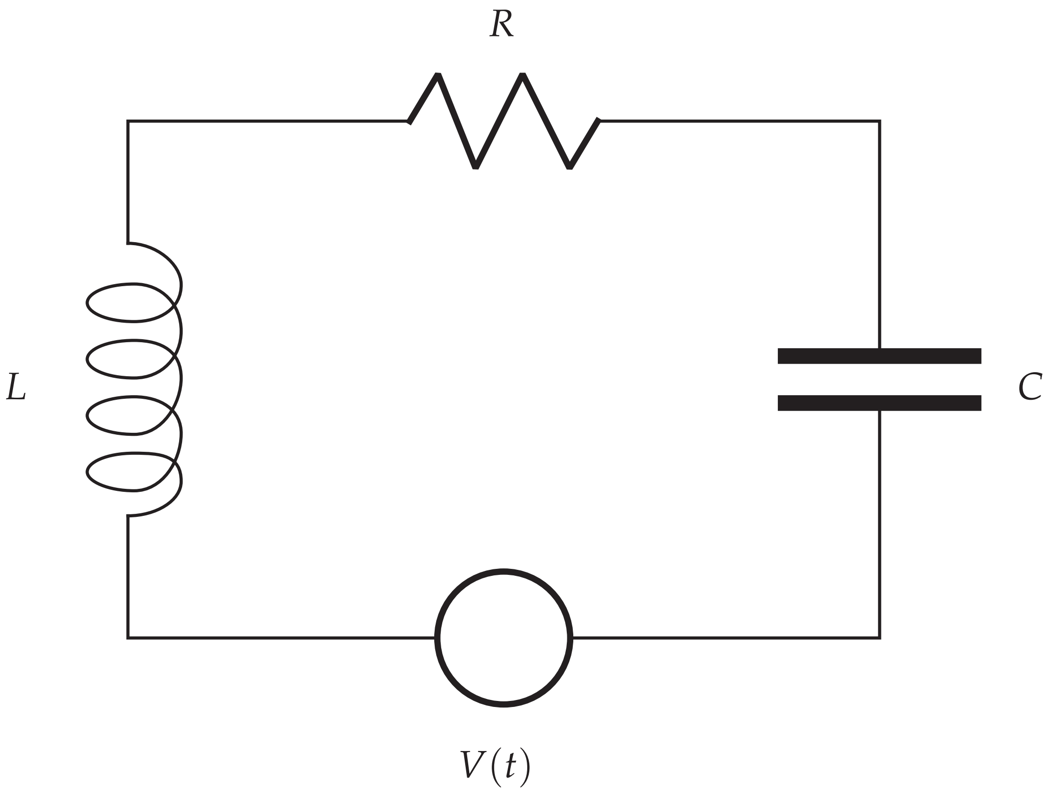


Figura 2.27: Circuito LRC

Exemplo 2.17. Um circuito possui um capacitor de $0,5 \times 10^{-1}$ F, um resistor de 25 Ω e um indutor de 5 H, em série. O capacitor se encontra descarregado. No instante $t = 0$ conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de $10e^{-t/4}$ V, e o circuito é fechado.
Vamos determinar a carga no capacitor em qualquer instante $t > 0$. A equação diferencial para a carga no capacitor é

$$5Q'' + 25Q' + \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-1}} Q = 10e^{-t/4}.$$

Dividindo-se por 5 obtemos a equação

$$Q'' + 5Q' + 4Q = 2e^{-t/4}.$$

Equação característica é

$$r^2 + 5r + 4 = 0$$

cujas raízes são $r = -1, -4$.
Assim a solução geral da equação homogênea é

$$Q(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t}.$$

Vamos procurar uma solução particular da equação não homogênea da forma $Q_p(t) = A_0 e^{-t/4}$.

$$Q_p'(t) = -\frac{1}{4} A_0 e^{-t/4}, \quad Q_p''(t) = \frac{A_0}{16} e^{-t/4}$$

Substituindo-se na equação $Q_p(t)$, $Q_p'(t)$ e $Q_p''(t)$ obtemos

$$\frac{A_0}{16} e^{-t/4} - \frac{5}{4} A_0 e^{-t/4} + 4A_0 e^{-t/4} = 2e^{-t/4}$$

$$\frac{45}{16} A_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{32}{45}$$

Portanto a solução geral da equação diferencial é

$$Q(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \frac{32}{45} e^{-t/4}$$

Derivada da solução geral: $Q'(t) = -c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{-4t} - \frac{8}{45} e^{-t/4}$
Substituindo-se $t = 0$, $Q = 0$, $Q' = 0$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1 + c_2 + \frac{32}{45} = 0 \\ -c_1 - 4c_2 - \frac{8}{45} = 0 \end{array} \right. , \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} c_1 = -8/9 \\ c_2 = 8/45 \end{array} \right.$$

Portanto a solução do PVI formado pela equação diferencial e $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 0$ é

$$Q(t) = -\frac{8}{9} e^{-t} + \frac{8}{45} e^{-4t} + \frac{32}{45} e^{-t/4}$$

Observe que

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = 0.$$

Exercícios (respostas na página 386)

3.1. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$y'' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(a) Encontre a solução geral da equação diferencial e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

3.2. Sabendo-se que o problema de valor inicial que descreve um sistema massa-mola é dado por

$$2y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

(a) Encontre a solução geral da equação e resolva o problema de valor inicial. Determine a amplitude, a frequência, a fase e o período.

(b) Esboce o gráfico da solução obtida.

3.3. Uma mola, de um sistema massa-mola sem amortecimento, tem constante de elasticidade igual a 3 N/m. Pendura-se na mola uma massa de 2 kg e o sistema sofre a ação de uma força externa de $3\cos(3t)$. Determine a função que descreve o movimento da massa em qualquer instante t, considerando a posição inicial igual a u_0 e a velocidade inicial u_0'.

3.4. Se um sistema massa-mola com uma massa de 2 kg e uma mola com constante de elasticidade igual 0,5 N/m é colocado em movimento, no instante $t = 0$, num meio em que a constante de amortecimento é igual a 1 N.s/m, determine a posição da massa em qualquer instante t, considerando a posição inicial igual u_0 e a velocidade inicial u_0'.

3.5. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Encontre a frequência, o período e a amplitude do movimento. Determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico.

(a) Se a massa é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontada para cima de 4 centímetros por segundo.

(b) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola 1 centímetro e depois colocada em movimento com uma velocidade para baixo de 10 centímetros por segundo.

(c) Se a massa é puxada para baixo contraindo a mola 2 centímetros e depois é solta.

3.6. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. A massa está presa a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado.

(a) Para quais valores da constante de amortecimento γ o sistema é super-amortecido, tem um amortecimento crítico e é sub-amortecido.

(b) Suponha que o amortecedor exerce uma força de 10^4 dinas (=gramas·centímetros por segundos^2) quando a velocidade é de 10 centímetros por segundo. Se a massa é puxada para baixo 2 centímetros e depois é solta, determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico. Qual o valor do quase período?

3.7. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento com uma força externa de $9600\cos(6t)$ dinas, determine a posição da massa como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

3.8. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. Suponha que não haja amortecimento e que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Se o sistema é colocado em movimento na posição de equilíbrio com uma força externa de $1000\cos(\omega t)$ dinas, para ω igual a frequência de ressonância, determine a posição da massa como função do tempo e faça um esboço do seu gráfico.

3.9. Uma massa de 100 gramas estica uma mola 10 centímetros. A massa está presa a um amortecedor viscoso. Suponha que a aceleração da gravidade seja de 10^3 centímetros por segundo ao quadrado. Suponha que o amortecedor exerce uma força de 4200 dinas quando a velocidade é de 1 centímetro por segundo. Se a massa está sob a ação de uma força externa de $26000\cos(6t)$ dinas, determine a posição u em função do tempo t e faça um esboço do seu gráfico, considerando somente a solução estacionária.

3.10. Um circuito possui um capacitor de $0{,}125 \times 10^{-1}$ F, um resistor de 60 Ω e um indutor de 10 H, em série. A carga inicial no capacitor é zero. No instante $t = 0$ conecta-se o circuito a uma bateria cuja tensão é de 12 V e o circuito é fechado.

(a) Determine a carga no capacitor em qualquer instante $t > 0$.

(b) Determine a carga no capacitor quando $t \to +\infty$.

(c) Esboce o gráfico da solução obtida.

3.11. Considere a equação diferencial do sistema massa-mola forçado sem amortecimento

$$mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t)$$

Mostre que a solução geral:

(a) Se $\omega \neq \omega_0$ é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t);$$

(b) Se $\omega = \omega_0$ é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

3.12. Mostre que a solução do PVI

$$\begin{cases} mu'' + ku = F_0 \cos(\omega t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Se $\omega \neq \omega_0$ é dada por

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right).$$

(b) Se $\omega = \omega_0$ é dada por

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

2.4 Soluções em Séries de Potências

Uma **série de potências** de x é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

em que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são números denominados **coeficientes da série**. Podemos definir uma função $f(x)$ que associa a cada valor de x, para o qual existe o limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \lim_{N\to\infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N),$$

o valor deste limite e escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

O maior valor de r para o qual o limite acima existe para $|x| < r$, ou seja, a **série converge** é chamado **raio de convergência** da série.

Exemplo 2.18. A série geométrica

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para } |x| < 1$$

tem raio de convergência $r = 1$.

Proposição 2.7. *São válidas as seguintes propriedades para as séries de potências:*

(a) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *com raio de convergência* r_1 *e* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$*, com raio de convergência* r_2*, então para todos os números* α *e* β*,*

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n,$$

com raio de convergência $r = \min\{r_1, r_2\}$.

(b) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$*, então para* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} x^k f(x) = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 x^k + a_1 x^{1+k} + a_2 x^{2+k} + a_3 x^{3+k} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = \sum_{n'=k}^{\infty} a_{n'-k} x^{n'} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n. \end{aligned}$$

(c) *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$*, então*

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 2x^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

(d) *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$*, para todo* x*, com* $|x| < r$ *e* $r > 0$*, então* $a_n = 0$*, para* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Para uma equação diferencial da forma

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

em que $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios tais que $P(0) \neq 0$, a solução geral pode ser escrita como uma série de potências de x como estabelecemos no próximo resultado que será demonstrado apenas ao final da seção.

Teorema 2.8. *Considere a equação*

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \tag{2.43}$$

em que $P(x), Q(x)$ e $R(x)$ são polinômios sem fatores comuns. Se $P(0) \neq 0$, então a equação tem solução geral em série de potências

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right),$$

em que $y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ são soluções fundamentais da equação que convergem (pelo menos) para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Exemplo 2.19. Considere a equação

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta equação é chamada **equação de Legendre**. Pelo Teorema 2.8 a solução geral desta equação pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais em série que convergem pelo menos para $|x| < 1$, pois $P(z) \neq 0$, para $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, já que $P(z) = 0$ se, e somente se, $z = \pm 1$.

Exemplo 2.20. Considere a equação

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0,$$

Pelo Teorema 2.8 a solução geral desta equação pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais em série que convergem pelo menos para $|x| < 1$, pois $P(z) \neq 0$, para $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, já que $P(z) = 0$ se, e somente se, $z = \pm i$.

Para encontrar a solução geral em série de potências de x, escrevemos a solução $y(x)$ como uma série de potências de x, com os coeficientes a determinar,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots ,$$

e substituímos na equação (2.43) esta série, a série da primeira derivada

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

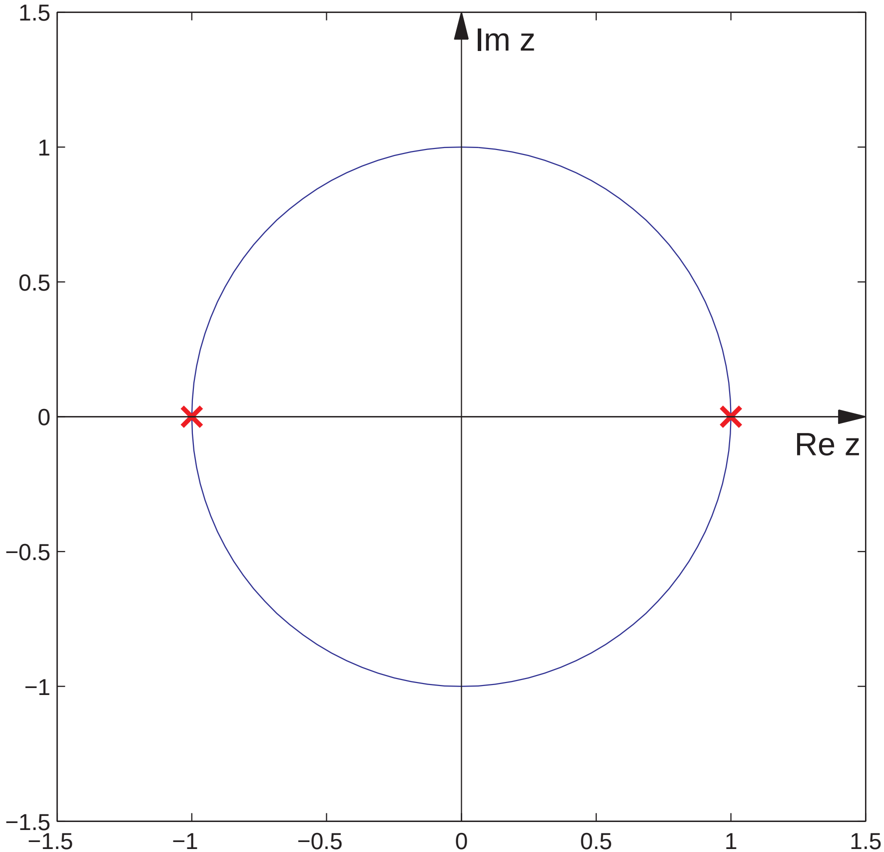


Figura 2.28: Maior círculo no plano complexo com centro na origem onde $P(z) \neq 0$, para o Exemplo 2.19

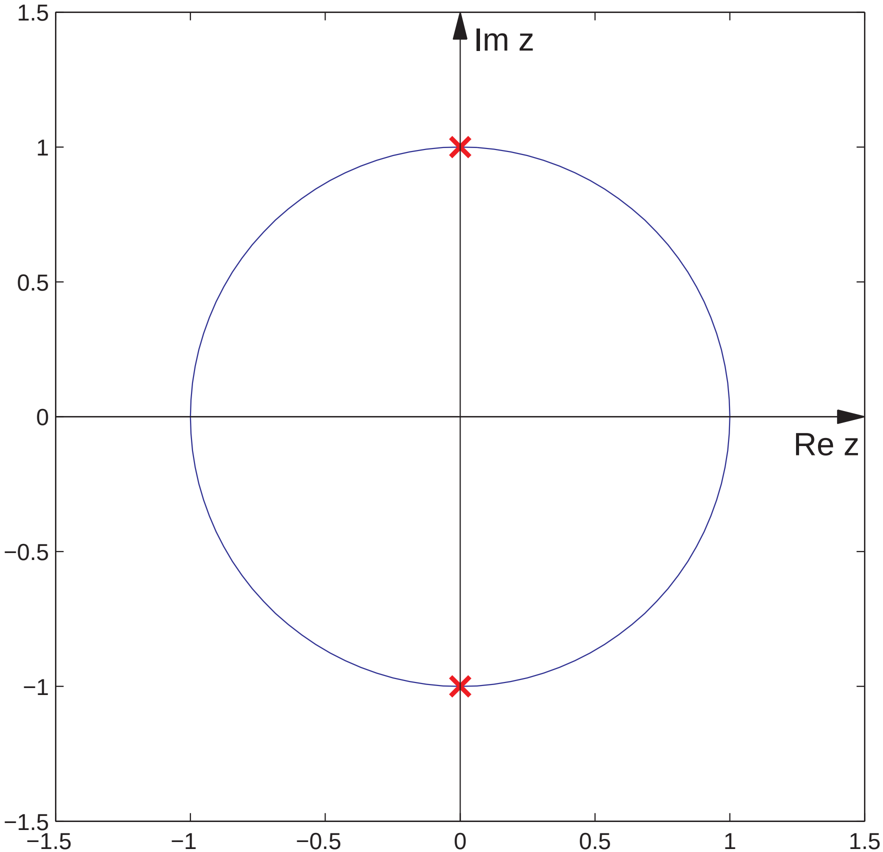


Figura 2.29: Maior círculo no plano complexo com centro na origem onde $P(z) \neq 0$, para o Exemplo 2.20

e a série da segunda derivada

$$y''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

Usamos as propriedades que apresentamos anteriormente de forma a escrever o lado esquerdo da equação (2.43) como uma série de potências de x cujos coeficientes são expressões dos coeficientes a ser determinados $a_0, a_1, \ldots$ Usando estas expressões obtemos fórmulas que dão os coeficientes a_{n+k} em termos dos coeficientes anteriores $a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots$ Desta forma obtemos qualquer coeficiente em termos dos dois primeiros coeficientes não nulos que serão as constantes arbitrárias da solução geral.

Exemplo 2.21. Considere a equação

$$y'' - xy' - y = 0.$$

Substituindo-se

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

na equação, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Usando a propriedade Proposição 2.7 (b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

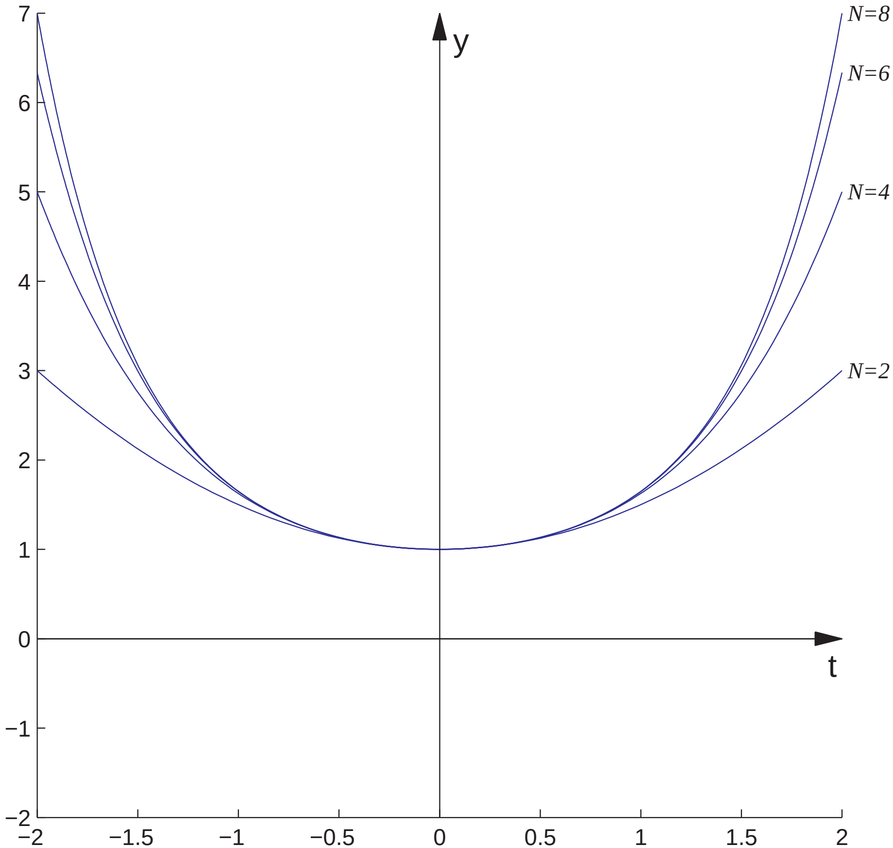


Figura 2.30: Somas parciais da solução $y_1(x)$ da equação do Exemplo 2.21

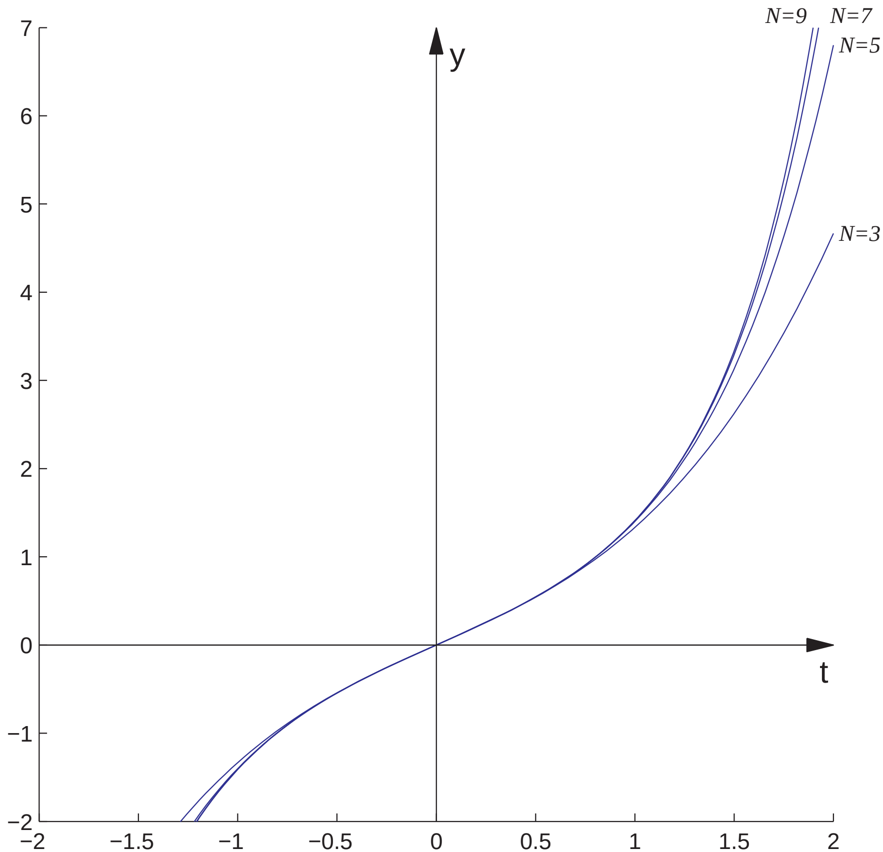


Figura 2.31: Somas parciais da solução $y_2(x)$ da equação do Exemplo 2.21

Como $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$, então da equação acima obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Usando a propriedade Proposição 2.7 (a)

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - a_n]x^n = 0$$

Como esta é a série nula, então pela propriedade Proposição 2.7 (d) os seus coeficientes têm que ser iguais a zero, ou seja,

$$\begin{cases} 2a_2 - a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - a_n = 0, \; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

De onde obtemos a **fórmula de recorrência**

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2}a_0 \\ a_{n+2} = \dfrac{n+1}{(n+2)(n+1)}a_n = \dfrac{1}{n+2}a_n, \; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Usando a fórmula de recorrência $a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}a_n$, a partir do a_0 podemos obter o a_2, a partir do a_2 podemos obter o a_4 e assim por diante, ou seja,

$$a_4 = \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4 \cdot 2}a_0, \quad a_6 = \frac{1}{6}a_4 = \frac{1}{6 \cdot 4 \cdot 2}a_0, \quad \cdots$$

Assim os coeficientes de índice par (múltiplos de 2) são dados por

$$a_{2k} = \frac{1}{2k}a_{2k-2} = \frac{1}{2k(2k-2)}a_{2k-4} = \frac{1}{2k(2k-2)\cdots 2}a_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Usando a fórmula de recorrência $a_{n+2} = \dfrac{1}{n+2} a_n$, a partir do a_1 podemos obter o a_3, a partir do a_3 podemos obter o a_5 e assim por diante, ou seja,

$$a_3 = \frac{1}{3} a_1, \quad a_5 = \frac{1}{5} a_3 = \frac{1}{5 \cdot 3} a_1, \quad \ldots$$

Assim os coeficientes de índice ímpar (múltiplos de 2 mais 1) são dados por

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} a_{2k-3} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} a_1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Separando-se a série de $y(x)$ em duas séries, uma que só contém termos de potência par e outra que só contém termos de potência ímpar e substituindo-se os valores dos coeficientes a_{2k} e a_{2k+1} encontrados acima obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \\ &= a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k} \right) + \\ &\quad + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1} \right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1}$$

Pelo Teorema 2.8 na página 334 esta solução em série é válida para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $P(z) = 1 \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Exemplo 2.22. Considere a equação

$$(x+1)y'' + y = 0.$$

Substituindo-se

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \quad \text{e} \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

na equação $(x+1)y'' + y = 0$, obtemos

$$(x+1)\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)na_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0$$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ (n+1)na_{n+1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \; n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2}a_0 \\ a_{n+2} = -\frac{n}{n+2}a_{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n, \; n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3\cdot 2}a_1 = \frac{1}{3\cdot 2}a_0 - \frac{1}{3\cdot 2}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4\cdot 3}a_2 = -\frac{1}{3\cdot 2^2}a_0 + \frac{1}{3\cdot 2^2}a_1 + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 = -\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 + \frac{1}{3\cdot 2^2}a_1$$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}x^4 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Portanto a equação tem solução geral

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}x^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

Pelo Teorema 2.8 na página 334 as séries acima convergem pelo menos para $|x| < 1$.

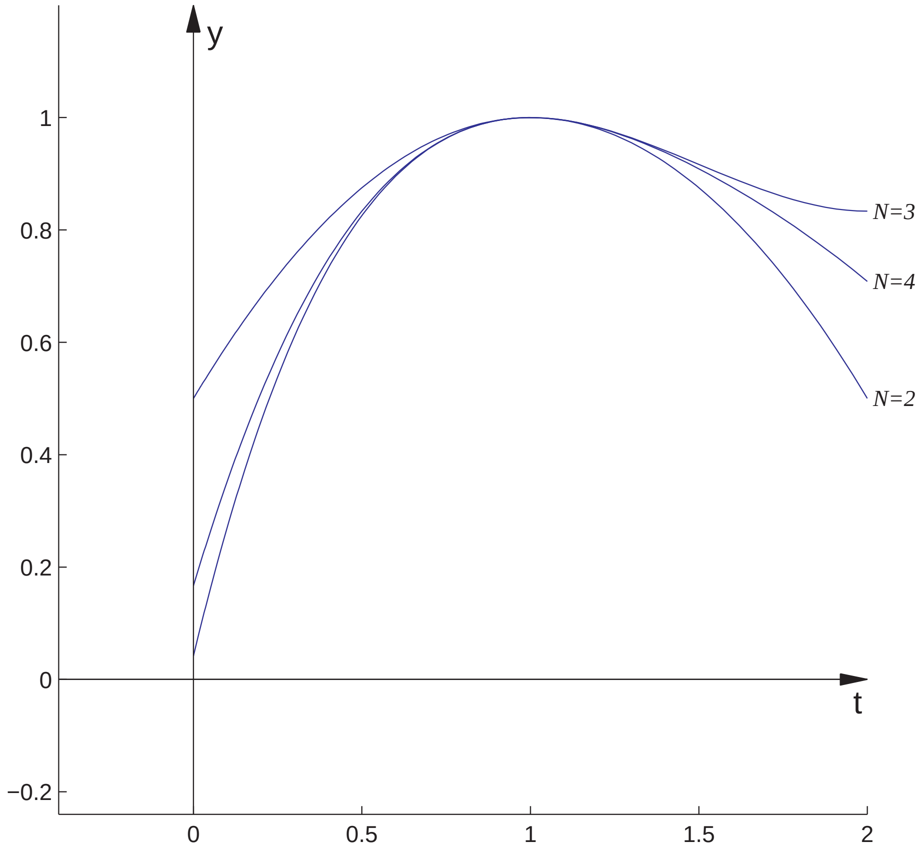


Figura 2.32: Somas parciais da solução $y_1(x)$ da equação do Exemplo 2.23

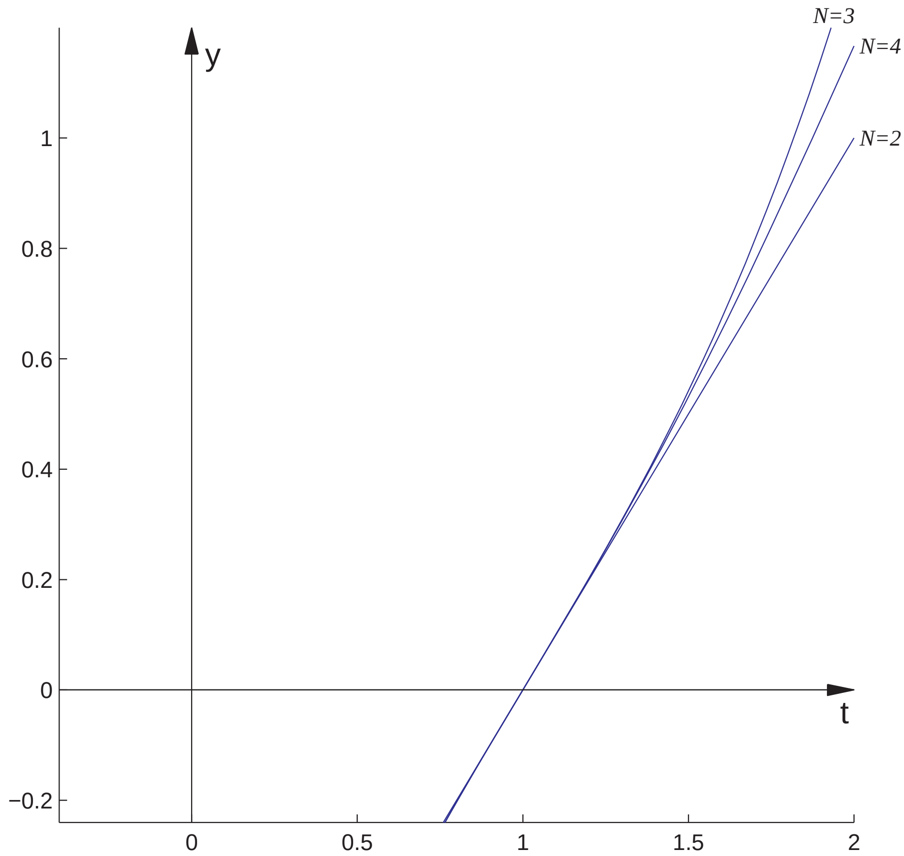


Figura 2.33: Somas parciais da solução $y_2(x)$ da equação do Exemplo 2.23

Exemplo 2.23. Considere a equação

$$xy'' + y = 0$$

Não podemos aplicar o Teorema 2.8 diretamente pois $P(x) = x$ é tal que $P(0) = 0$. Mas podemos fazer uma translação definindo, por exemplo, $x' = x - 1$. Obtemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx'}\right) = \frac{d}{dx'}\left(\frac{dy}{dx'}\right)\frac{dx'}{dx} = \frac{d^2y}{dx'^2},$$

Assim a equação se transforma em

$$(x'+1)\frac{d^2y}{dx'^2} + y = 0$$

Esta equação tem uma solução em série de potências de x' obtida no Exemplo 2.22. Substituindo-se $x' = x - 1$ na solução do exemplo anterior obtemos que a solução geral da equação é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3\cdot 2}(x-1)^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}(x-1)^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{3\cdot 2}(x-1)^3 + \frac{1}{3\cdot 4}(x-1)^4 + \cdots$$

Pelo Teorema 2.8 na página 334 as séries acima convergem pelo menos para $|x-1| < 1$ ou $0 < x < 2$.

2.4.1 Demonstração do Teorema de Existência de Soluções em Séries

Antes de demonstrar o teorema precisamos mostrar o resultado a seguir sobre variáveis complexas.

Lema 2.9. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios tais que $g(0) \neq 0$. Então $f(x)/g(x)$ tem uma representação em série de potências de x,*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

que converge para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $g(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$.

Demonstração. Sejam $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ as raízes de $g(x)$. Então $g(x)$ se fatora como

$$g(x) = a_0(x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_k)^{n_k}.$$

Podemos supor que o grau de $f(x)$ é menor do que o grau de $g(x)$ (por que?). Então decompondo $f(x)/g(x)$ em frações parciais obtemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x - a_i)^j}$$

Para $a \in \mathbb{C}$, usando a série geométrica, temos que

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{a^{n+1}}\right) z^n$$

que converge para $\left|\frac{z}{a}\right| < 1$, ou seja, para $|z| < |a|$. Além disso, usando a derivada da série anterior obtemos que

$$\frac{1}{(z-a)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a^{n+1}}\right)z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-n-1}{a^{n+2}}\right)z^n$$

que também converge para $|z| < |a|$. Como

$$\frac{1}{(z-a)^j} = (-1)^{j-1}(j-1)!\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

então $\dfrac{1}{(z-a)^j}$ tem uma representação em série de potências de z para $j = 1, 2, \ldots$ que converge para $|z| < |a|$.

Logo $f(z)/g(z)$ tem uma representação em série de potências de z que converge para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$, em que $r = \min\{|a_1|, \ldots, |a_k|\}$. Donde segue-se o resultado. ■

Demonstração do Teorema 2.8 na página 334. Dividindo-se a equação por $P(x)$ obtemos uma equação da forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Pelo Lema 2.9 os coeficientes podem ser escritos em série de potências de x

$$p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

que convergem para $|x| < r$, sendo r o raio do maior círculo no plano complexo com centro na origem tal que $P(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < r$. Suponhamos que a solução da equação possa ser escrita em série de potências de x como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Vamos mostrar que os coeficientes satisfazem uma relação de recorrência de tal forma que a série converge para $|x| < r$. As derivadas, $y'(x)$ e $y''(x)$, são representadas em série de potências como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

Substituindo-se na equação obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + q_{n-k}a_k\right]\right]x^n = 0.$$

Esta é a série nula, o que implica que todos os coeficientes são iguais a zero. Assim

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}\left[p_{n-k}(k+1)a_{k+1} + q_{n-k}a_k\right]. \tag{2.44}$$

Por outro lado, da convergência das séries de $p(x)$ e $q(x)$ segue-se que existe $M > 0$ tal que $|p_n|t^n < M$ e $|q_n|t^n < M$, para $0 < t < r$ e $n = 0, 1, 2\ldots$ Usando isso

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|\right]t^k \\ &\leq \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)|a_{k+1}| + |a_k|\right]t^k + M|a_{n+1}|t. \qquad (2.45)\end{aligned}$$

Vamos considerar a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$, com os coeficientes definidos por

$$A_0 = |a_0|, \quad A_1 = |a_1|$$

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} = \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)A_{k+1} + A_k\right]t^k + MA_{n+1}t. \tag{2.46}$$

Usando (2.45) e (2.46), por indução, temos que $|a_n| \leq A_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Vamos mostrar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ é convergente para $|x| < r$, o que implica que a série de $y(x)$ também é convergente. Usando (2.46) temos que

$$(n+1)nA_{n+1} = \frac{M}{t^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)A_{k+1} + A_k\right] t^k + MA_n t$$

$$n(n-1)A_n = \frac{M}{t^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)A_{k+1} + A_k\right] t^k + MA_{n-1} t.$$

Assim

$$\begin{aligned}
(n+1)nA_{n+1} &= \frac{1}{t}\left\{ \frac{M}{t^{n-2}} \sum_{k=0}^{n-2} \left[(k+1)A_{k+1} + A_k\right] t^k + M\left[nA_n + A_{n-1}\right] t \right\} + MA_n t \\
&= \frac{1}{t}\left\{ n(n-1)A_n - MA_{n-1}t + M\left[nA_n + A_{n-1}\right] t \right\} + MA_n t \\
&= \frac{A_n}{t}\left\{ n(n-1) + Mnt + Mt^2 \right\}
\end{aligned}$$

Então

$$\left| \frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n} \right| = \frac{n(n-1) + Mnt + Mt^2}{t(n+1)n} |x| \to \frac{|x|}{t}, \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ converge $|x| < t$, para todo $t < r$. Logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ converge para $|x| < r$. Como $|a_n| \leq A_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, então também converge para $|x| < r$ a série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Agora, fazendo $n = 0$ em (2.44), obtemos a_2 como combinação linear de a_0 e a_1. Substituindo-se este resultado em (2.44) para $n = 1$ obtemos também a_3 como combinação linear de a_0 e a_1. Continuando desta forma obtemos

$$a_n = b_n a_0 + c_n a_1, \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots.$$

Assim,

$$y(x) = a_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1 \left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right).$$

Deixamos como exercício para o leitor a verificação de que $y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n$ e $y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$ são soluções fundamentais da equação. ∎

Exercícios (respostas na página 404)

4.1. Resolva a equação diferencial dada em série de potências de x (em torno de $x_0 = 0$). Escreva uma fórmula fechada para o termo geral de cada série que compõe a solução. Dê um intervalo onde a solução é válida.

(a) $y'' + xy' + 2y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1.$

(b) $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0.$

(c) $(4 - x^2)y'' + 2y = 0.$

(d) $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0.$

(e) $(1 - x)y'' + xy' - y = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 2.$

(f) $2y'' + xy' + 3y = 0$

(g) $y'' - xy = 0$

4.2. Resolva a equação diferencial dada em série de potências de x (em torno de $x_0 = 0$). Escreva os três primeiros termos não nulos (se existirem) de cada série que compõe a solução. Dê um intervalo onde a solução é válida.

(a) $y'' + k^2x^2y = 0$, em que $k \in \mathbb{R}$.

(b) $(1 - x)y'' + y = 0.$

(c) $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 2.$

4.3. Mostre que se

$$y(x) = a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n\right) + a_1\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n\right).$$

é solução em série de potências da equação

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

então

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n$$

são soluções fundamentais da equação.

4.4. Considere a **equação de Legendre**

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

(a) Mostre que a solução geral da equação de Legendre é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!} x^{2k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(b) Mostre que se $\alpha = 2N$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_1(x)$ é um polinômio de grau $2N$ contendo apenas potências pares de x. Mostre também que se $\alpha = 2N + 1$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_2(x)$ é um polinômio de grau $2N + 1$ contendo apenas potências ímpares de x.

(c) O **polinômio de Legendre** é definido como a solução polinomial da equação de Legendre, para $\alpha = N$, que satisfaz $P_N(1) = 1$. Determine os polinômios de Legendre para $N = 0, 1, 2, 3, 4$.

4.5. Considere a **equação de Hermite**

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

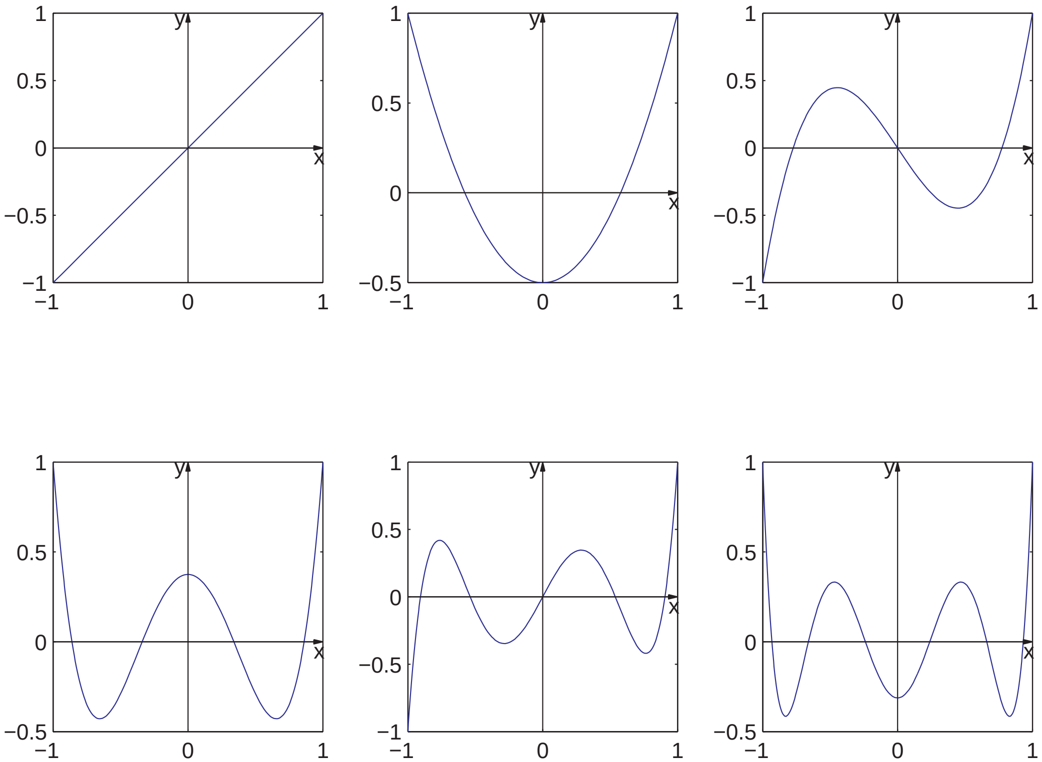


Figura 2.34: Polinômios de Legendre $P_n(x)$, para $n = 1, \ldots, 6$

(a) Mostre que a solução geral da equação de Hermite é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!} x^{2k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

(b) Mostre que se $\lambda = 4N$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_1(x)$ é um polinômio de grau $2N$ contendo apenas potências pares de x. Mostre também que se $\lambda = 2(2N+1)$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_2(x)$ é um polinômio de grau $2N+1$ contendo apenas potências ímpares de x.

(c) O **polinômio de Hermite** $H_N(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Hermite, para $\lambda = 2N$, tal que o coeficiente de x^N é igual a 2^N. Determine os polinômios de Hermite para $N = 0, 1, 2, 3, 4$.

4.6. Considere a **equação de Chebyshev de primeiro tipo**

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0.$$

(a) Mostre que a solução geral da equação de Chebyshev é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-2)^2 - \alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!} x^{2k},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k-1)^2 - \alpha^2)\cdots(1-\alpha^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

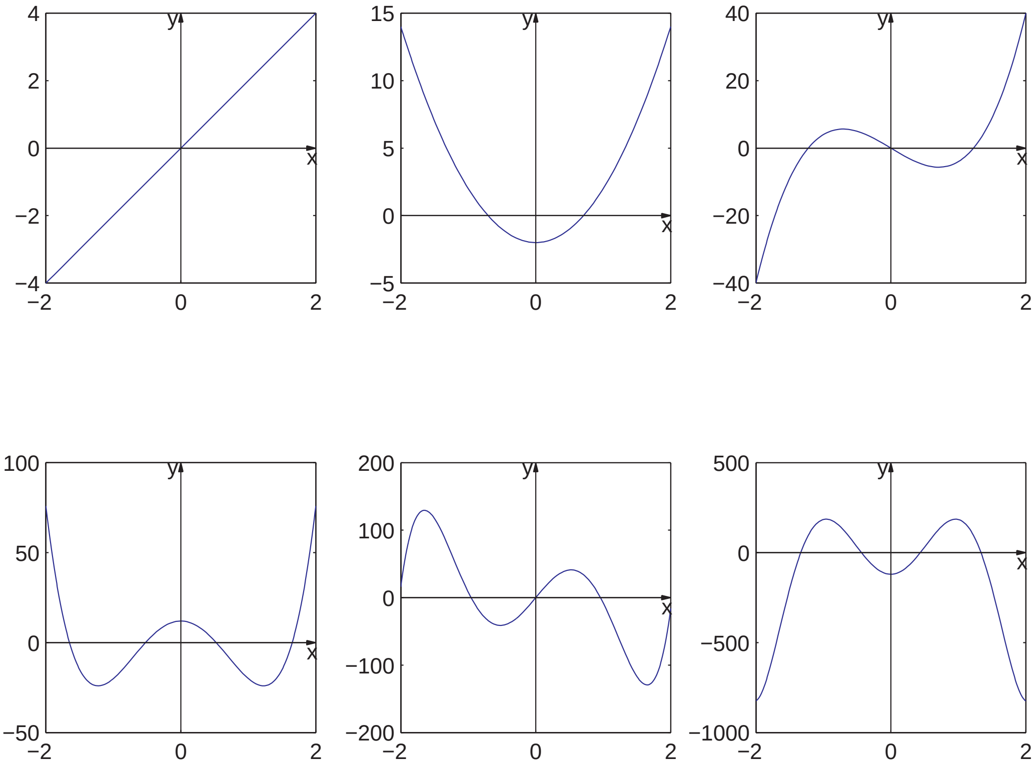


Figura 2.35: Polinômios de Hermite $H_n(x)$, para $n = 1, \ldots, 6$

(b) Mostre que se $\alpha = 2N$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_1(x)$ é um polinômio de grau $2N$ contendo apenas potências pares de x. Mostre também que se $\alpha = 2N + 1$, para $N = 0, 1, 2, \ldots$, então $y_2(x)$ é um polinômio de grau $2N + 1$ contendo apenas potências ímpares de x.

(c) O **polinômio de Chebyshev de primeiro tipo** $T_N(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Chebyshev de primeiro tipo, para $\alpha = N$, tal que o coeficiente de x^N é igual a 1, se $N = 0$ e igual a 2^{N-1}, se $N > 0$. Determine os polinômios de Chebyshev de primeiro tipo para $N = 0, 1, 2, 3, 4$.

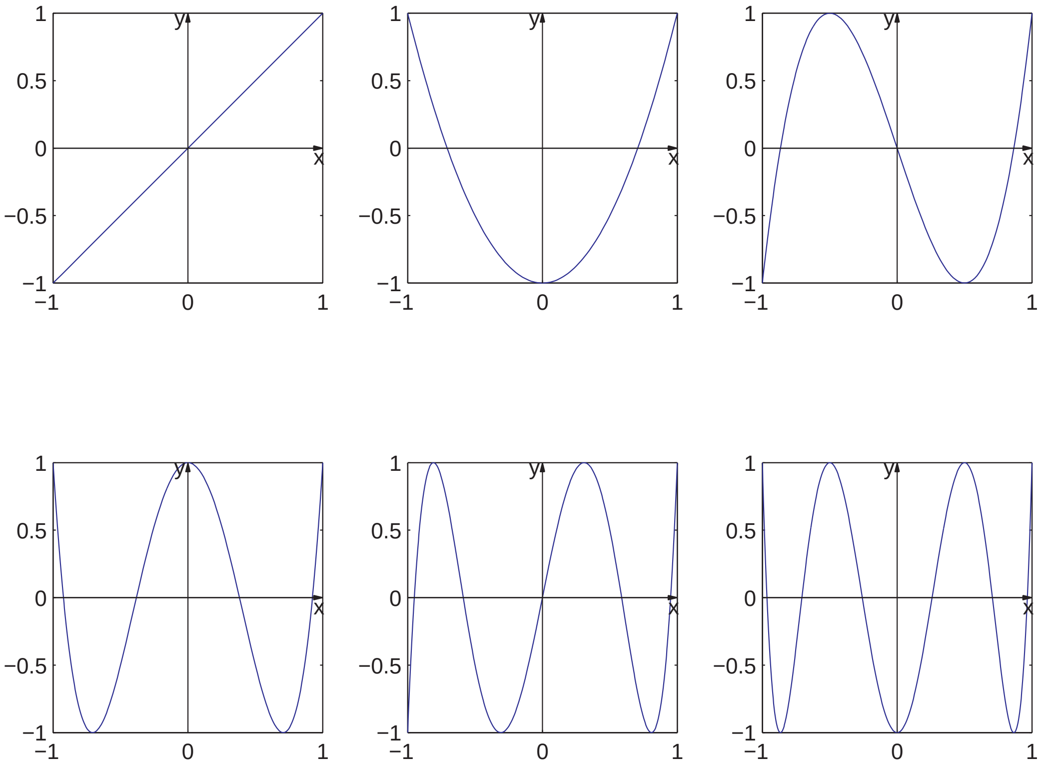


Figura 2.36: Polinômios de Chebyshev de primeiro tipo $T_n(x)$, para $n = 1, \ldots, 6$

2.5 Mudanças de Variáveis

2.5.1 Equações que não Contém y

Equações que podem ser escritas na forma

$$y'' = f(y', t) \tag{2.47}$$

podem ser resolvidas fazendo-se a substituição $v(t) = y'(t)$. O que transforma a equação (2.47) em

$$v' - f(v, t) = 0$$

Esta é uma equação de 1ª ordem. Depois de resolvida esta equação, resolve-se a equação

$$y' = v(t).$$

Exemplo 2.24. Vamos considerar a equação

$$t^2 y'' + 2ty' = 1, \quad t > 0.$$

Substituindo-se $y' = v$ na equação obtemos

$$t^2 v' + 2tv = 1$$

Dividindo-se por t^2

$$v' + \frac{2}{t} v = \frac{1}{t^2}.$$

Multiplicando-se a equação por $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = t^2$

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 v\right) = 1$$

Integrando-se obtemos

$$t^2 v(t) = t + c_1$$

Logo

$$y' = v(t) = \frac{1}{t} + \frac{c_1}{t^2}$$

Integrando-se

$$y(t) = \ln t + \frac{c_1}{t} + c_2.$$

2.5.2 Equações que não Contém t

Equações que podem ser escritas na forma

$$y'' = f(y', y) \tag{2.48}$$

podem ser resolvidas fazendo-se a substituição $v(t) = y'(t)$. O que transforma a equação em

$$\frac{dv}{dt} = f(v, y)$$

Se considerarmos $v = v(y(t))$, então

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} y' = v \frac{dv}{dy}$$

E a equação (2.48) se transforma em

$$v \frac{dv}{dy} = f(v, y)$$

Depois de resolvida esta equação resolve-se a equação

$$y' = v(y)$$

Exemplo 2.25. Considere a equação

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Substituindo-se

$$v = y' \quad \text{e} \quad y'' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

na equação obtemos

$$yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0.$$

Logo

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad y\frac{dv}{dy} + v = 0.$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1.$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\ln|v|\right) = -\frac{1}{y}$$

$$\ln|v| = -\ln|y| + \tilde{c}_1$$

$$\ln|vy| = \tilde{c}_1$$

$$vy = c_1$$

Substituindo-se $v = y'$ obtemos

$$yy' = c_1$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{2}\right)y' = c_1$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y^2}{2}\right) = c_1$$

Assim a solução da equação inicial é dada implicitamente por

$$\frac{y^2}{2} = c_1 t + c_2.$$

2.5.3 Equações de Euler

As **equações de Euler** são equações que podem ser escritas na forma

$$x^2 y'' + bxy' + cy = 0. \tag{2.49}$$

em que b e c são constantes reais. Para $x > 0$, a substituição $t = \ln x$ transforma a equação de Euler numa equação linear com coeficientes constantes.

$$\frac{dy}{dx} = y' \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} y'$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{x^2} y' + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(y'\right) = -\frac{1}{x^2} y' + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(y'\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} y' + \frac{1}{x^2} y''$$

Substituindo-se na equação de Euler (2.49) obtemos a equação linear com coeficientes constantes

$$y'' + (b-1)y' + cy = 0.$$

Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais desta equação, então

$$y(x) = c_1 y_1(\ln x) + c_2 y_2(\ln x)$$

é a solução geral da equação de Euler (2.49) para $x > 0$.

Exemplo 2.26. Vamos resolver as equações seguintes para $x > 0$.

(a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

(b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

(c) $x^2y'' - xy' + 5y = 0$

Solução:

(a) Fazendo $t = \ln x$ a equação $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ se transforma em

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2, 1$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1e^{2\ln x} + c_2e^{\ln x} = c_1x^2 + c_2x$$

(b) Fazendo $t = \ln x$ a equação $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ se transforma em

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = -2$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1e^{-2\ln x} + c_2e^{-2\ln x}\ln x = c_1x^{-2} + c_2x^{-2}\ln x$$

(c) Fazendo $t = \ln x$ a equação $x^2y'' - xy' + 5y = 0$ se transforma em

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm 2i$$

Solução geral:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\ln x} \cos(2 \ln x) + c_2 e^{\ln x} \operatorname{sen}(2 \ln x) \\ &= c_1 x \cos(2 \ln x) + c_2 x \operatorname{sen}(2 \ln x) \end{aligned}$$

2.5.4 Outras Mudanças

Exemplo 2.27. Vamos encontrar a solução geral da equação

$$ty'' + (2t^2 - 1)y' + t^3 y = 0, \quad \text{para } t > 0$$

fazendo a mudança de variáveis $x = t^2/2$.

$$x = t^2/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = t,$$

$$y' = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = t\frac{dy}{dx},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx} + t\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + t\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} + t^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Substituindo-se na equação obtemos

$$t(\frac{dy}{dx} + t^2\frac{d^2y}{dx^2}) + (2t^2 - 1)t\frac{dy}{dx} + t^3 y = 0$$

Simplificando-se e dividindo-se por t^3 obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

A solução geral desta equação é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Substituindo-se $x = t^2/2$, temos que a solução geral da equação inicial é

$$y(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2 t^2 e^{-t^2/2}$$

Exercícios (respostas na página 418)

5.1. Resolva as equações abaixo fazendo a substituição $v = y'$.

(a) $y'' + (y')^2 = 0$

(b) $ty'' = y'$

(c) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^{-3}$

5.2. Resolva as equações abaixo fazendo a substituição $v = y'$.

(a) $y'' + y(y')^3 = 0$

(b) $y^2 y'' - y' = 0$

(c) $y'' = (y')^3 + y'$

5.3. Resolva as equações abaixo para $x > 0$ fazendo a substituição $t = \ln x$.

(a) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

(b) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

(c) $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$

2.6 Respostas dos Exercícios

1. Equações Homogêneas (página 277)

1.1. (a) $2x^2y_1'' - xy_1' - 9y_1 = 2x^2(6x) - x(3x^2) - 9x^3 = 12x^3 - 3x^3 - 9x^3 = 0$
Logo, $y_1(x) = x^3$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = x^3$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^3.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^3 + 3v(x)x^2 \quad \text{e}$$

$$y''(x) = v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x,$$

então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$2x^2y'' - xy' - 9y = 0$
$2x^2(v''(x)x^3 + 6v'(x)x^2 + 6v(x)x) - x(v'(x)x^3 + 3v(x)x^2) - 9v(x)x^3 = 0$
$2x^5v''(x) + 11x^4v'(x) = 0.$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$2xw' + 11w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$2\frac{w'}{w} = -\frac{11}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2\ln|w|\right) = -\frac{11}{x}$$

$$2\ln|w| = -11\ln|x| + \tilde{c}_1$$

$$\ln\left|x^{11}(w(x))^2\right| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1x^{-11/2}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1\int x^{-11/2}dx = -c_1\frac{2}{9}x^{-9/2} + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = -9/2$ obtemos $v(x) = x^{-9/2}$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-9/2}x^3 = x^{-3/2}$$

Vamos ver que $y_1(x) = x^3$ e $y_2(x) = x^{-3/2}$ são soluções fundamentais da equação.
$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x^3 & x^{-3/2} \\ 3x^2 & -\frac{3}{2}x^{-5/2} \end{bmatrix} = -\frac{9}{2}x^{1/2} \neq 0$, para $x \neq 0$.

1.2. (a) $x^2 y_1'' + 3xy_1' + y_1 = x^2(2x^{-3}) + 3x(-x^{-2}) + x^{-1} = 2x^{-1} - 3x^{-1} + x^{-1} = 0$
Logo, $y_1(x) = x^{-1}$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = x^{-1}$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)x^{-1}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2} \quad \text{e}$$
$$y''(x) = v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3},$$

então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$x^2y'' + 3xy' + y = 0$
$x^2(v''(x)x^{-1} - 2v'(x)x^{-2} + 2v(x)x^{-3}) + 3x(v'(x)x^{-1} - v(x)x^{-2}) + v(x)x^{-1} = 0$
$xv''(x) + v'(x) = 0.$
Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$xw' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}(\ln|w|) = -\frac{1}{x}$$
$$\ln|w| = -\ln|x| + \tilde{c}_1$$
$$\ln|xw(x)| = \tilde{c}_1$$
$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-1}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int x^{-1} dx = c_1 \ln x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = \ln x$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x)y_1(x) = x^{-1}\ln x$$

Vamos ver que $y_1(x) = x^{-1}$ e $y_2(x) = x^{-1}\ln x$ são soluções fundamentais da equação.

$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x^{-1} & x^{-1}\ln x \\ -x^{-2} & x^{-2}(1-\ln x) \end{bmatrix} = x^{-3} \neq 0$, para $x \neq 0$

1.3. A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1-\alpha)$$

(a) Se $\alpha > 1$, então $\Delta < 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t) + c_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t)$$

(b) Se $\alpha = 1$, então $\Delta = 0$ e $r = -1$ é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

(c) Se $\alpha < 1$, então $\Delta > 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}$$

1.4. (a) $(x+3)z_1'' + (x+2)z_1' - z_1 = (x+3)2 + (x+2)2x - x^2 = 3x^2 + 6x + 6 \neq 0$
$(x+3)z_2'' + (x+2)z_2' - z_2 = (x+3)6x + (x+2)3x^2 - x^3 = 2x^3 + 12x^2 + 18x \neq 0$
$(x+3)z_3'' + (x+2)z_3' - z_3 = (x+3)e^{-x} - (x+2)e^{-x} - e^{-x} = 0$
Logo, $z_1(x) = x^2$ e $z_2(x) = x^3$ não são soluções da equação e $z_3(x) = e^{-x}$ é solução da equação.

(b) Seja $y_1(x) = e^{-x}$. Vamos procurar uma segunda solução da equação da forma

$$y(x) = v(x)y_1(x) = v(x)e^{-x}.$$

Como
$y'(x) = (v'(x) - v(x))e^{-x}$ e $y''(x) = (v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x}$,
então $y(x)$ é solução da equação se, e somente se,
$(x+3)y'' + xy' - y = 0$
$(x+3)(v''(x) - 2v'(x) + v(x))e^{-x} + (x+2)(v'(x) - v(x))e^{-x} - v(x)e^{-x} = 0.$
$(x+3)v''(x) + (-2(x+3) + (x+2))v'(x) = 0$
$(x+3)v''(x) - (x+4)v'(x) = 0$

Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$(x+3)w' - (x+4)w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} = \frac{x+4}{x+3}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|w|) = \frac{x+4}{x+3} = 1 + \frac{1}{x+3}$$

$$\ln|w| = x + \ln(x+3) + \tilde{c}_1$$

$$\ln\left|\frac{w(x)}{x+3}\right| - x = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 e^x (x+3)$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int e^x (x+3) dx = c_1 (x+2) e^x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = (x+2)e^x$ e uma segunda solução da equação

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) = (x+2) e^x e^{-x} = x + 2$$

Vamos ver que $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = x + 2$ são soluções fundamentais da equação.

$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{-x} & x+2 \\ -e^{-x} & 1 \end{bmatrix} = e^{-x}(3+x) \neq 0$, para $x \neq -3$

(c) Como $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = x + 2$ são soluções fundamentais da equação a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 (x+2),$$

Agora, como $y(1) = 1$, então substituindo $x = 1$ e $y = 1$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $c_1 e^{-1} + 3c_2 = 1$. Como $y'(1) = 3$, substituindo-se $x = 1$ e $y' = 3$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2$$

obtemos $-c_1 e^{-1} + c_2 = 3$. Resolvendo o sistema

$$c_1 e^{-1} + 3c_2 = 1, \quad -c_1 e^{-1} + c_2 = 3$$

obtemos $c_1 = -2e$ e $c_2 = 1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = -2e^{-x+1} + x + 2$$

1.5. (a) $x^2y_1'' - 6xy_1' + 10y_1 = x^2(2) - 6x(2x) + 10(x^2) = 0$
$x^2y_2'' - 6xy_2' + 10y_2 = x^2(20x^3) - 6x(5x^4) + 10(x^5) = 0$
Logo, $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x^5$ são soluções da equação.

(b) Como
$\det \begin{bmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$
então a solução geral é

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

Agora, como $y(1) = 3$, então substituindo $x = 1$ e $y = 3$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $c_1 + c_2 = 3$. Como $y'(1) = 3$, substituindo-se $x = 1$ e $y' = 3$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) \quad = \quad 2c_1x + 5c_2x^4$$

obtemos $2c_1 + 5c_2 = 3$. Resolvendo o sistema

$$c_1 + c_2 = 3, \quad 2c_1 + 5c_2 = 3$$

obtemos $c_2 = 4$ e $c_1 = -1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) \quad = \quad 4x^2 - x^5$$

1.6. $y'' + 2y' = 0$ tem solução geral $y(t) = k_1e^{-2t} + k_2$. Logo, $k_1 + k_2 = a, k_1 = -b/2$ e $k_2 = a + b/2$ e $y \to a + b/2$ quando $t \to +\infty$.

1.7. Se $0 < b < 2$ então as raízes da equação característica são

$$-b/2 \pm i\sqrt{4 - b^2}/2$$

e as soluções são da forma

$$y(t) = c_1e^{(-b/2)t}\cos\omega t + c_2e^{(-b/2)t}\sin\omega t,$$

onde $\omega = \sqrt{4 - b^2}/2$. Logo, como $0 < b$, então $y \to 0$ quando $t \to +\infty$.

1.8. As raízes da equação característica são ± 2 e a solução geral é $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}$. Então $c_1 = -c_2 = b/4$ e

$$y(t) = \frac{b}{4}(e^{2t} - e^{-2t}) = 0$$

Como $b \neq 0$, então $e^{2t} = e^{-2t}$, ou seja, $e^{4t} = 1$ e $t = 0$.

1.9. A equação característica tem $1/2$ como única raiz. Assim, a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}.$$

$y(0) = 2$ implica que $c_1 = 2$.

$$y'(t) = \frac{c_1}{2} e^{t/2} + c_2 (1 + \frac{t}{2}) e^{t/2}$$

$y'(0) = b$ implica que $c_1/2 + c_2 = b$. Assim, $c_2 = b - 1$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{(1/2)t}(2 + (b-1)t).$$

Logo, se $b \geq 1$, $y(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

1.10. A equação característica é

$$r^2 + 2b + 1 = 0$$

$$\Delta = 4(b^2 - 1)$$

- Se $|b| > 1$ então as raízes da equação característica são $-b \pm \sqrt{b^2 - 1}$ e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{(-b-\sqrt{b^2-1})t} + c_2 e^{(-b+\sqrt{b^2-1})t}.$$

  Se $b > 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

- Se $b = \pm 1$ então a raíz da equação característica é $-b$ e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}.$$

  Se $b = 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

- Se $-1 < b < 1$ então as raízes da equação característica são $-b \pm i\sqrt{1 - b^2}$ e as soluções da equação diferencial são da forma

$$y(t) = c_1 e^{-bt} \cos\left(\sqrt{1-b^2}\, t\right) + c_2 e^{-bt} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-b^2}\, t\right).$$

  Se $0 < b < 1$, então $y(t) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

Logo, para $b > 0$, então $y(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

1.11. (a)

$$p(t) = 0$$
$$q(t) = \frac{t-2}{t^2-1} = \frac{t-2}{(t-1)(t+1)}$$
$$f(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}.$$

Como $t_0 = 0$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $-1 < t < 1$.

(b)

$$p(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$$
$$q(t) = \frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{(t-1)(t+1)}$$
$$f(t) = \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{(t-1)(t+1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

(c)

$$p(t) = \frac{t+1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$
$$q(t) = \frac{1}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$$
$$f(t) = \frac{e^t}{t^2-t} = \frac{e^t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = -1$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t < 0$.

(d)

$$p(t) = \frac{t+3}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$
$$q(t) = \frac{2}{t^2-t} = \frac{t+3}{t(t-1)}$$
$$f(t) = \frac{\cos t}{t^2-t} = \frac{\cos t}{t(t-1)}.$$

Como $t_0 = 2$, então o problema de valor inicial tem solução no intervalo $t > 1$.

1.12. Substituindo-se $y = x^r$, $\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ em (2.18) obtemos

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r = 0.$$

$$\left(r^2 + (b-1)r + c\right) x^r = 0.$$

Como $x^r \neq 0$, então $y = x^r$ é solução da equação (2.18) se, e somente se, r é solução da equação

$$r^2 + (b-1)r + c = 0.$$

1.13.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1-1} & r_2 x^{r_2-1} \end{bmatrix} \\
&= x^{r_1-1}x^{r_2-1} \det \begin{bmatrix} x & x \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \\
&= (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1} \neq 0,
\end{aligned}$$

para todo $x > 0$.

1.14. Neste caso, para $x > 0$, pela fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x^{r_1} = e^{r_1 \ln x} = e^{(\alpha + i\beta)\ln x} \\
&= e^{\alpha \ln x}\left(\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \\
&= x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \quad \text{e} \\
y_2(x) &= x^{r_2} = e^{r_2 \ln x} = e^{(\alpha - i\beta)\ln x} \\
&= e^{\alpha \ln x}\left(\cos(-\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(-\beta \ln x)\right) \\
&= x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right)
\end{aligned}$$

são soluções complexas da equação diferencial (2.18).
A solução geral complexa é

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \\
&= C_1 x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) + i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \\
&\quad + C_2 x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) - i \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right) \\
&= (C_1 + C_2)x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \\
&\quad + i(C_1 - C_2)x^{\alpha}\operatorname{sen}(\beta \ln x)
\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = C_2 = 1/2$, temos que a solução

$$u(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$

e tomando $C_1 = -\frac{i}{2}$ e $C_2 = \frac{i}{2}$, temos a solução

$$v(x) = x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

$$\det \begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{bmatrix} = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0, \quad \forall\, x > 0.$$

1.15.

$$y(x) = v(x) y_1(x) = v(x) x^{\frac{1-b}{2}}.$$

Como

$$y'(x) = v'(x) x^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2} v(x) x^{\frac{-1-b}{2}} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} y''(x) \quad &= \quad v''(x) x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b) v'(x) x^{\frac{-1-b}{2}} \\ &\quad - \frac{1-b^2}{4} v(x) x^{\frac{-3-b}{2}}, \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.18):

$$x^2 (v''(x) x^{\frac{1-b}{2}} + (1-b) v'(x) x^{\frac{-1-b}{2}} - \frac{1-b^2}{4} v(x) x^{\frac{-3-b}{2}}) + b x (v'(x) x^{\frac{1-b}{2}} + \frac{1-b}{2} v(x) x^{\frac{-1-b}{2}}) + c v(x) x^{\frac{1-b}{2}} = 0$$

$$x^{\frac{5-b}{2}} v''(x) + x^{\frac{3-b}{2}} v'(x) = 0.$$

$$x v''(x) + v'(x) = 0.$$

Seja $w(x) = v'(x)$. Então a equação acima pode ser escrita como

$$x w' + w = 0.$$

Esta é uma equação de 1a. ordem separável.

$$\frac{w'}{w} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx} (\ln |w| + \ln |x|) = 0$$

$$\ln|xw(x)| = \tilde{c}_1$$

$$w(x) = v'(x) = c_1 x^{-1}$$

Resolvendo a equação para $v(x)$:

$$v(x) = c_1 \int x^{-1} dx = c_1 \ln x + c_2$$

Tomando-se $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$ obtemos $v(x) = \ln x$ e uma segunda solução da equação é

$$y_2(x) = v(x) y_1(x) = x^{\frac{1-b}{2}} \ln x$$

Vamos mostrar que

$$y_1(x) = x^{r_1} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^{r_1} \ln x$$

são soluções fundamentais da equação diferencial (2.18).

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} x^{r_1} & x^{r_1} \ln x \\ r_1 x^{r_1 - 1} & (1 + r_1 \ln x) x^{r_1 - 1} \end{bmatrix} \\ &= x^{2r_1 - 1} \det \begin{bmatrix} 1 & \ln x \\ r_1 & (1 + r_1 \ln x) \end{bmatrix} \\ &= x^{2r_1 - 1} \neq 0, \quad \text{para todo } x > 0. \end{aligned}$$

1.16. (a) Equação indicial:

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2, -1$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1}$$

(b) Equação indicial:

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

(c) Equação indicial:

$$r(r-1) + 3r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1 x^{-1} \cos(2 \ln x) + c_2 x^{-1} \operatorname{sen}(2 \ln x)$$

1.17. (a)
$$W[y_1,y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)$$

$$\begin{aligned} W[y_1,y_2]'(t) &= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) \\ &\quad - y_2'(t)y_1'(t) - y_2(t)y_1''(t) \\ &= y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1''(t) \end{aligned}$$

(b) Como $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, então
$$y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = 0 \tag{2.50}$$
$$y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = 0 \tag{2.51}$$
Multiplicando-se a equação (2.51) por $y_1(t)$ e subtraindo-se da equação (2.50) multiplicada por $y_2(t)$ obtemos

$$y_1(t)y_2''(t) - y_2(t)y_1(t)'' + p(t)(y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)) = 0,$$

ou seja, pelo item anterior
$$W[y_1,y_2]'(t) + p(t)W[y_1,y_2](t) = 0$$

(c) Pelo item anterior o wronskiano satisfaz a equação diferencial $W' + p(t)W = 0$. A equação diferencial pode ser escrita como uma equação separável
$$\frac{W'}{W} = -p(t).$$
Integrando-se em relação a t obtemos
$$\int \frac{W'}{W}dt = -\int p(t)dt$$
$$\int \frac{1}{W}dW = -\int p(t)dt$$
$$\ln|W(t)| = -\int p(t)dt$$
Aplicando-se a exponencial a ambos os membros obtemos

$$W(t) = W[y_1,y_2](t) = ce^{-\int p(t)dt}.$$

(d) Pelo item anterior, se para algum $t_0 \in I$, $W[y_1, y_2](t_0) = 0$, então $c = 0$ e $W[y_1, y_2](t) = 0$, para todo $t \in I$.
Por outro lado, se para algum $t_0 \in I$, $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, então $c \neq 0$ e $W[y_1, y_2](t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

2. Equações não Homogêneas (página 299)

2.1. (a) A equação característica é

$$r^2 + 5r + 6 = 0.$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

As raízes da equação característica são $r_1 = -3$ e $r_2 = -2$ e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

$y_p(x) = (A_0 + A_1 x)e^{-5x}$,
$y_p'(x) = A_1 e^{-5x} - 5(A_0 + A_1 x)e^{-5x} = (A_1 - 5A_0 - 5A_1 x)e^{-5x}$,
$y_p''(x) = -5A_1 e^{-5x} - 5(A_1 - 5A_0 - 5A_1 x)e^{5x} = (-10A_1 + 25A_0 + 25A_1 x)e^{-5x}$.
Substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação obtemos
$(-10A_1 + 25A_0 + 25A_1 x) + 5(A_1 - 5A_0 - 5A_1 x) + 6(A_0 + A_1 x) = x$
Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 6A_0 & - & 5A_1 & = & 0 \\ & & 6A_1 & = & 1 \end{array} \right.$$

que tem solução $A_0 = 5/36$ e $A_1 = 1/6$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \left(\frac{5}{36} + \frac{1}{6} x \right) e^{-5x}$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \left(\frac{5}{36} + \frac{1}{6} x \right) e^{-5x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

(b) A equação característica é

$$r^2 - 4r + 6 = 0.$$

$$\Delta = 16 - 24 = -8$$

As raízes da equação característica são $r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{2}$ e a solução geral da equação homogênea é

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{2}\,x) + c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)$$

$y_p(x) = A_0 + A_1 x$, $y_p'(x) = A_1$, $y_p''(x) = 0$. Substituindo-se $y_p(x)$, $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ na equação obtemos

$$-4A_1 + 6(A_0 + A_1 x) = 3x$$

Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 6A_0 & - & 4A_1 & = & 0 \\ & & 6A_1 & = & 3 \end{array} \right.$$

que tem solução $A_0 = 1/3$ e $A_1 = 1/2$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x$$

e a solução geral da equação não homogênea é

$$y(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{2}\,x) + c_2 e^{2x} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)$$

(c) Equação característica: $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$.
Solução geral da equação homogênea: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$.
Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \operatorname{sen} t \tag{2.52}$$

com a condição de que

$$y_p'(t) = -u_1(t) \operatorname{sen} t + u_2(t) \cos t$$

ou equivalentemente

$$(\cos t) u_1'(t) + (\operatorname{sen} t) u_2'(t) = 0 \tag{2.53}$$

Substituindo-se $y_p(t), y_p'(t)$ na equação obtemos

$$-(\operatorname{sen} t) u_1'(t) + (\cos t) u_2'(t) = \operatorname{cosec} t \tag{2.54}$$

Resolvendo o sistema linear formado por (2.53) e (2.54) obtemos

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \text{cotan}\, t \end{bmatrix}$$

Assim

$$u_1(t) = -\int 1\,dt = -t + c_2,$$

$$u_2(t) = \int \frac{\cos t}{\text{sen}\, t}\,dt = \ln|\,\text{sen}\, t| + c_1.$$

Tomando $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ e substituindo-se em (2.52) obtemos a solução particular

$$y_p(t) = (\ln|\,\text{sen}\, t|)\,\text{sen}\, t - t\cos t.$$

Portanto a solução geral da equação é

$$y(t) = (\ln|\,\text{sen}\, t|)\,\text{sen}\, t - t\cos t + c_1\cos t + c_2\,\text{sen}\, t.$$

(d) Equação característica: $r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 1$.
Solução geral da equação homogênea: $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.
Vamos procurar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = u_1(t)e^t + u_2(t)e^{-t} \tag{2.55}$$

com a condição de que

$$y_p'(t) = u_1(t)e^t - u_2(t)e^{-t}$$

ou equivalentemente

$$e^t u_1'(t) + e^{-t}u_2'(t) = 0 \tag{2.56}$$

Substituindo-se $y_p(t), y_p'(t)$ na equação obtemos

$$e^t u_1'(t) - e^{-t}u_2'(t) = (1 + e^{-t})^{-2} \tag{2.57}$$

Resolvendo o sistema linear formado por (2.56) e (2.57) obtemos

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\ \frac{e^t}{(1+e^{-t})^2} \end{bmatrix}$$

Assim

$$u_1(t) = \int \frac{e^{-t}}{2(1+e^{-t})^2} dt = \frac{1}{2(1+e^{-t})} + c_1,$$

$$u_2(t) = -\int \frac{e^{t}}{2(1+e^{-t})^2} dt = -\int \frac{e^{3t}}{2(e^{t}+1)^2} dt$$

Fazendo $u = e^t + 1$, então

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-u)^2}{2u^2} du \\ &= -\frac{1}{2}\int (\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + 1) du \\ &= \frac{1}{2(1+e^t)} + \ln(1+e^t) - \frac{1+e^t}{2} + c_2 \end{aligned}$$

Tomando $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ e substituindo-se em (2.55) obtemos a solução particular

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{e^t}{2(1+e^{-t})} + \frac{e^{-t}}{2(1+e^t)} \\ &\quad + e^{-t}\ln(1+e^t) - \frac{1+e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto a solução geral da equação é

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{e^t}{2(1+e^{-t})} + \frac{e^{-t}}{2(1+e^t)} \\ &\quad + e^{-t}\ln(1+e^t) - \frac{1+e^{-t}}{2} \\ &\quad + c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

(e) Eq. característica: $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2i$.
Sol. geral da eq. homog.: $y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t)$
Sol. particular da forma $y_p(t) = t[A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)] + C + Dt$.
$y_p'(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t) + t[-2A\operatorname{sen}(2t) + 2B\cos(2t)] + D$
$y_p''(t) = (-4At + 4B)\cos(2t) + (-4Bt - 4A)\operatorname{sen}(2t)$

Substituindo-se na equação
$(-4At+4B)\cos(2t)+(-4Bt-4A)\,\mathrm{sen}(2t)+4t[A\cos(2t)+B\,\mathrm{sen}(2t)]+4C+4Dt=2\,\mathrm{sen}(2t)+t$
$[-4At+4B+4At]\cos(2t)+[-4Bt-4A+4Bt]\,\mathrm{sen}(2t)+4C+4Dt=2\,\mathrm{sen}(2t)+t$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4B & = & 0 \\ -4A & = & 2 \\ 4C+4Dt & = & t \end{array}\right.$$

Obtemos $A=-1/2, B=0, C=0, D=1/4$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t)=c_1\cos(2t)+c_2\,\mathrm{sen}(2t)-\frac{t}{2}\cos(2t)+\frac{1}{4}t$$

(f) Eq. característica: $r^2+2=0 \Leftrightarrow r=\pm\sqrt{2}i$.
Sol. geral da eq. homog.: $y(t)=c_1\cos(\sqrt{2}t)+c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)$
Sol. particular da forma $y_p(t)=Ae^t+B$.
$y_p'(t)=Ae^t$
$y_p''(t)=Ae^t$
Substituindo-se na equação
$Ae^t+2(Ae^t+B)=e^t+2$
$3Ae^t+2B=e^t+2$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3A & = & 1 \\ 2B & = & 2 \end{array}\right.$$

Obtemos $A=1/3, B=1$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t)=c_1\cos(\sqrt{2}t)+c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)+\frac{1}{3}e^t+1$$

2.2. (a) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t)=c_1\,e^{-2\,t}+c_2\,e^t$$

$$y_p(t)=A_2t^2+A_1t+A_0$$

$y_p''+y_p'-2y_p=(-2A_2)t^2+(2A_2-2A_1)t+(2A_2+A_1-2A_0)$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2A_2 & & & & & = & 1 \\ 2A_2 & - & 2A_1 & & & = & 0 \\ 2A_2 & + & A_1 & - & 2A_0 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{4} \end{array}\right]$$

$$y_p(t) = -9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\, e^{-2\,t} + c_2\, e^{t} - 9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

Solução do PVI

$$y(t) = 7/12\, e^{-2\,t} + 5/3\, e^{t} - 9/4 - 1/2\, t - 1/2\, t^2$$

(b) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, te^{-t}$$

Solução particular da equação não homogênea:

$$y_p(t) = A\cos 2t + B\,\mathrm{sen}\, 2t$$

Substituindo-se na equação
$y_p'' + 2y_p' + y_p = (-3A + 4B)\cos 2t + (-4A - 3B)\,\mathrm{sen}\, 2t = 3\,\mathrm{sen}\, 2t$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -3A & + & 4B & = & 0 \\ -4A & - & 3B & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\frac{12}{25} \\ -\frac{9}{25} \end{array}\right]$$

$$y_p(t) = -\frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\, 2t$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, te^{-t} - \frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\, 2t$$

Derivada da solução geral:

$y'(t) = -c_1\, e^{-t} + c_2\,(1-t)e^{-t} + \frac{24}{25}\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{18}{25}\cos 2t$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$:

$$c_1 = \frac{12}{25}, \quad c_2 = \frac{6}{5}$$

Solução do PVI:
$y(t) = \frac{12}{25}\, e^{-t} + \frac{6}{5}\, te^{-t} - \frac{12}{25}\cos 2t - \frac{9}{25}\,\mathrm{sen}\,2t$

(c) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1\, e^{2\,t} + c_2 e^{2\,t} t$$

$$y_p(t) = 1/3\, e^{-t}$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1\, e^{2\,t} + c_2 e^{2\,t} t + 1/3\, e^{-t}$$

Solução do PVI

$$y(t) = -1/3\, e^{2\,t} + e^{2\,t} t + 1/3\, e^{-t}$$

(d) Solução geral da equação homogênea:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos(t/2) + c_2 e^{-t/2}\,\mathrm{sen}(t/2)$$

Solução particular:

$$y_p(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$$

Substituindo-se na equação:
$2y_p'' + 2y_p' + y_p = (A_2)t^2 + (4A_2 + A_1)t + (4A_2 + 2A_1 + A_0) = t^2$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} A_2 & & & & & = & 1 \\ 4A_2 & + & A_1 & & & = & 0 \\ 4A_2 & + & 2A_1 & + & A_0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y_p(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos(t/2) + c_2 e^{-t/2}\,\mathrm{sen}(t/2) + (t-2)^2$$

Derivada da solução geral:
$y'(t) = c_1 e^{-t/2}(-(1/2)\cos(t/2) - (1/2)\,\mathrm{sen}(t/2)) + c_2 e^{-t/2}(-(1/2)\,\mathrm{sen}(t/2) + (1/2)\cos(t/2)) + 2(t-2)$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$:

$$c_1 = -4, \quad c_2 = 4$$

Solução do PVI:

$$y(t) = -4e^{-t/2}\cos(t/2) + 4e^{-t/2}\,\mathrm{sen}(t/2) + (t-2)^2$$

2.3. (a) A equação característica é

$$r^2 + 2r + \alpha = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1-\alpha)$$

i. Se $\alpha > 1$, então $\Delta < 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\alpha - 1}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t) + c_2 e^{-t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t)$$

ii. Se $\alpha = 1$, então $\Delta = 0$ e $r = -1$ é a única raiz da equação característica e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$

iii. Se $\alpha < 1$, então $\Delta > 0$, as raízes da equação característica são $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\alpha}$ e a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{(-1-\sqrt{1-\alpha})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{1-\alpha})t}$$

(b) $y_p(t) = t[(A_0 + A_1 t)e^{-t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t) + (B_0 + B_1 t)e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t)]$, se $\alpha > 1$.

(c) i. Se $\alpha > 1$, então $y(t) \to 0$, pois $e^{-t} \to 0$ e $\cos(\sqrt{\alpha-1}\,t)$ e $\mathrm{sen}(\sqrt{\alpha-1}\,t)$ são limitados.

ii. Se $\alpha = 1$, então $y(t) \to 0$, pois $e^{-t} \to 0$ e $te^{-t} \to 0$

iii. Se $0 < \alpha < 1$, então $y(t) \to 0$, pois $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$ ($\sqrt{1-\alpha} < 1$).

Concluindo, $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, para $\alpha > 0$.

3. Oscilações (página 329)

3.1. (a) A equação característica é

$$r^2 + 5 = 0$$

que tem como raízes $r = \pm\sqrt{5}i$. Assim a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{5}\,t\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{5}\,t\right)$$

Para resolver o problema de valor inicial precisamos calcular a derivada da solução geral

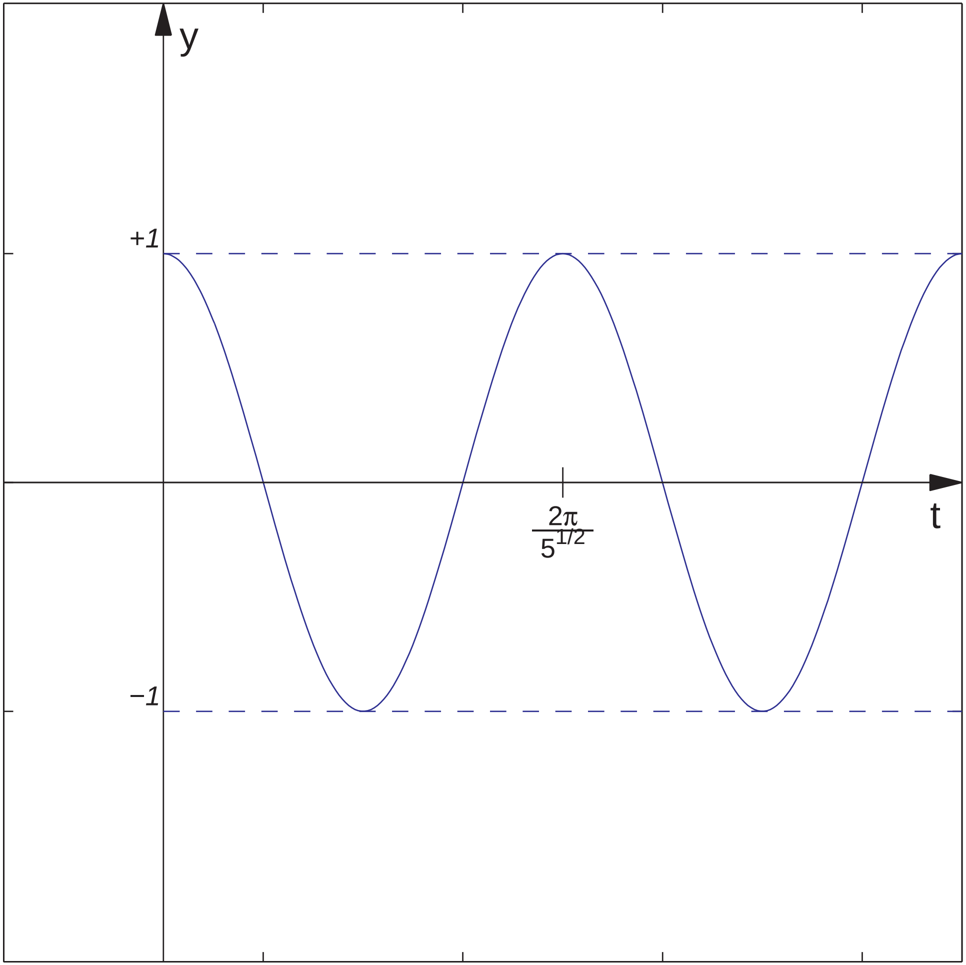
$$y'(t) = -\sqrt{5}\, c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{5}\, t\right) + \sqrt{5}\, c_2 \cos\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

Substituindo-se $t = 0$, $y = 1$ e $y' = 0$ obtemos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{5}\, t\right)$$

A amplitude é igual a 1, a frequência é igual a $\sqrt{5}$, a fase é igual a zero e o período é igual a $2\pi/\sqrt{5}$.

(b)


y
+1
−1
2π
5^{1/2}
t

3.2. (a) Equação característica: $2r^2 + 3 = 0$
Raízes: $r = \pm\sqrt{3/2}\, i$
Solução geral: $y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)$
Derivada da solução geral:
$y'(t) = -c_1\sqrt{3/2}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\, t\right) + c_2\sqrt{3/2}\cos\left(\sqrt{3/2}\, t\right)$
Substituindo-se $t = 0$, $y = 1$, $y' = 0$:

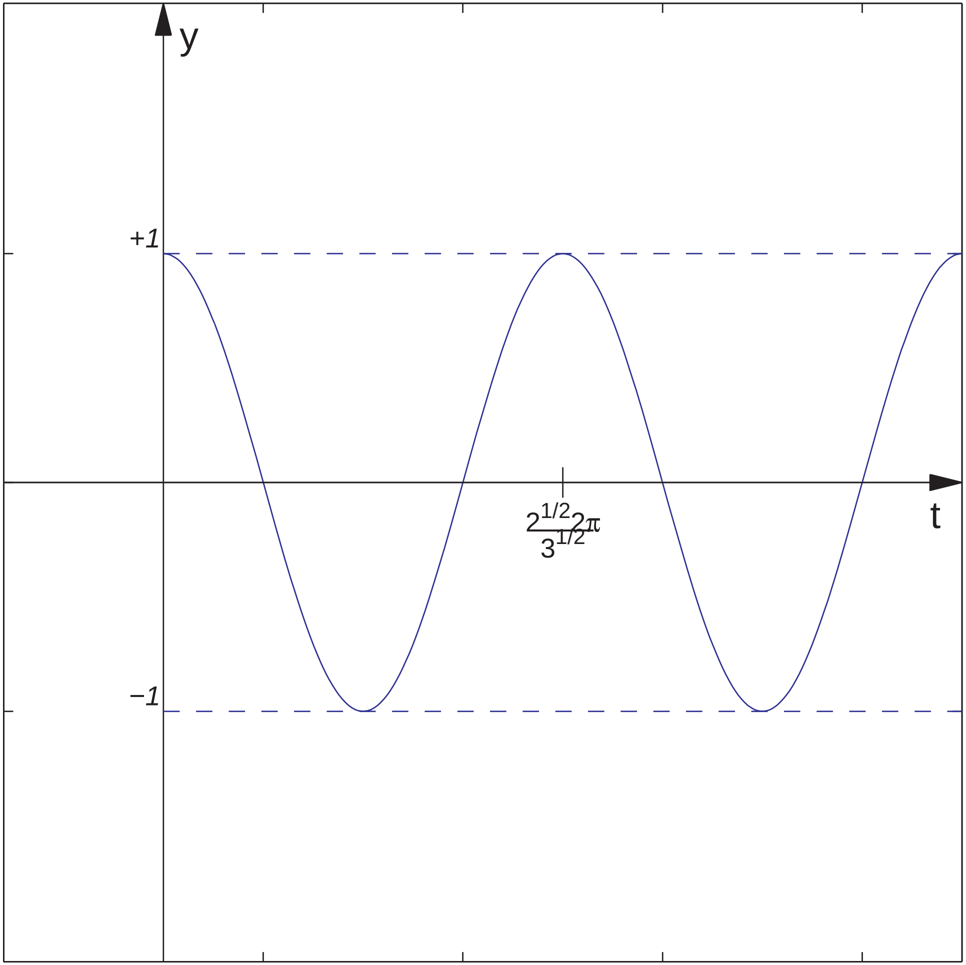
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0$$

Solução do PVI:

$$y(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)$$

A amplitude é igual a 1, a frequência é igual a $\sqrt{\frac{3}{2}}$, a fase é igual a zero e o período é igual a $2\sqrt{2}\pi/\sqrt{3}$.

(b)



y
+1
−1
t
2^{1/2}2π / 3^{1/2}

3.3.

$$2u'' + 3u = 3\cos(3t)$$

$$2r^2 + 3 = 0 \quad r = \pm i\sqrt{3/2}$$

Solução da equação homogênea

$$u(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right)$$

$$u_p(t) = A\,\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t)$$

$$u_p'(t) = -3A\operatorname{sen}(3t) + 3B\,\cos(3t)$$

$$u_p''(t) = -9A\,\cos(3t) - 9B\operatorname{sen}(3t)$$

Substituindo-se $u_p(t)$, $u_p'(t)$ e $u_p''(t)$ na equação obtemos

$$-15A\cos(3t) - 15B\operatorname{sen}(3t) = 3\cos(3t)$$

$$\left\{\begin{array}{rrcl} -15A & & = & 3 \\ & -15B & = & 0 \end{array}\right.$$

que tem solução $A = -1/5$ e $B = 0$. Assim uma solução particular da equação não homogênea é

$$u_p(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t)$$

e a solução geral da equação não homogênea é
$u(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t) + c_1\cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right)$.
$u'(t) = \frac{3}{5}\operatorname{sen}(3t) - \sqrt{3/2}c_1\operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + \sqrt{3/2}c_2\cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right)$.
$u(0) = u_0 = -\frac{1}{5} + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = u_0 + \frac{1}{5}$

$$u'(0) = u_0' = \sqrt{3/2}c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \sqrt{2/3}u_0'$$

Assim a solução do problema de valor inicial é
$u(t) = -\frac{1}{5}\cos(3t) + (u_0 + \frac{1}{5})\cos\left(\sqrt{3/2}\,t\right) + \sqrt{2/3}u_0'\operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,t\right)$.

3.4.

$$2u'' + u' + \frac{1}{2}u = 0 \quad \Delta = 1 - 4 = -3$$

$$r_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$u(t) = c_1 e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + c_2 e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)$

$u'(t) = c_1 \left(-\frac{1}{4}e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)\right) + c_2 \left(-\frac{1}{4}e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)\right)$

$$u(0) = u_0 = c_1$$

$u'(0) = u_0' = -\frac{c_1}{4} + \frac{\sqrt{3}c_2}{4} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{4u_0' + u_0}{\sqrt{3}}$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$u(t) = u_0 e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right) + \frac{4u_0' + u_0}{\sqrt{3}} e^{-t/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\,t\right)$

3.5. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$r^2 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm 10i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A frequência natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^4}{100}} = 10.$$

O período é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \text{ segundos}$$

(a) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = -4. \end{cases}$$

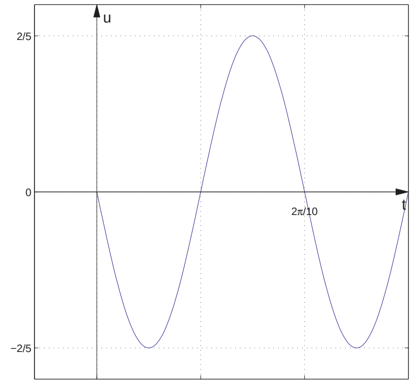
$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 = c_1, \\ u'(0) = -4 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = -\frac{2}{5} \operatorname{sen}(10t)$$

A amplitude é igual a 2/5.



(b) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 10. \end{cases}$$

$$u'(t) = -10c_1 \operatorname{sen}(10t) + 10c_2 \cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 1 = c_1, \\ u'(0) = 10 = 10c_2. \end{cases}$$

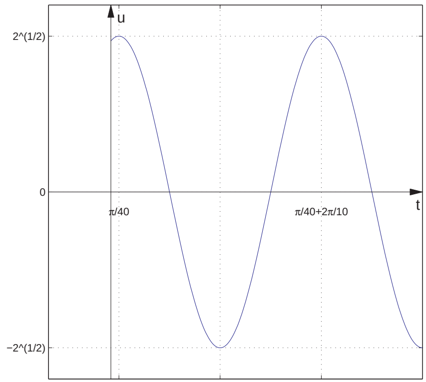
Logo $c_1 = 1$ e $c_2 = 1$. Assim

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2}, \quad \delta = \arccos\frac{c_1}{R} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \cos(10t) + \operatorname{sen}(10t) = \sqrt{2}\cos(10t - \pi/4)$$

A amplitude é igual a $\sqrt{2}$.



(c) A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

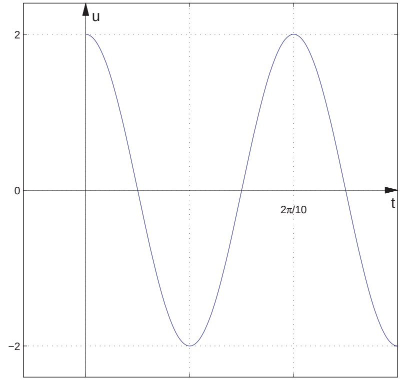
$$u'(t) = -10c_1\operatorname{sen}(10t) + 10c_2\cos(10t)$$

$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 10c_2. \end{cases}$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = 2\cos(10t)$$

A amplitude é igual a 2.



3.6. A constante da mola é

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} = 10^4$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + \gamma u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + \gamma r + 10^4 = 0$$

$$\Delta = \gamma^2 - 4 \cdot 10^6$$

(a)
- Se $\gamma > 2 \cdot 10^3$ o sistema é super-amortecido.
- Se $\gamma = 2 \cdot 10^3$ o o sistema tem um amortecimento crítico.
- Se $\gamma < 2 \cdot 10^3$ o sistema é sub-amortecido

(b) Neste caso

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{10^4}{10} = 10^3$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 10^3 u' + 10^4 u = 0$$

Equação característica:

$$10^2 r^2 + 10^3 r + 10^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -5 \pm 5\sqrt{3}\, i$$

Solução geral:

$$u(t) = c_1 e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\, t) + c_2 e^{-5t}\,\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\, t)$$

A posição em função do tempo é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' + 10u' + 100u = 0, \\ u(0) = 2, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u'(t) \quad &= \quad e^{-5t}((5\sqrt{3}c_2 - 5c_1)\cos(5\sqrt{3}\, t) + \\ &\qquad + (-5\sqrt{3} - 5c_2)\,\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\, t)) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u(0) = 2 = c_1, \\ u'(0) = 0 = 5\sqrt{3}c_2 - 5c_1. \end{cases}$$

Logo $c_1 = 2$ e $c_2 = 2/\sqrt{3}$. Assim

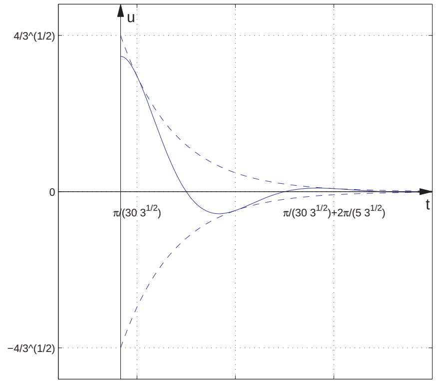
$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$\delta = \arccos\frac{c_1}{R} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

e a solução do problema de valor inicial é

$u(t) = 2e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\, t) + \frac{2}{3}e^{-5t}\,\mathrm{sen}(5\sqrt{3}\, t) = \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-5t}\cos(5\sqrt{3}\, t - \pi/6)$

A quase frequência é igual a $5\sqrt{3}$ e o quase período é igual a $2\pi/5\sqrt{3}$.



3.7.

$$\begin{cases} 10^2 u'' + 10^4 u = 9600\cos(6t), \\ u(0) = 0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t) = A_0 \cos(6t) + B_0 \operatorname{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0 = 3/2$ e $B_0 = 0$.
A solução geral da equação é

$$u(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \operatorname{sen}(10t) + \frac{3}{2}\cos(6t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = -3/2, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

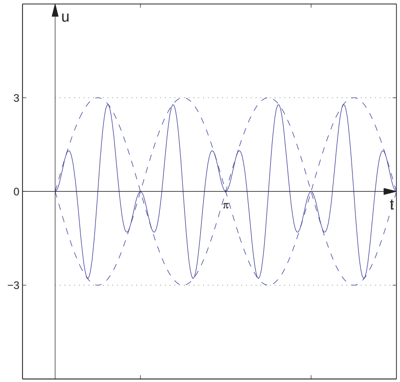
$$u(t) = \frac{3}{2}\left(\cos(6t) - \cos(10t)\right).$$

Como

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B$$

então

$$u(t)=3\,\mathrm{sen}(2t)\,\mathrm{sen}(8t)$$



3.8.

$$\begin{cases} 10^2u''+10^4u=10^3\cos(10t), \\ u(0)=0, u'(0)=0 \end{cases}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$u(t)=c_1\cos(10t)+c_2\,\mathrm{sen}\,(10t)$$

A solução particular pelo método dos coeficientes a determinar é da forma

$$u_p(t)=t(A_0\cos(10t)+B_0\,\mathrm{sen}(10t))$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos $A_0=0$ e $B_0=1/2$.
A solução geral da equação é

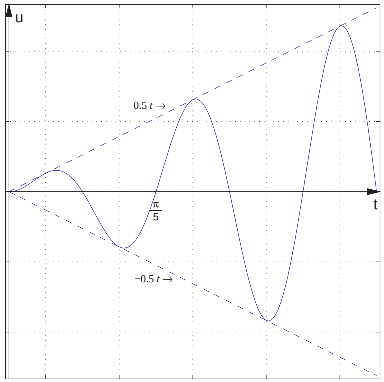
$$u(t)=c_1\cos(10t)+c_2\,\mathrm{sen}\,(10t)+\frac{t}{2}\,\mathrm{sen}(10t)$$

Derivando e substituindo-se $t=0$, $u=0$ e $u'=0$ obtemos que

$$c_1=0, \quad c_2=0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{t}{2}\,\mathrm{sen}(10t)$$



3.9. Neste caso

$$\gamma = \frac{F_r}{v} = \frac{4200}{1} = 4200$$

A equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u'' + 4200u' + 10^4 u = 26000\cos(6t)$$

A solução estacionária é a solução particular da equação não homogênea

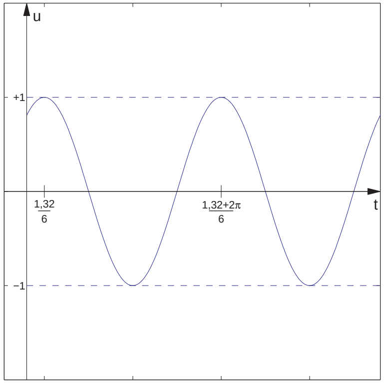
$$u_p(t) = A_0\cos(6t) + B_0\,\mathrm{sen}(6t)$$

Pelo método das constantes a determinar encontramos

$$A_0 = 16/65, \quad B_0 = 63/65,$$

$$R = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = 1, \quad \delta = \arccos\frac{A_0}{R} = \arccos\frac{16}{65} \approx 1,32.$$

$$u_p(t) = \frac{16}{65}\cos(6t) + \frac{63}{65}\,\mathrm{sen}(6t) = \cos(6t - 1,32)$$



3.10. (a)

$$10Q'' + 60Q' + \frac{1}{0,125 \cdot 10^{-1}} = 12$$

Dividindo-se por 10:

$$Q'' + 6Q' + 8Q = \frac{6}{5}$$

Equação característica: $r^2 + 6r + 8 = 0$
Raízes: $r = -2, -4$
Solução geral da equação homogênea: $Q(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$
Solução particular da forma $Q_p(t) = A_0$.

$$Q_p'(t) = Q_p''(t) = 0$$

Substituindo-se na equação:

$$8A_0 = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{3}{20}$$

Solução geral:

$$Q(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t} + \frac{3}{20}$$

Derivada da solução geral: $Q'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 4c_2 e^{-4t}$
Substituindo-se $t = 0$, $Q = 0$, $Q' = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 + \frac{3}{20} = 0 \\ -2c_1 - 4c_2 = 0 \end{array} \right. , \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 = -3/10 \\ c_2 = 3/20 \end{array} \right.$$

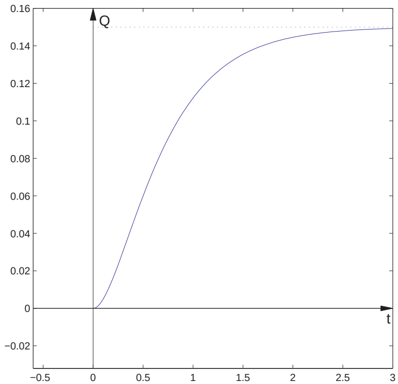
Solução do PVI:

$$Q(t) = -\frac{3}{10}e^{-2t} + \frac{3}{20}e^{-4t} + \frac{3}{20}$$

(b)

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{3}{20}\ \mathrm{C}$$

(c)



3.11. A solução geral da equação homogênea é dada por

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0\, t) + c_2 \sin(\omega_0\, t)\,,$$

em que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

(a) Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t)\,.$$

Derivando-se:

$$u_p'(t) = B\omega\ \cos(\omega\, t) - B\omega\ \sin(\omega\, t)$$

$$u_p''(t) = -B\omega^2\ \sin(\omega\, t) - A\omega^2\ \cos(\omega\, t)\,.$$

Substituindo-se na equação diferencial:

$$\left(k - m\,\omega^2\right)\ (\sin(\omega\,t)\ B + \cos(\omega\,t)\ A) = F_0 \cos(\omega\,t)$$

Comparando-se os termos em cosseno e em seno obtemos

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(k - m\,\omega^2\right)\ A & = F_0 \\ \left(k - m\,\omega^2\right)\ B & = 0 \end{array}\right.$$

Assim

$$A = \frac{F_0}{k - m\,\omega^2} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, B = 0.$$

Logo a solução geral é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t).$$

(b) Dividindo a equação diferencial por m e substituindo-se $k/m = \omega_0^2$ obtemos:

$$u'' + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0\,t)$$

Vamos procurar uma solução particular da forma

$$u_p(t) = t\left[A \cos(\omega_0\,t) + B \sin(\omega_0\,t)\right].$$

Derivando-se:
$u_p'(t) =$
$(\omega_0\,t\,B + A) \cos(\omega_0\,t) + (B - \omega_0\,t\,A) \sin(\omega_0\,t)$
$u_p''(t) =$
$-\,\omega_0\ (\omega_0\,t\,B + 2\,A)\,(\sin(\omega_0\,t) - (2\,B - \omega_0\,t\,A)) \cos(\omega_0\,t)\,.$
Substituindo-se na equação diferencial $u'' + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0\,t)$:

$$2\,\omega_0\ (\cos(\omega_0\,t)\ B - \sin(\omega_0\,t)\ A) = F_0 \cos(\omega_0\,t)$$

Comparando-se os termos em cosseno e em seno obtemos

$$\left\{\begin{array}{ll} 2\,\omega_0\,B & = F_0/m \\ -2\,\omega_0\,A & = 0 \end{array}\right.$$

Assim

$$A = 0, B = \frac{F_0}{2m\omega_0}.$$

Logo a solução geral é

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

3.12. (a)

$$u(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)\ m} + c_2 \sin(\omega_0 t) + c_1 \cos(\omega_0 t)$$

$$u'(t) = -\frac{F_0\, \omega \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)\ m} - \omega_0\, c_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0\, c_2 \cos(\omega_0 t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$\frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)\ m} + c_1$$

$$\omega_0\, c_2$$

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right).$$

(b)

$$u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$u'(t) = \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{2\, \omega_0\, m} - \omega_0\, c_1 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0\, t \cos(\omega_0 t)}{2\, m} + \omega_0\, c_2 \cos(\omega_0 t)$$

Derivando e substituindo-se $t = 0$, $u = 0$ e $u' = 0$ obtemos que

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}(\omega_0 t).$$

4. Soluções em Séries de Potências (página 353)

4.1. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $y'' + xy' + 2y = 0$, obtemos

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$2a_2 + 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 2a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 2a_n = 0, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -a_0 \\ a_{n+2} = -\frac{1}{n+1}a_n, \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_4 = \frac{(-1)^2}{3}a_0$, $a_6 = \frac{(-1)^3}{5\cdot 3}a_0$, $\cdots$ $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}a_0$, $k = 1, 2, \ldots$

$a_3 = -\frac{1}{2}a_1$, $a_5 = \frac{1}{4\cdot 2}a_1$,, $\cdots$ $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2}a_1$ $k = 1, 2, \ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = \\ &= a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}x^{2k}\right) + \\ &\quad + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2}x^{2k+1}\right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k+1}$$

Agora, como $y(0) = 4$, então substituindo $x = 0$ e $y = 4$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $a_0 = 4$. Como $y'(0) = -1$, substituindo-se $x = 0$ e $y' = -1$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3} x^{2k-1} + \\ &\quad + a_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k}\right) \end{aligned}$$

obtemos $a_1 = -1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned} y(x) &= 4\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3} x^{2k}\right) \\ &\quad - \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k+1}\right) \end{aligned}$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ e
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$, obtemos
$(1+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 4x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 4 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2a_2 + 6a_3 x - 4a_1 x + 6a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n-1) a_n - 4n a_n + 6a_n] x^n = 0$
O que implica em

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_2 + 6a_0 = 0 \\ 6a_3 + 2a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + \\ \;+ n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n = 0, \\ \;n = 2, 3, \ldots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = -3a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{3} a_1 \\ a_{n+2} = -\frac{(n-3)(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n, \; n = 2, 3, \ldots \end{array}\right.$$

$a_4 = 0, a_6 = 0, \cdots\ a_{2k} = 0$, para $k = 2, 3, \ldots$
$a_5 = 0, a_7 = 0, \cdots\ a_{2k+1} = 0$, para $k = 2, 3, \ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= a_0 \left(1 - 3x^2\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{3} x^3\right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que
$y_1(x) = 1 - 3x^2$ e $y_2(x) = x - \frac{1}{3} x^3$
A solução acima é válida para todo x.

(c) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(4 - x^2) y'' + 2y = 0$, obtemos
$(4 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$8a_2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [4(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n + 2a_n] x^n = 0$
O que implica em

$$\left\{ \begin{array}{l} 8a_2 + 2a_0 = 0 \\ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 2a_1 = 0 \\ 4(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n + 2a_n = 0,\ n = 2, 3, \ldots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = -\frac{1}{4} a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{4 \cdot 3} a_1 \\ a_{n+2} = \frac{n^2 - n - 2}{4(n+2)(n+1)} a_n \\ \quad = \frac{n-2}{4(n+2)} a_n,\ n = 2, 3, \ldots \end{array} \right.$$

$a_4 = 0, a_6 = 0, \cdots\ a_{2k} = 0$, para $k = 2, 3, \ldots$
$a_5 = -\frac{1}{4^2 \cdot 5 \cdot 3} a_1,\ a_7 = -\frac{1}{4^3 \cdot 7 \cdot 5} a_1, \cdots\ a_{2k+1} = -\frac{1}{4^k (2k+1)(2k-1)} a_1,\ k = 1, \ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= a_0 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) + \\ &\quad + a_1 \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}\right) \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$y_1(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2$ e $y_2(x) = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k(2k+1)(2k-1)} x^{2k+1}$

A série acima converge pelo menos para $|x| < 2$.

(d) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ e
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0$, obtemos
$(3 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+2} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$6a_2 + 3^2 \cdot 2 \cdot a_3 x - 3a_1 x - a_0 - a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [3(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 3n a_n - a_n] x^n = 0$
O que implica em

$$\left\{ \begin{array}{l} 6a_2 - a_0 = 0 \\ 3^2 \cdot 2 \cdot a_3 - 4a_1 = 0 \\ 3(n+2)(n+1) a_{n+2} \\ \quad -n(n-1)a_n - 3na_n - a_n = 0, \\ \quad n = 2, 3, \ldots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_0 \\ a_3 = \frac{2}{3^2} a_1 \\ a_{n+2} = \frac{n^2+2n+1}{3(n+2)(n+1)} a_n \\ \quad = \frac{(n+1)^2}{3(n+2)(n+1)} a_n \\ \quad = \frac{n+1}{3(n+2)} a_n, \ n = 1, 2, \ldots \end{array} \right.$$

$a_4 = \frac{3}{3^2 \cdot 4 \cdot 2} a_0$, $a_6 = \frac{5 \cdot 3}{3^3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} a_0$, $\cdots$ $a_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{3^k \cdot (2k)(2k-2)\cdots 2} a_0$, $k = 2, 3, \ldots$
$a_5 = \frac{4 \cdot 2}{3^2 \cdot 5 \cdot 3} a_1$, $a_7 = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{3^3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} a_1$, $\cdots$ $a_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{3^k (2k+1)(2k-1)\cdots 3} a_1$, $k = 1, 2, \ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{3^k \cdot (2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k}\right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{3^k (2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1}\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{3^k \cdot (2k)(2k-2)\cdots 2} x^{2k} \quad \text{e}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{3^k (2k+1)(2k-1)\cdots 3} x^{2k+1}$$

A série acima converge pelo menos para $|x| < \sqrt{3}$.

(e) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ e
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(1-x)y'' + xy' - y = 0$, obtemos
$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n+1) a_{n+1} + n a_n - a_n] x^n = 0$
O que implica em

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_2 - a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} \\ \quad -n(n+1) a_{n+1} + n a_n - a_n = 0, \\ \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{2} a_0 \\ a_{n+2} = \\ \quad \frac{n}{n+2} a_{n+1} - \frac{n-1}{(n+2)(n+1)} a_n, \\ \quad n = 1, 2, \ldots \end{array} \right.$$

$a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_0$,
$a_4 = \frac{2}{4} a_3 - \frac{1}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{2}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0 - \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0 = \frac{1}{4!} a_0$,

Supondo que $a_k = \frac{1}{k!}a_0$, para $k < n$, então
$a_n = \frac{n-2}{n}a_{n-1} - \frac{n-3}{n(n-1)}a_{n-2} =$
$\frac{n-2}{n}\frac{1}{(n-1)!}a_0 - \frac{n-3}{n(n-1)}\frac{1}{(n-2)!}a_0 = \frac{1}{n!}a_0$, para $n = 1, 2, \ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right) + a_1 x \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = x$$

Agora, como $y(0) = -3$, então substituindo $x = 0$ e $y = -3$ na expressão de $y(x)$ obtemos que $a_0 = -3$. Como $y'(0) = 2$, substituindo-se $x = 0$ e $y' = 2$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$$y'(x) = a_0 \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + a_1$$

obtemos $a_1 = 2$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(x) = -3\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right) + 2x$$

A série acima converge pelo menos para todo $|x| < 1$.

(f) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $2y'' + xy' + 3y = 0$, obtemos
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$
$4a_2 + 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 3a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 4a_2 + 3a_0 = 0 \\ 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + 3a_n = 0, \; n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{3}{4}a_0 \\ a_{n+2} = -\frac{n+3}{2(n+2)(n+1)}a_n, \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$a_4 = \frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_0$, $a_6 = -\frac{7\cdot 5\cdot 3}{2^3\cdot 6!}a_0$, $\cdots$ $a_{2k} = \frac{(-1)^k(2k+1)(2k-1)\cdots 3}{2^k\cdot (2k)!}a_0$, $k = 1, 2, \ldots$

$a_3 = -\frac{4}{2\cdot 3\cdot 2}a_1$, $a_5 = \frac{6\cdot 4}{2^2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1$, $\cdots$ $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k(2k+2)(2k)\cdots 4}{2^k(2k+1)!}a_1$, $k = 1, \ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)(2k-1)\cdots 3}{2^k\cdot (2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2)(2k)\cdots 4}{2^k(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)(2k-1)\cdots 3}{2^k\cdot(2k)!}x^{2n} \quad \text{e}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+2)(2k)\cdots 4}{2^k(2k+1)!}x^{2k+1}$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

(g) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $y'' - xy = 0$, obtemos

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0$

$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} \\ \quad -a_{n-1} = 0, \\ \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}, \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_0$
$a_6 = \frac{1}{6 \cdot 5} a_3 = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} a_0$
$a_{3k} = \frac{1}{(3k)(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots 3 \cdot 2} a_0$
$a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3} a_1$
$a_7 = \frac{1}{7 \cdot 6} a_4 = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} a_0$
$a_{3k+1} = \frac{1}{(3k+1)(3k)(3k-2)(3k-3)\cdots 4 \cdot 3} a_1$
$a_5 = \frac{1}{5 \cdot 4} a_2 = 0$, $a_{3k+2} = 0$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k} x^{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} x^{3k+2} = a_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots 3 \cdot 2} x^{3k} \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k)(3k-2)(3k-3)\cdots 4 \cdot 3} x^{3k+1} \right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots 3 \cdot 2} x^{3k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k)(3k-2)(3k-3)\cdots 4 \cdot 3} x^{3k+1}$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

4.2. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $y'' + k^2 x^2 y = 0$, obtemos
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + k^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$
$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + k^2 a_{n-2}] x^n = 0$.
O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} + k^2 a_{n-2} = 0, \ n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = a_3 = 0 \\ a_{n+2} = -\frac{k^2}{(n+2)(n+1)} a_{n-2}, \; n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_4 = -\frac{k^2}{4\cdot 3} a_0$, $a_8 = \frac{k^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} a_0$, $\cdots$
$a_5 = \frac{k^2}{5\cdot 4} a_1$, $a_9 = \frac{k^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} a_1$, $\cdots$
$a_6 = 0$, $a_{10} = 0$, $a_{4n+2} = 0$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$
$a_7 = 0$, $a_{11} = 0$, $a_{4n+3} = 0$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+1} x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+2} x^{4n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+3} x^{4n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n} x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{4n+1} x^{4n+1} = a_0 \left(1 - \frac{k^2}{4\cdot 3} x^4 + \frac{k^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} x^8 + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{k^2}{5\cdot 4} x^5 + \frac{k^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} x^9 + \cdots\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{k^2}{4\cdot 3} x^4 + \frac{k^4}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} x^8 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{k^2}{5\cdot 4} x^5 + \frac{k^4}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} x^9 + \cdots$$

A série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(1-x)y'' + y = 0$, obtemos
$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) n a_{n+1} + a_n] x^n = 0$
O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} \\ \quad -(n+1) n a_{n+1} + a_n = 0, \\ \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \\ a_{n+2} = \frac{n}{n+2} a_{n+1} \\ \quad - \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n, \\ \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$a_3 = \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3\cdot 2}a_1 = -\frac{1}{3\cdot 2}a_0 - \frac{1}{3\cdot 2}a_1$
$a_4 = \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4\cdot 3}a_2 = -\frac{1}{3\cdot 2^2}a_0 - \frac{1}{3\cdot 2^2}a_1 + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 = -\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}a_0 - \frac{1}{3\cdot 2^2}a_1$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos
$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}x^4 + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \cdots\right)$
Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}x^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \cdots$$

A série acima converge pelo menos para $|x| < 1$.

(c) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0$, obtemos
$(2+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$
$4a_2 + 12a_3 x - a_1 x + 4a_0 + 4a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}[2(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n - na_n + 4a_n]x^n = 0$
O que implica em

$$\left\{\begin{array}{l} 4a_2 + 4a_0 = 0 \\ 12a_3 + 3a_1 = 0 \\ 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n \\ \quad -na_n + 4a_n = 0, \\ \quad n = 2, 3, \ldots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = -a_0 \\ a_3 = -\frac{1}{4}a_1 \\ a_{n+2} = \frac{-n(n-2)-4}{2(n+2)(n+1)}a_n, \\ \quad n = 2, 3, \ldots \end{array}\right.$$

$a_4 = \frac{1}{3\cdot 2}a_0$, $a_6 = \frac{-1}{30}a_0, \cdots$
$a_5 = \frac{7}{5\cdot 4^2\cdot 2}a_1, \cdots$
Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = a_0 \left(1 - x^2 + \frac{1}{3\cdot 2} x^4 + \cdots\right) + a_1 \left(x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{7}{5\cdot 4^2\cdot 2} x^5 + \cdots\right)$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{3\cdot 2} x^4 + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{7}{5\cdot 4^2 \cdot 2} x^5 + \cdots$$

Agora, como $y(0) = -3$, então substituindo $x = 0$ e $y = -3$ na expressão de $y(x)$ obtemos $a_0 = -3$. Como $y'(0) = 2$, substituindo-se $x = 0$ e $y' = 2$ na expressão obtida derivando-se $y(x)$:

$y'(x) = a_0 \left(-2x + \frac{2}{3} x^3 + \cdots\right) + a_1 \left(1 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 2} x^4 + \cdots\right)$

obtemos $a_1 = 2$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$y(x) = -3 \left(1 - x^2 + \frac{1}{3\cdot 2} x^4 + \cdots\right) + 2 \left(x - \frac{1}{4} x^3 + \frac{7}{5\cdot 4^2\cdot 2} x^5 + \cdots\right)$

A série acima converge pelo menos para $|x| < \sqrt{2}$.

4.3. $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação pois fazendo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$ obtemos $y_1(t)$ e fazendo $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ obtemos $y_2(t)$. Além disso

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](0) &= \det \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Como o wronskiano de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ é diferente de zero para $t = 0$ e $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação, então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação.

4.4. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ na equação $(1 - x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1) y = 0$, obtemos

$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$2a_2 + 6a_3x - 2a_1x + \alpha(\alpha+1)a_0 + \alpha(\alpha+1)a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \alpha(\alpha+1)a_n]x^n = 0$
O que implica em

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_2 + \alpha(\alpha+1)a_0 = 0 \\ 6a_3 - (2-\alpha(\alpha+1))a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n \\ +\alpha(\alpha+1)a_n = 0,\ n = 2,3,\ldots \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}a_0 \\ a_3 = \dfrac{2-\alpha(\alpha+1)}{6}a_1 \\ a_{n+2} = \dfrac{n^2+n-\alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \\ \quad = \frac{(n-\alpha)(n+1+\alpha)}{(n+2)(n+1)}a_n,\ n = 2,3,\ldots \end{array}\right.$$

$a_{2k} = \dfrac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!}a_0,\ k = 2,3,\ldots$

$a_{2k+1} = \dfrac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!}a_1,\ k = 1,2,\ldots$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x),$$

em que

$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(2k-1+\alpha)\cdots(1+\alpha)}{(2k)!}x^{2k}$

$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1-\alpha))\cdots(1-\alpha)(2k-2+\alpha)\cdots(2+\alpha)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

(b) Da fórmula de recorrência segue-se que se $\alpha = 2N$, então $a_{2k} = 0$, para $k = N+1, N+2,\ldots$ e se $\alpha = 2N+1$, então $a_{2k+1} = 0$, para $k = N+1, N+2,\ldots$

(c) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$

4.5. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, obtemos
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$
$2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n]x^n = 0$
O que implica em

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_2 + \lambda a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n = 0,\ n = 1,2,3,\ldots \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a_2 = -\dfrac{\lambda}{2}a_0 \\ a_{n+2} = \dfrac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n,\ n = 1,2,3,\ldots \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcl} a_{2k} & = & \dfrac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!}a_0 \\ a_{2k+1} & = & \dfrac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!}a_1 \end{array} \qquad k = 1,2,\ldots$$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda-2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda-2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-2))\cdots\lambda}{(2k)!}x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda - 2(2k-1))\cdots(\lambda-2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

(b) Da fórmula de recorrência segue-se que se $\alpha = 4N$, então $a_{2k} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$ e se $\alpha = 2(2N+1)$, então $a_{2k+1} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$

(c) $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$, $H_3(x) = x^3 - 3x$, $H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$.

4.6. (a) Substituindo-se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ e $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ na equação $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$, obtemos
$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n - \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n + \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$

$2a_2 + 6a_3x - a_1x + \alpha^2a_0 + \alpha^2a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n + \alpha^2a_n]x^n = 0$

O que implica em

$$\begin{cases} 2a_2 + \alpha^2a_0 = 0 \\ 6a_3 - (1-\alpha^2)a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n + \alpha^2a_n = 0, \ n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{\alpha^2}{2}a_0 \\ a_3 = \dfrac{1-\alpha^2}{6}a_1 \\ a_{n+2} = \dfrac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}a_n, \ n = 2,3,\ldots \end{cases}$$

$$a_{2k} = \frac{((2k-2)^2-\alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!}a_0, \ k = 1,2,3,\ldots$$

$$a_{2k+1} = \frac{((2k-1)^2-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^2)}{(2k+1)!}a_1, \ k = 1,2,\ldots$$

Substituindo-se os valores a_n encontrados acima, na série de $y(x)$ obtemos

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1} = a_0\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{((2k-2)^2-\alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!}x^{2k}\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{((2k-1)^2-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right)$

Portanto, a solução geral é

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x),$$

em que

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{((2k-2)^2-\alpha^2)\cdots(-\alpha^2)}{(2k)!}x^{2k}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{((2k-1)^2-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^2)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

(b) Da fórmula de recorrência segue-se que se $\alpha = 2N$, então $a_{2k} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$ e se $\alpha = 2N+1$, então $a_{2k+1} = 0$, para $k = N+1, N+2, \ldots$

(c) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

5. Mudança de Variáveis (página 367)

5.1. (a) $y'' + (y')^2 = 0$
Fazendo $y' = v$

$$v' + v^2 = 0$$
$$\frac{1}{v^2}v' = -1$$
$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{dt} = 1$$
$$\frac{1}{v} = t + c_1$$

Logo

$$y' = v(t) = \frac{1}{t + c_1}$$

Integrando-se

$$y(t) = \ln|t + c_1| + c_2$$

(b) $ty'' = y'$
Fazendo $y' = v$

$$tv' = v$$
$$\frac{1}{v}v' = \frac{1}{t}$$
$$\frac{d}{dv}(\ln|v|)\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t}$$
$$\ln|v| = \ln|t| + \tilde{c}_1$$
$$\frac{v}{t} = c_1$$

Logo

$$y' = v(t) = c_1 t$$

Integrando-se

$$y(t) = c_1\frac{t^2}{2} + c_2$$

(c) Fazendo $y' = v$

$$(1+x^2)v' + 2xv = 2x^{-3}$$

Dividindo-se por $1 + x^2$

$$v' + \frac{2x}{1+x^2}v = \frac{2}{x^3(1+x^2)}.$$

Multiplicando-se a equação por $\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = 1 + x^2$:

$$\frac{d}{dx}\Big((1+x^2)v\Big) = \frac{2}{x^3}$$

Integrando-se obtemos

$$(1+x^2)v(x) = -\frac{1}{x^2} + c_1$$

Logo

$$\frac{dy}{dx} = v(x) = -\frac{1}{(1+x^2)x^2} + \frac{c_1}{1+x^2}$$

$$-\frac{1}{(1+x^2)x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$-1 = Ax(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)x^2$$

Substituindo-se $x = 0$ obtemos $B = -1$. Comparando-se os termos de grau 2 obtemos $0 = B + D$ ou $D = 1$. Comparando-se os termos de grau 1 obtemos $0 = A$. Comparando-se ou termos de grau 3 obtemos $0 = A + C$ ou $C = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\int -\frac{1}{(1+x^2)x^2}dx &= -\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{x} + \arctan x + C_2\end{aligned}$$

E a solução da equação é

$$y(x) = \frac{1}{x} + c_1 \arctan x + c_2.$$

5.2. (a) $y'' + y(y')^3 = 0$

$$v = y' \quad y'' = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$v\frac{dv}{dy} + yv^3 = 0$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dy} + yv^2 = 0$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1$$

ou

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dy} = -y$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{v}\right) = -y$$

$$\frac{1}{v} = \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_1$$

$$v = \frac{2}{y^2 + c_1}$$

Logo

$$y' = v = \frac{2}{y^2 + c_1}$$

$$(y^2 + c_1)y' = 2$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{y^3}{3} + c_1 y\right)y' = 2$$

A solução é dada implicitamente por

$$\frac{y^3}{3} + c_1 y = 2t + c_2$$

(b) $y^2y'' - y' = 0$

$$v = y' \quad y'' = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$y^2 v\frac{dv}{dy} - v = 0$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad y^2\frac{dv}{dy} - 1 = 0$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{y^2}$$

$$v = -\frac{1}{y} + c_1$$

Logo

$$y' = v = -\frac{1}{y} + c_1$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{y} + c_1}y' = 1$$

$$\frac{y}{c_1 y - 1}y' = 1$$

$$\frac{1}{c_1}\frac{c_1 y - 1 + 1}{c_1 y - 1}y' = 1$$

$$\frac{1}{c_1}\left(1 + \frac{1}{c_1 y - 1}\right)y' = 1$$

$$\frac{d}{dy}\left(y + \frac{1}{c_1}\ln|c_1 y - 1|\right)y' = c_1$$

A solução é dada implicitamente por

$$y + \frac{1}{c_1}\ln|c_1 y - 1| = c_1 t + c_2$$

(c) $y'' = (y')^3 + y'$

$$v = y' \quad y'' = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$$v\frac{dv}{dy} = v^3 + v$$

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dy} = v^2 + 1$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = c_1$$

ou

$$\frac{dv}{dy} = v^2 + 1$$

$$\frac{1}{v^2+1}\frac{dv}{dy} = 1$$

$$\frac{d}{dv}\arctan v\frac{dv}{dy} = 1$$

$$\frac{d}{dy}\arctan v = 1$$

$$\arctan v = y + c_1$$

$$v = \tan(y + c_1)$$

$$y' = \tan(y + c_1)$$

$$\text{cotan}(y + c_1)y' = 1$$

$$\begin{aligned}\int \text{cotan}(y + c_1)dy &= \int \frac{\cos(y+c_1)}{\text{sen}(y+c_1)}dy \\ &= \ln|\,\text{sen}(y + c_1)| + C\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dy}\ln|\,\text{sen}(y + c_1)|y' = 1$$

$$\frac{d}{dt}\ln|\,\text{sen}(y + c_1)| = 1$$

Integrando-se

$$\ln|\operatorname{sen}(y+c_1)| = t + C_2$$

$$\operatorname{sen}(y+c_1) = c_2 e^t$$

5.3. A substituição $t = \ln x$ transforma a equação de Euler

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

numa equação linear com coeficientes constantes.

$$\frac{dy}{dx} = y'\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}y'$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= -\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(y'\right)\\ &= -\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(y'\right)\frac{dt}{dx}\\ &= -\frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^2}y''\end{aligned}$$

Substituindo-se na equação de Euler obtemos a equação linear com coeficientes constantes

$$y'' + (b-1)y' + cy = 0.$$

(a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ Fazendo $t = \ln x$ a equação se transforma em

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -2, -1$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1e^{-2\ln x} + c_2e^{-\ln x} = c_1x^{-2} + c_2x^{-1}$$

(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ Fazendo $t = \ln x$ a equação se transforma em

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Solução geral:

$$y(x) = c_1e^{2\ln x} + c_2e^{2\ln x}\ln x = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$$

(c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$ Fazendo $t = \ln x$ a equação se transforma em

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Leftrightarrow r = -1 \pm 2i$$

Solução geral:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1e^{-\ln x}\cos(2\ln x) + c_2e^{-\ln x}\ \mathrm{sen}(2\ln x) \\ &= c_1x^{-1}\cos(2\ln x) + c_2x^{-1}\ \mathrm{sen}(2\ln x) \end{aligned}$$

Capítulo 3

Transformada de Laplace

3.1 Introdução

A transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial da forma

$$Ay'' + By' + Cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \text{para } A, B, C \in \mathbb{R}$$

Para isso, a equação diferencial é inicialmente transformada pela transformada de Laplace numa equação algébrica. Depois resolve-se a equação algébrica e finalmente transforma-se de volta a solução da equação algébrica na solução da equação diferencial inicial.

A transformada de Laplace pode ser entendida como a "caixa" da Figura 3.1. Do

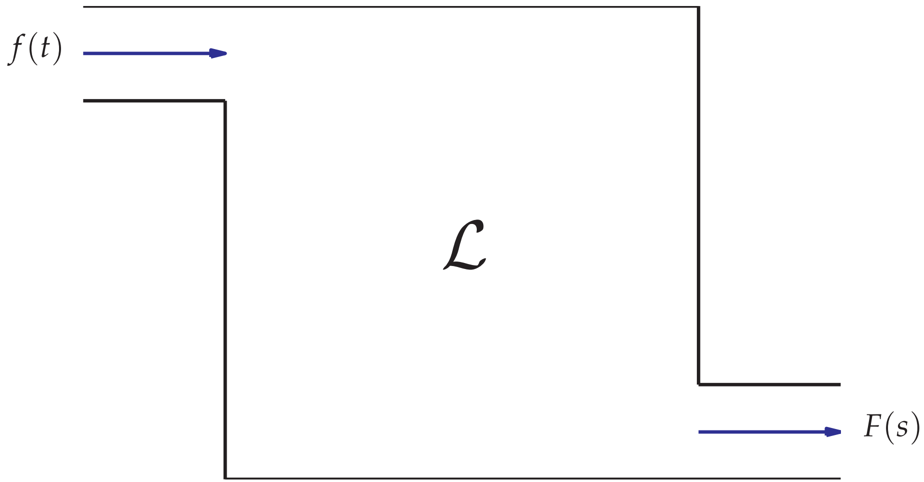


Figura 3.1: Transformada de Laplace como uma "caixa"

lado esquerdo entram as funções originais e do lado direito saem as funções transformadas pela transformada de Laplace.

A **transformada de Laplace** de uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) é definida por

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

para todo $s \geq 0$ em que a integral acima converge. Representaremos a função original por uma letra minúscula e a sua variável por t. Enquanto a transformada de Laplace será representada pela letra correspondente maiúscula e a sua variável por s. Por exemplo, as transformadas de Laplace das funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ serão representadas por $F(s)$, $G(s)$ e $H(s)$, respectivamente.

Vamos calcular a transformada de Laplace de várias funções e apresentar propriedades da transformada de Laplace que possibilitarão que dadas a transformada de Laplace de algumas funções, que serão as funções elementares, poderemos calcular muitas outras. A transformada de Laplace das funções elementares estão agrupadas na tabela na página 478 e podem ser consultadas a qualquer momento.

Exemplo 3.1. A transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s} = 0 - \frac{e^{-s0}}{-s} = \frac{1}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

Exemplo 3.2. Seja a uma constante real. A transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = e^{at}$ é dada por

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{a-s}\right|_0^\infty \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{a-s} - \frac{e^{-(s-a)0}}{a-s} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } s > a. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Seja a uma constante real. Vamos determinar a transformada de Laplace das funções $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \cos at$ e $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \operatorname{sen} at$. Para isso, vamos calcular a transformada de Laplace da função $h : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ definida por $h(t) = e^{iat}$.

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{iat}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-ia)t}\, dt = \left.\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right|_0^\infty \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-sT}(\cos aT + i \operatorname{sen} aT)}{-(s-ia)} - \frac{e^{-(s-ia)0}}{-(s-ia)} = 0 - \frac{e^{-(s-ia)0}}{ia-s} \\ &= \frac{1}{s-ia}, \quad \text{para } s > 0. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$H(s) = \mathcal{L}(h)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, (\cos at + i \operatorname{sen} at)\, dt = \mathcal{L}(f)(s) + i\mathcal{L}(g)(s) = F(s) + iG(s).$$

Assim a **parte real** de $H(s)$ é igual a $F(s)$, $\mathcal{R}\mathrm{e}\{H(s)\} = F(s)$, e a **parte imaginária** de $H(s)$ é igual a $G(s)$, $\mathcal{I}\mathrm{m}\{H(s)\} = G(s)$. Como

$$H(s) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{(s-ia)(s+ia)} = \frac{s+ia}{s^2+a^2},$$

então a transformada de Laplace de $f(t) = \cos at$ é

$$F(s) \quad = \quad \mathcal{R}\mathrm{e}\{\frac{1}{s-ia}\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad \text{para } s > 0$$

e a transformada de Laplace de $g(t) = \operatorname{sen} at$ é

$$G(s) \quad = \quad \mathcal{I}\mathrm{m}\{\frac{1}{s-ia}\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad \text{para } s > 0.$$

Exemplo 3.4. Seja n um inteiro positivo. Vamos calcular a transformada de Laplace da função $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(t) = t^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt = \left.\frac{t^n e^{st}}{-s}\right|_0^\infty - \frac{n}{-s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1} dt = \frac{n}{s} F_{n-1}(s). \end{aligned}$$

Aplicando-se recursivamente a fórmula obtida obtemos

$$F_n(s) = \frac{n(n-1)}{s^2} F_{n-2}(s) = \frac{n(n-1)\ldots 1}{s^n} F_0(s).$$

Mas $F_0(s)$ é a transformada de Laplace da função constante 1, ou seja, $F_0(s) = \dfrac{1}{s}$. Assim, a transformada de Laplace de $f_n(t) = t^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ é

$$F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{para } s > 0.$$

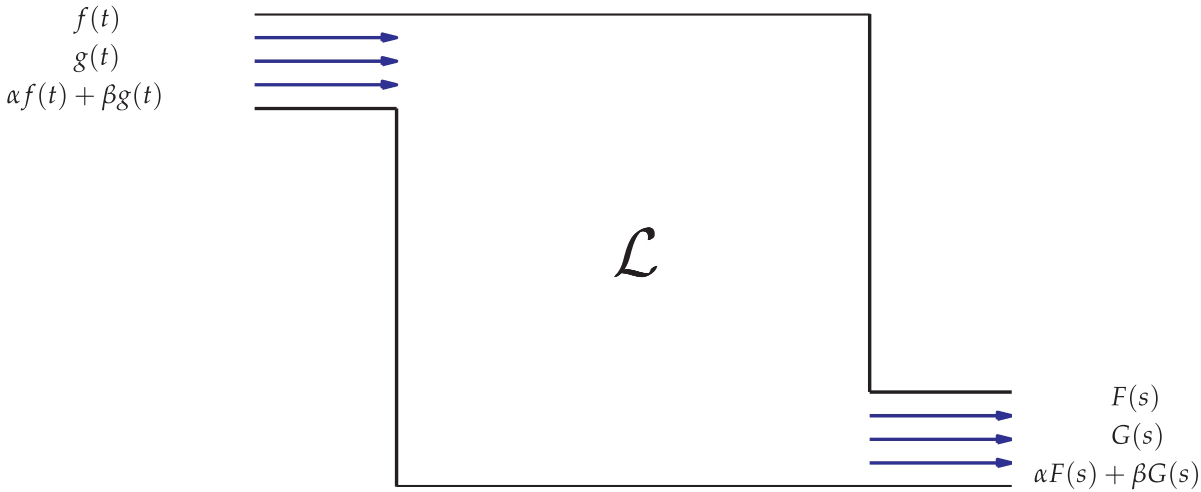


Figura 3.2: Transformada de Laplace de uma combinação linear

Para calcular a transformada de Laplace de outras funções vamos usar as propriedades que apresentaremos a seguir.

Teorema 3.1 (Linearidade). *Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, para $s > a_1$, e a transformada de Laplace de $g(t)$ é $G(s)$, para $s > a_2$, então para quaisquer constantes α e β*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) = \alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(g)(s) = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \textit{para } s > \max\{a_1, a_2\}.$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \\
&= \alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(g)(s)
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 3.5. A transformada de Laplace do polinômio $f(t) = 2t^2 + 3t + 5$ é pelo Teorema 3.1 e usando o resultado do Exemplo 3.4

$$F(s) = 2\frac{2}{s^3} + 3\frac{1}{s^2} + 5\frac{1}{s}.$$

Exemplo 3.6. Seja a uma constante. Pelo Teorema anterior a transformada de Laplace do cosseno hiperbólico de at, $f(t) = \cosh(at) = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$

Exemplo 3.7. Seja a uma constante. Pelo Teorema anterior a transformada de Laplace do seno hiperbólico de at, $f(t) = \operatorname{senh}(at) = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$, é dada por

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \text{para } s > |a|.$$

Dizemos que uma função $f(t)$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo $[a, b]$ se $f(t)$ é contínua em $[a, b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. Dizemos que uma função $f(t)$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo $[a, \infty)$ se $f(t)$ é seccionalmente contínua para todo intervalo da forma $[a, A]$, com $A > a$.

Se a função $f(t)$ crescer muito rápido ela pode não ter transformada de Laplace, como por exemplo $f(t) = e^{t^2}$. Isto não acontece para funções $f(t)$, para as quais existem $M > 0$ e $k > 0$ tais que,

$$|f(t)| \leq Me^{kt}, \quad \text{para todo } t > 0. \tag{3.1}$$

Chamamos **funções admissíveis** às funções seccionalmente contínuas que satisfazem (3.1).

Se duas funções admissíveis têm a mesma transformada de Laplace então elas são iguais exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Teorema 3.2 (Injetividade). *Dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ admissíveis se*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s), \quad \text{para } s > a,$$

então $f(t) = g(t)$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.

Portanto se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função admissível $f(t)$, esta função esta determinada a menos dos pontos de descontinuidade e dizemos que $f(t)$ é a **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ e escrevemos simplesmente

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = f(t),$$

considerando duas funções iguais, se elas forem iguais em todos os pontos onde ambas são contínuas.

Exemplo 3.8. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2 - 3s + 2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Para isso vamos decompor $F(s)$ em frações parciais. O denominador de $F(s)$ tem duas raízes reais $s = 1$ e $s = 2$. Assim,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2},$$

em que A e B são constantes a determinar. Multiplicando $F(s)$ por $(s-1)(s-2)$ obtemos

$$s+3 = A(s-2) + B(s-1)$$

Substituindo-se $s=1$ e $s=2$ obtemos

$$4 = -A \quad \text{e} \quad 5 = B$$

Assim,

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = -4\frac{1}{s-1} + 5\frac{1}{s-2}$$

e a função cuja transformada é $F(s)$ é

$$f(t) = -4e^{t} + 5e^{2t}.$$

Teorema 3.3 (1º Teorema de Deslocamento). *Seja a uma constante. Se a transformada de Laplace da função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é $F(s)$, para $s > c$, então a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = e^{at} f(t)$$

é

$$G(s) = F(s-a), \quad \textit{para } s > a + c$$

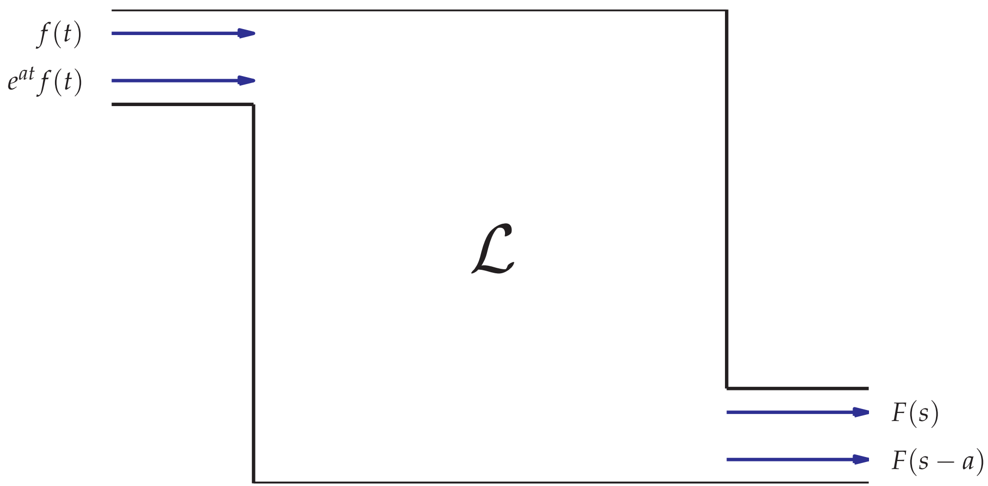


Figura 3.3: 1º Teorema de Deslocamento

Demonstração.

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

■

Exemplo 3.9. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $g(t) = \cos(at)$, então pelo Exemplo 3.3 na página 428

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Pelo 1º Teorema de Deslocamento

$$\mathcal{L}[e^{bt}g(t)](s) = G(s-b).$$

Logo se $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $f(t) = e^{bt}\cos at$ então a sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 3.10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Pelo 1º Teorema de Deslocamento e o Exemplo 3.3 na página 428 obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{bt}\operatorname{sen} at$ é dada por

$$F(s) = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 3.11. Seja $a \in \mathbb{R}$ e n um inteiro positivo. Pelo 1º Teorema de Deslocamento e o Exemplo 3.4 na página 429 obtemos que a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{at}\, t^n$ é dada por

$$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \text{para } s > a.$$

Exemplo 3.12. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2+4s+4}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Para isso vamos decompor $F(s)$ em frações parciais. O denominador de $F(s)$ tem somente uma raiz real, $s = -2$. Assim,

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2},$$

em que A e B são constantes a determinar. Multiplicando $F(s)$ por $(s+2)^2$ obtemos

$$s - 3 = A(s+2) + B \tag{3.2}$$

Substituindo-se $s = -2$ obtemos

$$-5 = B.$$

Derivando-se (3.2) obtemos

$$1 = A.$$

Assim

$$F(s) = \frac{s-3}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - 5\frac{1}{(s+2)^2}.$$

Observando a Tabela na página 478, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é $F(s)$ é dada por

$$f(t) = e^{-2t} - 5e^{-2t}t.$$

Exemplo 3.13. Se a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é

$$F(s) = \frac{s-2}{2s^2+2s+2}$$

então vamos determinar a função $f(t)$. Completando quadrados podemos reescrever $F(s)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s-2}{2s^2+2s+2} = \frac{s-2}{2[s^2+s+1]} = \frac{s-2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\
&= \frac{s+1/2-5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} = \frac{s+1/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} - \frac{5/2}{2[(s+1/2)^2+3/4]} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{4}\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}
\end{aligned}$$

Observando a Tabela na página 478, usando o 1º Teorema do deslocamento e o Teorema da Linearidade vemos que a função cuja transformada de Laplace é $F(s)$ é dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Explicação: Pelo 1º Teorema de Deslocamento

$$\mathcal{L}[e^{at}g(t)](s) = G(s-a)$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s-a)](t) = e^{at}g(t).$$

Se

$$G(s+1/2) = \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4},$$

então

$$G(s) = \frac{s}{s^2+3/4}$$

e pela a Tabela na página 478

$$g(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Logo

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s+1/2)](t) = e^{-t/2}g(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

O mesmo ocorre com o termo

$$\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}.$$

3.1.1 Demonstração da Injetividade da Transformada de Laplace

Demonstração do Teorema 3.2 na página 434. Basta provarmos que se $\mathcal{L}(h)(s) = 0$, para $s > a$, então $h(t) = 0$, para todos os valores de $t > 0$ para os quais $h(t)$ é contínua. Vamos provar somente para o caso em que $h(t)$ seja contínua. Seja $n = 1, 2, \ldots$

$$0 = \mathcal{L}(h)(a+n) = \int_0^\infty e^{-nt}e^{-at}h(t)dt.$$

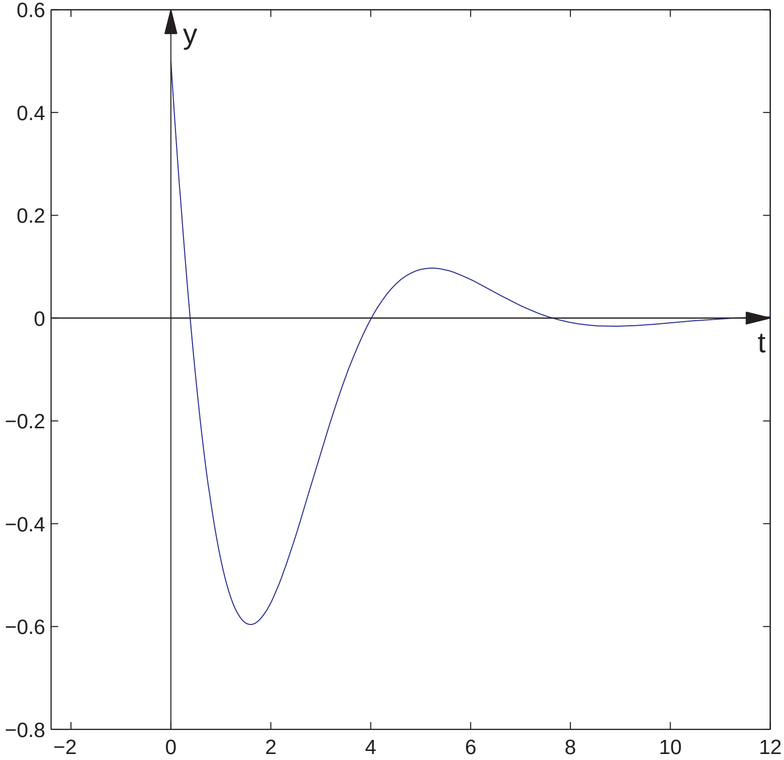


Figura 3.4: $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

Façamos a mudança de variáveis $t = -\ln x$ e definamos $v(x) = e^{a \ln x} h(-\ln x)$. Então

$$0 = \int_0^\infty e^{-nt} e^{-at} h(t) dt = \int_0^1 x^{n-1} v(x) dx. \tag{3.3}$$

Seja $\epsilon > 0$. Existe um polinômio $p(x)$ tal que

$$\int_0^1 |p(x) - v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

A existência de tal polinômio é uma conseqüência imediata do Teorema de aproximação de Weierstrass que será demonstrado a seguir. De (3.3) segue-se que

$$\int_0^1 p(x) v(x) dx = 0.$$

Então

$$\int_0^1 |p(x) - v(x)|^2 dx = \int_0^1 |p(x)|^2 dx + \int_0^1 |v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Logo

$$\int_0^1 |v(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Como ϵ é um número positivo arbitrário, então $v(x) = 0$, para $0 < x \leq 1$. Logo $h(t) = 0$, para $t > 0$. ■

Teorema 3.4 (Teorema da Aproximação de Weierstrass). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para todo $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p(t)$ tal que $|f(t) - p(t)| < \epsilon$, para todo $t \in [a,b]$.*

Demonstração. Seja $t = (1-x)a + xb$. Então $x = \dfrac{1}{b-a}(t-a)$ e $t \in [a,b]$ se, e somente se, $x \in [0,1]$. Seja $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}(x) = f((1-x)a + xb)$. Seja

$$\tilde{p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}(\frac{k}{n})\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{e} \quad p(t) = \tilde{p}\left(\frac{1}{b-a}(t-a)\right).$$

Este polinômio é chamado de **polinômio de Bernstein**.

Vamos usar o fato de que

$$\sum_{k\in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{3.4}$$

para qualquer $A \subseteq \{0, 1, 2\ldots, n\}$.

Como f é contínua existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Sejam $b_1 = x - \delta$ e $b_2 = x + \delta$. Seja $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |\tilde{f}(x)| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. Seja n tal que $4Me^{-2\delta^2 n} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Vamos usar o seguinte fato que será demonstrado a seguir:

$$b_2 \leq \frac{k}{n} \leq 1 \text{ ou } 0 \leq \frac{k}{n} \leq b_1 \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq e^{-2(x-b)^2} b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}. \tag{3.6}$$

Então por (3.4), (3.5) e (3.6) temos que

$$
\begin{aligned}
|\tilde{f}(x) - \tilde{p}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq \\
\leq \sum_{k=0}^{n} |\tilde{f}(\frac{k}{n}) - \tilde{f}(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} |\tilde{f}(\frac{k}{n}) - \tilde{f}(x)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \sum_{\frac{k}{n} \geq b_2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\frac{k}{n} \leq b_1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + 2Me^{-2\delta^2 n} \sum_{\frac{k}{n} \geq b_2} \binom{n}{k} b_2^k (1-b_2)^{n-k} + 2Me^{-2\delta^2 n} \sum_{\frac{k}{n} \leq b_1} \binom{n}{k} b_1^k (1-b_1)^{n-k} \\
\leq \frac{\epsilon}{2} + 4Me^{-2\delta^2 n} \leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

■

Lema 3.5. *Se* $0 \leq x < b \leq \frac{k}{n} \leq 1$ *ou* $0 \leq \frac{k}{n} \leq b < x \leq 1$, *então*

$$
x^{\frac{k}{n}} (1-x)^{1-\frac{k}{n}} \leq e^{-2(x-b)^2} b^{\frac{k}{n}} (1-b)^{1-\frac{k}{n}}.
$$

Demonstração. Precisamos mostrar que

$$\frac{x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}} \le e^{-2(x-b)^2},$$

ou aplicando-se o logaritmo nesta desigualdade, que

$$H(x) = \ln \frac{x^{\frac{k}{n}}(1-x)^{1-\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}(1-b)^{1-\frac{k}{n}}} + 2(x-b)^2 \le 0.$$

Temos que $H(b) = 0$.

(a) Se $0 < x < b \le \dfrac{k}{n} \le 1$, vamos mostrar que $H'(x) \ge 0$. Como, para $0 < x < 1$, $x(1-x) \le \dfrac{1}{4}$, então

$$H'(x) = \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + 4(x-b) \ge 4(\frac{k}{n} - x) + 4(x-b) = 4(\frac{k}{n} - b) \ge 0.$$

(b) Se $0 \le \dfrac{k}{n} \le b < x < 1$, vamos mostrar que $H'(x) \le 0$. Como, para $0 < x < 1$, $4 \le \dfrac{1}{x(1-x)}$, então

$$H'(x) = \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + 4(x-b) \le \frac{\frac{k}{n} - x}{x(1-x)} + \frac{x-b}{x(1-x)} = \frac{\frac{k}{n} - b}{x(1-x)} \le 0.$$

■

Exercícios (respostas na página 479)

1.1. Determine a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \frac{2s-5}{s(s^2+s-12)},$$

ou seja, uma função, $f(t)$, cuja transformada de Laplace é a função dada, $F(s)$.

1.2. Considere $\mathcal{L}(y)(s) = Y(s)$. Determine $y(t)$:

(a) $Y(s) = \dfrac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \dfrac{1}{(s+2)(s-1)}$

(b) $Y(s) = \dfrac{3}{(s-1)(s^2+4)}$

1.3. Seja a uma constante. Sabendo-se que a transformada de Laplace de $f(t) = \operatorname{sen} at$ é

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$$

e a de $g(t) = t\cos at$ é

$$G(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$$

mostre que a transformada de Laplace de $h(t) = \operatorname{sen} at - a\,t\cos at$ é

$$H(s) = \frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0.$$

3.2 Problemas de Valor Inicial

O próximo resultado mostra o efeito de aplicar a transformada de Laplace na derivada de uma função.

Teorema 3.6 (Derivação). *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função admissível.*

(a) Se $f'(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

(b) Se $f'(t)$ é admissível e $f''(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Demonstração. (a) Vamos provar para o caso em que $f'(t)$ é contínua.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - (-s)\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\
&= -f(0) + sF(s),
\end{aligned}$$

pois como $f(t)$ é admissível, $\lim_{T\to\infty} e^{-sT} f(T) = 0$, para $s > k$.

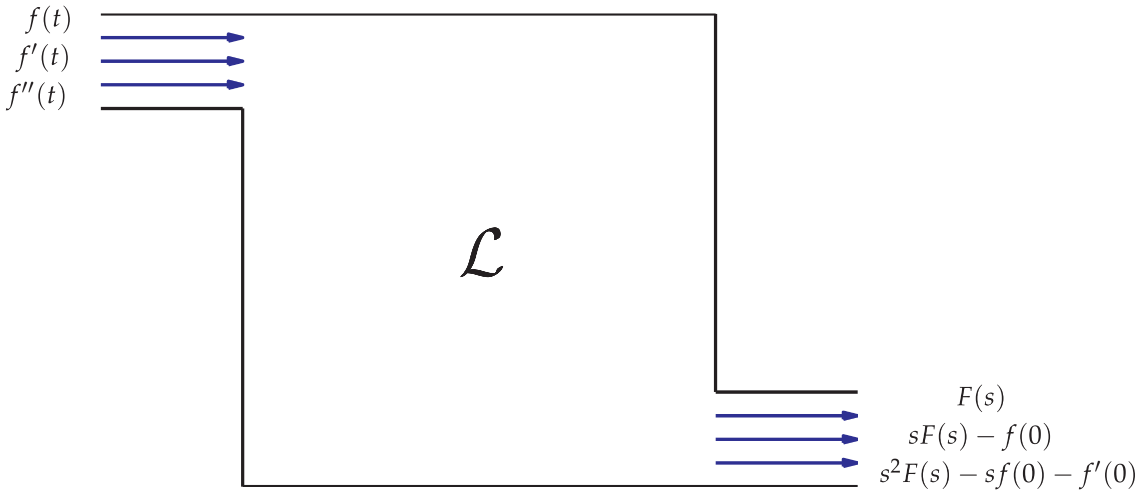


Figura 3.5: Transformada de Laplace da Derivada

(b) Vamos provar para o caso em que $f''(t)$ é contínua. Usando o item anterior:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(s) &= -f'(0) + s\mathcal{L}(f')(s) \\ &= -f'(0) + s(-f(0) + sF(s)) \\ &= -f'(0) - sf(0) + s^2F(s)\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.14. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t\,\text{sen}\,at$. Vamos determinar $F(s)$.

$$f'(t) = \text{sen}\,at + at\cos at$$

$$f''(t) = 2a\cos at - a^2t\,\text{sen}\,at = 2a\cos at - a^2f(t)$$

Assim, aplicando-se a transformada de Laplace e usando o Teorema anterior obtemos

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = 2a\frac{s}{s^2+a^2} - a^2F(s)$$

Assim,

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Exemplo 3.15. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t\cos at$. Deixamos como exercício mostrar que

$$F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

Exemplo 3.16. Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y' - 2y = 2t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = 2\frac{1}{s^2}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + s - 2\right) Y(s) = \frac{2}{s^2} + 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} \\ &= \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-se por $s^2(s+2)(s-1)$ obtemos

$$s^2 + 2 = As(s+2)(s-1) + B(s+2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2) \tag{3.7}$$

Substituindo-se $s = -2, 0, 1$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 6 &=& -12C \\ 2 &=& -2B \\ 3 &=& 3D \end{array} \right.$$

que tem solução $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$ e $D = 1$. Comparando os termos de grau 3 da equação (3.7) obtemos

$$0 = A + C + D = A + \frac{1}{2}.$$

Logo $A = -\frac{1}{2}$.
Assim,
$$Y(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$$
de onde obtemos
$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t,$$
usando a Tabela na página 478.

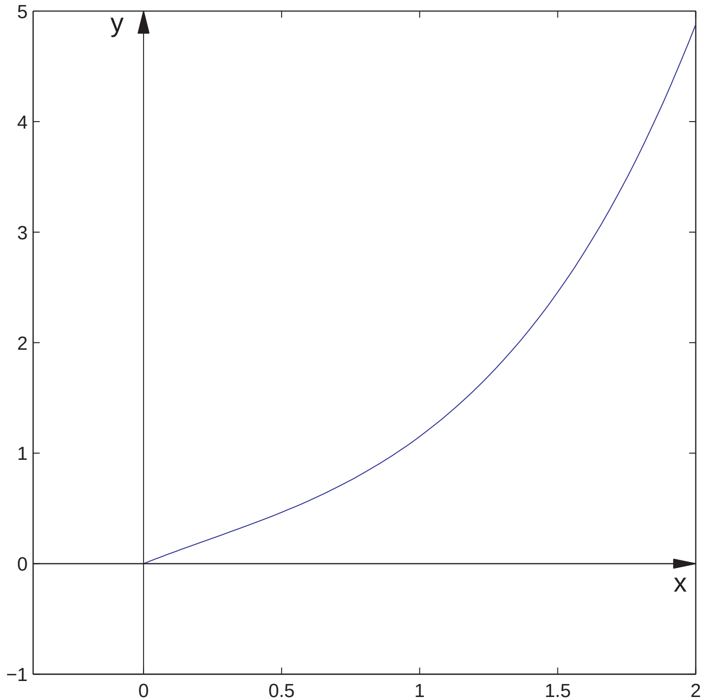


Figura 3.6: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 3.16

Exercícios (respostas na página 480)

2.1. Resolva os problemas de valor inicial usando a transformada de Laplace:

(a) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(b) $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

(c) $y'' - 2y' + y = te^t + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(d) $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(e) $y'' + 4y = 3\,\text{sen}\,2t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

(f) $y'' + 4y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(g) $y'' - 2y' + y = e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(h) $y'' + 2y' + 2y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

2.2. Resolva o problema: $y'' - 6y' + 8y = \text{sen}\ t$, $y(0) = y'(0) = 0$

(a) sem usar transformada de Laplace

(b) usando transformada de Laplace

2.3. Seja a uma constante. Seja $f(t) = t\cos at$. Mostre que

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$$

(Sugestão: derive uma vez e use as transformadas de Laplace de $\cos at$ e de $t\,\text{sen}\,at$.)

3.3 Equações com Termo Não Homogêneo Descontínuo

Para resolver problemas de valor inicial da forma

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R}$$

em que $f(t)$ é uma função descontínua vamos escrever $f(t)$ em termos da função que definiremos a seguir.

Seja a uma constante maior ou igual a zero. Vamos definir a **função degrau (unitário)** ou **função de Heaviside** por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < a \\ 1, & \text{para } t \geq a \end{cases}$$

Observe que $u_a(t) = u_0(t-a)$. Em muitos sistemas computacionais a função $u_0(t)$ é uma função pré-definida no sistema.

Vamos ver como podemos escrever uma função descontínua dada por três expressões em termos da função de Heaviside. Considere uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ f_2(t), & \text{se } a \leq t < b \\ f_3(t), & \text{se } t \geq b \end{cases}.$$

Esta função pode ser escrita como

$$f(t) = f_1(t) - u_a(t)f_1(t) + u_a(t)f_2(t) - u_b(t)f_2(t) + u_b(t)f_3(t).$$

Observe que para "zerar"$f_1(t)$ a partir de $t = a$, subtraímos $u_a(t)f_1(t)$ e para "acrescentar"$f_2(t)$ a partir de $t = a$ somamos $u_a(t)f_2(t)$. Para "zerar"$f_2(t)$ a partir de $t = b$, subtraímos $u_b(t)f_2(t)$ e para "acrescentar"$f_3(t)$ a partir de $t = b$ somamos $u_b(t)f_3(t)$. Esta idéia pode ser repetida para o caso em que existam mais pontos de descontinuidade.

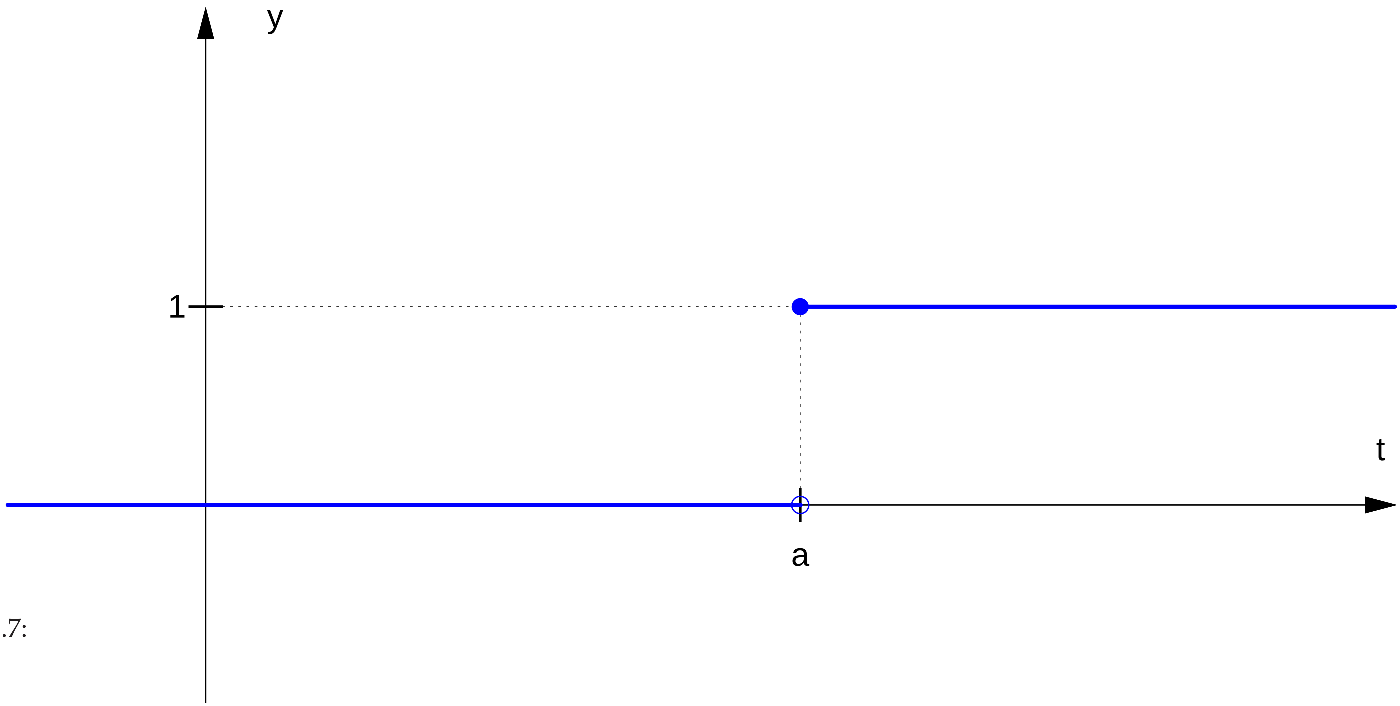


Figura 3.7: Função de Heaviside

Vamos calcular a transformada de Laplace da função de Heaviside $f(t) = u_a(t)$.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt = \int_0^a e^{-st}\, dt + \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_a^\infty = 0 - \frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{para } s > 0 \end{aligned}$$

Exemplo 3.17. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \le t < 2 \\ 0, & \text{para } t \ge 2 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 1 - u_2(t).$$

Assim usando a linearidade da Transformada de Laplace obtemos

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}.$$

Exemplo 3.18. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \le t < 1 \\ 2, & \text{para } 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{para } t \ge 2 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 2u_1(t) - 2u_2(t).$$

Assim usando a linearidade da Transformada de Laplace obtemos

$$F(s) = 2\frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s}.$$

Teorema 3.7 (2º Teorema de Deslocamento). *Seja a uma constante positiva. Se a transformada de Laplace da função* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é* $F(s)$, *para* $s > c$, *então a transformada de Laplace da função*

$$g(t) = u_a(t) f(t-a)$$

é

$$G(s) = e^{-as} F(s), \quad \textit{para } s > c$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} u_a(t) f(t-a) dt = \int_0^a e^{-st} u_a(t) f(t-a) dt + \int_a^\infty e^{-st} u_a(t) f(t-a) dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^\infty e^{-s(t+a)} f(t) dt \\
&= e^{-as} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = e^{-as} F(s)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.19. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \le t < 1 \\ (t-1)^2, & \text{para } t \ge 1 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = u_1(t)(t-1)^2 = u_1(t) g(t-1),$$

em que $g(t) = t^2$. Usando o Teorema 3.7

$$F(s) = e^{-s} \frac{2}{s^3} = \frac{2e^{-s}}{s^3}.$$

Exemplo 3.20. Vamos calcular a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = \operatorname{sen} t - u_\pi(t) \operatorname{sen} t.$$

Para usarmos o Teorema 3.7 precisamos escrever a segunda parcela em termos de uma função $g(t-\pi)$. Para isso, somamos e subtraímos π a t no argumento da função seno, ou seja,

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}[(t-\pi)+\pi] = \operatorname{sen}(t-\pi)\cos\pi + \cos(t-\pi)\operatorname{sen}\pi = -\operatorname{sen}(t-\pi).$$

Aqui foi usado que $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$. Assim

$$f(t) = \operatorname{sen} t + u_\pi(t)\operatorname{sen}(t-\pi)$$

e

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}.$$

Exemplo 3.21. Vamos resolver o seguinte problema de valor inicial

$$2y'' + 2y' + 2y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

em que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 2, & \text{para } 2 \leq t < 10 \\ 0, & \text{para } t \geq 10 \end{cases}$$

Esta função pode ser escrita em termos da função de Heaviside como

$$f(t) = 2u_2(t) - 2u_{10}(t).$$

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação acima obtemos

$$2\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = 2\frac{e^{-2s}}{s} - 2\frac{e^{-10s}}{s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(2s^2 + 2s + 2\right)Y(s) = 2\frac{e^{-2s} - e^{-10s}}{s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-10s}}{s(s^2 + s + 1)}.$$

Para aplicarmos o 2º Teorema de Deslocamento vamos definir

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}.$$

E assim

$$Y(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-10s}}{s(s^2 + s + 1)} = (e^{-2s} - e^{-10s})H(s) = e^{-2s}H(s) - e^{-10s}H(s).$$

Depois de encontrar a função $h(t)$ cuja transformada de Laplace é $H(s)$, a solução do problema de valor inicial é então, pelo 2º Teorema de Deslocamento, dada por

$$y(t) = u_2(t)h(t-2) - u_{10}(t)h(t-10).$$

Vamos a seguir encontrar a função $h(t)$ cuja transformada de Laplace é $H(s)$. Como $s^2 + s + 1$ tem raízes complexas, a decomposição de $H(s)$ em frações parciais é da forma

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 1}.$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2 + s + 1)$ obtemos

$$1 = A(s^2 + s + 1) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se $s = 0$ obtemos $A = 1$. Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 1 obtemos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & A + B = 1 + B \\ 0 & = & A + C = 1 + C \end{array} \right.$$

que tem solução $B = -1$ e $C = -1$. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1/2)^2 + 3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1/2}{(s+1/2)^2+3/4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4} \end{aligned}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

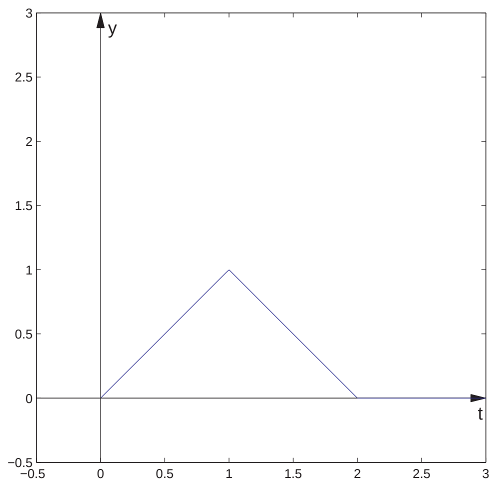
$$y(t) = u_2(t)h(t-2) - u_{10}(t)h(t-10).$$

Exercícios (respostas na página 494)

3.1. Seja $f(t)$ a função cujo gráfico é mostrado na figura ao lado

(a) Expresse $f(t)$ em termos da função degrau.

(b) Calcule a transformada de Laplace de $f(t)$.



3.2. Considere

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos t, & \pi \leq t < 2\pi \\ e^{-\frac{t}{10}}, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

(a) Expresse f em termos da função degrau.

(b) Calcule a transformada de Laplace de f.

3.3. Considere

$$f(t) = \begin{cases} |\cos t|, & 0 \leq t < 3\pi/2 \\ 0, & t \geq 3\pi/2 \end{cases}$$

Calcule a transformada de Laplace de f.

3.4. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $y'' + y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{para } t \geq \pi/2 \end{cases}$

(b) $y'' + 2y' + 2y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 2\pi \end{cases}$

(c) $y'' + 4y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 2\pi \end{cases}$

(d) $y'' + 4y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$

(e) $y'' + 3y' + 2y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \leq t < 10 \\ 0, & \text{para } t \geq 10 \end{cases}$

(f) $y'' + 3y' + 2y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 1, & \text{para } t \geq 2 \end{cases}$

(g) $y'' + y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 1$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < 3\pi \\ 1, & \text{para } t \geq 3\pi \end{cases}$

(h) $y'' + y' + \frac{5}{4}y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0, & \text{para } t \geq \pi \end{cases}$

(i) $y'' + 4y = f(t), y(0) = 0, y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 2, & \text{para } \pi \leq t < 3\pi \\ 0, & \text{para } t \geq 3\pi \end{cases}$

(j) $y'' + 4y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$, em que $f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$

(k) $y'' - 2y' + y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. em que $f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

(l) $y'' + 2y' + 2y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. em que $f(t) = \begin{cases} e^t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

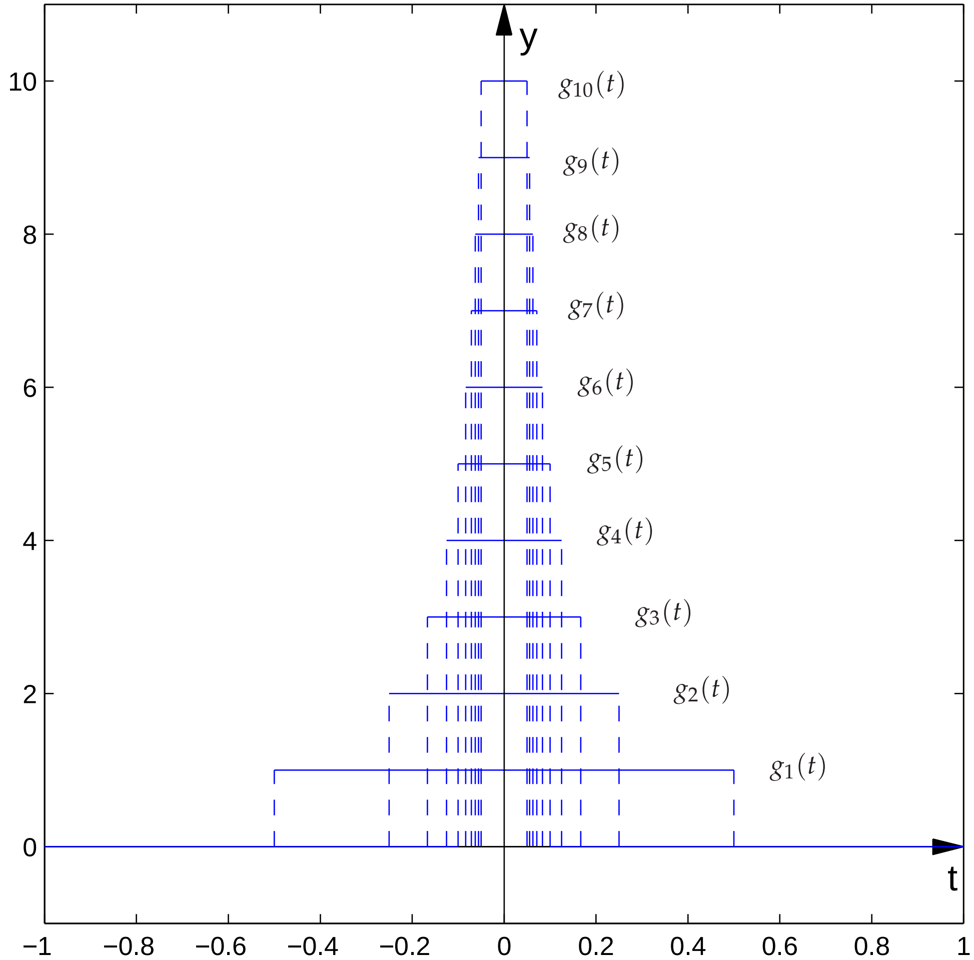
3.4 Transformada de Laplace do Delta de Dirac

O **delta de Dirac** $\delta(t)$ é uma função generalizada definida pela seguinte propriedade

$$\int_0^\infty f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0), \quad \text{para toda função } f:[0,\infty)\to\mathbb{R} \text{ seccionalmente contínua} \tag{3.8}$$

Pode-se mostrar que não existe uma função (usual) que satisfaça tal propriedade, mas se tomamos a seqüência de funções

$$g_n(t) = \begin{cases} n, & \text{se } |t| < \frac{1}{2n} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$


y
10
8
6
4
2
0
$g_{10}(t)$
$g_9(t)$
$g_8(t)$
$g_7(t)$
$g_6(t)$
$g_5(t)$
$g_4(t)$
$g_3(t)$
$g_2(t)$
$g_1(t)$
t
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

e calculamos a integral do produto $f(t)g_n(t-t_0)$, em que $f(t)$ é uma função contínua obtemos

$$\int_0^\infty f(t)g_n(t-t_0)dt = \int_{t_0-\frac{1}{2n}}^{t_0+\frac{1}{2n}} f(t)n\,dt = n\int_{t_0-\frac{1}{2n}}^{t_0+\frac{1}{2n}} f(t)dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais

$$\int_0^\infty f(t)g_n(t-t_0)dt = f(\xi_n), \quad \text{com } t_0 - \frac{1}{2n} < \xi_n < t_0 + \frac{1}{2n}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(t)g_n(t-t_0)dt = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(t_0).$$

Observe que não podemos passar o limite para dentro da integral, pois enquanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(t)g_n(t-t_0)dt = f(t_0),$$

$$\int_0^\infty f(t)(\lim_{n\to\infty} g_n(t-t_0))dt = 0,$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t = t_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Isto mostra que o delta de Dirac não é o limite da seqüência g_n, mas dá uma idéia de como podemos aproximar o delta de Dirac por funções.

Podemos usar o delta de Dirac, por exemplo, para obter o torque em uma viga devido a uma carga concentrada usando a mesma fórmula que é usada para se obter o torque devido a uma distribuição de carga.
O torque devido a uma distribuição de carga $w(x)$ sobre um viga de comprimento l em relação a um dos seus extremos é dada por

$$M = \int_0^l x w(x) dx.$$

Se uma carga F é concentrada em um ponto x_0, então podemos descrever a distribuição de carga usando o delta de Dirac como sendo $w(x) = F\delta(x - x_0)$. Neste caso o torque devido a esta carga concentrada pode ser calculado aplicando a propriedade que define o delta de Dirac (3.8) obtendo

$$M = \int_0^l x w(x) dx = \int_0^l x F \delta(x - x_0) dx = F \int_0^l x \delta(x - x_0) dx = x_0 F.$$

A transformada de Laplace do delta de Dirac também pode ser calculada aplicando a propriedade que o define (3.8) obtendo

$$\mathcal{L}(\delta(t - t_0))(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-t_0 s}$$

Também temos que

$$\mathcal{L}(f(t)\delta(t - t_0))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) e^{-t_0 s}$$

Exemplo 3.22. Vamos encontrar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 10y'' - 3y' - 4y = \delta(t - \pi)\cos t, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1/10, \end{cases}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$10\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 3(sY(s) - y(0)) - 4Y(s) = e^{-\pi s}\cos\pi$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1/10$ obtemos

$$\left(10s^2 - 3s - 4\right)Y(s) = -e^{-\pi s} + 1$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{10s^2 - 3s - 4} - \frac{e^{-\pi s}}{10s^2 - 3s - 4} = H(s) - e^{-\pi s}H(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{10s^2 - 3s - 4} = \frac{1}{10(s - 4/5)(s + 1/2)} = \frac{A}{s - 4/5} + \frac{B}{s + 1/2}$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $10(s - 4/5)(s + 1/2)$:

$$1 = 10A(s + 1/2) + 10B(s - 4/5)$$

Substituindo-se $s = -1/2, 4/5$

$$\begin{cases} 1 = -13B \\ 1 = 13A \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução $A = 1/13$ e $B = -1/13$. Assim,

$$H(s) = \frac{1}{13}\frac{1}{s - 4/5} - \frac{1}{13}\frac{1}{s + 1/2}$$

$$h(t) = \frac{1}{13}e^{4t/5} - \frac{1}{13}e^{-t/2}$$

$$y(t) = h(t) - u_\pi(t)h(t - \pi)$$

Exercícios (respostas na página 517)

4.1. Resolva os problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y'' + y = \delta(t-2\pi)\cos t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^t\delta(t-1), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 4y = e^t\delta(t-2), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^{2t}\delta(t-1), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta(t-1) + u_3(t)t^2, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

4.2. (a) Determine a solução do problema

$$y'' + 4y + 20y = e^{-\frac{\pi}{2}}\delta(t - \frac{\pi}{4}) \quad \text{com } y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

(b) Esboce o gráfico da solução encontrada

4.3. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y' = u_1(t) + \delta(t-2), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

3.5 Convolução

A **convolução de duas funções** $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Teorema 3.8. *Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $G(s)$ a transformada de Laplace de*

$$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Então,

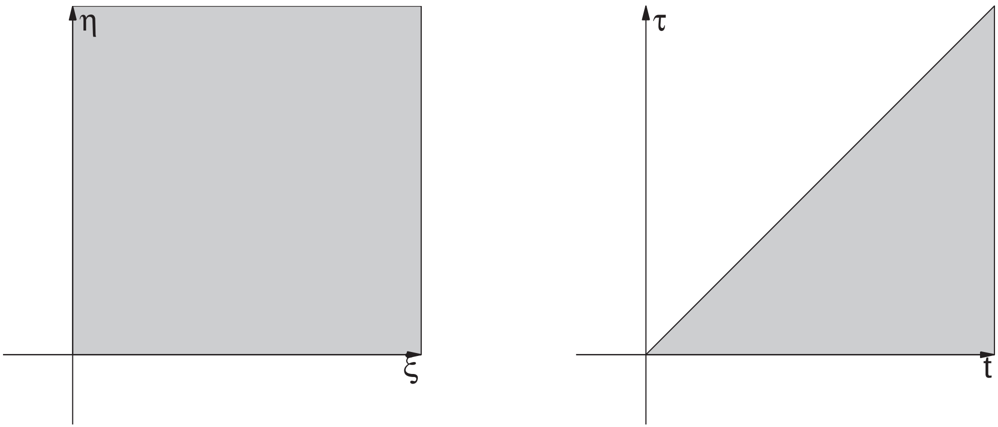
$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

Demonstração. Por um lado,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)d\xi \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta)d\eta = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\eta+\xi)} f(\xi)g(\eta)d\xi d\eta \end{aligned}$$



Fazendo a mudança de variáveis $t = \eta + \xi$ e $\tau = \eta$ obtemos

$$F(s)G(s) \;=\; \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)g(\tau)dtd\tau,$$

Trocando a ordem de integração obtemos

$$F(s)G(s) \;=\; \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt$$

Logo,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

■

Exemplo 3.23. Considere $\mathcal{L}(h)(s) = H(s) = \dfrac{1}{(s-4)(s+1)}$. Vamos determinar $h(t)$ usando convolução. Sejam

$$F(s) = \frac{1}{s-4} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Então

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t e^{4(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = e^{4t} \int_0^t e^{-5\tau} d\tau = e^{4t} \frac{1}{-5} e^{-5\tau} \Big|_0^t = -\frac{e^{4t}}{5} \left(e^{-5t} - 1 \right)$$

Teorema 3.9. *A convolução satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $f * g = g * f$

(b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

(c) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(d) $f * 0 = 0 * f = 0$

Demonstração. (a)

$$(f * g)(t) \quad = \quad \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tau' = t - \tau$ obtemos

$$(f * g)(t) \quad = \quad -\int_t^0 f(\tau') g(t-\tau') d\tau' = \int_0^t f(\tau') g(t-\tau') d\tau' = (g * f)(t)$$

(b)

$$\begin{aligned} f*(g_1+g_2)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)(g_1(\tau)+g_2(\tau))d\tau \\ &= \int_0^t f(t-\tau)g_1(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)g_2(\tau))d\tau \\ &= (f*g_1)(t)+(f*g_2)(t) \end{aligned}$$

(c) Por um lado,

$$\begin{aligned} f*(g*h)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)(g*h)(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\left(\int_0^\tau g(\tau-u)h(u)du\right)d\tau \\ &= \int_0^t\int_0^\tau f(t-\tau)g(\tau-u)h(u)dud\tau \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ((f*g)*h)(t) &= \int_0^t (f*g)(t-x)h(x)dx = \int_0^t\left(\int_0^{t-x} f(t-x-y)g(y)dy\right)h(x)dx \\ &= \int_0^t\int_0^{t-x} f(t-x-y)g(y)h(x)dydx \\ &= \int_0^t\int_0^{t-y} f(t-x-y)g(y)h(x)dxdy \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u=x$ e $\tau=x+y$, obtemos

$$((f*g)*h)(t) = \int_0^t\int_0^\tau f(t-\tau)g(\tau-u)h(u)dud\tau$$

Logo por (3.9)

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

(d)

$$(f*0)(t) = \int_0^t f(t-\tau)0d\tau = 0 = (0*f)(t)$$

■

Vimos acima que várias das propriedades do produto de funções são válidas para a convolução, mas duas propriedades do produto não são válidas para a convolução:

(a) $1 * f \neq f$, pois, por exemplo, para $f(t) = t$,

$$(1*f)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^t = \frac{t^2}{2}$$

(b) $f * f \not\geq 0$, pois, por exemplo, para $f(t) = \cos t$,

$$\begin{aligned}(f*f)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau d\tau \\ &= \cos t \int_0^t \cos^2\tau d\tau + \operatorname{sen} t \int_0^t \operatorname{sen}\tau\cos\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2}\cos t(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 t\end{aligned}$$

$$(f*f)(\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

Exemplo 3.24. Vamos encontrar a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t), \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \end{cases}$$

em que $f(t)$ é uma função qualquer que tem uma transformada de Laplace.
Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = F(s)$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = F(s) + 1$$

Assim,

$$Y(s) \quad = \quad \frac{F(s)}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4} = F(s)H(s) + H(s)$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}.$$

Assim,

$$h(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t$$

e a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) + (h * f)(t)$$

Exemplo 3.25. A equação integral a seguir pode ser resolvida usando transformada de Laplace.

$$1+\int_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = y(t)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}Y(s) = Y(s)$$

$$Y(s)\left(1-\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{(s^2-s+1)s}$$

Decompondo $Y(s)$ em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-s+1}$$

Multiplicando-se or $(s^2-s+1)s$:

$$s^2+1 = A(s^2-s+1)+(Bs+C)s$$

Substituindo-se $s=0$ obtemos $A=1$. Comparando-se os termos de grau 2 obtemos $1=A+B$ ou $B=0$. Comparando-se os termos de grau 1 obtemos $0=-A+C$ ou $C=1$. Assim

$$Y(s) = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2-s+1} = \frac{1}{s}+\frac{1}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{s}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Assim a solução da equação integral é

$$y(t) = 1+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Exercícios (respostas na página 522)

5.1. Considere $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \dfrac{1}{s(s+3)}$. Determine $f(t)$:

(a) Utilizando frações parciais.

(b) Utilizando convolução.

5.2. Considere $\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \dfrac{1}{s(s^2-4s+5)}$. Determine $f(t)$:

(a) Utilizando frações parciais.

(b) Utilizando convolução.

5.3. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 4y = f(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

para uma função $f(t)$ arbitrária.

5.4. Resolva a equação integral

$$1 + t + \int_0^t \operatorname{sen} 2(t-\tau) y(\tau) d\tau = y(t)$$

3.6 Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$, para $s > 0$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, para $s > a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, para $s > 0$	$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, para $s > 0$
t^n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, para $s > 0$	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$, $s > 0$	$t \operatorname{sen} at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$, $s > 0$
$\operatorname{sen} at - at \cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$, $s > 0$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s}$, $s > 0$
$u_a(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$	$\frac{e^{-as}}{s}$, para $s > 0$	$u_a(t) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$f(t)\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s} f(t_0)$, $s > 0$	$\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$

3.7 Respostas dos Exercícios

1. Introdução (página 446)

1.1.

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s-5}{s(s-3)(s+4)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+4} \end{aligned}$$

Multiplicando por $s(s-3)(s+4)$ obtemos
$2s-5 = A(s-3)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s-3)$
Substituindo-se $s = 0, 3, -4$ obtemos $A = \frac{5}{12}$, $B = \frac{1}{21}$ e $C = -\frac{13}{28}$. Assim,

$$f(t) = \frac{5}{12} + \frac{1}{21}e^{3t} - \frac{13}{28}e^{-4t}$$

1.2. (a) $Y(s) = \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)}$
$= \frac{2+s^2}{s^2(s+2)(s-1)}$
$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1}$
Multiplicando-se por $s^2(s+2)(s-1)$ obtemos

$$s^2 + 2 = \tag{3.10}$$

$= As(s+2)(s-1) + B(s+2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2)$
Substituindo-se $s = -2, 0, 1$ obtemos

$$\begin{cases} 6 &= -12C \\ 2 &= -2B \\ 3 &= 3D \end{cases}$$

que tem solução $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$ e $D = 1$. Comparando-se os termos de grau 3 em (3.10):

$$0 = A + C + D = A - \frac{1}{2} + 1$$

de onde obtemos $A = -\frac{1}{2}$.
Assim,
$Y(s) = \frac{-1/2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1/2}{s+2} + \frac{1}{s-1}$
$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t$

(b) $Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$
O numerador da segunda parcela é de 1º grau ($Bs + C$), pois o denominador tem raízes complexas. Multiplicando-se a equação pelo denominador $(s-1)(s^2+4)$ obtemos
$3 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 3/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

$$\begin{cases} 0 &= A + B = 3/5 + B \\ 0 &= -B + C \end{cases}$$

que tem solução $B = -3/5$ e $C = -3/5$. Assim,
$Y(s) = \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4}$
$y(t) = \frac{3}{5}e^t - \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\,\mathrm{sen}\, 2t$

1.3.

$$h(t) = f(t) - ag(t)$$

Aplicando-se a linearidade da transformada de Laplace obtemos

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathcal{L}(h)(s) \\ &= \mathcal{L}(f)(s) - a\,\mathcal{L}(g)(s) \\ &= F(s) - a\,G(s) \\ &= \frac{a}{s^2+a^2} - a\,\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \\ &= \frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2} \end{aligned}$$

2. Problemas de Valor Inicial (página 453)

2.1. (a) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 5\right)Y(s) \quad = \quad 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + s + 2$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{4s+4}{(s^2+2s+5)^2} + \frac{s+2}{s^2+2s+5} \\
&= 4\frac{s+1}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1+1}{(s+1)^2+4} \\
&= \frac{2\cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}
\end{aligned}
$$

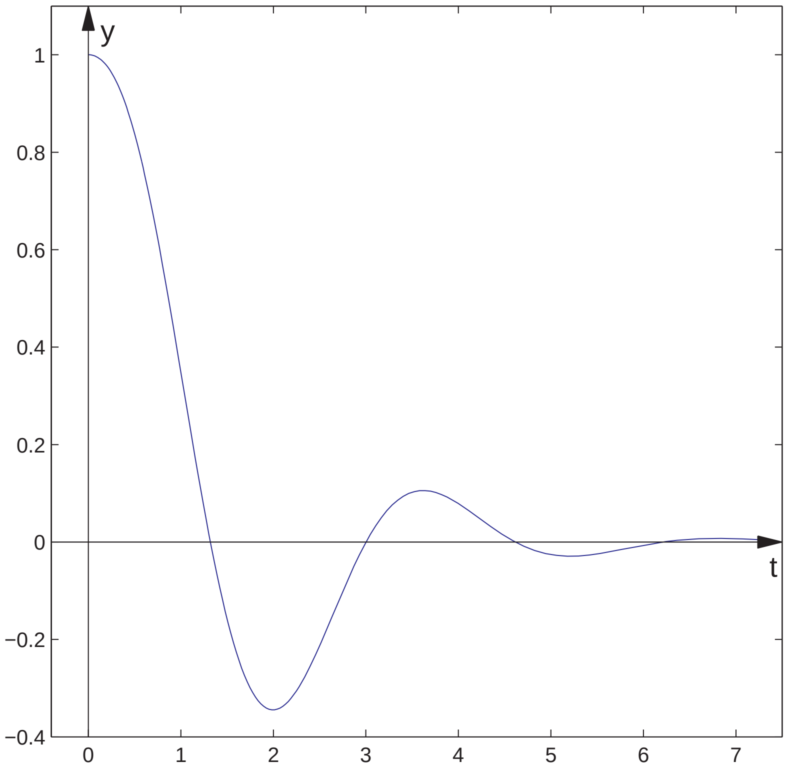
De onde obtemos

$$y(t) = te^{-t}\operatorname{sen} 2t + e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t.$$

Aqui usamos a tabela da página 478 e o 1º Teorema de Deslocamento:

$$\mathcal{L}[e^{bt}g(t)](s) = G(s-b),$$

onde $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.



(b) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 2$ obtemos

$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s-1} + 2$ Assim,

$$Y(s) = \tag{3.11}$$

$= \frac{2}{s^3(s^2+4)} + \frac{3}{(s-1)(s^2+4)} + \frac{2}{s^2+4}$

A primeira parcela de (3.11) pode ser decomposta como

$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}$

Multiplicando-se a equação acima por $s^3(s^2+4)$ obtemos

$$2 = \tag{3.12}$$

$= As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4) + (Ds+E)s^3$

Substituindo-se $s = 0, 2i$ em (3.12)

$$\begin{cases} 2 &= 4C \\ 2 &= (2iD+E)(-8i) = 16D - 8iE \end{cases}$$

De onde obtemos $C = \frac{1}{2}$ e comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação do sistema acima

$$\begin{cases} 2 &= 16D \\ 0 &= -8E \end{cases}$$

De onde obtemos $D = \frac{1}{8}$ e $E = 0$. Comparando-se os termos de grau 4 na equação (3.12) obtemos

$0 = A + D = A + \frac{1}{8}$.

Logo $A = -\frac{1}{8}$. Comparando-se os termos de grau 3 na equação (3.12) obtemos $0 = B$.

Assim,

$\frac{2}{s^3(s^2+4)} = -\frac{1/8}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4}$

A segunda parcela de (3.11) pode ser decomposta como

$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$

$$3 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 3/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

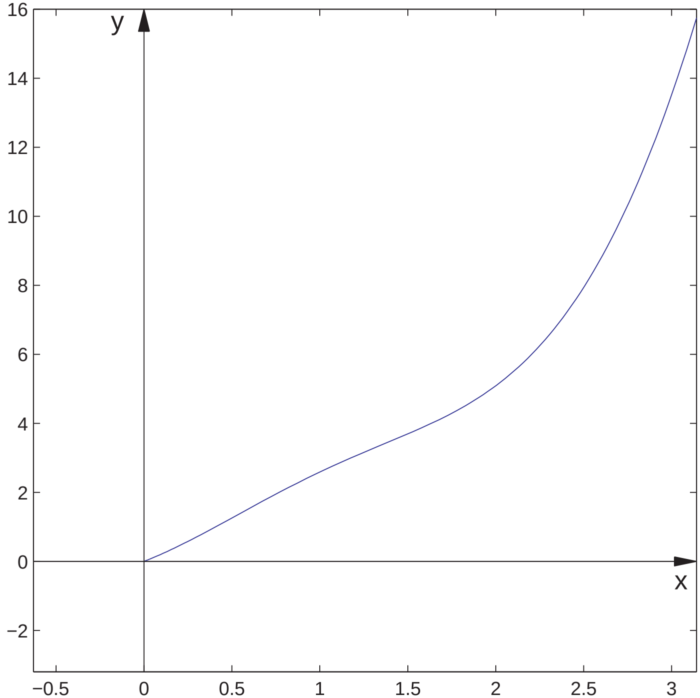
$$\begin{cases} 0 &= A + B = 3/5 + B \\ 0 &= -B + C \end{cases}$$

que tem solução $B = -3/5$ e $C = -3/5$. Assim,

$\frac{3}{(s-1)(s^2+4)} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4}$

$Y(s) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{2}{s^3} + \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$

$y(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{3}{5}e^t + \frac{7}{10}\,\text{sen}\, 2t$



(c) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$\left(s^2 - 2s + 1\right) Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s} + s - 1$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$

$\frac{4}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$

Multiplicando-se por $s(s-1)^2$ obtemos

$$4 = A(s-1)^2 + B(s-1)s + Cs \tag{3.13}$$

Substituindo-se $s = 0, 1$ obtemos

$$\begin{cases} 4 &= A \\ 4 &= C \end{cases}$$

Comparando-se os termos de grau 2 na equação (3.13) obtemos

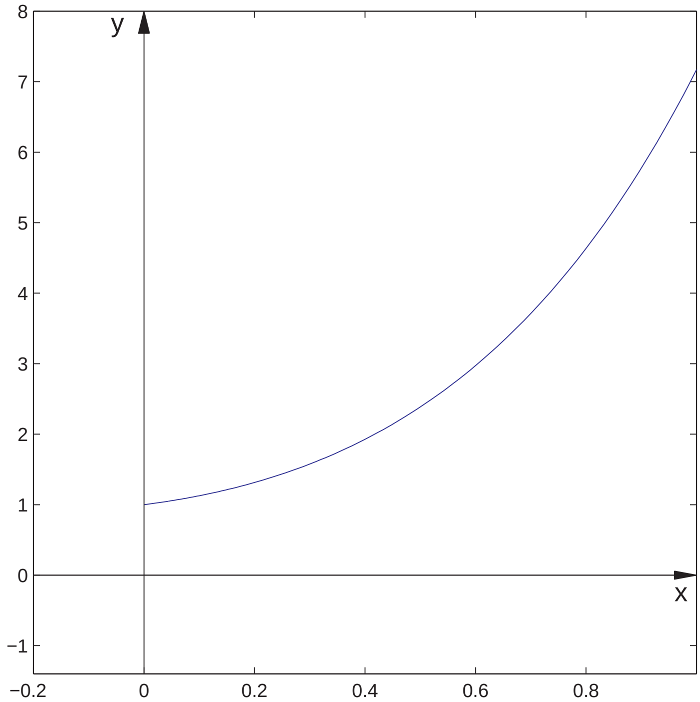
$0 = A + B = A + 4$

Logo $B = -4$.

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{6}\frac{6}{(s-1)^4} + \frac{4}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$

$y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t + 4 - 3e^t + 4te^t$



(d) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) - 3Y(s) = 3\frac{1}{(s-2)^2}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s - 3\right) Y(s) = 3\frac{1}{(s-2)^2} + s - 2$$

Assim,
$Y(s) = 3\frac{1}{(s^2-2s-3)(s-2)^2} + \frac{s-2}{s^2-2s-3}$
$= 3\frac{1}{(s-3)(s+1)(s-2)^2} + \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}$

$= \frac{3+(s-2)^3}{(s-3)(s+1)(s-2)^2}$
$= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2}$

Multiplicando-se $Y(s)$ por $(s-3)(s+1)(s-2)^2$ obtemos

$$3 + (s-2)^3 = \tag{3.14}$$

$= A(s+1)(s-2)^2 + B(s-3)(s-2)^2 + C(s-3)(s+1)(s-2) + D(s-3)(s+1)$

Substituindo-se $s = -1, 2$ e 3 na equação acima obtemos $A = 1$, $B = \frac{2}{3}$ e $D = -1$. Comparando-se os termos de grau 3 em (3.14) obtemos

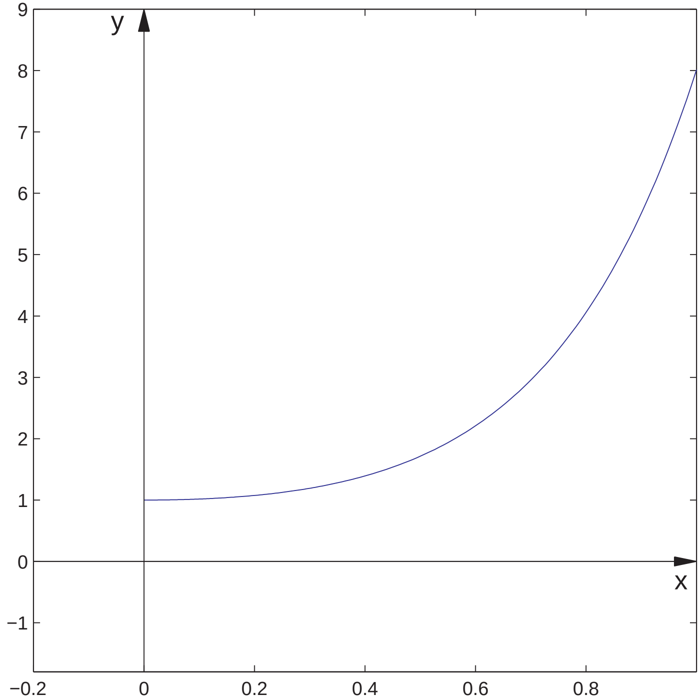
$$1 = A + B + C = 1 + \frac{2}{3} + C$$

que tem solução $C = -\frac{2}{3}$.

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{s-3} + \frac{2/3}{s+1} - \frac{2/3}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$

$y(t) = e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - te^{2t}$



(e) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = 3\frac{2}{s^2+4}$

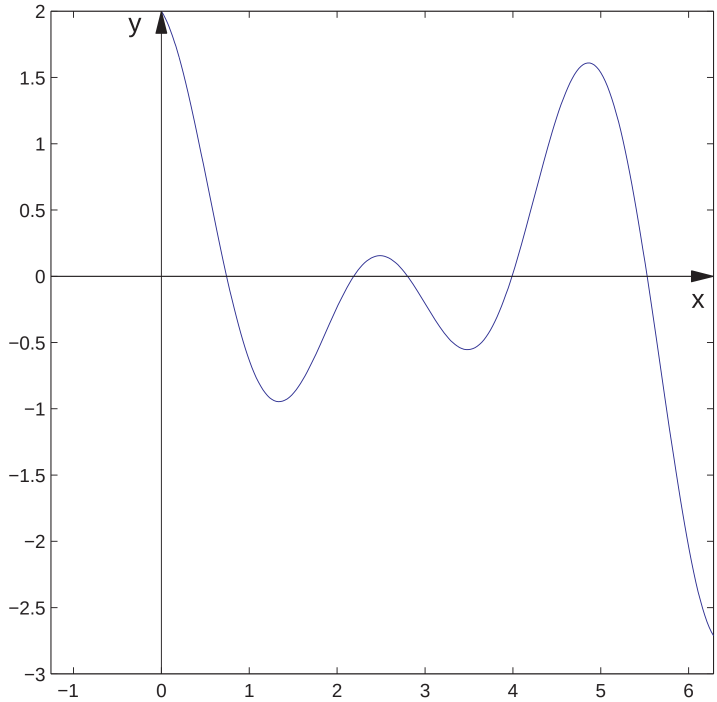
Substituindo-se os valores $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$ obtemos

$$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = 3\frac{2}{s^2 + 4} + 2s - 1$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{6}{(s^2+4)^2} + \frac{2s-1}{s^2+4} \\
&= \frac{6}{16}\frac{16}{(s^2+4)^2} + 2\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4} \\
&= \frac{3}{8}\frac{16}{(s^2+4)^2} + 2\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}
\end{aligned}$$

$y(t) = \frac{3}{8}(\operatorname{sen} 2t - 2t\cos 2t) + 2\cos 2t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$
$= 2\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{4}t\cos 2t$



(f) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s-1}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplicando-se $Y(s)$ por $(s-1)(s^2+4)$:

$$1 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = -1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1/5 & + & B & & = 0 \\ 4/5 & & & - \; C & = 1 \end{array}\right.$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução $B = -1/5$ e $C = -1/5$. Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{s^2+4} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+4} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2t$$

(g) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{s-2}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s + 1\right) Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-2)\left(s^2 - 2s + 1\right)} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s-1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Multiplicando-se por $(s-2)(s-1)^2$ obtemos

$$1 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-2)$$

Substituindo-se $s = 1$ e $s = 2$ obtemos $C = -1$ e $A = 1$. Comparando-se os termos de grau 2 obtemos $0 = A + B = 1 + B$. Logo $B = -1$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = e^{2t} - e^t - te^t$$

(h)

$$\begin{aligned}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + \\ + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)} \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}\end{aligned}$$

Multiplicando-se $Y(s)$ por $(s-1)(s^2+2s+2)$ obtemos

$$1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1/5 & + & B & & & = & 0 \\ 2/5 & & & - & C & = & 1 \end{array}\right.$$

que tem solução $B = -1/5$ e $C = -3/5$. Assim,

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{5}\frac{1}{(s+1)^2+1}\end{aligned}$$

De onde obtemos que a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t.$$

2.2. (a) A equação característica é $r^2 - 6r + 8 = 0$, que tem raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$.
A equação homogênea correspondente tem solução geral

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}.$$

Uma solução particular da equação não homogênea é da forma $y_p(t) = A\cos t + B \operatorname{sen} t$. Substituindo-se $y_p(t), y_p'(t)$ e $y_p''(t)$ na equação:

$$(7A - 6B)\cos t + (6A + 7B)\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t$$

De onde obtemos $A = 6/85$ e $B = 7/85$. A solução geral da equação não homogênea é
$y(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\operatorname{sen} t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

$$y'(0) = 0 = \frac{7}{85} + 2c_1 + 4c_2$$
$$y(0) = 0 = \frac{6}{85} + c_1 + c_2$$

$c_1 = -1/10$ e $c_2 = 1/34$.
$y(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\operatorname{sen} t - \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t}$

(b) $\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 6\left(sY(s) - y(0)\right) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 6s + 8\right) Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 - 6s + 8)(s^2+1)}$$

$\frac{1}{(s^2-6s+8)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$
Multiplicando-se por $(s-2)(s-4)(s^2+1)$ obtemos
$1 = A(s-4)(s^2+1) + B(s-2)(s^2+1) + (Cs+D)(s-2)(s-4)$
Substituindo-se $s = 2, 4, i$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 & = & -10A \\ 1 & = & 34B \\ 1 + i0 & = & (iC + D)(i-4) \\ & = & (-C - 4D) + i(-4C + D) \end{array}\right.$$

que tem solução $A = -1/10$, $B = 1/34$, $C = 6/85$ e $D = 7/85$. Assim,
$Y(s) = -\frac{1}{10}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{34}\frac{1}{s-4} + \frac{6}{85}\frac{s}{s^2-1} + \frac{7}{85}\frac{1}{s^2-1}$
$y(t) = -\frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t} + \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\operatorname{sen} t$

2.3.

$$f'(t) = \cos at - a\,t\,\text{sen}\,at$$

Aplicando-se a transformada de Laplace obtemos

$$sF(s) - f(0) = \frac{s}{s^2+a^2} - a\,\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Isolando-se $F(s)$

$$F(s) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

3. Equações com Termo não Homogêneo Descontínuo (página 462)

3.1. (a)

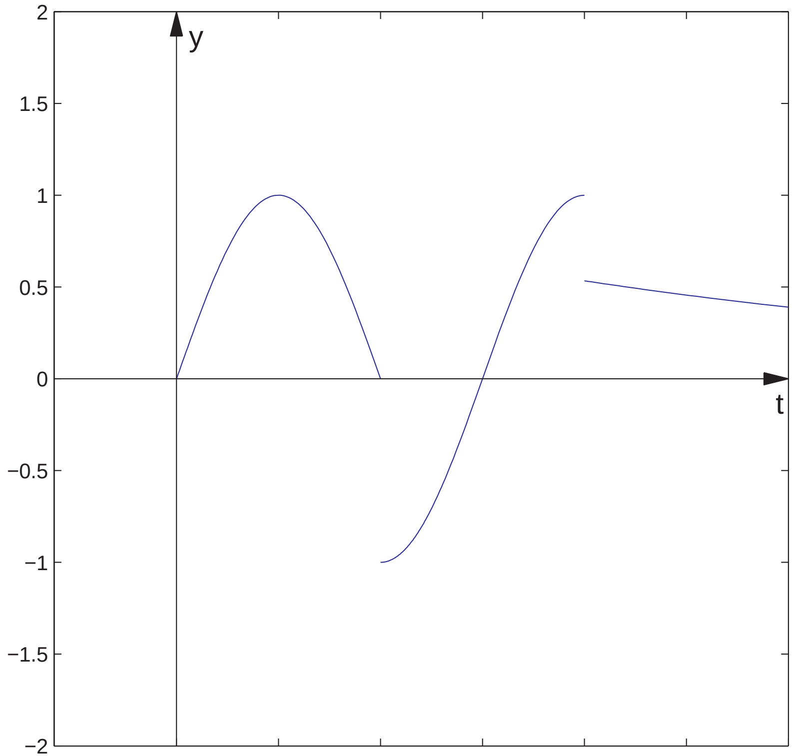
$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ -(t-2), & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

$$f(t) = t - tu_1(t) - (t-2)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$$

(b)

$$f(t) = t - 2(t-1)u_1(t) + (t-2)u_2(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$



3.2. (a) $f(t) = \operatorname{sen} t - u_\pi(t) \operatorname{sen} t + u_\pi(t) \cos t - u_{2\pi}(t) \cos t + u_{2\pi}(t) e^{-\frac{t}{10}}$

(b) $f(t) = \operatorname{sen} t + u_\pi(t)(\operatorname{sen}(t-\pi) - \cos(t-\pi)) + u_{2\pi}(t)(-\cos(t-2\pi) + e^{-\frac{\pi}{5}} e^{-\frac{t-2\pi}{10}})$

$F(s) = \frac{1}{1+s^2} + e^{-\pi s}(\frac{1}{1+s^2} - \frac{s}{1+s^2}) + e^{-2\pi s}(-\frac{s}{1+s^2} + e^{-\frac{\pi}{5}} \frac{1}{s+\frac{1}{10}})$

3.3.

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < \pi/2 \\ -\cos t, & \pi/2 \le t < 3\pi/2 \\ 0, & t \ge 3\pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t - u_{\pi/2}(t)\cos t - u_{\pi/2}(t)\cos t + u_{3\pi/2}(t)\cos t \\ &= \cos t - 2u_{\pi/2}(t)\cos[(t-\pi/2)+\pi/2] \\ &\quad + u_{3\pi/2}(t)\cos[(t-3\pi/2)+3\pi/2] \\ &= \cos t + 2u_{\pi/2}(t)\,\text{sen}(t-\pi/2) + u_{3\pi/2}(t)\,\text{sen}(t-3\pi/2) \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{s}{1+s^2} + 2e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{1}{1+s^2} + e^{-3\pi s/2}\frac{1}{1+s^2}$$

3.4. (a) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s}$ Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2+1\right)Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s} + 1$$

Assim,
$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s(s^2+1)}$
$= \frac{1}{s^2+1} + H(s) - e^{-\pi s/2}H(s)$,
em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$y(t) = \text{sen}\, t + h(t) - h(t-\pi/2)u_{\pi/2}(t)$.
$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$.
Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+1)$ obtemos

$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)s$$

Substituindo-se $s = 0$ e $s = i$

$$\begin{cases} 1 = A \\ 1 = (Bi+C)i = -B + Ci \end{cases}$$

De onde obtemos $A = 1$. Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação obtemos $B = -1$ e $C = 0$.
Assim,

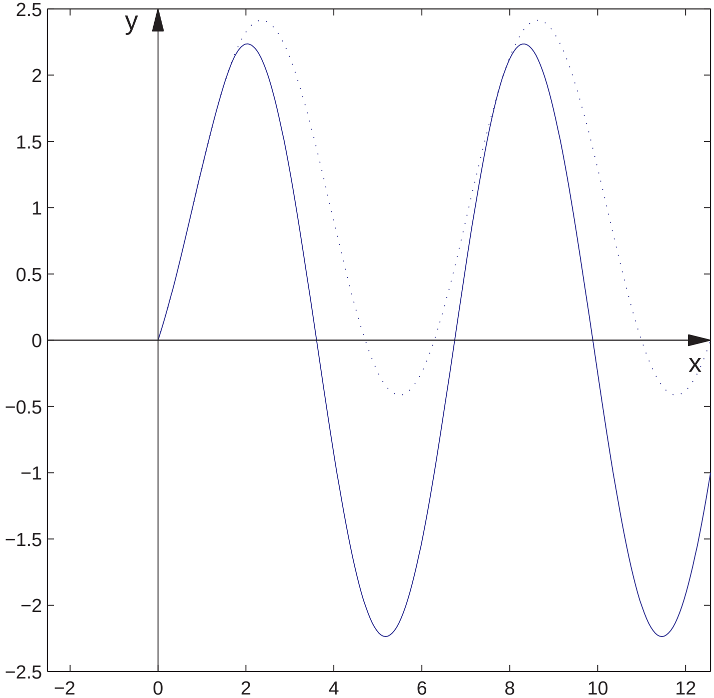
$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t) - h(t - \pi/2)u_{\pi/2}(t) = 1 - \cos t + \operatorname{sen} t - u_{\pi/2}(t)(1 - \operatorname{sen} t).$$



(b) $\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-2\pi s}}{s}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s} + 1$$

Assim,

$Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s(s^2+2s+2)} + \frac{1}{s^2+2s+2}$
$= (e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})H(s) + \frac{1}{(s+1)^2+1}$,

em que

$$H(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$y(t) = h(t-\pi)u_\pi(t) - h(t-2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t.$

$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$.

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2 + 2s + 2)$ obtemos

$$2 = A(s^2 + 2s + 2) + (Bs + C)s$$

Substituindo-se $s = 0$ obtemos $A = 1$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 1 obtemos

$$\begin{cases} 0 &= A + B = 1 + B \\ 0 &= 2A + C = 2 + C \end{cases}$$

que tem solução $B = -1$ e $C = -2$. Assim,

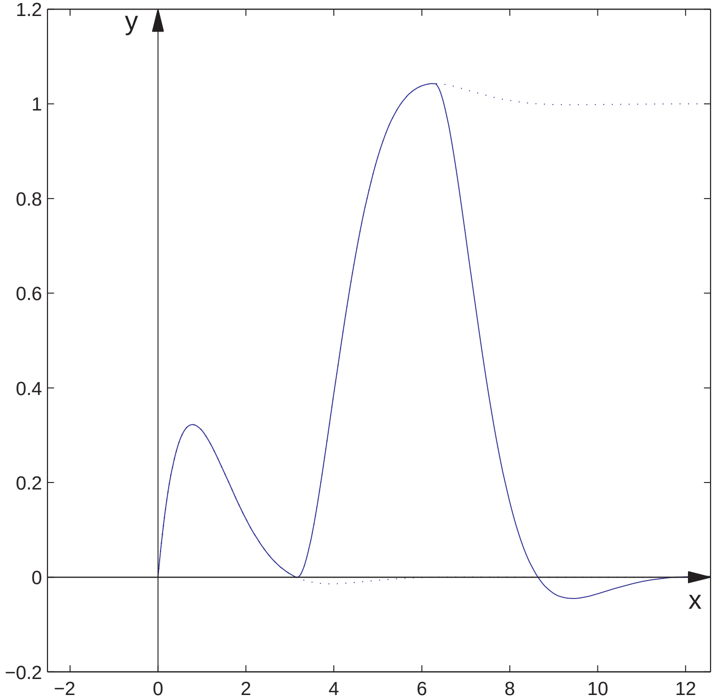
$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$
$= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t$$

e a solução do problema de valor inicial é dado por

$y(t) = h(t-\pi)u_\pi(t) - h(t-2\pi)u_{2\pi}(t) + e^{-t}\,\mathrm{sen}\, t.$



(c) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$= H(s) - e^{-2\pi s} H(s)$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t)h(t-2\pi)$$

$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$

Multiplicando-se por $(s^2+1)(s^2+4)$:

$1 = (As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1)$

Substituindo-se $s = i, 2i$

$$\begin{cases} 1 &= (iA+B)3 \\ 1 &= (2iC+D)(-3) \end{cases}$$

Como A, B, C e D são reais, comparando-se as partes real e imaginária obtemos

$$\begin{cases} 1 &= 3B \\ 0 &= 3A \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 1 &= -3D \\ 0 &= -6C \end{cases}$$

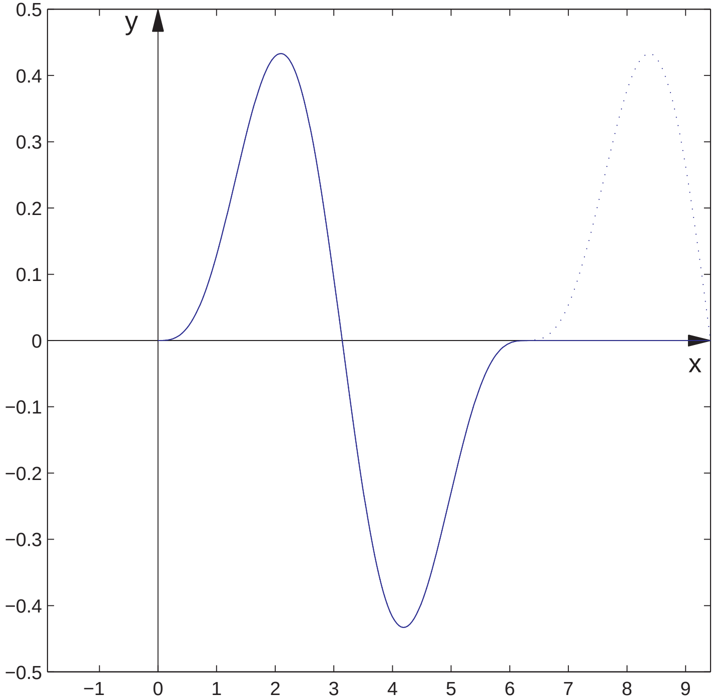
De onde obtemos a solução $A = 0$, $B = 1/3$, $C = 0$ e $D = -1/3$.

Assim,

$$H(s) = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{-1/3}{s^2+4}$$

$h(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t$

$y(t) = h(t) - u_{2\pi}(t)h(t-2\pi) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t - u_{2\pi}(t)(\frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t)$



(d) $\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$ Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$
$= H(s) + e^{-\pi s} H(s)$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$

Do exercício anterior temos que

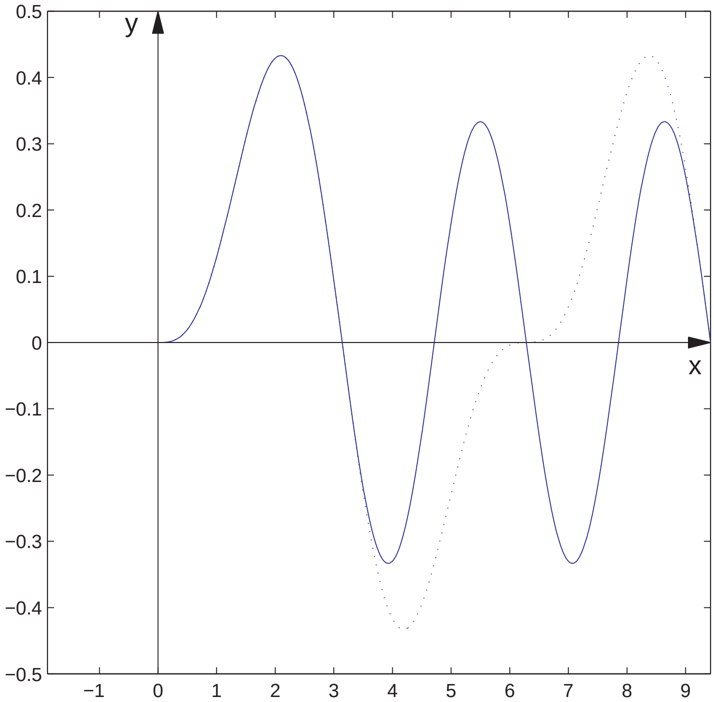
$$H(s) = \frac{1/3}{s^2+1} + \frac{-1/3}{s^2+4}$$

Assim,

$$h(t) = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,t - \frac{1}{6}\,\text{sen}\,2t$$

e portanto

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi) = \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,t - \tfrac{1}{6}\,\text{sen}\,2t - u_\pi(t)(\tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,t + \tfrac{1}{6}\,\text{sen}\,2t)$$



(e) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 3s + 2\right) Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-10s}}{s}$$

Assim,
$Y(s) = \frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)} - \frac{e^{-10s}}{s\left(s^2+3s+2\right)} = H(s) - e^{-10s}H(s)$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s\,(s^2 + 3s + 2)}$$

$$y(t) = h(t) - u_{10}(t)h(t-10).$$

$H(s) = \frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$

Multiplicando $H(s)$ por $s\left(s^2 + 3s + 2\right)$ obtemos

$$1 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

Substituindo-se $s = 0, -1, -2$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 1 & = & 2A \\ 1 & = & -B \\ 1 & = & 2C \end{array} \right.$$

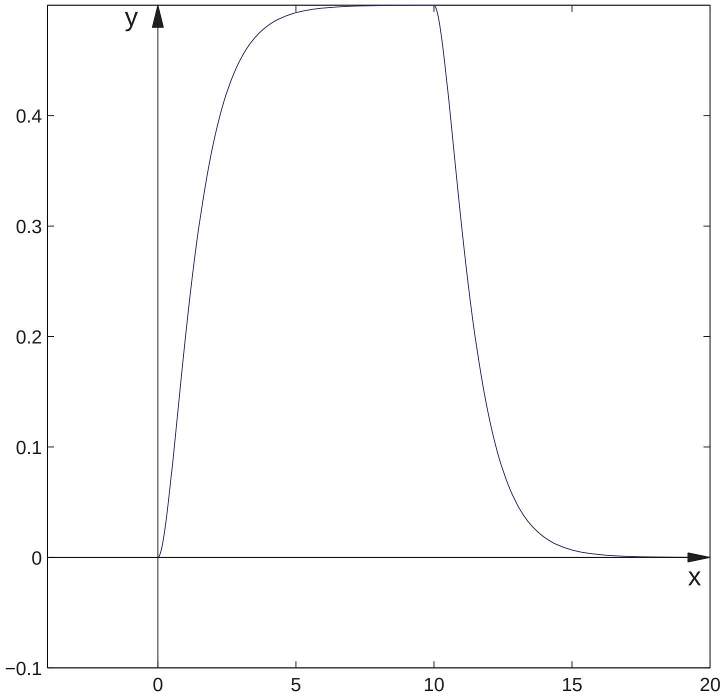
que tem solução $A = 1/2$, $B = -1$ e $C = 1/2$.

Assim,

$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$

$h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$

$$y(t) = h(t) - u_{10}(t)h(t-10)$$



(f) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 3\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2 + 3s + 2\right) Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} + 1$$

Assim,
$Y(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} + \frac{e^{-2s}}{s\left(s^2+3s+2\right)} = Y_1(s) + e^{-2s}H(s)$

em que

$H(s) = \frac{1}{s\left(s^2+3s+2\right)}$ e $Y_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

$$y(t) = y_1(t) + u_2(t)h(t-2).$$

$Y_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = Y_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$

Multiplicando $Y_1(s)$ por $(s+1)(s+2)$:

$$1 = A(s+2) + B(s+1)$$

Substituindo-se $s = -1, -2$ obtemos $A = 1$ e $B = -1$. Assim,

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

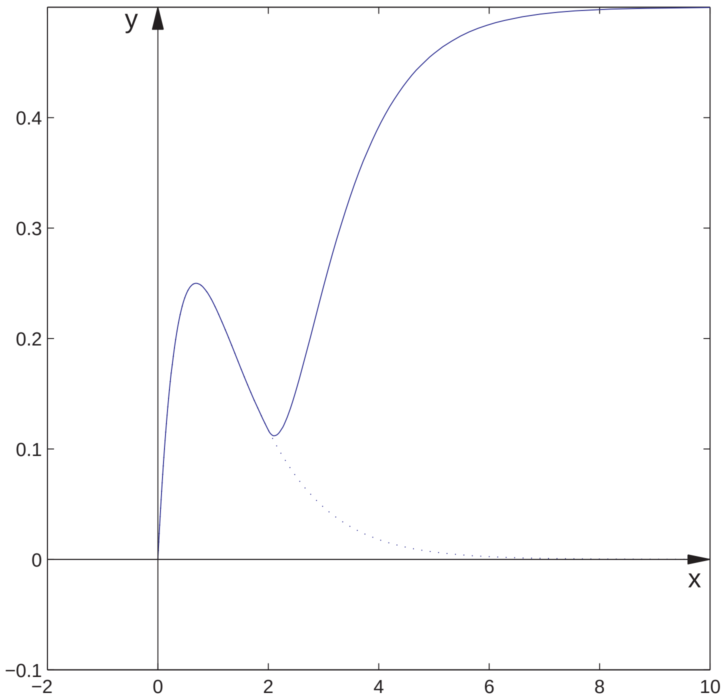
$$y_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Do exercício anterior

$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$

$$h(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(t) = y_1(t) + u_2(t)h(t-2) = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)h(t-2)$$



(g) $\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2+1\right) Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s} + 1$$

Assim,
$Y(s) = \frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}$
$= e^{-3\pi s} H(s) + \frac{1}{s^2+1}$,

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t-3\pi)u_{3\pi}(t).$$

$H(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$.

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+1)$ obtemos

$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)s$$

Substituindo-se $s = 0$ e $s = i$

$$\begin{cases} 1 &= A \\ 1 &= (Bi+C)i = -B+Ci \end{cases}$$

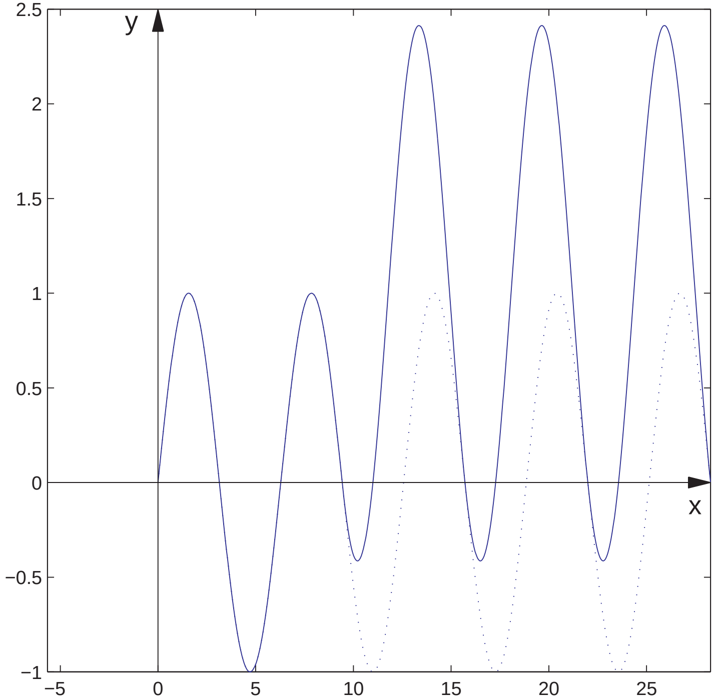
De onde obtemos $A = 1$. Comparando-se as partes real e imaginária da segunda equação obtemos $B = -1$ e $C = 0$. Assim,

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = 1 - \cos t$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t + h(t-3\pi)u_{3\pi}(t) = \operatorname{sen} t + u_{3\pi}(t)[1-\cos(t-3\pi)]$$



(h) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + \left(sY(s) - y(0)\right) + \frac{5}{4}Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$

Assim,

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} + e^{-\pi s}\frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$

$= H(s) + e^{-\pi s}H(s)$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)}$$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$

$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)} = \frac{4}{(s^2+1)\left(4s^2+4s+5\right)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+s+\frac{5}{4}}$

Multiplicando-se $H(s)$ por $(s^2+1)\left(4s^2+4s+5\right)$:

$$4 = (As+B)(4s^2+4s+5) + (Cs+D)(s^2+1) \tag{3.15}$$

Substituindo-se $s = i$ obtemos

$$\begin{aligned} 4 &= (Ai+B)(-4+4i+5) \\ &= (-4A+B) + (A+4B)i \end{aligned}$$

Comparando-se as partes real e imaginária da equação acima obtemos

$$\begin{cases} 4 = -4A+B \\ 0 = A+4B \end{cases}$$

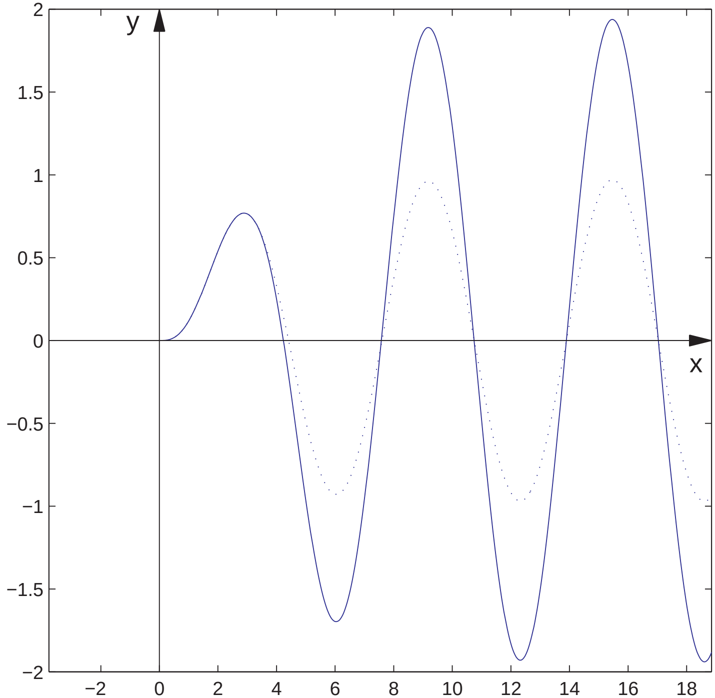
Resolvendo-se os sistemas acima obtemos a solução $A = -16/17$, $B = 4/17$. Comparando os termos de grau 3 e de grau zero de (3.15) obtemos
$0 = 4C + 4A$, $4 = 4D + 5B$,
de onde obtemos
$C = -A = 16/17$ e $D = 1 - 5B/4 = 12/17$.

Assim,

$H(s) = \frac{4}{17}\left(\frac{-4s+1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{s^2+s+\frac{5}{4}}\right)$
$= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{4s+3}{(s+1/2)^2+1}\right)$
$= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+3/4}{(s+1/2)^2+1}\right)$
$= \frac{4}{17}\left(-4\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1} + \frac{1}{(s+1/2)^2+1}\right)$

$h(t) =$
$\frac{4}{17}\left(-4\cos t + \operatorname{sen} t + 4e^{-t/2}\cos t + e^{-t/2}\operatorname{sen} t\right)$

$$y(t) = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi)$$



(i) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s}}{s} - 2\frac{e^{-3\pi s}}{s}$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$\left(s^2 + 4\right) Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-3\pi s}}{s}$

Assim,

$Y(s) = 2\frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}$

$= (e^{-\pi s} - e^{-3\pi s})H(s),$

em que

$H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)}$

$$y(t) = u_\pi(t)h(t-\pi) - u_{3\pi}(t)h(t-3\pi).$$

$H(s) = \frac{2}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}.$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2+4)$ obtemos

$$2 = A(s^2+4) + (Bs+C)s$$

Substituindo-se $s = 0, 2i$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2 & = & 4A \\ 2+i0 & = & (2iB+C)2i = (-4B) + i(2C) \end{array} \right.$$

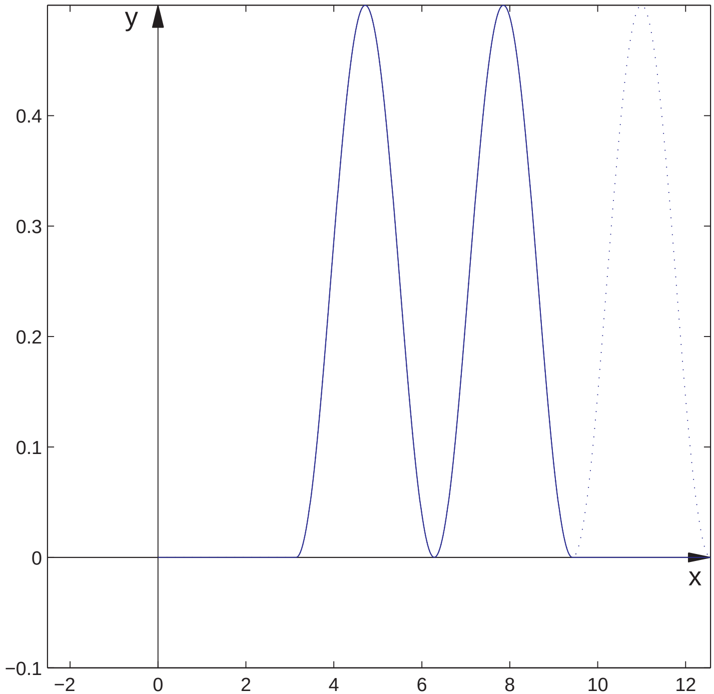
que tem solução $A = 1/2$, $B = -1/2$ e $C = 0$. Assim,

$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}$

De onde obtemos que a função cuja transformada de Laplace é $H(s)$ é

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t$$

$$y(t) = u_\pi(t)h(t-\pi) - u_{3\pi}h(t-3\pi)$$



(j)

$$f(t) = e^t - u_2(t)e^t = e^t - u_2(t)e^{(t-2)+2} = e^t - e^2 u_2(t)e^{t-2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}$$

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = \frac{1}{s-1} - e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2+4\right) Y(s) = \frac{1}{s-1} - e^2 \frac{e^{-2s}}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)\left(s^2+4\right)} - e^2 \frac{e^{-2s}}{(s-1)\left(s^2+4\right)} \\ &= H(s) - e^2 e^{-2s} H(s) \end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+4)}.$$

$$H(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $(s-1)(s^2+4)$:

$$1 = A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os termos de grau 0 obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} 1/5 & + & B & & & = & 0 \\ 4/5 & & & - & C & = & 1 \end{array} \right.$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução $A = 1/5$, $B = -1/5$ e $C = -1/5$. Assim,

$$H(s) = \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{s^2+4} = \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+4}$$

$$h(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2t.$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - e^2 u_2(t) h(t-2)$$

$$f(t) = e^{2t}(1 - u_1(t)) = e^{2t} - e^2 e^{2(t-1)} u_1(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s-2} - e^2 \frac{e^{-s}}{s-2}$$

(k)

$$\begin{aligned}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)& \\ -2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) &= \frac{1}{s-2} - e^2\frac{e^{-s}}{s-2}\end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s + 1\right)Y(s) = \frac{1}{s-2} - e^2\frac{e^{-s}}{s-2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} - e^2\frac{e^{-s}}{(s-1)^2(s-2)} \\ &= H(s) - e^2e^{-s}H(s)\end{aligned}$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)}.$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Multiplicando-se por $(s-2)(s-1)^2$ obtemos

$$1 = A(s-1)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-2)$$

Substituindo-se $s = 1$ e $s = 2$ obtemos $C = -1$ e $A = 1$. Comparando-se os termos de grau 2 obtemos $0 = A + B = 1 + B$, de onde obtemos $B = -1$.
Assim,

$$H(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$h(t) = e^{2t} - e^t - te^t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - e^2u_1(t)h(t-1)$$

(l)

$$f(t) = e^t(1 - u_1(t)) = e^t - ee^{t-1}u_1(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - e\frac{e^{-s}}{s-1}$$

$$\begin{aligned}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)& \\ +2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-1} - e\frac{e^{-s}}{s-1}\end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = \frac{1}{s-1} - e\frac{e^{-s}}{s-1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)\left(s^2+2s+2\right)} \\ &\quad - e\frac{e^{-s}}{\left(s^2+2s+2\right)(s-1)} \\ &= H(s) - ee^{-s}H(s)\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)}, \\ &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}\end{aligned}$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $(s-1)(s^2+2s+2)$ obtemos

$$1 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s-1)$$

Substituindo-se $s = 1$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e os de grau 0 obtemos

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1/5 & + & B & & & = & 0 \\ 2/5 & & & - & C & = & 1\end{array}\right.$$

que tem solução $B = -1/5$ e $C = -3/5$. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{s^2+2s+2} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+3}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{5}\frac{1}{(s+1)^2+1}\end{aligned}$$

Pelo item anterior temos que

$$h(t) = \frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-t}\operatorname{sen} t.$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = h(t) - eu_1(t)h(t-1)$$

4. Transformada de Laplace do Delta de Dirac (página 469)

4.1. (a) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + Y(s) = e^{-2\pi s}\cos(2\pi)$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\left(s^2+1\right)Y(s) = e^{-2\pi s} + 1$$

Assim,
$Y(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$
e a solução do problema de valor inicial é dado por
$y(t) = u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t-2\pi) + \operatorname{sen} t = (u_{2\pi}(t)+1)\operatorname{sen} t.$

(b) $\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = ee^{-s}$
Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2+2s+2\right) = ee^{-s}$$

Assim,
$Y(s) = \frac{ee^{-s}}{s^2+2s+2} = \frac{ee^{-s}}{(s+1)^2+1} = ee^{-s}G(s),$
$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \quad \Rightarrow \quad g(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$
Assim a solução do problema de valor inicial é
$y(t) = eu_1(t)e^{-t+1}\operatorname{sen}(t-1) = e^{-t+2}\operatorname{sen}(t-1)u_1(t)$

(c)

$$\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 4Y(s) = e^2e^{-2s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2+4\right)Y(s) = e^2e^{-2s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^2e^{-2s}}{s^2+4} = e^2e^{-2s}G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2+4} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{e^2}{2} u_2(t) \operatorname{sen}(2(t-2))$$

(d)

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = e^2 e^{-s}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$ obtemos

$$\left(s^2 - 2s + 1\right) Y(s) = e^2 e^{-s}$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^2 e^{-s}}{(s-1)^2} = e^2 e^{-s} G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \Rightarrow \quad g(t) = te^t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = e^2 u_1(t)(t-1)e^{t-1} = (t-1)e^{t+1} u_1(t)$$

(e)

$$\begin{aligned} f(t) &= \delta(t-1) + u_3(t)t^2 \\ &= \delta(t-1) + u_3(t)((t-3)+3)^2 \\ &= \delta(t-1) + u_3(t)((t-3)^2 + 6(t-3) + 9) \end{aligned}$$

$$F(s) = e^{-s} + e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)$$

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + & \\ + 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= e^{-s} + \\ & \quad + e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right) \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} (s^2 + 2s + 2)Y(s) &= e^{-s} + e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right) + 1 \\ &= 1 + e^{-s} + e^{-3s}\frac{2 + 6s + 9s^2}{s^3} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= (1+e^{-s})\frac{1}{s^2+2s+2} + e^{-3s}\frac{2+6s+9s^2}{s^3(s^2+2s+2)} \\
&= (1+e^{-s})\frac{1}{(s+1)^2+1} + e^{-3s}H(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{2+6s+9s^2}{s^3(s^2+2s+2)} \\
&= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+2s+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2+6s+9s^2 &= As^2(s^2+2s+2) + Bs(s^2+2s+2) + \\
&\quad + C(s^2+2s+2) + (Ds+E)s^3 \\
&= (As^2+Bs+C)(s^2+2s+2) \\
&\quad + (Ds+E)s^3 \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Substituindo-se $s = 0$ obtemos $C = 1$.
Comparando-se os termos de grau 1 obtemos $6 = 2C + 2B = 2 + 2B$, de onde obtemos $B = 2$.
Comparando-se os termos de grau 2 obtemos $9 = C + 2B + 2A = 5 + 2A$, de onde obtemos $A = 2$.
Comparando-se os termos de grau 3 obtemos $0 = E + B + 2A = E + 6$, de onde obtemos $E = -6$.
Comparando-se os termos de grau 4 obtemos $0 = D + A = D + 2$, de onde obtemos $D = -2$.
Assim

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{-2s-6}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{-2s-6}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^3} \\
&\quad -2\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{(s+1)^2+1}\right)
\end{aligned}$$

$$h(t) = 2 + 2t + \frac{1}{2}t^2 - 2(e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen} t)$$

Como

$$Y(s) = (1+e^{-s})\frac{1}{(s+1)^2+1} + e^{-3s}H(s)$$

então

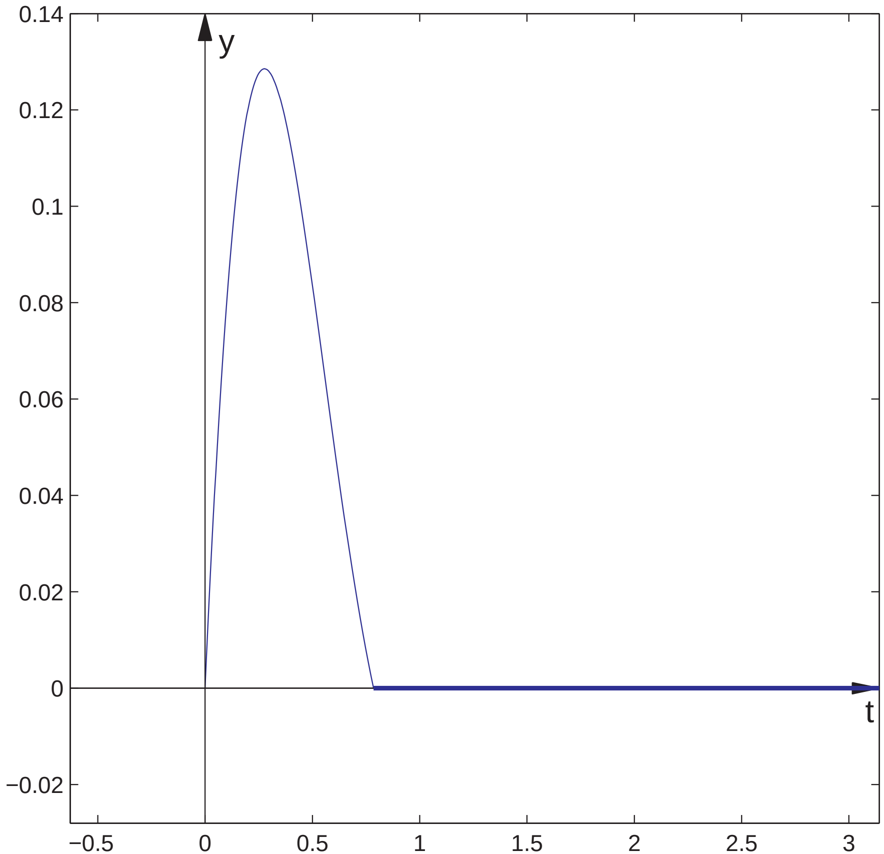
$$y(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t + u_1(t)e^{-(t-1)}\operatorname{sen}(t-1) + u_3(t)h(t-3)$$

4.2. (a) Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos
$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 4(sY(s) - y(0)) + 20Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}s}$
Substituindo-se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos
$(s^2+4s+20)Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}s} + 1$
$Y(s) = e^{-\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4s+20} + \frac{1}{s^2+4s+20} = e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}s}H(s) + H(s)$
em que
$H(s) = \frac{1}{s^2+4s+20} = \frac{1}{(s+2)^2+16}$
Assim,

$$h(t) = \frac{1}{4}e^{-2t}\operatorname{sen} 4t$$

$$y(t) = e^{-\frac{\pi}{2}}u_{\frac{\pi}{4}}(t)h(t-\frac{\pi}{4}) + h(t)$$

(b) $y(t) = e^{-\frac{\pi}{2}}u_{\frac{\pi}{4}}(t)\frac{1}{4}e^{-2(t-\frac{\pi}{4})}\operatorname{sen}(4t-\pi) + \frac{1}{4}e^{-2t}\operatorname{sen} 4t = (-u_{\frac{\pi}{4}}(t)+1)\frac{1}{4}e^{-2t}\operatorname{sen} 4t = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-2t}\operatorname{sen} 4t, & 0 \le t < \frac{\pi}{4} \\ 0, & t \ge \frac{\pi}{4} \end{cases}$



4.3. Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos
$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) = \frac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}$
Substituindo-se $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ obtemos
$(s^2 + s)Y(s) = 1 + \frac{e^{-s}}{s} + e^{-2s}$

$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{e^{-s}}{s^2(s+1)} + \frac{e^{-2s}}{s(s+1)} = (1+e^{-2s})H_1(s) + e^{-s}H_2(s)$
em que
$H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ e $H_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$

$H_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$
Multiplicando-se por $s(s+1)$ obtemos
$1 = A(s+1) + Bs$
Substituindo-se $s = 0, -1$ obtemos $A = 1$ e $B = -1$.
$H_2(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$
Multiplicando-se por $s^2(s+1)$ obtemos
$1 = As(s+1) + B(s+1) + Cs^2$
Substituindo-se $s = 0, -1$ obtemos $C = 1$ e $B = 1$. Comparando-se os termos de grau 2 obtemos $A = -1$.
Assim,

$$h_1(t) = 1 - e^{-t}$$
$$h_2(t) = -1 + t + e^{-t}$$
$$y(t) = h_1(t) + u_2(t)h_1(t-1) + u_1(t)h_2(t-2)$$

5. Convolução (página 477)

5.1. (a)

$$F(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

Multiplicando $F(s)$ por $s\,(s+3)$ obtemos

$$1 = A\,(s+3) + Bs$$

Substituindo-se $s = 0, -3$ obtemos $A = 1/3$ e $B = -1/3$. Assim,

$$F(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+3}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

(b) $f(t) = \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = -\frac{1}{3}e^{-3\tau}\Big|_0^t = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}$

5.2. (a)

$$H(s) = \frac{1}{s\,(s^2-4s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2-4s+5}$$

Multiplicando-se $H(s)$ por $s(s^2-4s+5)$:

$$1 = A(s^2-4s+5) + (Bs+C)s$$

Substituindo-se $s = 0$ obtemos $A = 1/5$. Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 1 obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 0 \\ -4A & & & + & C & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo-se o sistema obtemos a solução $B = -1/5$ e $C = 4/5$. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{s-4}{s^2-4s+5} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{s-4}{(s-2)^2+1} \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\frac{s-2}{(s-2)^2+1} - \frac{1}{5}\frac{-2}{(s-2)^2+1} \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{2t}\cos t + \frac{2}{5}e^{2t}\,\text{sen}\, t$$

(b)

$$h(t) = \int_0^t \text{sen}\,\tau e^{2\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} \int \text{sen}\,\tau e^{2\tau} d\tau &= e^{2\tau}(-\cos\tau) - 2\int e^{2\tau}(-\cos\tau) d\tau \\ &= -e^{2\tau}\cos\tau + \\ &\quad + 2\left(e^{2\tau}\,\text{sen}\,\tau - 2\int e^{2\tau}\,\text{sen}\,\tau d\tau\right) \end{aligned}$$

$$\int \text{sen}\,\tau e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{5}\left(-e^{2\tau}\cos\tau + 2e^{2\tau}\,\text{sen}\,\tau\right)$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{5}\left(-e^{2\tau}\cos\tau + 2e^{2\tau}\,\text{sen}\,\tau\right)\Big|_0^t \\ &= -\frac{1}{5}e^{2t}\cos t + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}e^{2t}\,\text{sen}\, t \end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned} \left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + & \\ + 4\left(sY(s) - y(0)\right) + 4Y(s) &= F(s), \end{aligned}$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$. Substituindo-se os valores $y(0) = 2$ e $y'(0) = -3$ obtemos

$$\left(s^2 + 4s + 4\right) Y(s) = F(s) + 5 + 2s$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{F(s)}{s^2+4s+4} + \frac{5+2s}{s^2+4s+4} \\ &= \frac{F(s)}{(s+2)^2} + \frac{5+2s}{(s+2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{5+2s}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

Multiplicando-se por $(s+2)^2$ obtemos

$$5 + 2s = A(s+2) + B$$

Substituindo-se $s = -2$ obtemos $1 = B$. Comparando-se os termos de grau zero obtemos $5 = 2A + B = 2A + 1$, de onde obtemos $2 = A$. Assim,

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s+2)^2} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= (e^{-2t}t * f)(t) + 2e^{-2t} + e^{-2t}t \\ &= \int_0^t e^{-2(t-\tau)}(t-\tau)f(\tau)d\tau + 2e^{-2t} + e^{-2t}t \end{aligned}$$

5.4. Aplicando-se a transformada de Laplace na equação obtemos

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2+4} Y(s) = Y(s)$$

$$Y(s)\left(1 - \frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+1)(s^2+4)}{s^2(s^2+2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2} \end{aligned}$$

Multiplicando-se por $s^2(s^2+2)$ obtemos

$$(s+1)(s^2+4) = As(s^2+2) + B(s^2+2) + (Cs+D)s^2$$

Substituindo-se $s=0$ obtemos $B=2$. Comparando-se os termos de grau 1 obtemos

$$4 = 2A.$$

Logo $A=2$. Comparando-se os termos de grau 2 e de grau 3 obtemos

$$1 = B + D = 2 + D,$$

$$1 = A + C = 2 + C.$$

Logo $C=-1$ e $D=-1$. Assim

$$y(t) = 2 + 2t - [\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)]$$

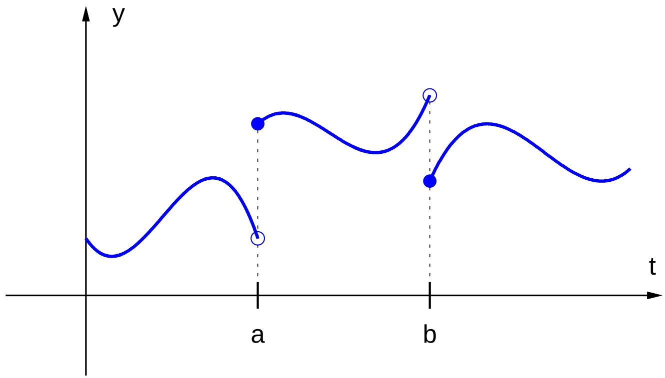


Figura 3.8: Uma função descontínua dada por três expressões

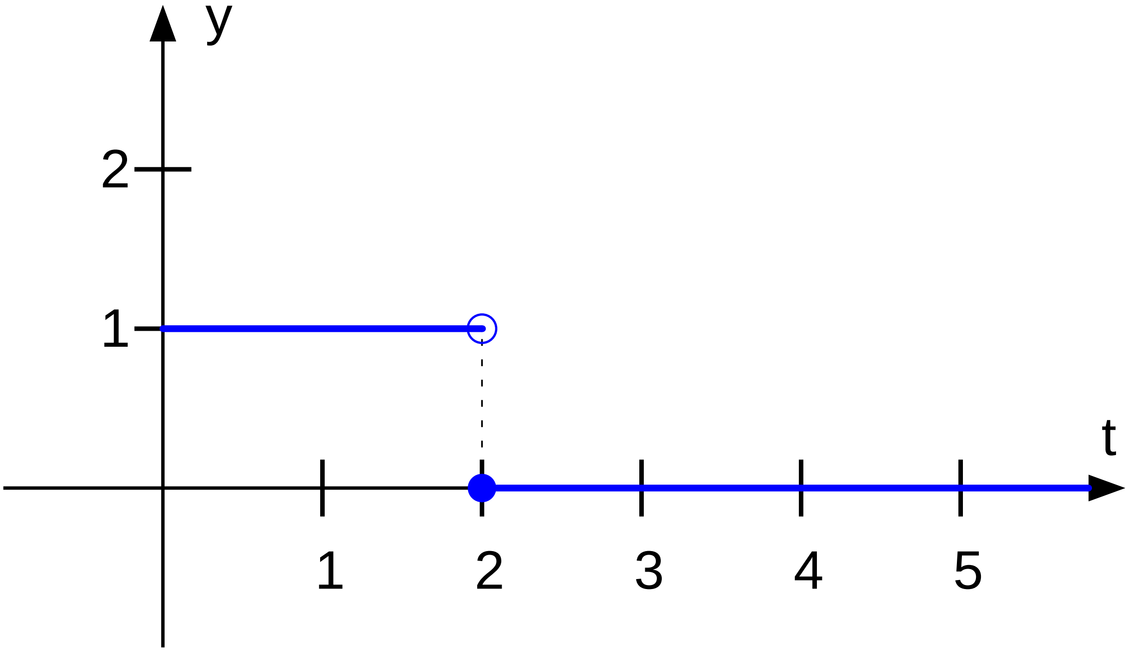


Figura 3.9: Função $f(t) = 1 - u_2(t)$

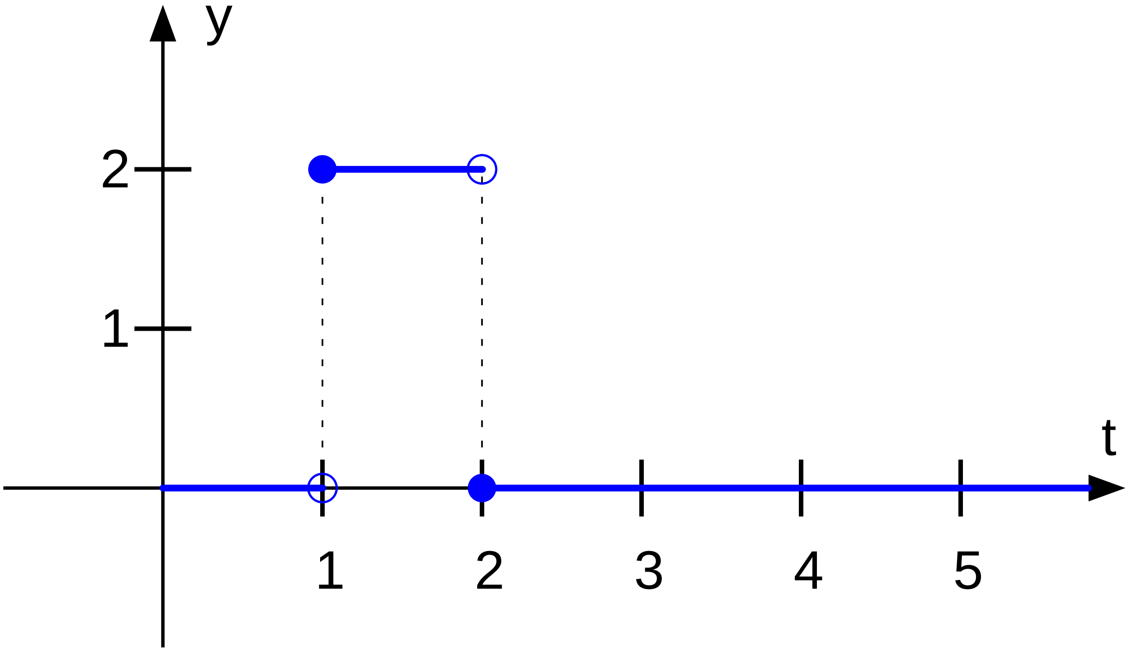


Figura 3.10: Função $f(t) = 2u_1(t) - 2u_2(t)$

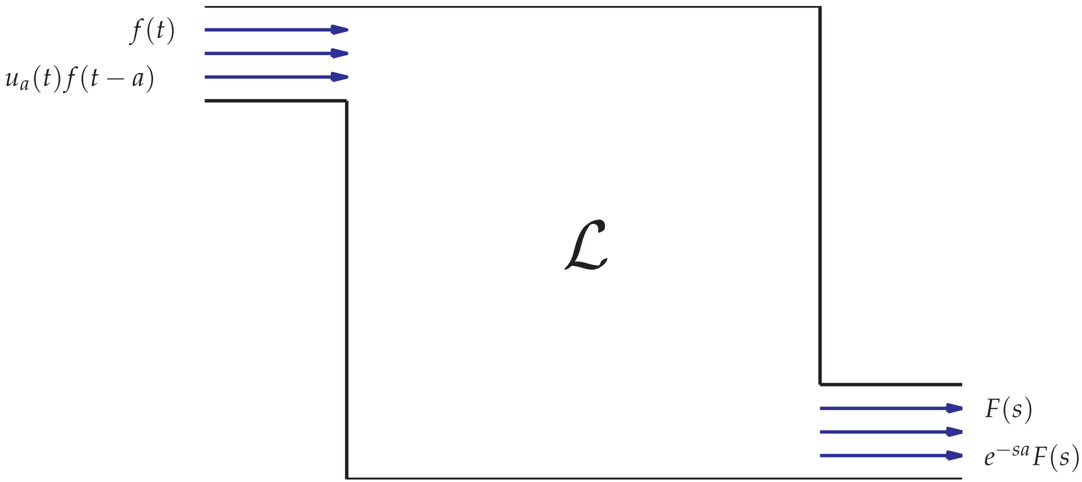


Figura 3.11: 2º Teorema de Deslocamento

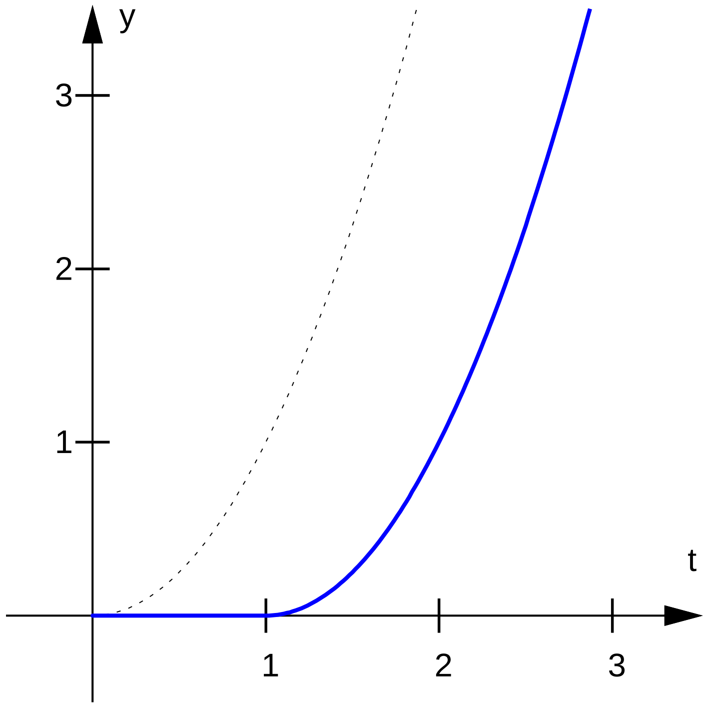


Figura 3.12: Função $f(t) = u_1(t)(t-1)^2$

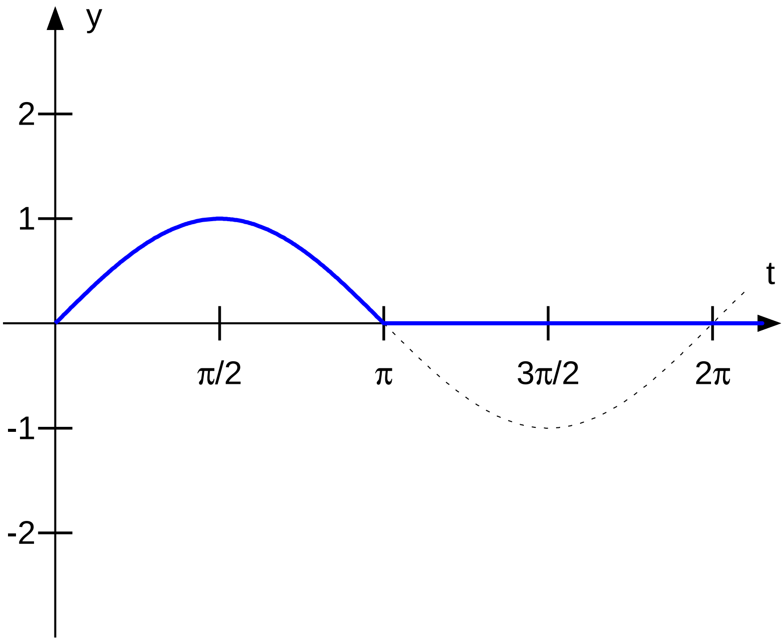


Figura 3.13: Função $f(t) = \operatorname{sen} t - u_\pi(t) \operatorname{sen} t$

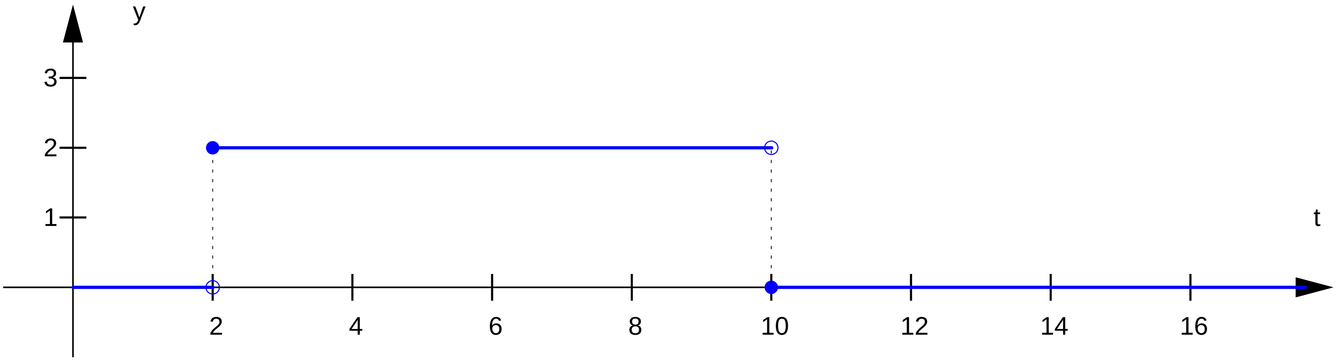


Figura 3.14: $f(t) = 2u_2(t) - 2u_{10}(t)$

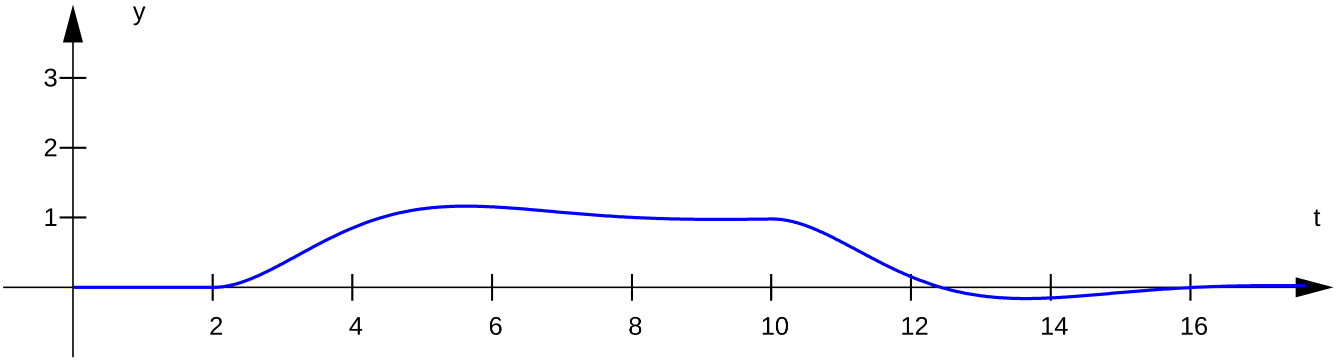


Figura 3.15: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 3.21

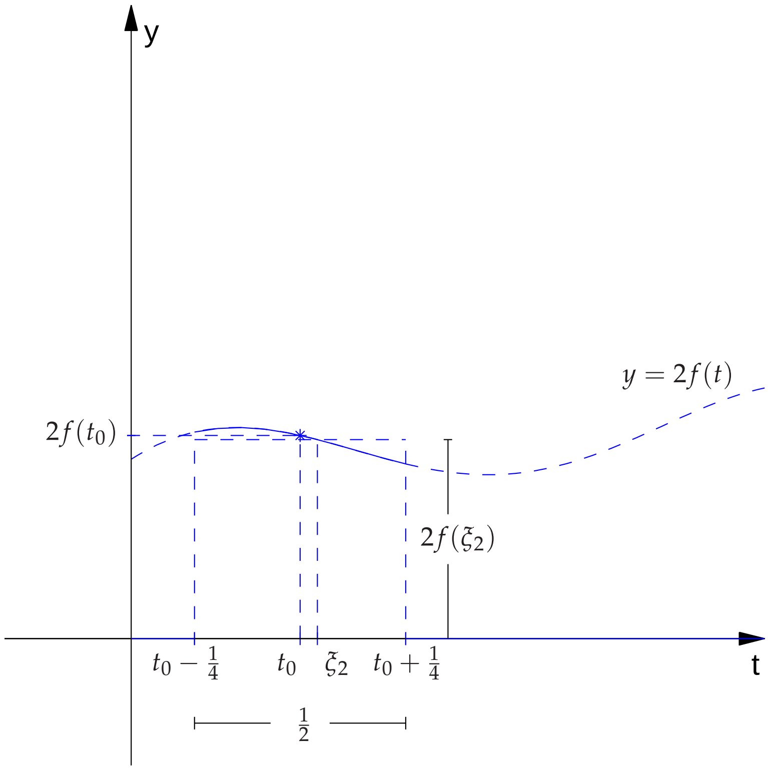


Figura 3.16: $y = f(t)g_2(t - t_0)$ e $\int_0^\infty f(t)g_2(t - t_0)dt \approx f(t_0)$

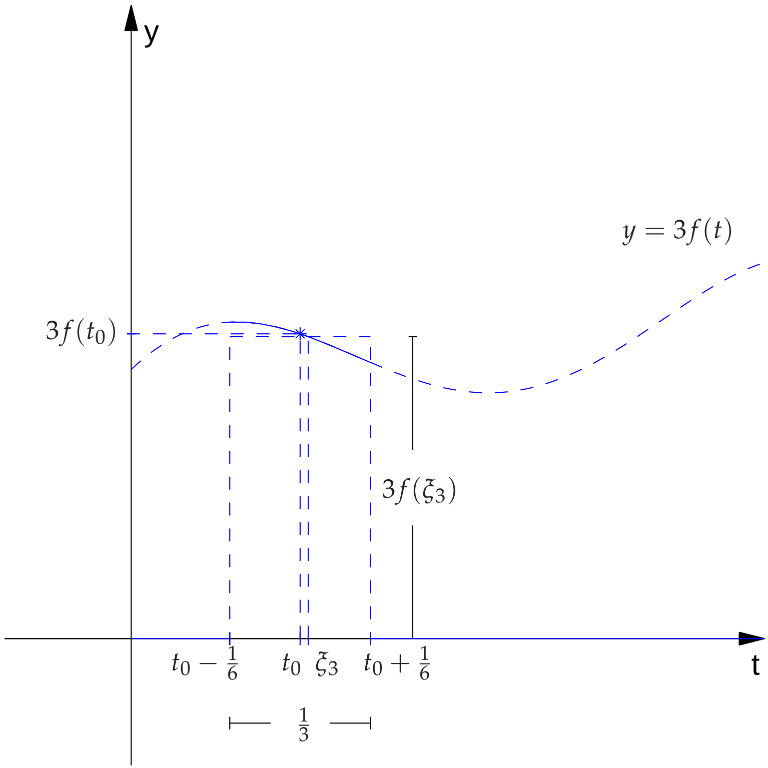


Figura 3.17: $y = f(t)g_3(t - t_0)$ e $\int_0^\infty f(t)g_3(t - t_0)dt \approx f(t_0)$

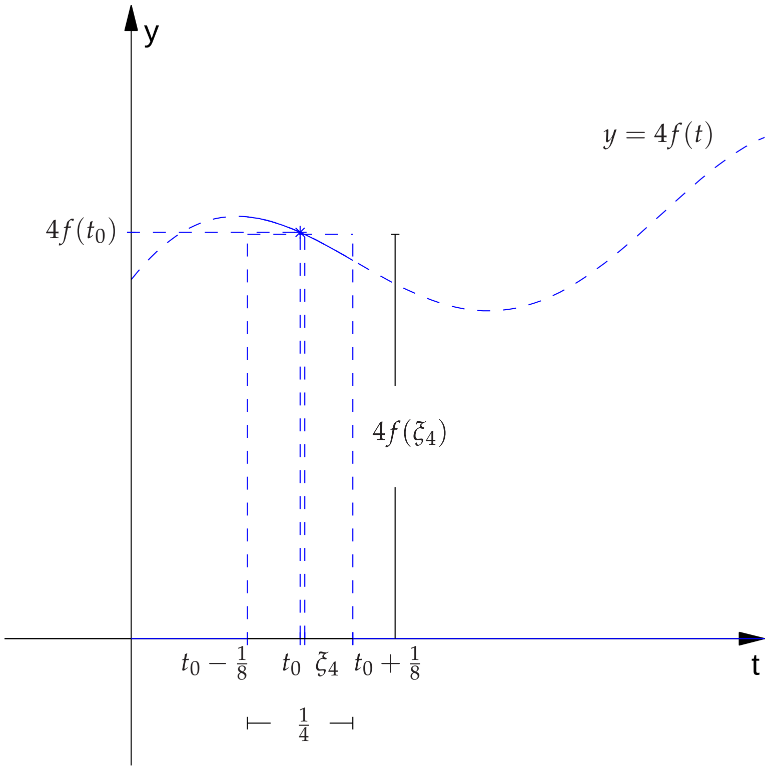


Figura 3.18: $y = f(t)g_4(t - t_0)$ e $\int_0^\infty f(t)g_4(t - t_0)dt \approx f(t_0)$

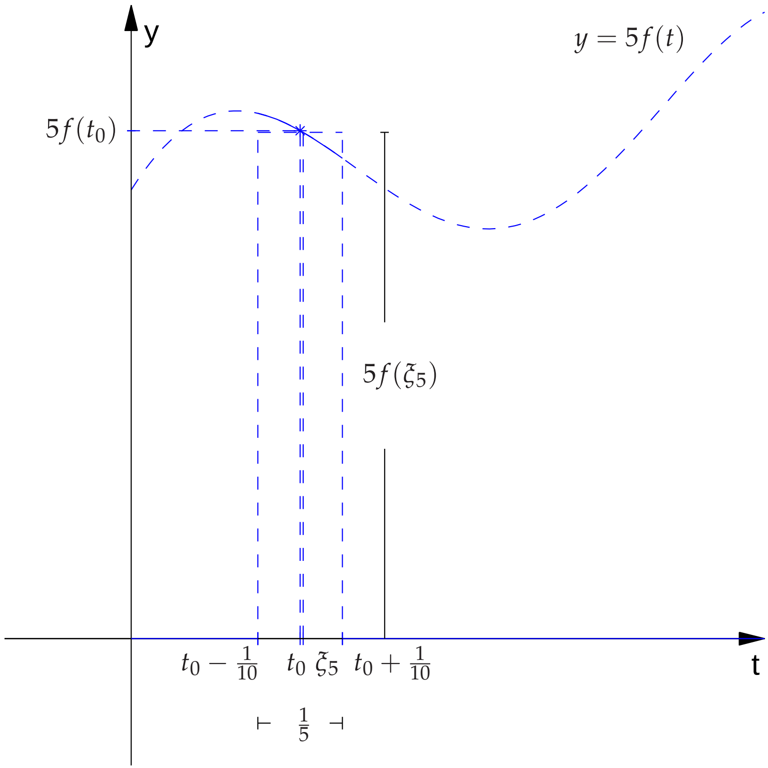


Figura 3.19: $y = f(t)g_5(t - t_0)$ e $\int_0^\infty f(t)g_5(t - t_0)dt \approx f(t_0)$

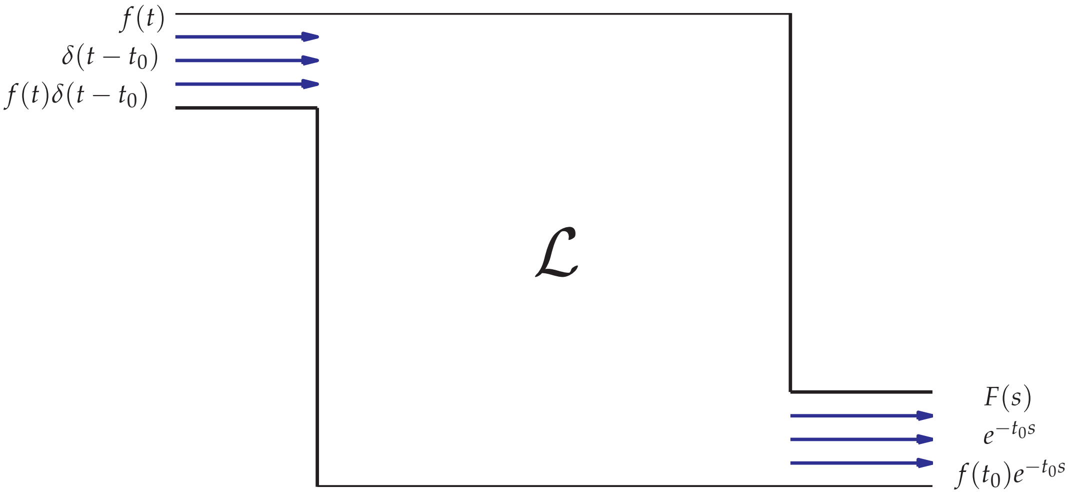


Figura 3.20: Transformada de Laplace do delta de Dirac

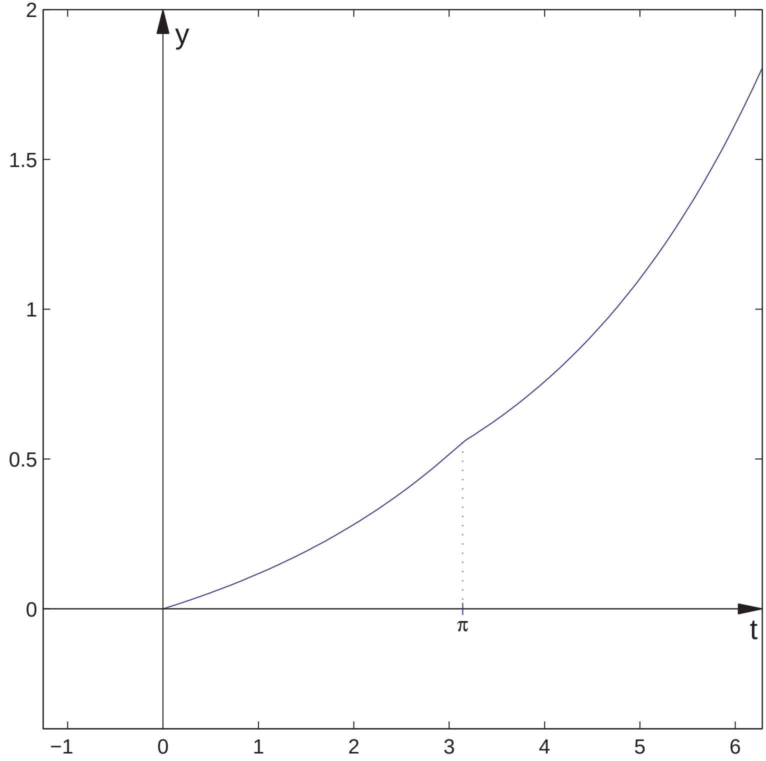


Figura 3.21: Solução do problema de valor inicial do Exemplo 3.22

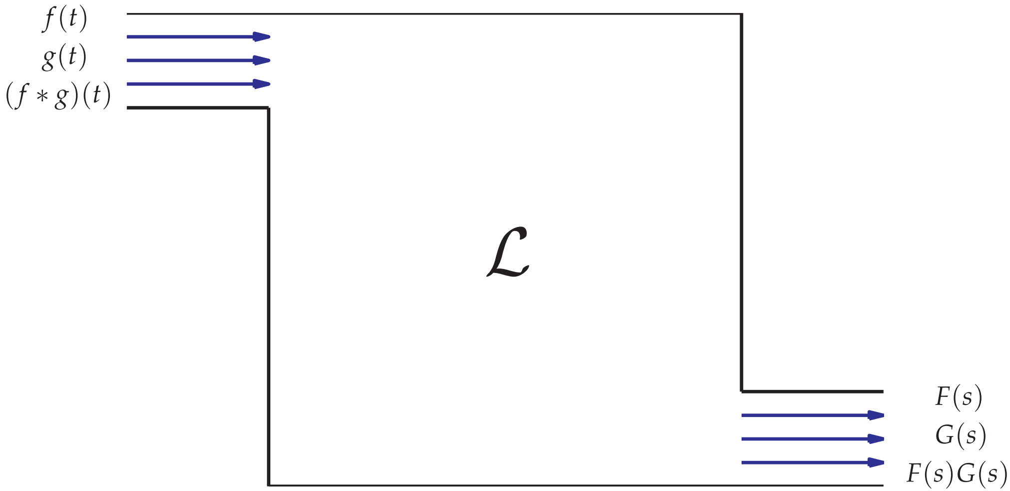


Figura 3.22: Transformada de Laplace da Convolução

Capítulo 4

Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Exemplo 4.1. Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\left\{\begin{array}{rcll} x_1'(t) & = & \lambda_1 x_1(t) & \\ x_2'(t) & = & & \lambda_2 x_2(t) \end{array}\right.$$

em que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Temos aqui um sistema de equações que envolvem derivadas das funções que são incógnitas. Neste caso as duas equações são desacopladas, isto é, podem ser resolvidas independentemente. A solução do sistema é

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ou escrito na forma matricial

$$\left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ c_2\, e^{\lambda_2 t} \end{array}\right].$$

Exemplo 4.2. Considere, agora, o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & \lambda x_1(t) & + & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & & & \lambda x_2(t) \end{array}\right.$$

Este sistema não é desacoplado, mas podemos resolver a segunda equação independentemente da primeira. A segunda equação tem solução

$$x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Substituindo $x_2(t)$ na primeira equação obtemos a equação

$$x_1'(t) = \lambda\, x_1(t) + c_2\, e^{\lambda t}$$

que tem solução

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2\, t e^{\lambda t}.$$

Assim a solução do sistema acima é

$$\left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{array}\right].$$

Os sistemas anteriores foram resolvidos porque pelo menos uma das equações pode ser resolvida independentemente das outras.

Considere o sistema de equações diferenciais lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_2(t) \end{array}\right.$$

que pode ser escrito na forma de uma equação diferencial matricial

$$\left[\begin{array}{c} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{array}\right]$$

ou

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \tag{4.1}$$

em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Observe que o sistema do Exemplo 4.1 pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

e o do Exemplo 4.2, como

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Para sistemas lineares é válido o seguinte teorema sobre existência e unicidade de soluções que será demonstrado somente ao final deste capítulo.

Teorema 4.1 (Existência e Unicidade). *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X'(t) & = & A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) & = & X^{(0)} \end{cases} \tag{4.2}$$

Suponha que $a_{ij}(t), f_i(t)$ sejam funções contínuas num intervalo $I = [a, b]$ contendo t_0. Então o problema (4.2) tem uma única solução no intervalo I.

Para os **sistemas de equações lineares homogêneos**, isto é, sistemas da forma (4.1) com $F(t) = \bar{0}$,

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{4.3}$$

é válido o **princípio da superposição** que diz que se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções de (4.3), então

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) \tag{4.4}$$

também o é, para todas as constantes α e β. Uma expressão da forma (4.4) é chamada **combinação linear** de $X_1(t)$ e $X_2(t)$.
Vamos verificar que realmente $X(t)$ dado por (4.4) é solução de (4.3).

$$\begin{aligned} X'(t) &= \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t) = \alpha A(t)X_1(t) + \beta A(t)X_2(t) \\ &= A(t)(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) = A(t)X(t), \end{aligned}$$

pois como $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções de (4.3), então $X_1'(t) = A(t)X_1(t)$ e $X_2'(t) = A(t)X_2(t)$. Provamos o seguinte teorema.

Teorema 4.2 (Princípio da Superposição). *Se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções do sistema homogêneo*

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

então, $X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t)$, para α e β números, também o é.

Vamos considerar o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) &=& A(t)X(t) \\ X(t_0) &=& X^{(0)} \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Vamos determinar condições sobre n soluções $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ para que existam constantes $c_1, \ldots, c_n$ tais que $X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$ seja solução do problema de valor inicial (4.5).
Substituindo-se $t = t_0$ na solução

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$$

obtemos o sistema de equações lineares algébricas

$$c_1 X_1(t_0) + \cdots + c_n X_n(t_0) = X^{(0)}$$

que pode ser escrito na forma

$$MC = X^{(0)}$$

em que

$$M = \begin{bmatrix} X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Se a matriz do sistema M é invertível, então para toda condição inicial $X^{(t_0)} \in \mathbb{R}^n$ o sistema $MC = X^{(0)}$ tem uma única solução $(c_1, \ldots, c_n)$ (A solução é $C = M^{-1} X^{(0)}$). Mas uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero
Portanto, se

$$\det \begin{bmatrix} X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para toda condição inicial $X^{(0)}$ existem constantes $c_1, \ldots, c_n$ tais que

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t)$$

é solução do problema de valor inicial (4.5).

Teorema 4.3. *Sejam $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ soluções do sistema $X' = A(t)X$ tais que*

$$\det[X_1(0) \; \ldots \; X_n(0)] \neq 0$$

Então para toda condição inicial $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t) \\ X(0) &= X^{(0)} \end{cases}$$

tem uma única solução da forma

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t). \tag{4.6}$$

Definição 4.1. (a) Sejam $X_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \ldots, X_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções vetoriais. O determinante

$$W[X_1, \ldots, X_n](t_0) = \det \begin{bmatrix} X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \end{bmatrix}$$

é chamado **wronskiano** das funções vetoriais $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ em t_0.

(b) Se *n soluções* $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ do sistema $X' = A(t)X$ são tais que o seu wronskiano é diferente de zero em um ponto t_0 dizemos que elas são **soluções fundamentais** do sistema homogêneo

$$X' = A(t)X.$$

(c) Se $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ são soluções fundamentais do sistema $X' = A(t)X$, então a família de soluções

$$X(t) = c_n X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t), \tag{4.7}$$

para constantes $c_1, \ldots, c_n$ é chamada **solução geral** de $X' = A(t)X$.

Assim para encontrar a solução geral de um sistema homogêneo $X' = A(t)X$, precisamos encontrar n soluções fundamentais, ou seja, soluções $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ tais que em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$

$$W[X_1, \ldots, X_n](t_0) = \det \left[\begin{array}{ccc} X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \end{array} \right] \neq 0.$$

Exemplo 4.3. A solução encontrada do sistema do Exemplo 4.1 é a solução geral pois ela pode ser escrita como

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

e

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

são tais que $\det[X_1(0)\ X_2(0)] = \det(I_2) = 1 \neq 0$.

Exemplo 4.4. A solução encontrada do sistema do Exemplo 4.2 é a solução geral pois ela pode ser escrita como

$$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

e

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

são tais que $\det[X_1(0)\ X_2(0)] = \det(I_2) = 1 \neq 0$.

Os sistemas dos Exemplos 4.1 e 4.2 foram resolvidos porque pelo menos uma das equações pode ser resolvida independentemente das outras. O sistema do Exemplo 4.1 pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

e o do Exemplo 4.2, como

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Enquanto a matriz do primeiro sistema é diagonal a do segundo é "quase" diagonal. O estudo que faremos, a seguir, de sistemas de equações diferenciais se baseia em transformar o sistema em um no qual a sua matriz é diagonal ou "quase" diagonal.

4.1 A Matriz A é Diagonalizável em $\mathbb{R}$

4.1.1 Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas

Vamos supor que existam matrizes $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.8}$$

Substituindo-se (4.8) em (4.3) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \tag{4.9}$$

Fazendo a mudança de variável

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{4.10}$$

a equação (4.9) pode ser escrita como

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) & = & \qquad\qquad \lambda_2 y_2(t) \end{array}\right.$$

as equações podem ser resolvidas independentemente. Este sistema foi resolvido no Exemplo 4.1 na página 541 e sua solução é

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

ou escrito na forma matricial

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ c_2\, e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Assim, da mudança de variáveis (4.10), a solução da equação (4.3) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Como $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$, então a solução do sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 c_1\, e^{\lambda_1 t} + w_1 c_2\, e^{\lambda_2 t} \\ v_2 c_1\, e^{\lambda_1 t} + w_2 c_2\, e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Pelo Teorema 4.3 na página 546 esta é a solução geral do sistema, pois para as soluções

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & X_2(0) \end{bmatrix} = \det(P) \neq 0$$

e assim a solução de qualquer problema de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{lcl} X'(t) & = & AX(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{array}\right.$$

pode ser obtida desta solução atribuindo-se valores adequados às constantes c_1 e c_2 como mostraremos a seguir.

Se são dadas as condições iniciais $x_1(0) = x_1^{(0)}$ e $x_2(0) = x_2^{(0)}$, então para determinarmos c_1 e c_2 substituimos $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} v_1 c_1 & + & w_1 c_2 & = & x_1^{(0)} \\ v_2 c_1 & + & w_2 c_2 & = & x_2^{(0)} \end{cases}$$

4.1.2 Sistema com n Equações e n Incógnitas

O que fizemos anteriormente pode ser estendido para uma sistema com n equações e n incógnitas.

Supondo que existam matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

em que V_j é a coluna j de P, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.12}$$

Substituindo-se (4.12) em (4.3) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t). \tag{4.13}$$

Fazendo a mudança de variável

$$Y(t) = P^{-1}X(t), \tag{4.14}$$

a equação (4.13) pode ser escrita como

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n'(t) & = & \lambda_n y_n(t) \end{array}\right.$$

as equações podem ser resolvidas independentemente. A solução deste sistema é

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}.$$

ou escrito na forma matricial

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n\, e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Assim, da mudança de variáveis (4.14), a solução da equação (4.3) é

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n\, e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Como $P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix}$, então a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n, \end{aligned}$$

pois pelo Teorema 4.3 na página 546, para as soluções

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1, \quad \ldots, \quad X_n(t) = e^{\lambda_n t} V_n,$$

$$\det \left[\begin{array}{ccc} X_1(0) & \cdots & X_n(0) \end{array} \right] = \det(P) \neq 0.$$

4.1.3 Como Encontrar as Matrizes P e D

Vamos, agora, mostrar como determinar matrizes

$$P = \left[\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{array} \right] \text{ e } D = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{array} \right],$$

em que V_j é a coluna j de P, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.15}$$

Multiplicando à direita por P ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD\,. \tag{4.16}$$

Por um lado

$$AP = A \left[\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} AV_1 & AV_2 & \ldots & AV_n \end{array} \right]$$

e por outro lado

$$PD = \left[\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 & \ldots & \lambda_n V_n \end{array} \right]$$

Assim, (4.16) pode ser reescrita como,

$$\left[\begin{array}{cccc} AV_1 & AV_2 & \ldots & AV_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 & \ldots & \lambda_n V_n \end{array} \right].$$

Logo,

$$AV_j = \lambda_j V_j,$$

para $j = 1, \ldots n$. Ou seja, as colunas de P, V_j, e os elementos da diagonal de D, λ_j, satisfazem a equação

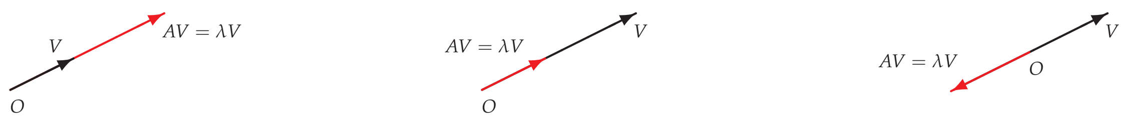
$$AV = \lambda V.$$

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.2. Seja A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é chamado **autovalor** de A, se existe um vetor *não nulo* $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$AV = \lambda V\,. \tag{4.17}$$

Um vetor *não nulo* que satisfaça (4.17), é chamado de **autovetor** de A.



$\lambda > 1$ $\qquad$ $0 < \lambda < 1$ $\qquad$ $\lambda < 0$

Observe que, usando o fato de que a matriz identidade

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é tal que $I_n V = V$, a equação (4.17) pode ser escrita como

$$AV = \lambda I_n V,$$

ou

$$(A - \lambda I_n)V = \bar{0}\,. \tag{4.18}$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de λ, para os quais o sistema $(A - \lambda I_n)V = \bar{0}$ tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Assim temos um método para encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz A.

Proposição 4.4. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) Os autovalores de A são as raízes do polinômio

$$p(t) = \det(A - t\, I_n) \tag{4.19}$$

(b) Para cada autovalor λ, os autovetores associados a λ são os vetores não nulos da solução do sistema

$$(A - \lambda I_n)X = \bar{0}\,. \tag{4.20}$$

Definição 4.3. Seja A uma matriz $n \times n$. O polinômio

$$p(t) = \det(A - t\, I_n) \tag{4.21}$$

é chamado **polinômio característico de** A.

Já vimos que se uma matriz A é diagonalizável, então as colunas da matriz P, que faz a diagonalização, são autovetores associados a autovalores, que por sua vez são elementos da matriz diagonal D. Como a matriz P é invertível, estes n autovetores são L.I. Vamos mostrar, a seguir, que se a matriz A tem n autovetores L.I., então ela é diagonalizável.

Teorema 4.5. *Seja A uma matriz $n \times n$ que tem n autovetores L.I. $V_1, \ldots, V_n$ associados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Então as matrizes*

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

são tais que

$$A = PDP^{-1},$$

ou seja, A é diagonalizável.

Demonstração. Suponha que $V_1, \ldots, V_n$ são n autovetores linearmente independentes associados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Vamos definir as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Como $AV_j = \lambda_j V_j$, para $j = 1, \ldots, n$, então

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AV_1 & AV_2 & \ldots & AV_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 & \ldots & \lambda_n V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD. \end{aligned}$$

Como $V_1, \ldots, V_n$ são L.I., a matriz P é invertível. Assim, multiplicando a equação anterior por P^{-1} à direita obtemos

$$A = PDP^{-1}.$$

Ou seja, a matriz A é diagonalizável. ■

Assim, se uma matriz A é diagonalizável e $A = PDP^{-1}$, então os autovalores de A formam a diagonal de D e n autovetores linearmente independentes associados aos autovalores formam as colunas de P.

O resultado que vem a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [10], garante que se conseguirmos para cada autovalor, autovetores L.I., então ao juntarmos todos os autovetores obtidos, eles continuarão sendo L.I.

Proposição 4.6. *Seja A uma matriz $n \times n$. Se $V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1}^{(1)}$ são autovetores L.I. associados a λ_1, $V_1^{(2)}, \ldots, V_{n_2}^{(2)}$ são autovetores L.I. associados a λ_2, ..., $V_1^{(k)}, \ldots, V_{n_k}^{(k)}$ são autovetores L.I. associados a λ_k, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ distintos, então $\{V_1^{(1)}, \ldots, V_{n_1}^{(1)}, \ldots, V_1^{(k)}, \ldots, V_{n_k}^{(k)}\}$ é um conjunto L.I.*

Exemplo 4.5. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t) \end{array} \right.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t), \tag{4.22}$$

em que $X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$.
Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ -4 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3\,.$$

Como os autovalores de A são as raízes de $p(t)$, temos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.
Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Para isto vamos resolver os sistemas $(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0}$ e $(A - \lambda_2 I_2)Z = \bar{0}$. Como

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix},$$

então

$$(A-\lambda_1 I_2)Z=\bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2x & - & y & = & 0 \\ -4x & - & 2y & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,-2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$ acrescentado o vetor nulo. Agora,

$$(A-\lambda_2 I_2)Z=\bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ acrescentado o vetor nulo.
Assim, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Um gráfico mostrando diversas soluções aparecem na Figura 4.1. Este tipo de gráfico, em que desenhamos no plano cartesiano curvas $(x_1(t), x_2(t))$ soluções do sistema, é chamado **retrato de fase**. As curvas são chamadas **trajetórias**. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são reais não nulos com sinais contrários. Neste caso, dizemos que a origem é um **ponto de sela**.

Exemplo 4.6. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rclcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & + & 2x_2(t) \end{array} \right.$$

Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - t\,I_2) = \det \begin{bmatrix} 3-t & -1 \\ -2 & 2-t \end{bmatrix} = (3-t)(2-t) - 2 = t^2 - 5t + 4\,.$$

Como os autovalores de A são as raízes de $p(t)$, temos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.
Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Para isto vamos resolver os sistemas $(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0}$ e $(A - \lambda_2 I_2)Z = \bar{0}$.

$$(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 0 \\ -2x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ acrescentado o vetor nulo. Podemos tomar o autovetor $V = (1,2)$.

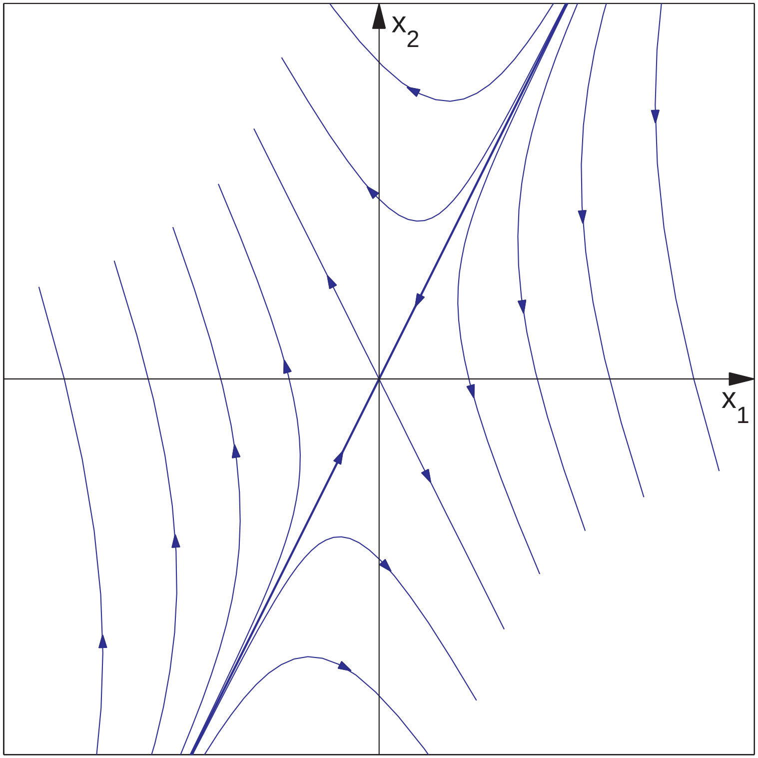


Figura 4.1: Trajetórias do sistema do Exemplo 4.5

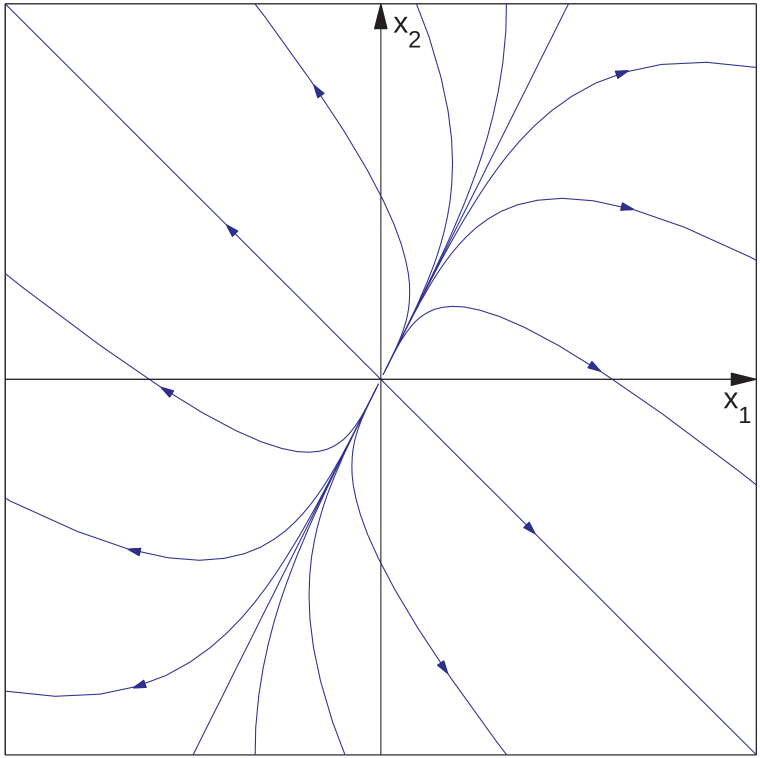


Figura 4.2: Trajetórias do sistema do Exemplo 4.6

Agora,
$$(A - \lambda_2 I_2)Z = \bar{0}$$
é
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
cuja solução geral é
$$\mathbb{W}_2 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$
Este é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ acrescentado o vetor nulo. Podemos tomar o autovetor $W = (-1, 1)$.
Assim, a matriz A é diagonalizável e as matrizes
$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
são tais que
$$A = PDP^{-1}.$$
Portanto a solução do sistema pode ser escrita como
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
O plano de fase com várias trajetórias é mostrado na Figura 4.2. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são reais e positivos. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó instável** ou **fonte**. No caso em que os autovalores de A reais e negativos as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da Figura 4.2. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó atrator** ou **sumidouro**.

Exemplo 4.7. Considere o seguinte problema de valor inicial
$$X' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema pode ser escrito como $X' = AX$, em que $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de A é

$$p(t) = \det(A - t\,I_3) = \det \begin{bmatrix} -3-t & 0 & 2 \\ -2 & -1-t & 2 \\ -4 & 0 & 3-t \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante em termos da 2ª coluna obtemos que

$$p(t) = (-1)^{(2+2)}(-1-t)\det \begin{bmatrix} -3-t & 2 \\ -4 & 3-t \end{bmatrix} = (-1-t)[(-3-t)(3-t)+8] = -(1+t)(t^2-1)$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ que são os autovalores de A.
Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$ são os vetores $Z \neq \bar{0}$ que satisfazem $AZ = \lambda_1 Z$, ou seja,

$$(A - \lambda_1 I_3)Z = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & 2z & = & 0 \\ -2x & + & 2z & = & 0 \\ -4x & + & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -1\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ -2\times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a $\lambda_1 = -1$ acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\beta, \alpha, \beta) = \alpha(0,1,0) + \beta(1,0,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto $V_1 = (1,0,1)$ e $V_2 = (0,1,0)$ são autovetores linearmente independentes associados a $\lambda_1 = -1$.
Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são os vetores $Z \neq \bar{0}$ que satisfazem $AZ = \lambda_2 Z$, ou seja,

$$(A - \lambda_2 I_3)Z = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4x & & & + & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -4x & & & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 2^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\underline{a}} \text{ linha} \\ -1 \times 1^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha} \end{array}} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a $\lambda_2 = 1$ acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_2 \quad = \quad \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha(1,1,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Assim, $W = (1,1,2)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 1$.
Assim, a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{R}$ e as matrizes

$$P = [V_1 \; V_2 \; W\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema de equações diferenciais é dada por

$$X(t) \quad = \quad c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Substituindo $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X(0) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} c_1 & & & + & c_3 & = & 0 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ c_1 & & & + & 2c_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolvendo obtemos $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 0$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) \quad = \quad e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercícios (respostas na página 618)

1.1. Ache a solução geral do sistema de equações e desenhe o retrato de fase:

(a) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$

(c) $X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X$

(d) $X' = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X$

(e) $X' = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X$

(f) $X' = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X$

1.2. Encontre a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2ax_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4ax_2(t) \end{cases}$$

1.3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \frac{dL}{dt} \\ \\ \frac{dD}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ \\ k & -k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \\ D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} L(0) \\ \\ D(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ \\ D_0 \end{bmatrix}$$

em que L é o teor de material orgânico que pode ser aproveitado pelas bactérias como alimento e D é o déficit de oxigênio.

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado para $k = 2$ e $k_r = 3$.

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial dado para $k \neq k_r$ números arbitrários.

1.4. Dois tanques interligados nos leva ao problema de valor inicial.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{bmatrix}$$

em que x e y são o desvios dos níveis de sal Q_1 e Q_2 dos seus respectivos pontos de equilíbrio.

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça um esboço das trajetórias.

1.5. (a) Resolva o problema $X' = AX$ em que

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(b) No plano de fase, esboce a curva solução $X(t)$ encontrada no item (a).

1.6. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X \quad \text{e} \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1.7. Resolva o seguinte sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} X$$

Comando do pacote GAAL:

`>>fluxlin(A)` desenha algumas trajetórias que são soluções do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$.

4.2 A Matriz A é Diagonalizável em $\mathbb{C}$

4.2.1 Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas

Considere, novamente, um sistema de equações diferenciais lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) & = & cx_1(t) + dx_2(t) \end{array}\right.$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com b ou c não nulos. Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$X'(t) = AX(t), \tag{4.23}$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Vamos supor, agora, que existam matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix},$$

tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.24}$$

Substituindo-se (4.24) em (4.23) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t).$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos o sistema

$$Y'(t) = DY(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\left\{\begin{array}{lll} y_1'(t) & = & (\alpha+i\beta)\,y_1(t) \\ y_2'(t) & = & \qquad\qquad\qquad (\alpha-i\beta)\,y_2(t) \end{array}\right.$$

Este sistema foi resolvido no Exemplo 4.1 na página 541 e sua solução é

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1\,e^{(\alpha+i\beta)t} \\ y_2(t) &= C_2\,e^{(\alpha-i\beta)t}. \end{aligned}$$

Assim a solução complexa da equação (4.23) é

$$X(t) = PY(t) = P\left[\begin{array}{c} C_1\,e^{(\alpha+i\beta)t} \\ C_2\,e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array}\right].$$

Como $P = \left[\begin{array}{cc} v_1+iw_1 & v_1-iw_1 \\ v_2+iw_2 & v_2-iw_2 \end{array}\right]$, então a solução geral complexa é dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= \left[\begin{array}{cc} v_1+iw_1 & v_1-iw_1 \\ v_2+iw_2 & v_2-iw_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} C_1\,e^{(\alpha+i\beta)t} \\ C_2\,e^{(\alpha-i\beta)t} \end{array}\right] = \\ &= C_1\,e^{(\alpha+i\beta)t}\left[\begin{array}{c} v_1+iw_1 \\ v_2+iw_2 \end{array}\right] + C_2\,e^{(\alpha-i\beta)t}\left[\begin{array}{c} v_1-iw_1 \\ v_2-iw_2 \end{array}\right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

As constantes C_1 e C_2 são complexas. Estamos interessados em encontrar a solução geral real. Para isto vamos escrever a solução complexa em termos de soluções reais. Defina

$$X_1(t) = \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\left[\begin{array}{c} v_1+iw_1 \\ v_2+iw_2 \end{array}\right]\right\} \quad \text{e} \quad X_2(t) = \mathcal{I}\mathrm{m}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}\left[\begin{array}{c} v_1+iw_1 \\ v_2+iw_2 \end{array}\right]\right\}$$

então $X(t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1(X_1(t)+iX_2(t)) + C_2(X_1(t)-iX_2(t)) \\ &= (C_1+C_2)X_1(t) + i(C_1-C_2)X_2(t) \end{aligned}$$

Logo a solução geral complexa pode ser escrita em termos de soluções reais. Tomando $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ obtemos a solução $X_1(t)$ e tomando $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{2i}$ obtemos a solução $X_2(t)$.

$$\det\left[\begin{array}{cc} X_1(0) & X_2(0) \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{cc} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{array}\right] = \frac{i}{2}\det(P) \neq 0,$$

pois

$$\begin{aligned}
\det(P) &= \det\left[\begin{array}{cc} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{cc} v_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 & v_2 - iw_2 \end{array}\right] + i\left[\begin{array}{cc} w_1 & v_1 - iw_1 \\ w_2 & v_2 - iw_2 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 \end{array}\right] - i\left[\begin{array}{cc} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{array}\right] + i\left[\begin{array}{cc} w_1 & v_1 \\ w_2 & v_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} w_1 & w_1 \\ w_2 & w_2 \end{array}\right] \\
&= -2i\det\left[\begin{array}{cc} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Logo pelo Teorema 4.3 na página 546 a solução geral (real) do sistema é

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] &= c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) \\
&= c_1 \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ e^{(\alpha+i\beta)t}\left[\begin{array}{c} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{array}\right]\right\} + c_2 \mathcal{I}\mathrm{m}\left\{ e^{(\alpha+i\beta)t}\left[\begin{array}{c} v_1 + iw_1 \\ v_2 + iw_2 \end{array}\right]\right\} \\
&= c_1\, e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right] - \operatorname{sen}\beta t\left[\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array}\right]\right) + c_2\, e^{\alpha t}\left(\cos\beta t\left[\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array}\right] + \operatorname{sen}\beta t\left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right]\right)
\end{aligned}$$

4.2.2 Sistema com n Equações e n Incógnitas

Supondo que existam matrizes

$$P = \left[\begin{array}{cccccccc} Z_1 & \overline{Z}_1 & \ldots & Z_k & \overline{Z}_k & V_{2k+1} & \ldots & V_n \end{array}\right] \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_k & 0 & & & \\ \vdots & & & 0 & \overline{\lambda}_k & & & \vdots \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ e $\lambda_{2k+1}, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.26}$$

A solução geral complexa é

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} Z_1 & \overline{Z}_1 & \ldots & Z_k & \overline{Z}_k & V_{2k+1} & \ldots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} Z_1 + C_2 e^{\overline{\lambda}_1 t} \overline{Z}_1 + \cdots + C_{2k-1} e^{\lambda_k t} Z_1 + C_{2k} e^{\overline{\lambda}_k t} \overline{Z}_1 + \\ &\qquad + C_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} V_n + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} V_n \\ &= (C_1 + C_2) \mathcal{R}\mathrm{e}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\} + i(C_1 - C_2) \mathcal{I}\mathrm{m}\{e^{\lambda_1 t} Z_1\} \\ &\qquad + \cdots + (C_{2k-1} + C_{2k}) \mathcal{R}\mathrm{e}\{e^{\lambda_k t} Z_k\} + i(C_{2k-1} - C_{2k}) \mathcal{I}\mathrm{m}\{e^{\lambda_k t} Z_k\} + \\ &\qquad + c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} V_n + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n \end{aligned}$$

A solução geral real é

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1\mathcal{R}\mathrm{e}\{e^{\lambda_1 t}Z_1\} + c_2\mathcal{I}\mathrm{m}\{e^{\lambda_1 t}Z_1\} + \cdots + c_{2k-1}\mathcal{R}\mathrm{e}\{e^{\lambda_k t}Z_k\} + c_{2k}\mathcal{I}\mathrm{m}\{e^{\lambda_k t}Z_k\} + \\ &\quad + c_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}t}V_{2k+1} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}V_n \end{aligned}$$

pois pelo Teorema 4.3 na página 546, para

$$X_1(t) = \mathcal{R}\mathrm{e}\{e^{\lambda_1 t}Z_1\}, \quad X_2(t) = \mathcal{I}\mathrm{m}\{e^{\lambda_1 t}Z_1\}, \ \ldots,$$

$$X_{2k-1} = \mathcal{R}\mathrm{e}\{e^{\lambda_k t}Z_k\},\ X_{2k} = \mathcal{I}\mathrm{m}\{e^{\lambda_k t}Z_k\},\ X_{2k+1} = e^{\lambda_{2k+1}t}V_{2k+1},\ \ldots,\ X_n(t) = e^{\lambda_n t}V_n,$$

$$\begin{aligned} \det\left[\begin{array}{ccc} X_1(0) & \cdots & X_n(0) \end{array}\right] &= \det\left[\begin{array}{cccccc} \mathcal{R}\mathrm{e}\{Z_1\} & \mathcal{I}\mathrm{m}\{Z_1\}\cdots & \mathcal{R}\mathrm{e}\{Z_k\} & \mathcal{I}\mathrm{m}\{Z_k\} & V_{2k+1} & \cdots \end{array}\right. \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^k \det(P) \neq 0 \end{aligned}$$

4.2.3 Como Encontrar as Matrizes P e D

Vamos, agora, mostrar como determinar matrizes

$$P = \left[\begin{array}{cccccccc} Z_1 & \overline{Z}_1 & \ldots & Z_k & \overline{Z}_k & V_{2k+1} & \ldots & V_n \end{array}\right] \text{ e}$$

$$D = \left[\begin{array}{cccccccc} \lambda_1 & 0 & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_k & 0 & & & \\ \vdots & & & 0 & \overline{\lambda}_k & & & \vdots \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & & & 0 & \lambda_n \end{array}\right],$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ e $\lambda_{2k+1}, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.27}$$

Vamos fazer exatamente a mesma coisa que fizemos para o caso em que a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{R}$. Multiplicando à direita por P ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD\,. \tag{4.28}$$

Por um lado

$$\begin{aligned} AP &= A\left[\begin{array}{cccccccc} Z_1 & \overline{Z}_1 & \ldots & Z_k & \overline{Z}_k & V_{2k+1} & \ldots & V_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cccccccc} AZ_1 & A\overline{Z}_1 & \ldots & AZ_k & A\overline{Z}_k & AV_{2k+1} & \ldots & AV_n \end{array}\right] \end{aligned}$$

e por outro lado

$$PD = \left[\begin{array}{cccccccc} \lambda_1 Z_1 & \overline{\lambda}_1\overline{Z}_1 & \ldots & \lambda_k Z_k & \overline{\lambda}_k\overline{Z}_k & \lambda_{2k+1}V_{2k+1} & \ldots & \lambda_n V_n \end{array}\right].$$

Assim, (4.28) pode ser reescrita como,

$$\left[\begin{array}{cccccccc} AZ_1 & A\overline{Z}_1 & \ldots & AZ_k & A\overline{Z}_k & AV_{2k+1} & \ldots & AV_n \end{array}\right] = \\ \left[\begin{array}{cccccccc} \lambda_1 Z_1 & \overline{\lambda}_1\overline{Z}_1 & \ldots & \lambda_k Z_k & \overline{\lambda}_k\overline{Z}_k & \lambda_{2k+1}V_{2k+1} & \ldots & \lambda_n V_n \end{array}\right]$$

Comparando coluna a coluna obtemos que

$$AZ_j = \lambda_j Z_j, \tag{4.29}$$

$$A\overline{Z}_j = \overline{\lambda}_j \overline{Z}_j, \tag{4.30}$$

para $j = 1, \ldots, k$ e

$$AV_j = \lambda_j V_j,$$

para $j = 2k+1, \ldots n$.

Ou seja, as colunas de P e os elementos da diagonal de D satisfazem a equação

$$AZ = \lambda Z\,. \tag{4.31}$$

em que o escalar complexo λ e o vetor complexo Z são incógnitas.

O escalar complexo λ é chamado **autovalor (complexo)** da matriz A e o vetor *não nulo* Z que satisfaça (4.31), é chamado de **autovetor (complexo)** de A.
Observe que a equação (4.31) pode ser escrita como

$$AZ = \lambda I_n Z$$

ou

$$(A - \lambda I_n)Z = \bar{0}\,. \tag{4.32}$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de λ, para os quais o sistema $(A - \lambda I_n)Z = \bar{0}$ tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
Observe que a equação (4.30) é o conjugado da equação (4.29). Assim temos um método para encontrar os autovalores e os autovetores complexos de uma matriz A.

(a) Os autovalores de A são as raízes do polinômio

$$p(t) = \det(A - t\, I_n) \tag{4.33}$$

(b) Para cada autovalor λ, os autovetores associados a λ são os vetores não nulos da solução do sistema

$$(A - \lambda I_n)Z = \bar{0}\,. \tag{4.34}$$

(c) Os autovetores associados ao autovalor conjugado $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ são os conjugados dos autovetores associados a $\lambda = \alpha + i\beta$.

Exemplo 4.8. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) & + & x_2(t) \end{array} \right.$$

Este sistema pode ser escrito na forma $X'(t) = AX(t)$, em que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico da matriz A é $p(t) = \det(A - t\,I_2) = (-1-t)(1-t)^2 + 2 = t^2 + 1$ cujas raízes são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$. Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = i$. Para isto vamos resolver o sistema $(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0}$.

$$(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1-i & 2 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} (-1-i)x & + & 2y & = & 0 \\ -x & + & (1-i)y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{((1-i)\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \{\alpha(1-i, 1) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = i$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $Z = (1-i, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = i$. E $\overline{Z} = (1+i, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$.
Assim, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e as matrizes

$$P = [\, Z\ \overline{Z}\,] = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1\, \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ e^{it} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + c_2\, \mathcal{I}\mathrm{m}\left\{ e^{it} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 \left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + c_2 \left(\cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Os gráficos de diversas soluções aparecem na Figura 4.3. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são complexos com a parte real igual a zero. Neste caso, dizemos que a origem é um **centro**.

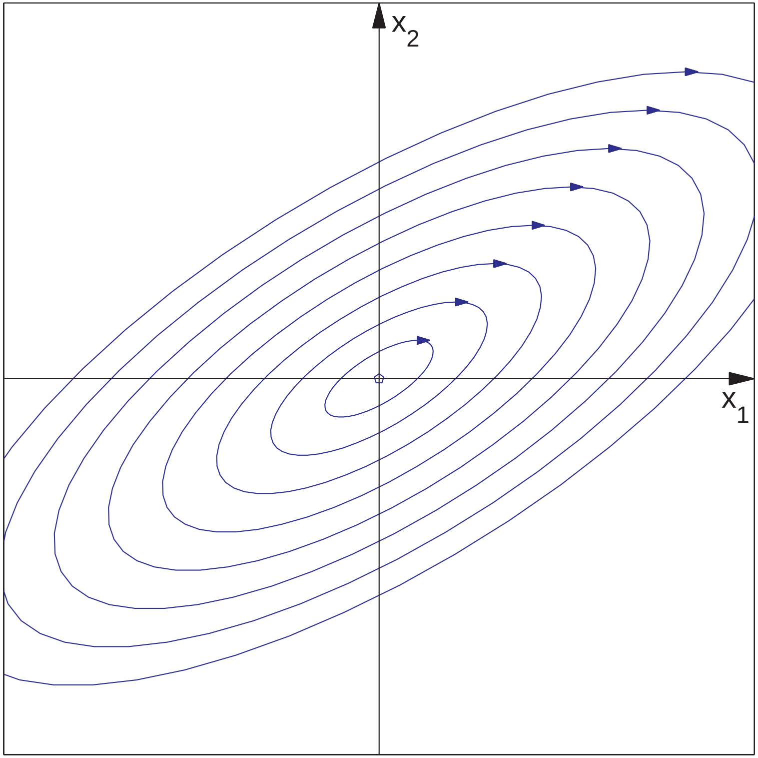


Figura 4.3: Trajetórias do sistema do Exemplo 4.8

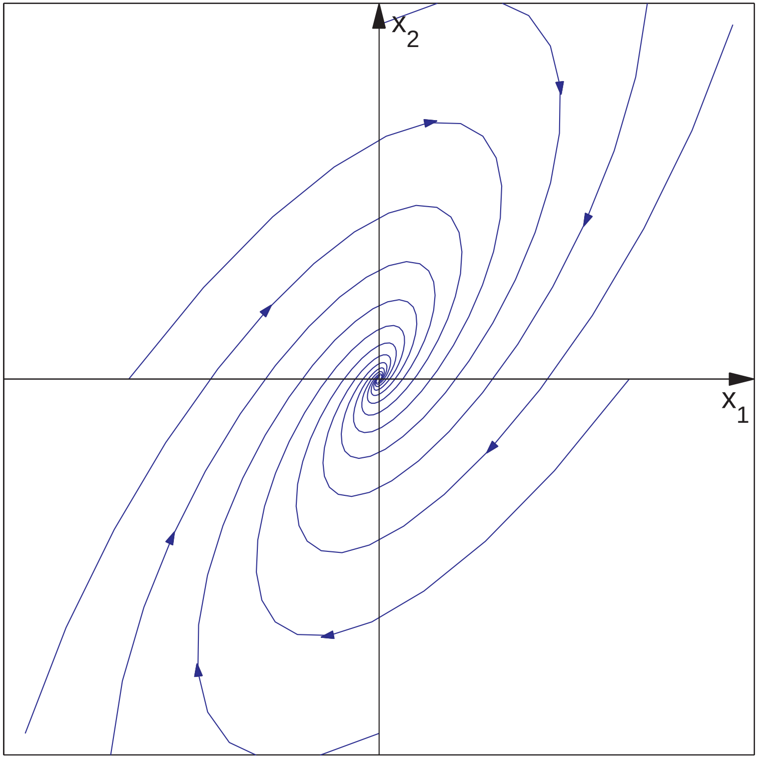


Figura 4.4: Trajetórias do sistema do Exemplo 4.9

Exemplo 4.9. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & -3x_1(t) & + & 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t) \end{array}\right.$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é $p(t) = \det(A - t\,I_2) = (-3-t)(1-t) + 8 = t^2 + 2t + 5$ cujas raízes são $\lambda_1 = -1 + 2i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -1 - 2i$. Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1 + 2i$. Para isto vamos resolver o sistema $(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0}$.

$$(A - \lambda_1 I_2)Z = \bar{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -2-2i & 2 \\ -4 & 2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcrcr} (-2-2i)x & + & 2y & = & 0 \\ -4x & + & (2-2i)y & = & 0 \end{array}\right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, (1+i)\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = -1 + 2i$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $Z = (1, 1+i)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = -1 + 2i$. Temos também que $\overline{Z} = (1, 1-i)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -1 - 2i$.
Assim, a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e as matrizes

$$P = [\, Z \; \overline{Z} \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1\,\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} + c_2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\left\{ e^{(-1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + c_2\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Plano de fase contendo diversas trajetórias aparecem na Figura 4.4. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que os autovalores de A são complexos com a parte real negativa. Neste caso, dizemos que a origem é um **foco atrator** ou **sumidouro espiral**. No caso em que os autovalores de A são complexos com a parte real positiva as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da Figura 4.4. Neste caso, dizemos que a origem é um **foco instável** ou **fonte espiral**.

Exemplo 4.10. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema pode ser escrito como $X' = AX$, em que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de A é

$$p(t) = \det(A - t\,I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 2 \\ 0 & -1-t & 1 \\ 0 & -1 & -1-t \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante em termos da 1ª coluna obtemos que

$$p(t) = (-1)^2(2-t)\det \begin{bmatrix} -1-t & 1 \\ -1 & -1-t \end{bmatrix} = (2-t)[(-1-t)^2+1] = (2-t)(t^2+2t+2)$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1+i$ e $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = -1-i$ que são os autovalores de A.

Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são os vetores $Z \neq \bar{0}$ que satisfazem $AZ = \lambda_1 Z$, ou seja,

$$(A - \lambda_1 I_3)Z = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & 3y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$\boxed{-\frac{1}{3}\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha}}$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Portanto $V = (1, 0, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 2$.
Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1 + i$ são os vetores $Z \neq \bar{0}$ que satisfazem $AZ = \lambda_2 Z$, ou seja,

$$(A - \lambda_2 I_3)Z = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (3-i)x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & - & iy & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & iz & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3-i & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{array}\right]$$

$\boxed{i\times 2^{\underline{a}} \text{ linha} + 3^{\underline{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\underline{a}} \text{ linha}}$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3-i & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a $\lambda_2 = -1 + i$ acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha \frac{-1-2i}{3-i}, \alpha, i\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\} = \{(\alpha(-\frac{1}{10} - i\frac{7}{10}), \alpha, i\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = -1 + i$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $Z = (-1-7i, 10, 10i)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = -1 + i$. Temos também que $\overline{Z} = (-1+7i, 10, -10i)$ é um autovetor associado a $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = -1 + i$.

Assim, a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e as matrizes

$$P = [V\ Z\ \overline{Z}\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1-7i & -1+7i \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10i & -10i \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Portanto a solução geral real do sistema de equações diferenciais é dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\,\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} -1-7i \\ 10 \\ 10i \end{bmatrix} \right\} + c_3\,\mathcal{I}\mathrm{m}\left\{ e^{(-1+i)t} \begin{bmatrix} -1-7i \\ 10 \\ 10i \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left(\cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad + c_3 e^{-t} \left(\cos t \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Substituindo $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = X(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} c_1 - c_2 - 7c_3 = 0 \\ 10c_2 = 1 \\ 10c_3 = 0 \end{cases}$$

Obtemos $c_1 = 1/10$, $c_2 = 1/10$ e $c_3 = 0$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = \frac{1}{10}e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{10}e^{-t}\left(\cos t\begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}\right)$$

Exercícios (respostas na página 637)

2.1. Ache a solução geral do sistema de equações dado e desenhe o retrato de fase correspondente:

(a) $\begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= 5x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}$

(c) $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} X$

(d) $X' = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} X$

(e) $X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X$

2.2. Ache a solução geral do sistema de equações dado:

(a) $\begin{cases} x_1'(t) &= ax_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) \end{cases}$ para $a \neq \pm 4$

(b) $\begin{cases} x_1'(t) &= ax_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$ para $a \neq 1/2$

(c) $\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) &= ax_1(t) + x_2(t) \end{cases}$ para $a \neq 0$

2.3. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X.$

(a) Encontre a solução geral real do sistema.

(b) Encontre a solução tal que $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2.4. Um sistema massa-mola sem amortecimento é descrito pela equação diferencial

$$mu'' + ku = f(t).$$

(a) Transforme a equação acima em um sistema de equações equivalente fazendo

$$x_1(t) = u(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = u'(t).$$

(b) Resolva o sistema homogêneo correspondente ($f(t) = 0$) e obtenha $u(t)$ a solução da equação diferencial $mu'' + ku = 0$.

4.3 A Matriz A não é Diagonalizável

4.3.1 Sistema com 2 Equações e 2 Incógnitas

Considere, novamente, um sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) & = & cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases}$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com b ou c não nulos. Neste caso a solução de uma equação depende da outra. Podemos escrever este sistema na forma de uma equação diferencial matricial

$$X'(t) = AX(t), \tag{4.35}$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Pode-se mostrar (ver por exemplo [9]) que se uma matriz A, 2×2, não é diagonalizável, então existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tais que

$$A = PJP^{-1}. \tag{4.36}$$

Substituindo-se (4.36) em (4.35) obtemos

$$X'(t) = PJP^{-1}X(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t).$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos

$$Y'(t) = JY(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\left\{\begin{array}{rclcr} y_1'(t) & = & \lambda\, y_1(t) & + & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & & & \lambda\, y_2(t) \end{array}\right.$$

Este sistema foi resolvido no Exemplo 4.2 na página 542 e sua solução é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2\, e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema (4.35) é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= PY(t) = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2\, e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\ &= (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right), \end{aligned}$$

pois pelo Teorema 4.3 na página 546, para

$$X_1(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda t} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right),$$

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & X_2(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \det(P) \neq 0.$$

4.3.2 Sistema com n Equações e n Incógnitas

Pode-se mostrar (ver por exemplo [9]) que se uma matriz A, $n \times n$, não é diagonalizável, então existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_{\lambda_2} & \ldots & \bar{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \ldots & \bar{0} & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

em que

$$J_{\lambda_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j \times n_j},$$

tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Vamos considerar aqui (para o caso geral ver por exemplo [7]) somente o caso em que os blocos J_{λ_j} têm tamanho no máximo 2×2, com $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Ou seja, vamos supor que existam matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & W_1 & \ldots & V_k & W_k & V_{2k+1} & \ldots & V_n \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_k & 1 & & & & \\ \vdots & & & 0 & \lambda_k & & & & \vdots \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PJP^{-1}. \tag{4.37}$$

A solução geral do sistema $X' = AX$ é

$$X(t) = \begin{bmatrix} V_1 & W_1 & \ldots & V_k & W_k & V_{2k+1} & \ldots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_{2k-1} e^{\lambda_k t} + c_{2k} t e^{\lambda_k t} \\ c_{2k} e^{\lambda_k t} \\ c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_1 t}(tV_1 + W_1) + \cdots + c_{2k-1} e^{\lambda_k t} V_k + c_{2k} e^{\lambda_k t}(tV_k + W_k) + \\ + c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} V_{2k+1} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n$$

pois pelo Teorema 4.3 na página 546, para

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1,\ X_2(t) = e^{\lambda_1 t}(tV_1 + W_1),\ \ldots,\ X_{2k-1}(t) = e^{\lambda_k t} V_k,\ X_{2k}(t) = e^{\lambda_k t}(tV_k + W_k),$$

$$X_{2k+1}(t) = e^{\lambda_{2k+1} t} V_{2k+1},\ \ldots,\ X_n(t) = e^{\lambda_n t} V_n$$

$$\det \begin{bmatrix} X_1(0) & \cdots & X_n(0) \end{bmatrix} = \det(P) \neq 0.$$

4.3.3 Como Encontrar as Matrizes P e J

Vamos, agora, mostrar como determinar matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & \bar{0} & \ldots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_{\lambda_2} & \ldots & \bar{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \ldots & \bar{0} & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

em que

$$J_{\lambda_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j \times n_j},$$

tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Vamos considerar aqui (para o caso geral ver por exemplo [9]) somente o caso em que os blocos J_{λ_j} têm tamanho no máximo 2×2, com $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Ou seja, vamos supor que existam matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & W_1 & \ldots & V_k & W_k & V_{2k+1} & \ldots & V_n \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \cdots & & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \lambda_k & 1 & & & & \\ \vdots & & & 0 & \lambda_k & & & & \vdots \\ & & & & & \lambda_{2k+1} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & & & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PJP^{-1}. \tag{4.38}$$

Multiplicando à direita por P ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PJ\,. \tag{4.39}$$

Por um lado

$$\begin{aligned} AP &= A\left[\ V_1 \quad W_1 \quad \ldots \quad V_k \quad W_k \quad V_{2k+1} \quad \ldots \quad V_n\ \right] \\ &= \left[\ AV_1 \quad AW_1 \quad \ldots \quad AV_k \quad AW_k \quad AV_{2k+1} \quad \ldots \quad AV_n\ \right] \end{aligned}$$

e por outro lado

$$PJ = \left[\ \lambda_1 V_1 \quad V_1 + \lambda_1 W_1 \quad \ldots \quad \lambda_k V_k \quad V_k + \lambda_k W_k \quad \lambda_{2k+1} V_{2k+1} \quad \ldots \quad \lambda_n V_n\ \right].$$

Assim, (4.39) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \left[\ AV_1 \quad AW_1 \quad \ldots \quad AV_k \quad AW_k \quad AV_{2k+1} \quad \ldots \quad AV_n\ \right] &= \\ \left[\ \lambda_1 V_1 \quad V_1 + \lambda_1 W_1 \quad \ldots \quad \lambda_k V_k \quad V_k + \lambda_k W_k \quad \lambda_{2k+1} V_{2k+1} \quad \ldots \quad \lambda_n V_n\ \right] \end{aligned}$$

Comparando-se coluna a coluna obtemos que

$$AV_j = \lambda_j V_j \quad \text{ou} \quad (A - \lambda_j I_n) V_i = \bar{0} \tag{4.40}$$

$$AW_j = V_j + \lambda_j W_j \quad \text{ou} \quad (A - \lambda_j I_n) W_j = V_j \tag{4.41}$$

para e $j = 1, 3, \ldots, 2k-1$.
Portanto

(a) De (4.40) segue-se que o vetor V_j é um autovetor de A associado ao autovalor λ_j.

(b) De (4.41) segue-se que o vetor W_j é uma solução do sistema linear

$$(A - \lambda I_n) X = V_j\,. \tag{4.42}$$

Exemplo 4.11. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1'(t) &=& -x_1(t) &+& x_2(t) \\ x_2'(t) &=& -x_1(t) &-& 3x_2(t) \end{array} \right.$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

O seu polinômio característico é $p(t) = \det(A - t\, I_2) = (-1-t)(-3-t)+1 = t^2+4t+4$ que só tem uma raíz $\lambda = -2$.
Os autovetores associados a $\lambda = -2$ são obtidos da solução do sistema linear

$$(A - \lambda I_2)Z = \bar{0},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ -x & - & y & = & 0 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Este é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda = -2$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $V = (1,-1)$ é um autovetor associado a $\lambda = -2$. Precisamos encontrar o vetor W tal que

$$(A - \lambda I_2)W = V.$$

Para isso vamos resolver o sistema linear

$$(A - \lambda I_2)W = V = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ -x & - & y & = & -1 \end{array} \right.$$

cuja solução geral é

$$\{(\alpha, 1-\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Tomando $\alpha = 0$, obtemos o vetor $W = (0, 1)$ que é tal que $(A - \lambda I_2)W = V$. Assim as matrizes

$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Portanto a solução geral do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

O plano de fase contendo diversas trajetórias aparecem na Figura 4.5. A disposição das trajetórias é típica de um sistema linear $X' = AX$, em que a matriz A não é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e o único autovalor é negativo. Neste caso, dizemos que a origem é um **nó impróprio**. No caso em que o único autovalor de A é positivo as trajetórias são semelhantes, mas percorridas no sentido contrário às da Figura 4.5. Neste caso, dizemos também que a origem é um **nó impróprio**.

Exemplo 4.12. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Este sistema pode ser escrito como $X' = AX$, em que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. O polinômio característico de A é

$$p(t) = \det(A - t\, I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{bmatrix}.$$

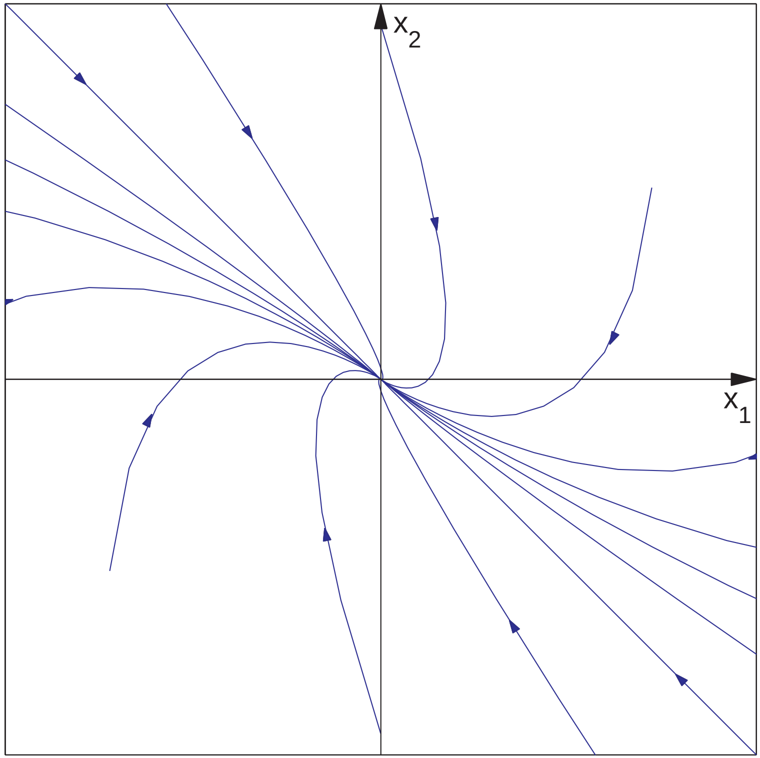


Figura 4.5: Trajetórias do sistema do Exemplo 4.11

Desenvolvendo o determinante em termos da 1ª coluna obtemos que

$$p(t) = (-1)^{(1+1)}(2-t)\det\begin{bmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{bmatrix} = (2-t)[(3-t)(1-t)+1] = (2-t)(t^2-4t+4) = -(t-2)^3$$

cuja única raíz é $\lambda_1 = 2$ que é o autovalor de A.
Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são os vetores $Z \neq \bar{0}$ que satisfazem $AZ = \lambda_1 Z$, ou seja,

$$(A - \lambda_1 I_3)Z = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Assim a solução geral do sistema que é o conjunto dos autovetores associados a $\lambda_1 = -1$ acrescentado o vetor nulo é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\beta, \alpha, -\alpha) = \alpha(0,1,-1) + \beta(1,0,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto $V_1 = (0,1,-1)$ e $V_2 = (1,0,0)$ são autovetores linearmente independentes associados a $\lambda_1 = 2$.
Precisamos encontrar o vetor W tal que

$$(A - \lambda_1 I_3)W = V,$$

em que V é um autovetor de A associado a $\lambda_1 = 2$, ou seja, $V = (\beta, \alpha, -\alpha)$. Assim,

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & z & = & \beta \\ & & y & + & z & = & \alpha \\ & - & y & - & z & = & -\alpha \end{array}\right.$$

Do sistema obtemos que $\alpha = \beta$. Tomando $\alpha = \beta = 1$ obtemos $V = (1,1,-1)$ e vamos resolver o sistema

$$(A - \lambda_1 I_3)W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & z & = & -1 \end{array}\right.$$

cuja solução geral é

$$\{(\gamma, 1-\delta, \delta) \mid \delta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Tomando $\delta = \gamma = 0$ obtemos $W = (0,1,0)$. Assim temos

$$(A - 2I_3)W = V \Leftrightarrow AW = 2W + V$$

$$AV = 2V$$

$$AV_2 = 2V_2$$

Logo

$$[AV\ AW\ AV_1] = [2V\ 2W + V\ 2V_2]$$

$$\Updownarrow$$

$$A[V\ W\ V_2] = [V\ W\ V_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

Como V, W e V_2 são L.I., a matriz $P = [V\ W\ V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem inversa e assim multiplicando (4.43) à direita pela inversa de P obtemos

$$A = PJP^{-1},$$

em que $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Aqui poderíamos ter escolhido no lugar de $V_2 = (1,0,0)$ qualquer combinação linear de $V_1 = (0,1,-1)$ e $V_2 = (1,0,0)$ desde que seja diferente de $V = (1,1,0)$.

Portanto a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} V + c_2 e^{2t} (W + tV) + c_3 e^{\lambda_1 t} V_2 \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercícios (respostas na página 652)

3.1. Ache a solução geral do sistema de equações dado e desenhe o seu retrato de fase:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & 4x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & 4x_1(t) & - & 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & 8x_1(t) & - & 4x_2(t) \end{array}\right.$

3.2. Ache a solução geral do sistema de equações dado:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & ax_1(t) & + & 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & & \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1'(t) & = & & & ax_2(t) \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & - & 2x_2(t) \end{array}\right.$

3.3. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais $X' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} X.$

(a) Encontre a solução geral do sistema.

(b) Encontre a solução tal que $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.4 Sistemas Não-Homogêneos (opcional)

Considere, agora, o sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma de uma equação diferencial matricial

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$X'(t) = AX(t) + F(t), \tag{4.44}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.7. *Seja $X_p(t)$ uma solução particular do sistema não homogêneo (4.44). Sejam $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ soluções do sistema homogêneo correspondente tais que $X_1(0), \ldots, X_n(0)$ são L.I. Então a solução geral do sistema não homogêneo (4.44) é*

$$X(t) = X_p(t) + c_1X_1(t) + \cdots + c_nX_n(t)$$

Demonstração. Sejam $X(t)$ uma solução qualquer e $X_p(t)$ uma solução particular de (4.44), então $Y(t) = X(t) - X_p(t)$ é solução do sistema homogêneo associado $X' = AX$, pois

$$Y'(t) = X'(t) - X'_p(t) = (AX(t) + F(t)) - (AX_p(t) + F(t)) = A(X(t) - X_p(t)) = AY(t).$$

Assim se $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ soluções do sistema homogêneo correspondente tais que $X_1(0), \ldots, X_n(0)$ são L.I., pelo Teorema 4.3 na página 546, existem constantes $c_1, \ldots, c_n$ tais que

$$Y(t) = X(t) - X_p(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t),$$

ou seja,

$$X(t) = X_p(t) + c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t).$$

■

Portanto para encontrar a solução geral de um sistema de equações lineares não homogêneo precisamos encontrar uma solução particular e a solução geral do sistema homogêneo correspondente.

4.4.1 A Matriz A é Diagonalizável em $\mathbb{R}$

Como no caso do sistema homogêneo em que a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{R}$, existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \ldots & V_n \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

em que V_j é a coluna j de P, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.45}$$

Substituindo-se (4.45) em (4.44) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + F(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t).$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma de um sistema de equações desacopladas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \lambda_1 y_1(t) + g_1(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n'(t) & = & \lambda_n y_n(t) + g_n(t) \end{array} \right.$$

em que

$$\left[\begin{array}{c} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{array} \right] = G(t) = P^{-1}F(t).$$

As equações podem ser resolvidas independentemente, encontramos soluções particulares de cada uma delas $y_{1p}(t), \ldots, y_{np}(t)$ e formamos o vetor

$$Y_p(t) = \left[\begin{array}{c} y_{1p}(t) \\ \vdots \\ y_{np}(t) \end{array} \right]$$

Uma solução particular do sistema inicial é então

$$X_p(t) = PY_p(t)$$

e pelo Teorema 4.7 a solução geral é a soma da solução geral do sistema homogêneo com $X_p(t)$, ou seja,

$$X(t) = X_p(t) + c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} V_n.$$

Exemplo 4.13. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & + & 2e^{-t} \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t) & + & 4e^{t} \end{array}\right.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^{t} \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a mesma do Exemplo 4.5 na página 557, é diagonalizável e as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema desacoplado

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = 3y_1(t) + g_1(t) \qquad (4.46) \\ y_2'(t) = -y_2(t) + g_2(t) \qquad (4.47) \end{array}\right.$$

em que

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 4e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{t} \\ e^{-t} + e^{t} \end{bmatrix}$$

Para resolver a equação (4.46), ou seja,

$$y_1' - 3y_1 = e^{-t} - e^{t}$$

multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{-3t}$ obtendo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-3t}y_1\right) = e^{-4t} - e^{-2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{-3t}y_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + c_1.$$

Explicitando-se $y_1(t)$:

$$y_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} + c_1e^{3t}$$

Uma solução particular da equação $y_1' - 3y_1 = e^{-t} - e^{t}$ é então

$$y_{1p}(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}.$$

Para resolver a equação (4.47), ou seja,

$$y_2' + y_2 = e^{-t} + e^{t}$$

multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{t}$ obtendo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t}y_2\right) = 1 + e^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{t}y_2(t) = t + \frac{1}{2}e^{2t} + c_2.$$

Explicitando-se $y_2(t)$:

$$y_2(t) = te^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} + c_2e^{-t}.$$

Uma solução particular da equação $y_2' + y_2 = e^{-t} + e^{t}$ é então

$$y_{2p}(t) = te^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}.$$

Uma solução particular do sistema não homogêneo é então

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ te^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{-t} + e^{t} + te^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}.$$

Assim pelo Teorema 4.7 na página 597 a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^{-t} + e^{t} + te^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix} + c_1e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.4.2 A Matriz A é Diagonalizável em $\mathbb{C}$

Vamos considerar o caso 2×2, por que a notação fica mais simples. Entretanto a idéia se estende facilmente para o caso geral. Como no caso dos sistemas homogêneos, em que a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$, existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 + iw_1 & v_1 - iw_1 \\ v_2 + iw_2 & v_2 - iw_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix},$$

tais que

$$A = PDP^{-1}. \tag{4.48}$$

Substituindo-se (4.48) em (4.44) obtemos

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + F(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t).$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos a equação matricial

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcllcl} y_1'(t) & = & (\alpha + i\beta)\, y_1(t) & & + & \overline{g_1(t)} \\ y_2'(t) & = & & (\alpha - i\beta)\, y_2(t) & + & g_1(t) \end{array} \right.$$

A segunda equação é conjugada da primeira, logo a solução da segunda equação é o conjugado da solução da primeira equação. Assim se $y_{1p}(t)$ é uma solução particular da primeira equação, então $y_{2p}(t) = \overline{y_{1p}(t)}$ é uma solução particular da segunda equação. Logo uma solução particular complexa do sistema é

$$X_p(t) = PY_p(t) = P \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ \overline{y_{1p}(t)} \end{bmatrix}.$$

Como $P = \begin{bmatrix} V + iW & V - iW \end{bmatrix}$, então uma solução particular do sistema é dada por

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \begin{bmatrix} V + iW & V - iW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ \overline{y_{1p}(t)} \end{bmatrix} = \\ &= y_{1p}(t)(V + iW) + \overline{y_{1p}(t)}(V - iW) \\ &= 2\mathcal{R}\mathrm{e}\{y_{1p}(t)(V + iW)\} \end{aligned}$$

que é real. Assim, pelo Teorema 4.7 na página 597 a solução geral (real) é a soma da solução geral (real) do sistema homogêneo com $X_p(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= c_1 \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{ e^{(\alpha+i\beta)t}(V + iW) \right\} + c_2 \mathcal{I}\mathrm{m}\left\{ e^{(\alpha+i\beta)t}(V + iW) \right\} + 2\mathcal{R}\mathrm{e}\{y_{1p}(t)(V + iW)\} \\ &= c_1\, e^{\alpha t}\left(\cos\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \right) + c_2\, e^{\alpha t}\left(\cos\beta t \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \operatorname{sen}\beta t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + 2\mathcal{R}\mathrm{e}\{y_{1p}(t)(V + iW)\}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.14. Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -3x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= -4x_1(t) + x_2(t) + 2\operatorname{sen} t \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\,\text{sen}\,t \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a mesma do Exemplo 4.9 na página 578, é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e as matrizes

$$P = [\, Z\ \overline{Z}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2i & 0 \\ 0 & -1-2i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = (-1+2i)y_1(t) + g_1(t) & (4.49) \\ y_2'(t) = (-1-2i)y_2(t) + g_2(t) & (4.50) \end{cases}$$

em que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} &= P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\,\text{sen}\,t \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2\,\text{sen}\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\,\text{sen}\,t \\ i\,\text{sen}\,t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para resolver a equação (4.49), ou seja, $y_1' + (1-2i)y_1(t) = -i\,\text{sen}\,t$, multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{(1-2i)t}$ obtendo

$$\frac{d}{dt}(e^{(1-2i)t}y_1) = -i\,\text{sen}\,t e^{(1-2i)t}.$$

Observe que $-i\,\mathrm{sen}\,t = -\frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it})$, pois pela fórmula de Euler

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t \\ e^{-it} &= \cos t - i\,\mathrm{sen}\,t. \end{aligned}$$

Logo a equação diferencial anterior pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(e^{(1-2i)t}y_1) = -\frac{1}{2}(e^{(1-i)t} - e^{(1-3i)t})$$

Integrando-se obtemos

$$e^{(1-2i)t}y_1(t) = -\frac{1}{2-2i}e^{(1-i)t} + \frac{1}{2-6i}e^{(1-3i)t} + C_1.$$

Explicitando-se $y_1(t)$:

$$y_1(t) = y_{1p}(t) + C_1 e^{(-1+2i)t},$$

em que

$$y_{1p}(t) = -\frac{1}{2-2i}e^{it} + \frac{1}{2-6i}e^{-it}.$$

Logo

$$X_p(t) = 2\mathcal{R}\mathrm{e}\{y_{1p}(t)\left[\begin{array}{c} 1 \\ (1+i) \end{array}\right]\} = \left[\begin{array}{c} 2\mathcal{R}\mathrm{e}\{y_{1p}(t)\} \\ 2\mathcal{R}\mathrm{e}\{(1+i)y_{1p}(t)\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\frac{2}{5}\cos t + \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}\,t \\ -\frac{1}{5}\cos t + \frac{7}{5}\,\mathrm{sen}\,t \end{array}\right]$$

é uma solução particular real do sistema não homogêneo. Então, pelo Teorema 4.7 na página 597, a solução geral real do sistema é a soma da solução geral real do sistema homogêneo com uma solução particular, ou seja,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right] &= X_p(t) + c_1\,\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{e^{(-1+2i)t}\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1+i \end{array}\right]\right\} + c_2\,\mathcal{I}\mathrm{m}\left\{e^{(-1+2i)t}\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1+i \end{array}\right]\right\} \\ &= \left[\begin{array}{c} -\frac{2}{5}\cos t + \frac{4}{5}\,\mathrm{sen}\,t \\ -\frac{1}{5}\cos t + \frac{7}{5}\,\mathrm{sen}\,t \end{array}\right] + \\ &\quad c_1\,e^{-t}\left(\cos 2t\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] - \mathrm{sen}\,2t\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]\right) + c_2\,e^{-t}\left(\cos 2t\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right] + \mathrm{sen}\,2t\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right]\right) \end{aligned}$$

4.4.3 A Matriz A não é Diagonalizável

Vamos considerar o caso 2×2, mas a idéia se estende facilmente para o caso geral. Como no caso dos sistemas homogêneos, em que a matriz A não é diagonalizável, existem matrizes

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tais que

$$A = PJP^{-1}. \tag{4.51}$$

Substituindo-se (4.51) em (4.44) obtemos

$$X'(t) = PJP^{-1}X(t) + F(t).$$

Multiplicando-se à esquerda por P^{-1}, obtemos

$$P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t) + P^{-1}F(t).$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, obtemos

$$Y'(t) = JY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrito na forma

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} y_1'(t) & = & \lambda y_1(t) & + & y_2(t) + g_1(t) \\ y_2'(t) & = & & & \lambda y_2(t) + g_2(t) \end{array} \right.$$

A segunda equação pode ser resolvida independentemente da primeira, obtendo-se uma solução particular $y_{2p}(t)$. Substituindo-se $y_{2p}(t)$ na primeira equação ela pode ser resolvida encontrando-se uma solução particular $y_{1p}(t)$. Uma solução particular do sistema inicial é então

$$X_p(t) = PY_p(t) = P \begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ y_{2p}(t) \end{bmatrix}.$$

pelo Teorema 4.7 na página 597 a solução geral é a soma da solução geral do sistema homogêneo com $X_p(t)$, ou seja,

$$X(t) = X_p(t) + c_1 e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right).$$

Exemplo 4.15. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & x_2(t) + t \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) & - & 3x_2(t) \end{array}\right.$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$X'(t) = AX(t) + F(t),$$

em que

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é a mesma do Exemplo 4.11 na página 590, não é diagonalizável e as matrizes

$$P = [\, V \; W \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + g_1(t) \qquad (4.52) \\ y_2'(t) = -2y_2(t) \qquad\qquad\;\; + g_2(t) \qquad (4.53) \end{array}\right.$$

em que

$$\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

Temos que resolver em primeiro lugar a equação (4.53), ou seja,

$$y_2' + 2y_2 = t.$$

Para isso multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{2t}$ obtendo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}y_2\right) = te^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{2t}y_2(t) = \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + c_2.$$

Explicitando-se $y_2(t)$:

$$y_2(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + c_2e^{-2t}.$$

Logo

$$y_{2p}(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$$

é uma solução particular da segunda equação.
Para resolver a equação (4.52), ou seja,

$$y_1' + 2y_1 = \frac{3t}{2} - \frac{1}{4}$$

multiplicamos a equação pelo fator integrante $\mu(t) = e^{2t}$ obtendo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}y_1\right) = \frac{3t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}.$$

Integrando-se:

$$e^{2t}y_1(t) = \frac{3t}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + c_1.$$

Explicitando-se $y_1(t)$:

$$y_1(t) = \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} + c_1e^{-2t}.$$

Logo

$$y_{1p}(t) = \frac{3t}{4} - \frac{1}{2}$$

é uma solução particular da primeira equação. Assim

$$X_p(t) = PY_p(t) = P\begin{bmatrix} y_{1p}(t) \\ y_{2p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Portanto pelo Teorema 4.7 na página 597, a solução geral do sistema é a soma da solução geral do sistema homogêneo com uma solução particular, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3t}{4} - \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} + c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

4.4.4 Usando a Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é particularmente adequada para resolver problemas de valor inicial

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t), \quad x_1(0) = x_{10} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n'(t) &=& a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t), \quad x_n(0) = x_{n0} \end{array}\right.$$

Aplicando-se a transformada de Laplace no sistema obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} sX_1(s) - x_{10} &=& a_{11}X_1(s) + \cdots + a_{1n}X_n(s) + F_1(s) \\ \vdots & & \vdots \\ sX_n(s) - x_{n0} &=& a_{n1}X_1(s) + \cdots + a_{nn}X_n(s) + F_n(s) \end{array}\right.$$

Este é um sistema de equações lineares algébrico que pode ser resolvido obtendo expressões para $X_1(s), \ldots, X_n(s)$. A solução do problema de valor inicial é então

$$X(t) = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}^{-1}X_1)(t) \\ \vdots \\ (\mathcal{L}^{-1}X_n)(t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.16. Vamos considerar o sistema do Exemplo 4.14 na página 603

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & -3x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_2'(t) & = & -4x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2\,\mathrm{sen}\,t \end{array}\right.$$

sujeito às condições iniciais $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 1$. Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} sX_1(s) - x_1(0) & = & -3X_1(s) & + & 2X_2(s) & & \\ sX_2(s) - x_2(0) & = & -4X_1(s) & + & X_2(s) & + & \dfrac{2}{1+s^2} \end{array}\right.$$

substituindo-se $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$ obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} (s+3)X_1(s) & - & 2X_2(s) & = & 0 \\ 4X_1(s) & + & (s-1)X_2(s) & = & \dfrac{2}{s^2+1} \end{array}\right. \tag{4.54}$$

Resolvendo o sistema linear algébrico obtemos

$$X_1(s) = \frac{4}{(s^2+1)\ (s^2+2\,s+5)}$$

$$X_2(s) = \frac{2\ (s+3)}{(s^2+1)\ (s^2+2\,s+5)}$$

Vamos decompor em frações parciais $X_1(s)$.

$$\frac{4}{(1+s^2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

Multiplicando-se por $(1+s^2)(s^2+2s+5)$ obtemos

$$4 = (As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D)(s^2+1) \tag{4.55}$$

Substituindo-se $s = i$ obtemos

$$4 = (iA+B)(4+2i) = (-2A+4B) + i(4A+2B)$$

obtendo $A = -2/5$ e $B = 4/5$. Comparando-se os termos de grau 3 e os de grau 0 de (4.55) obtemos $C = 2/5$ e $D = 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
X_1(s) = \frac{4}{(1+s^2)(s^2+2s+5)} &= -\frac{2}{5}\frac{s-2}{s^2+1} + \frac{2}{5}\frac{s}{s^2+2s+5} \\
&= -\frac{2}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{4}{5}\frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{5}\frac{1}{(s+1)^2+4}
\end{aligned}
$$

Aplicando-se a inversa da transformada de Laplace obtemos

$$x_1(t) = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{4}{5}\operatorname{sen} t + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{5}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

Vamos, agora, encontrar $x_2(t)$. Vamos decompor em frações parciais o termo

$$\frac{2s+6}{(1+s^2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

Multiplicando-se por $(1+s^2)(s^2+2s+5)$ obtemos

$$2s+6 = (As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D)(s^2+1) \tag{4.56}$$

Substituindo-se $s = i$ obtemos

$$2i+6 = (iA+B)(4+2i) = (-2A+4B) + i(4A+2B)$$

obtendo $A = -1/5$ e $B = 7/5$. Comparando-se os termos de grau 3 e os de grau 0 de (4.56) obtemos $C = 1/5$ e $D = -1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
X_2(s) = \frac{2s+6}{(1+s^2)(s^2+2s+5)} &= -\frac{1}{5}\frac{s-7}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{s-5}{s^2+2s+5} \\
&= -\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{7}{5}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{6}{5}\frac{1}{(s+1)^2+4}
\end{aligned}
$$

Aplicando-se a inversa da transformada de Laplace obtemos

$$x_2(t) = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{7}{5}\operatorname{sen} t + \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{6}{5}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\cos t + \frac{4}{5}\operatorname{sen} t + \frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{5}e^{-t}\operatorname{sen} 2t \\ -\frac{1}{5}\cos t + \frac{7}{5}\operatorname{sen} t + \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t - \frac{6}{5}e^{-t}\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$$

4.4.5 Demonstração do Teorema de Existência e Unicidade

Demonstração do Teorema 4.1 na página 543.

(a) Existência:
Defina a seqüência $X^{(k)}(t)$ por

$$X^{(0)}(t) = X^{(0)}, \quad X^{(k)}(t) = X^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (A(s)X^{(k-1)}(s) + F(s))ds, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Assim, cada componente $X^{(k)}(t)$ é dada por

$$x_i^{(k)} = x_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s) x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s))ds.$$

Sejam $M, N > 0$ tais que

$$|a_{ij}(t)| \leq M, \quad \text{para } i, j = 1, \ldots n \text{ e } t \in I \tag{4.57}$$

$$|x_i^{(1)}(t) - x_i^{(0)}| \leq N, \quad \text{para } i = 1, \ldots n \text{ e } t \in I$$

Então

$$|x_i^{(2)}(t) - x_i^{(1)}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)||x_j^1(s) - x_j^0|ds$$

$$\leq M \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(1)}(s) - x_j^{(0)}|ds \leq nMN(t - t_0)$$

$$|x_i^{(3)}(t) - x_i^{(2)}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)||x_j^{(2)}(s) - x_j^{(1)}(s)|ds$$

$$\leq M \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(2)}(s) - x_j^{(1)}(s)|ds \leq nM^2N \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} |s - t_0|ds$$

$$\leq n^2M^2N \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

Por indução

$$
\begin{aligned}
|x_i^{(k+1)}(t) - x_i^{(k)}(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)||x_j^{(k)}(s) - x_j^{(k-1)}(s)|ds \\
&\leq M \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} |x_j^{(k)}(s) - x_j^{(k-1)}(s)|ds \leq M \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} n^{k-1} M^{k-1} N \frac{|s-t_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \\
&\leq n^k M^k N \frac{|t-t_0|^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Usando o mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 1.1 na página 147 temos que $x_i^{(k)}(t)$ é uma seqüência convergente. Seja

$$x_i(t) = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}(t).$$

Também pelo mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 1.1 na página 147 temos que $x_i(t)$ é contínua e vale

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s) x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s))ds = \int_{t_0}^{t} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s) x_j(s) + f_i(s))ds.$$

Assim

$$
\begin{aligned}
x_i(t) = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}(t) = x_i^{(0)} + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s) x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s))ds = \\
= x_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s) \lim_{k\to\infty} x_j^{(k-1)}(s) + f_i(s))ds = \\
= x_i^{(0)} + \int_{t_0}^{t} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s) x_j(s) + f_i(s))ds
\end{aligned}
$$

Derivando em relação a t esta equação vemos que $x_i(t)$ é solução do problema de valor inicial.

(b) Unicidade:
Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ duas soluções do problema de valor inicial (4.2). Então

$$Z(t) = X(t) - Y(t)$$

é solução do problema de valor inicial (4.2) com $X^{(0)} = 0$ e $F(t) = 0$. Assim temos que mostrar que $Z(t) = 0$, para todo t.
Seja $u(t) = \int_{t_0}^{t}(|z_1(s)| + \cdots + |z_n(s)|)ds$. Como

$$z_1(t) = \int_{t_0}^{t} z_1'(s)ds, \; \ldots, \; z_n(t) = \int_{t_0}^{t} z_n'(s)ds,$$

então por (4.57) temos

$$\begin{aligned} |z_1(t)| + \cdots + |z_n(t)| &\leq \int_0^t (|z_1'(s)| + \cdots + |z_n'(s)|)ds \\ &\leq \int_0^t \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(s)||z_j(s)|ds \\ &\leq nM \int_0^t (|z_1(s)| + \cdots + |z_n(s)|)ds = nMu(t), \end{aligned}$$

para $t \in I$, ou seja,

$$u'(t) \leq nMu(t).$$

Multiplicando a inequação acima por e^{-nMt} obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-nMt}u(t)) \leq 0, \quad \text{com } u(t_0) = 0.$$

Isto implica que $u(t) = 0$, para todo t (verifique!) e portanto $Z(t) = 0$, para $t \in I$.

■

Como conseqüência do resultado que acabamos de provar temos o resultado abaixo para existência e unicidade de soluções de equações lineares de 2ª ordem.

Demonstração do Teorema 2.1 na página 253. Sejam $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = y'(t)$. O problema de valor inicial é equivalente ao problema

$$\begin{cases} X'(t) & = & A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) & = & X^{(0)} \end{cases}$$

em que

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}.$$

A conclusão segue-se da aplicação do Teorema 4.1. ■

Exercícios (respostas na página 659)

4.1. Determine a solução geral dos sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x_1'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2 \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2t \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & + & e^t \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) & + & 4x_2(t) & + & e^{2t} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1'(t) & = & -x_1(t) & - & 4x_2(t) & + & 4\cos t \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & + & 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & & \\ x_2'(t) & = & 5x_1(t) & + & 3x_2(t) & + & 4\cos t \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & 4x_2(t) & & \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & + & te^t \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1'(t) & = & 4x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & 6te^{2t} \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & & & & \end{cases}$

4.2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2 \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) & + & 2t \end{array}\right., x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & + & e^t \\ x_2'(t) & = & 2x_1(t) & + & 4x_2(t) & + & e^{2t} \end{array}\right., x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

(c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & -x_1(t) & - & 4x_2(t) & + & 4\cos t \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & + & 2\,\mathrm{sen}\, t \end{array}\right., x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$

(d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & & \\ x_2'(t) & = & 5x_1(t) & + & 3x_2(t) & + & 4\cos t \end{array}\right., x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$

(e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & 4x_2(t) & & \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & + & te^t \end{array}\right., x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$

(f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 4x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & 6te^{2t} \\ x_2'(t) & = & -2x_1(t) & & & & \end{array}\right., x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$

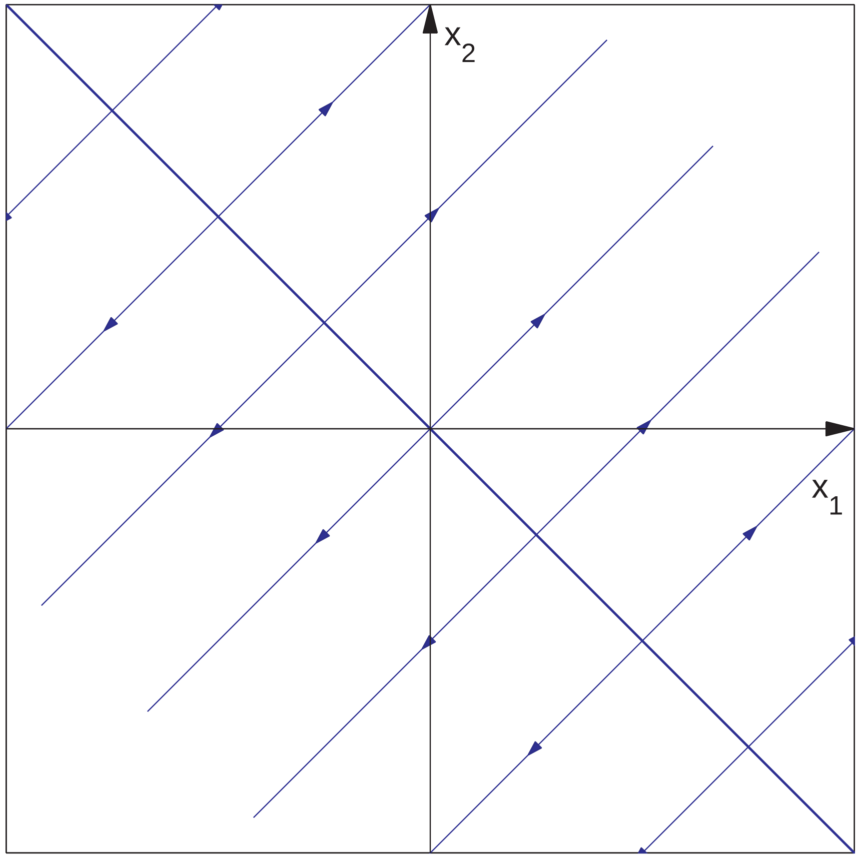
4.5 Respostas dos Exercícios

1. A Matriz A é diagonalizável em $\mathbb{R}$ (página 566)

1.1. (a) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

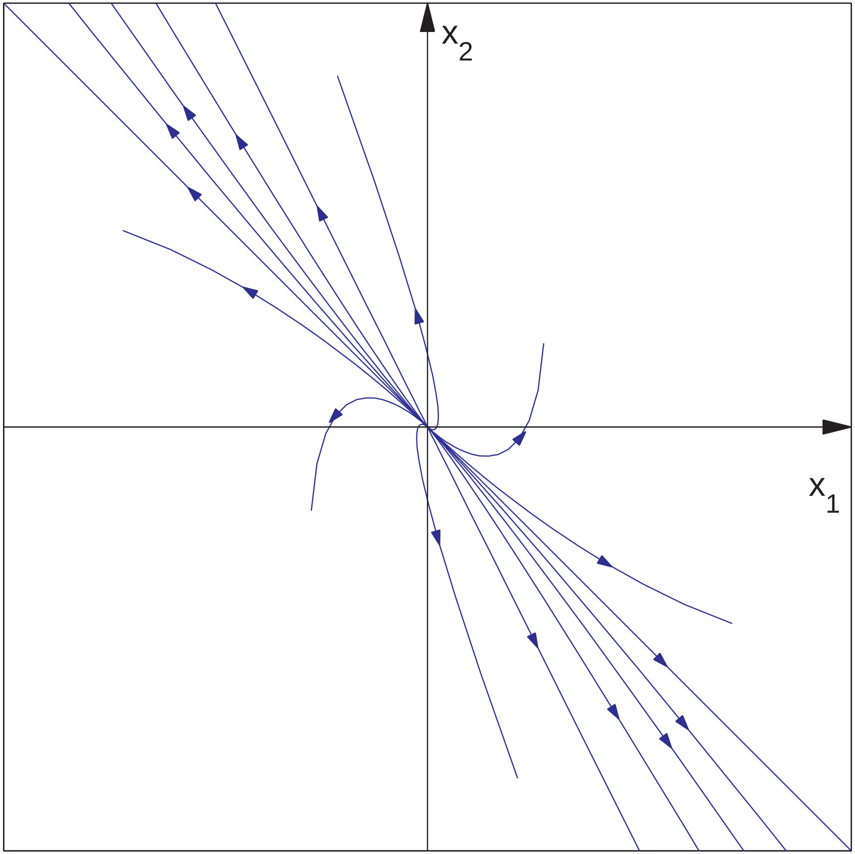
$$\left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array} \right] = c_1\, e^{2t} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] + c_2 \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right].$$


x
2
x
1

(b) As matrizes $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

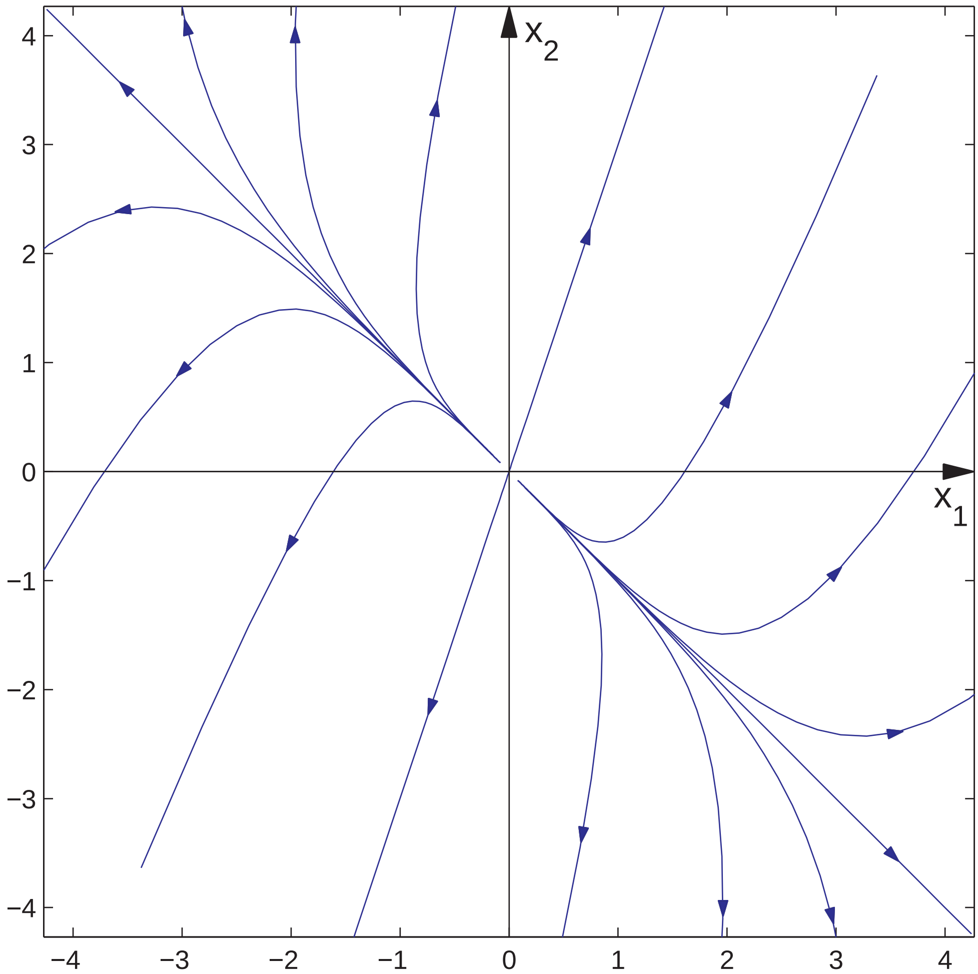


x_2
x_1

(c) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

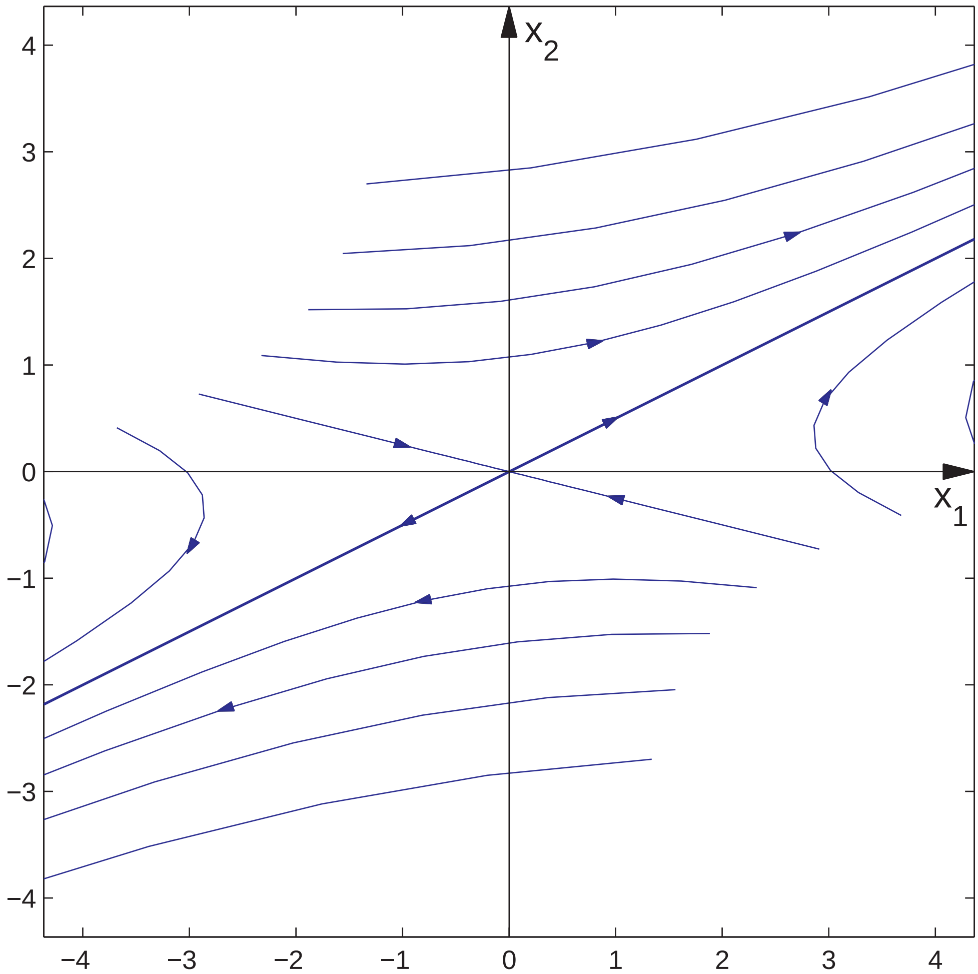


x2
x1
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

(d) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

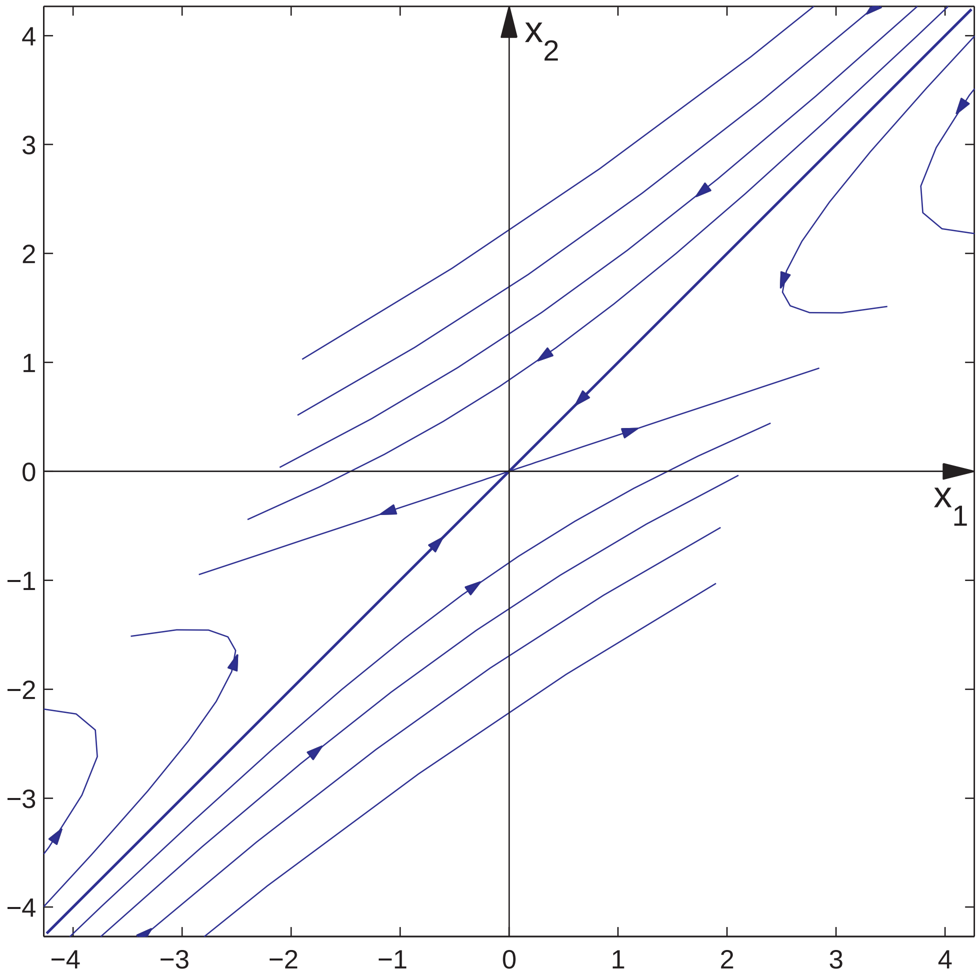
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-3t} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$


x2
x1
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

(e) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

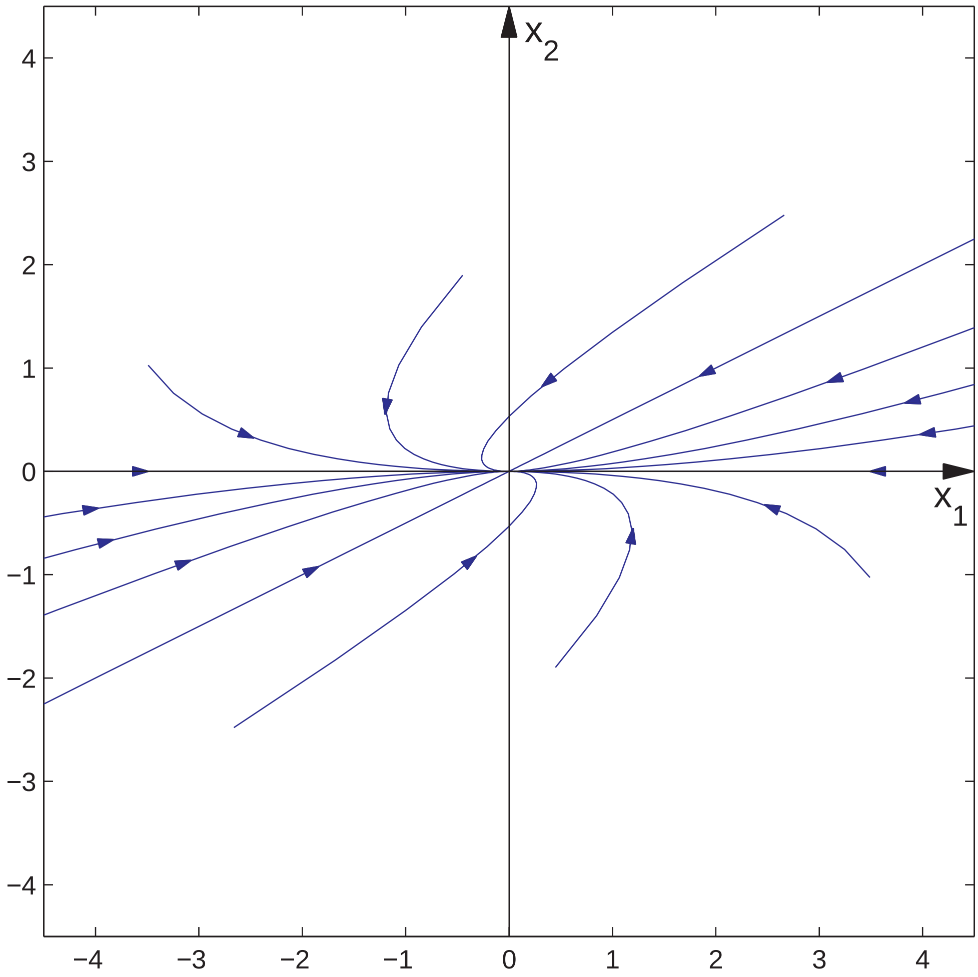
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$


x2
x1
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

(f) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$


x2
x1
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

1.2. $P = \begin{bmatrix} -a+\sqrt{a^2+1} & -a-\sqrt{a^2+1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 3\,a+\sqrt{a^2+1} & 0 \\ 0 & 3\,a-\sqrt{a^2+1} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$

$c_1\, e^{(3a+\sqrt{a^2+1})t} \begin{bmatrix} -a+\sqrt{a^2+1} \\ 1 \end{bmatrix}$

$+\, c_2\, e^{(3a-\sqrt{a^2+1})t} \begin{bmatrix} -a-\sqrt{a^2+1} \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.3. (a) Os autovalores são as raízes de $p(t) = (t+2)(t+3) = 0$, ou seja, $\lambda = -2$ ou $\lambda = -3$.
Os autovetores associados a $\lambda_1 = -2$ são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é $W_1 = (1, 2)$.
Os autovetores associados a $\lambda_2 = -3$ são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é $W_2 = (0, 1)$.
A solução geral é

$$X(t) = \begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} L(0) \\ D(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ D_0 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} c_1 & & = & L_0 \\ 2c_1 & + \quad c_2 & = & D_0 \end{cases}$$

Obtemos $c_1 = L_0$ e $c_2 = D_0 - 2L_0$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = L_0 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (D_0 - 2L_0)\, e^{-3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Os autovalores são as raízes de $p(t) = (t + k)(t + k_r) = 0$, ou seja, $\lambda = -k$ ou $\lambda = -k_r$.
Os autovetores associados a $\lambda_1 = -k$ são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & k_r - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é $W_1 = (k_r - k, k)$.
Os autovetores associados a $\lambda_2 = -k_r$ são calculados pela sistema:

$$\begin{bmatrix} -k + k_r & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é $W_2 = (0, 1)$.
A solução geral é

$$\begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-kt} \begin{bmatrix} k_r - k \\ k \end{bmatrix} + c_2 e^{-k_r t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} L(0) \\ D(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} k_r - k \\ k \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ D_0 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} (k_r - k)c_1 & & = & L_0 \\ kc_1 & + \quad c_2 & = & D_0 \end{cases}$$

Obtemos $c_1 = \frac{L_0}{k_r - k}$ e $c_2 = D_0 - \frac{kL_0}{k_r - k}$. Assim a solução do problema de valor inicial é
$$\begin{bmatrix} L(t) \\ D(t) \end{bmatrix} = \frac{L_0}{k_r - k} e^{-kt} \begin{bmatrix} k_r - k \\ k \end{bmatrix} + \left(D_0 - \frac{kL_0}{k_r - k} \right) e^{-k_r t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.4. (a) Os autovalores são as raízes de $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, ou seja, $\lambda = -1$ ou $\lambda = -5$.
Os autovetores associados a $\lambda_1 = -1$ são calculados pelo sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é $W_1 = (3, 2)$.
Os autovetores associados a $\lambda_2 = -5$ são calculados pela sistema:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e logo um autovetor é $W_2 = (1, -2)$.

A solução geral é

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo $t = 0$ na solução, ou seja,

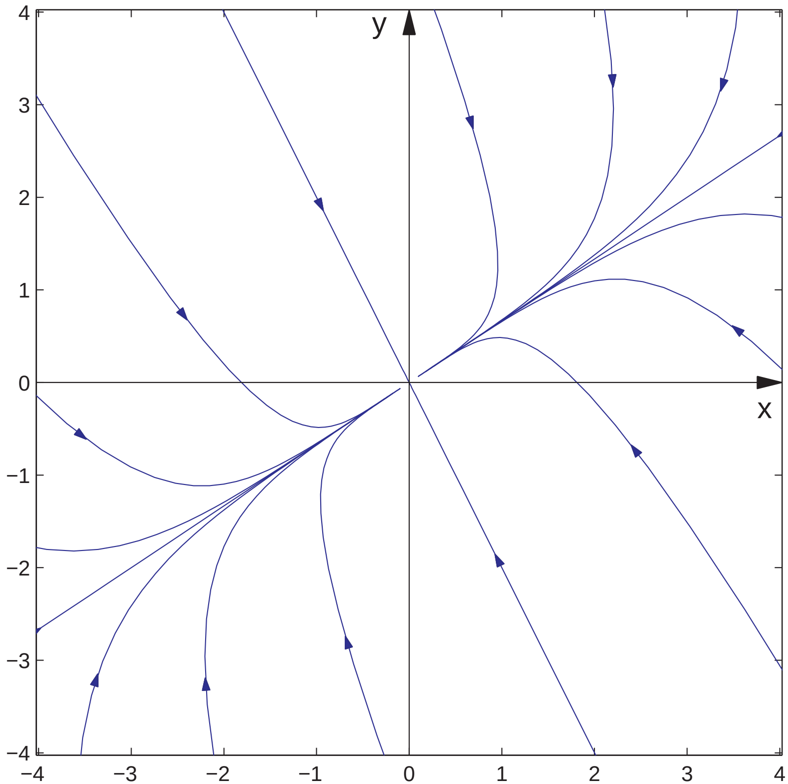
$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3c_1 & + & c_2 & = & x_0 \\ 2c_1 & - & 2c_2 & = & y_0 \end{array} \right.$$

Obtemos $c_1 = \frac{2x_0+y_0}{8}$ e $c_2 = \frac{2x_0-3y_0}{8}$. Assim a solução do problema de valor inicial é
$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left(\frac{2x_0+y_0}{8}\right) e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{2x_0-3y_0}{8}\right) e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b)



1.5. (a)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é $p(t) = \det(A - t\, I_2) = (-4 - t)(3 - t) = t^2 + t - 6$ cujas raízes são $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{\alpha(6,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = -3$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $V = (6,1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = -3$.

$$(A - \lambda_2 I_2)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 2$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $W = (1,1)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 2$.

Assim a solução do sistema é dada por

$$X(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

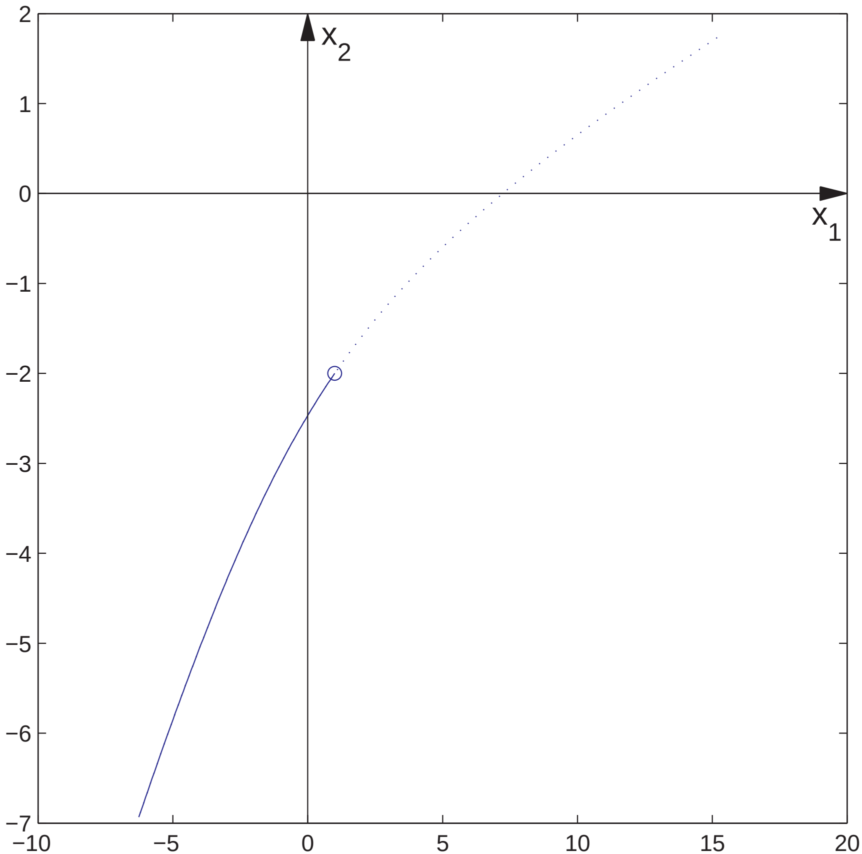
Substituindo-se $t = 0$:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De onde obtemos que $c_1 = 3/5$ e $c_2 = -13/5$ e portanto a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = \frac{3}{5} e^{-3t} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{13}{5} e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)



1.6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é $p(t) = \det(A - t\,I_3) = (-1-t)[(1-t)^2 - 1] = -t(t+1)(t-2)$ cujas raízes são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$

e $\lambda_3 = 2$.

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{\alpha(1, -1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $V = (1, -1, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 0$.

$$(A - \lambda_2 I_3)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(0, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $W = (0, 0, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = -1$.

$$(A - \lambda_3 I_3)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_3 = \{\alpha(1, 1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_3 = 2$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $U = (1, 1, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda_3 = -1$.
Assim a solução do sistema é dada por

$$X(t) \quad = \quad c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo-se $t = 0$:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de onde obtemos $c_1 = 0$, $c_2 = -1$ e $c_3 = 1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$X(t) = -e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.7.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é $p(t) = \det(A - t\,I_3) = t(t^2 - 6t + 9)$ cujas raízes são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$.

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{\alpha(1,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $V = (1,1,1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 0$.

$$(A - \lambda_2 I_3)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 3$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $W_1 = (1,0,1)$ e $W_2 = (0,1,1)$ são autovetores linearmente independentes associados a $\lambda_2 = 3$.

Assim a solução do sistema é dada por

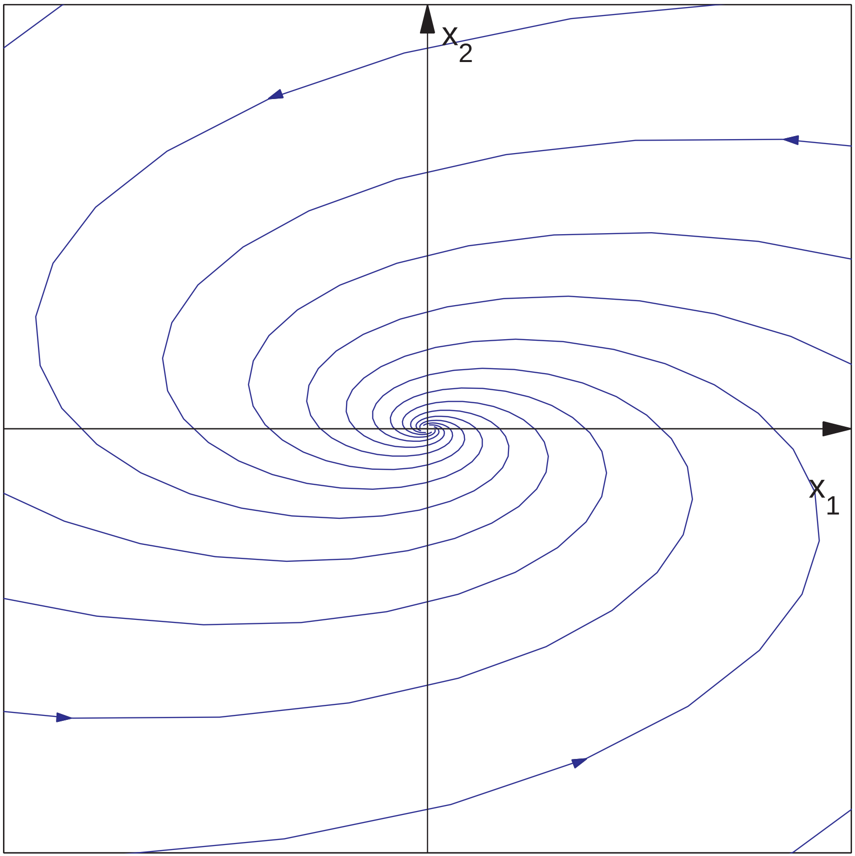
$$X(t) \quad = \quad c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A Matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$ (página 583)

2.1. (a) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 2\,i & -2\,i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -1+2\,i & 0 \\ 0 & -1-2\,i \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

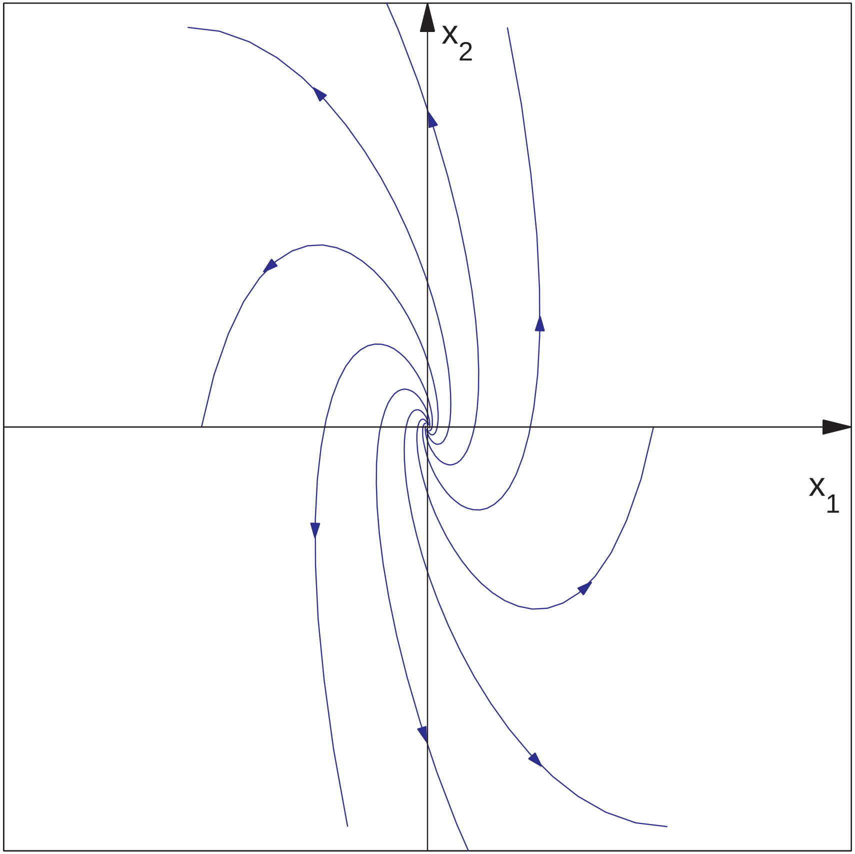
A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) +$$
$$c_2\, e^{-t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$


x
2
x
1

(b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2\,i-1 & 2\,i-1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2\,i+2 & 0 \\ 0 & 2-2\,i \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{2t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right) +$$
$$c_2\, e^{2t} \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

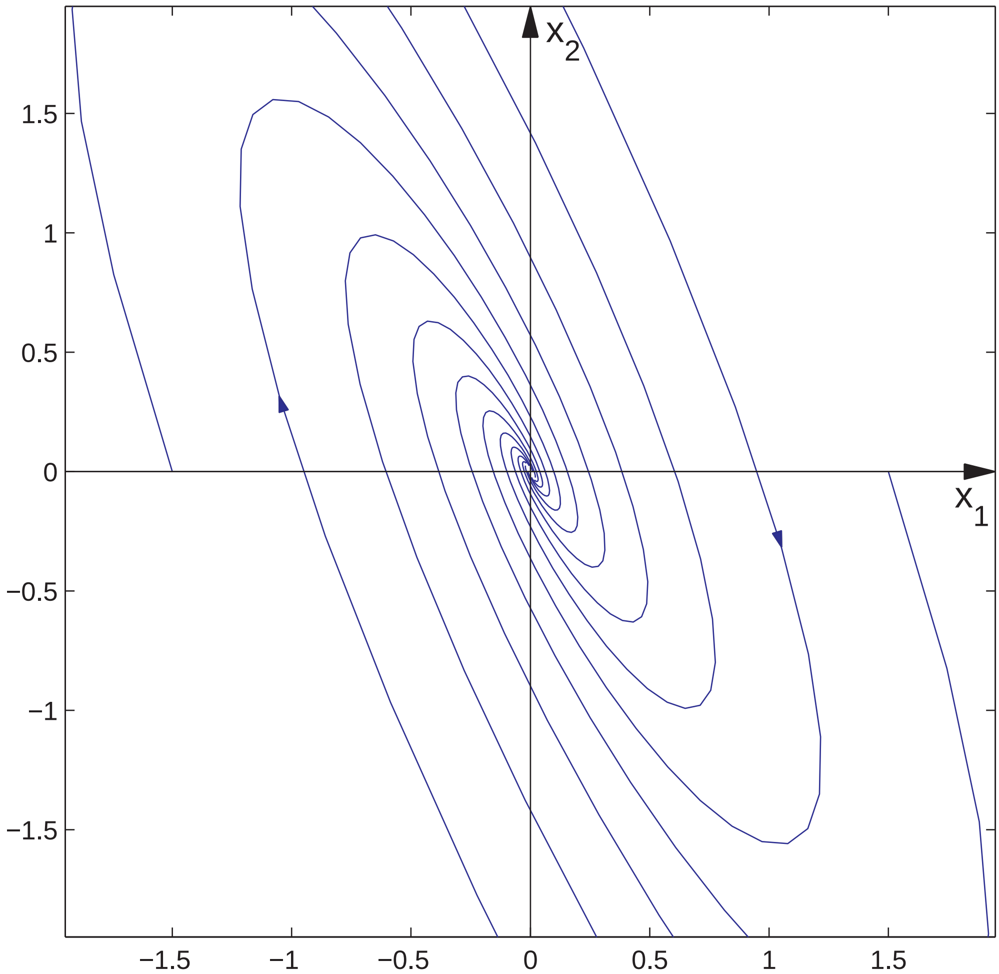


x2
x1

(c) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3-\sqrt{3}\,i & -3+\sqrt{3}\,i \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2} \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \tfrac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} \tfrac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \right) +$$
$$c_2\, e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \tfrac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \operatorname{sen} \tfrac{\sqrt{3}}{2} t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$$

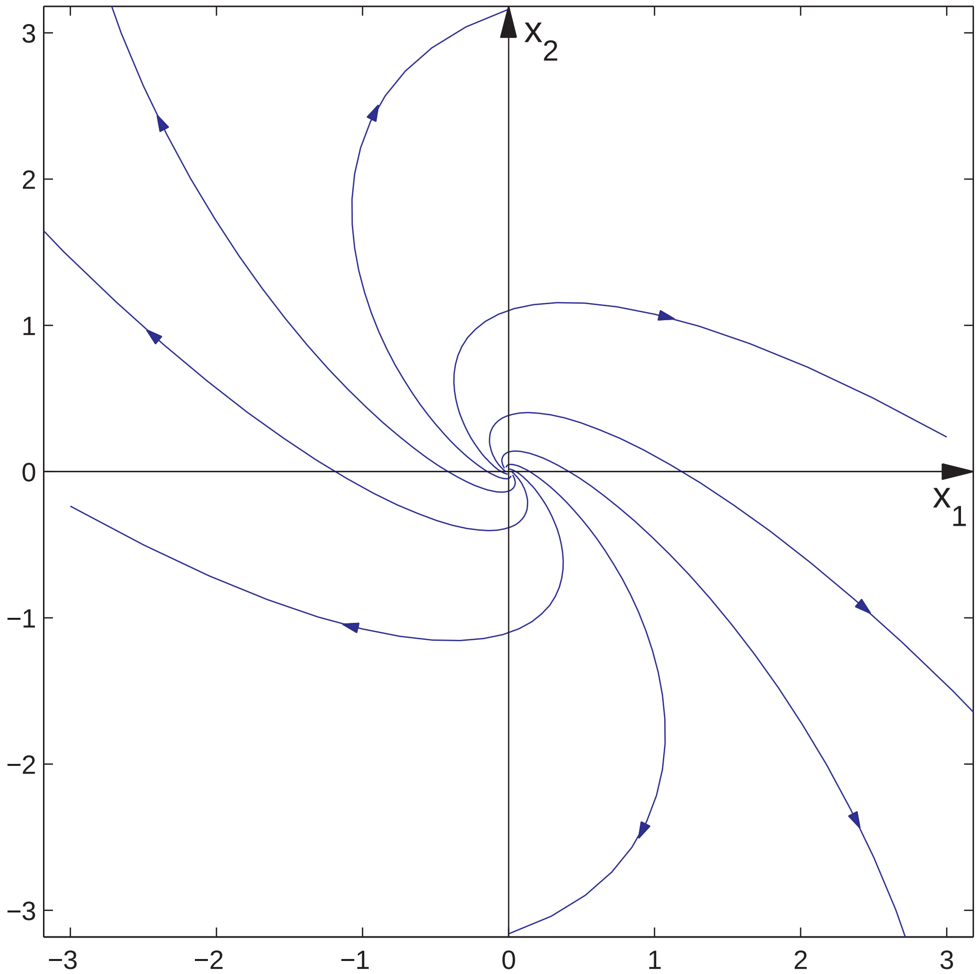


x
2
x
1
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

(d) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2-\sqrt{5}\,i & -2+\sqrt{5}\,i \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{5}\,i & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{5}\,i \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{3t} \left(\cos\sqrt{5}t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\sqrt{5}t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \right) +$$
$$c_2\, e^{3t} \left(\cos\sqrt{5}t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} + \operatorname{sen}\sqrt{5}t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

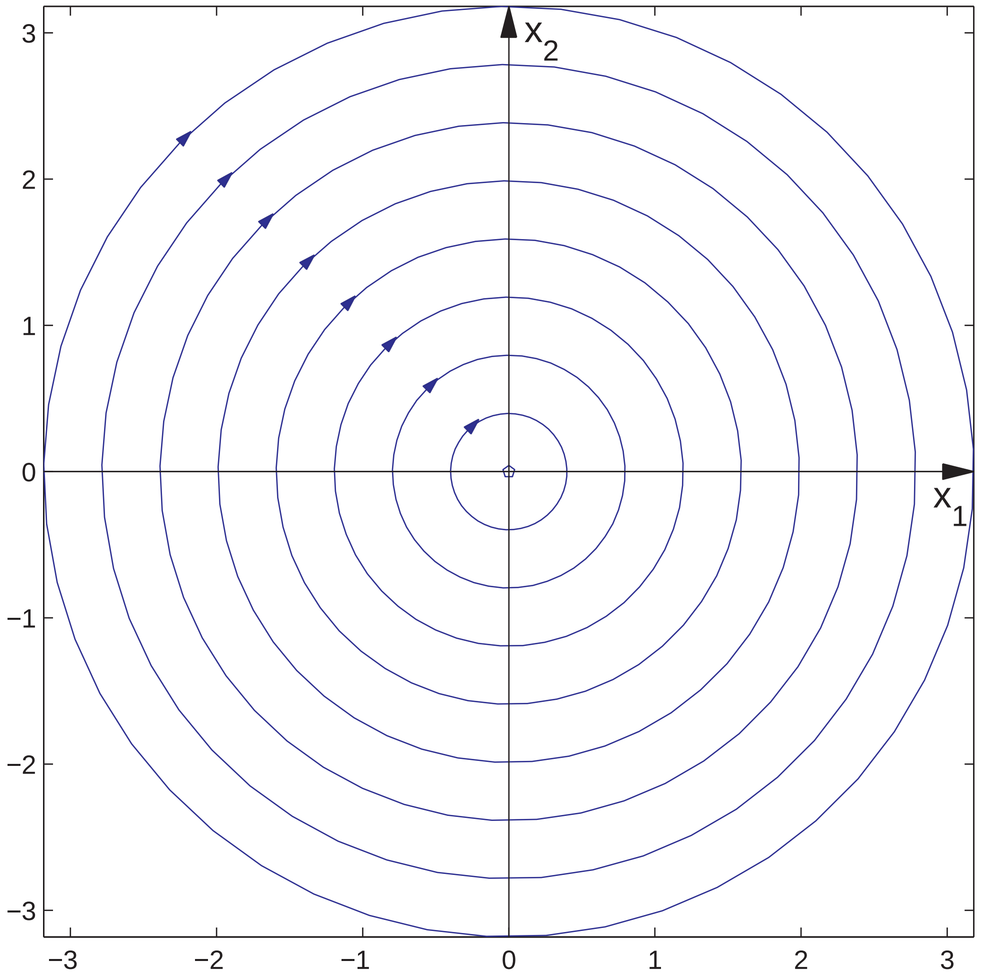


3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3
x2
x1

(e) As matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -2\,i & 0 \\ 0 & 2\,i \end{bmatrix}$ são tais que $A = PDP^{-1}$.

A solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) +$$
$$c_2 \left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$


x
2
x
1
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3

2.2. (a) Se $|a| > 4$:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + \sqrt{a^2 - 16} & -a - \sqrt{a^2 - 16} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2} \end{bmatrix}$$

Se $|a| < 4$:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + i\sqrt{16 - a^2} & -a - i\sqrt{16 - a^2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a+i\sqrt{16-a^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-i\sqrt{16-a^2}}{2} \end{bmatrix}$$

Se $|a| > 4$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{(\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2})t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a + \sqrt{a^2 - 16} \end{bmatrix} +$$
$$c_2\, e^{(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2})t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a - \sqrt{a^2 - 16} \end{bmatrix}.$$

Se $|a| < 4$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{\frac{at}{2}} (\cos(\tfrac{\sqrt{16-a^2}}{2} t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix}$$
$$- e^{\frac{at}{2}} \operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{16-a^2}}{2} t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16 - a^2} \end{bmatrix}) +$$
$$c_2\, e^{\frac{at}{2}} (\cos(\sqrt{16 - a^2} t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16 - a^2} \end{bmatrix}$$
$$+ e^{\frac{at}{2}} \operatorname{sen}(\sqrt{16 - a^2} t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix})$$

Se $a = \pm 4$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t) e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} \pm 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Se $a < 1/2$:

$$P = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1 - 2a} & -1 - \sqrt{1 - 2a} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{1 - 2a} & 0 \\ 0 & -1 - \sqrt{1 - 2a} \end{bmatrix}$$

Se $a > 1/2$:

$$P = \begin{bmatrix} -1 + i\sqrt{2a - 1} & -1 - i\sqrt{2a - 1} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1+i\sqrt{2a-1} & 0 \\ 0 & -1-i\sqrt{2a-1} \end{bmatrix}$$

Se $a < 1/2$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{(-1+\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1+\sqrt{1-2a} \\ 2 \end{bmatrix} +$$
$$c_2\, e^{(-1-\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} -1-\sqrt{1-2a} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Se $a > 1/2$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t}(\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$-\, e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix}) +$$
$$c_2\, e^{-t}(\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$+\, e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix})$$

(c) Se $a > 0$:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & -\frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{a} \end{bmatrix}$$

Se $a < 0$:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{-a}} & \frac{i}{\sqrt{-a}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1+i\sqrt{-a} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{-a} \end{bmatrix}$$

Se $a > 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{(1+\sqrt{a})t} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{(1-\sqrt{a})t} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se $a < 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1(e^{t}\cos(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$-\, e^{t}\ \operatorname{sen}(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-a}} \\ 0 \end{bmatrix}) +$$
$$c_2(e^{t}\cos(\sqrt{-a}t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{-a}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$+e^t \operatorname{sen}(\sqrt{-a}t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}).$

2.3. (a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é $p(t) = \det(A - t\,I_3) = (1-t)[(1-t)^2+1] = (1-t)(t^2-2t+2)$ cujas raízes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$ e $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = 1-i$.

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} & y & & = & 0 \\ -x & & & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(0,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $V = (0,0,1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 1$.

$$(A - \lambda_2 I_3)X = \bar{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{rcrrcl} -ix & + & y & & = & 0 \\ -x & - & iy & & = & 0 \\ & & & iz & = & 0 \end{array}\right.$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, i\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_2 = 1+i$ acrescentado o vetor nulo. Assim, $Z = (1, i, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda_2 = 1+i$.

Temos também que $\overline{Z} = (1, -i, 0)$ é um autovetor associado a $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = 1-i$. Assim, a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$ e as matrizes

$$P = [V\ Z\ \overline{Z}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Assim a solução do sistema é dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, \mathcal{R}\mathrm{e} \left\{ e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ & \quad + c_3\, \mathcal{I}\mathrm{m} \left\{ e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= c_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ & \quad + c_2 e^t \left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\ & \quad + c_3 e^t \left(\cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

(b) Substituindo $t = 0$ na solução, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X(0) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & c_2 & & & = & 1 \\ & & & & c_3 & = & 1 \\ c_1 & & & & & = & 1 \end{array} \right.$$

Obtemos $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ e $c_3 = 1$. Assim a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned} X(t) &= e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \left(\cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \\ & \quad + e^t \left(\cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen} t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

2.4. (a) $\begin{cases} x_1'(t) &= & x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) & + \quad f(t)/m \end{cases}$

(b) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\frac{k}{m}}\, i & -\sqrt{\frac{k}{m}}\, i \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{k}{m}}\, i & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{k}{m}}\, i \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PDP^{-1}$. A solução geral do sistema é $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix} \right) +$
$c_2 \left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{bmatrix} + \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

$u(t) = x_1(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

3. A Matriz A não é diagonalizável (página 596)

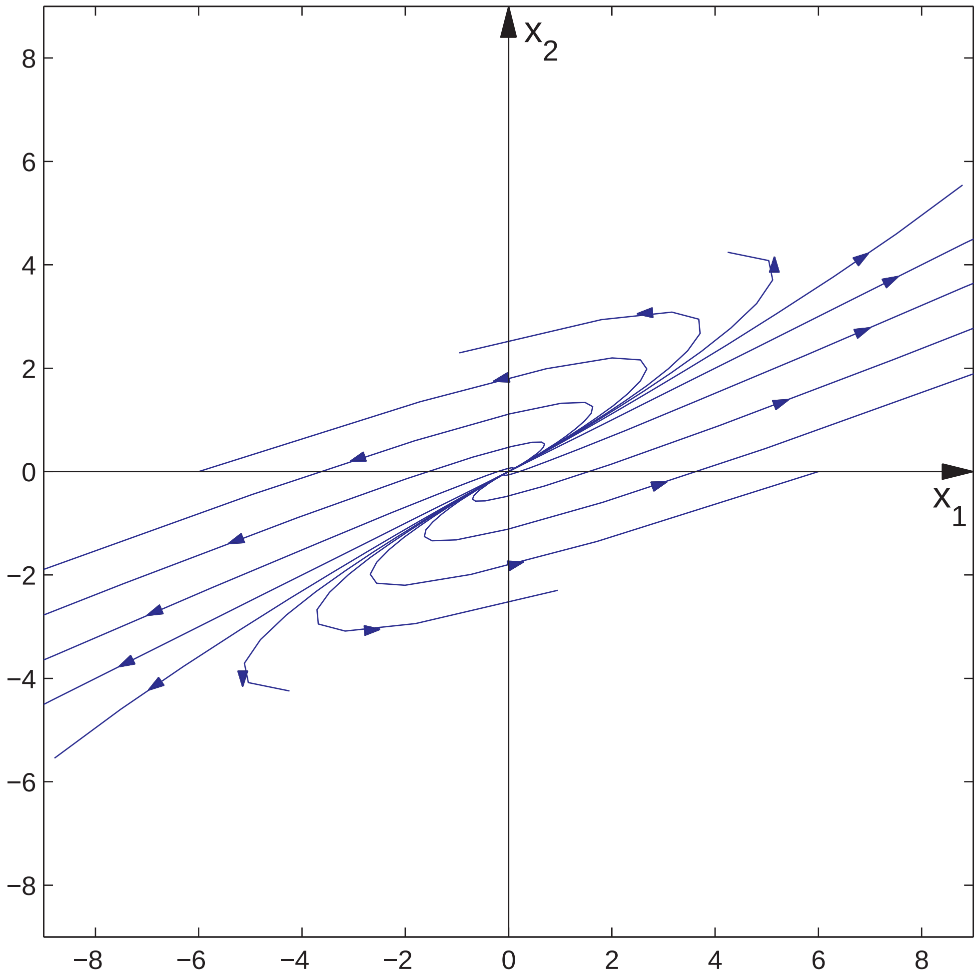
3.1. (a) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PJP^{-1}$.

Assim a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^t \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

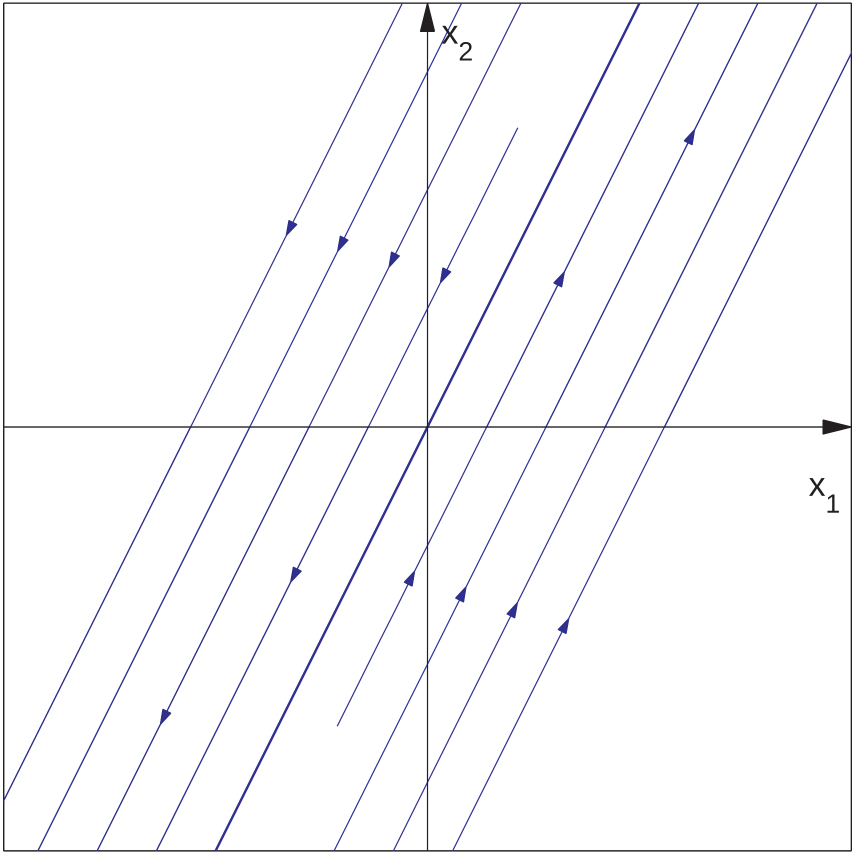

x2
x1
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8

(b) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PJP^{-1}$.

Assim a solução geral é $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$



x2
x1

3.2. (a) Se $|a| > 4$:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + \sqrt{a^2-16} & -a - \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2} \end{bmatrix}$$

Se $|a| < 4$:

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -a + i\sqrt{16-a^2} & -a - i\sqrt{16-a^2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a+i\sqrt{16-a^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a-i\sqrt{16-a^2}}{2} \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PDP^{-1}$.

Se $a = 4$:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $a = -4$:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são tais que $A = PJP^{-1}$.

Se $|a| > 4$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$

$$c_1\, e^{(\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{2})t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a + \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix} +$$

$$c_2\, e^{(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{2})t} \begin{bmatrix} 4 \\ -a - \sqrt{a^2-16} \end{bmatrix}.$$

Se $|a| < 4$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$

$$c_1\, e^{\frac{at}{2}} (\cos(\tfrac{\sqrt{16-a^2}}{2} t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix}$$

$$- \operatorname{sen}(\tfrac{\sqrt{16-a^2}}{2} t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix}) +$$

$$c_2\, e^{\frac{at}{2}} (\cos(\sqrt{16-a^2} t) \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{16-a^2} \end{bmatrix}$$

$$+ \operatorname{sen}(\sqrt{16-a^2} t) \begin{bmatrix} 4 \\ -a \end{bmatrix})$$

Se $a = \pm 4$:
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = (c_1 + c_2\, t)e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} \pm 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\, e^{\pm 2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Se $a < 1/2$:
$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2} & \frac{-1-\sqrt{1-2a}}{2} \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{1-2a} & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{1-2a} \end{bmatrix}$$
Se $a > 1/2$:
$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1+i\sqrt{2a-1}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{2a-1}}{2} \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -1+i\sqrt{2a-1} & 0 \\ 0 & -1-i\sqrt{2a-1} \end{bmatrix}$$
são tais que $A = PDP^{-1}$.
Se $a = 1/2$:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
são tais que $A = PJP^{-1}$.

Se $a < 1/2$:
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$$
$$c_1\, e^{(-1+\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{1-2a}}{2} \end{bmatrix} +$$
$$c_2\, e^{(-1-\sqrt{1-2a})t} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{1-2a}}{2} \end{bmatrix}.$$
Se $a > 1/2$:
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\, e^{-t}(\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$-\, e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix}) +$$
$$c_2\, e^{-t}(\cos(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} \sqrt{2a-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$+\, e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{2a-1}t) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix})$$
Se $a = 1/2$:
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

3.3. (a) $\det(A - tI_3) = -(t-4)\,(t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ ou $t = 4$. Logo os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.
Para $\lambda_1 = 2$:
$(A - \lambda_1 I_3)X = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Assim os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ são $(-\alpha, -\alpha, \alpha)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim $V_1 = (1, 1, -1)$ é um autovetor de A associado a $\lambda_1 = 2$.
Para $\lambda_2 = 4$:
$(A - \lambda_2 I_3)X = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Assim os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ são $(\alpha, -\alpha, \alpha)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim $V_2 = (1, -1, 1)$ é um autovetor de A associado a $\lambda_2 = 4$.
Vamos resolver o sistema $(A - \lambda_1 I_3)X = V_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ Assim os vetores da forma $X = (-\alpha, 1-\alpha, \alpha)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ são tais que $(A - \lambda_1 I_3)X = V_1$. Tomando $\alpha = 0$, temos que o vetor $W_1 = (0, 1, 0)$ é tal que $(A - 2I_3)W_1 = V_1 \Leftrightarrow AW_1 = 2W_1 + V_1$. Logo: $[AV_1 \ AW_1 \ AV_2] = [2V_1 \quad 2W_1 + V_1 \quad 4V_2] \Leftrightarrow$ $A[V_1 \ W_1 \ V_2] = [V_1 \ W_1 \ V_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Multiplicando à direita pela inversa de $P = [V_1 \ W_1 \ V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtemos que $A = PJP^{-1}$, em que $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

A solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_1 t}(W_1 + tV_1) + c_3 e^{\lambda_2 t} V_2 \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ &\quad + c_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

(b) Substituindo-se $t = 0$ e $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ na solução geral obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema algébrico obtemos $c_1 = 0, c_2 = 1$ e $c_3 = 1$. A solução do PVI é

$$X(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

4. Sistemas Não-Homogêneos (página 616)

4.1. (a) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 1-t \\ y_2'(t) &= 2y_2(t) + 1 + t \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= t - \frac{1}{2}t^2 \\ y_{2p}(t) &= -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t/2 - 3/4 - t^2/2 \\ -3t/2 - 3/4 + t^2/2 \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t/2 - 3/4 - t^2/2 \\ -3t/2 - 3/4 + t^2/2 \end{bmatrix}$.

(b) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} - e^t \\ e^{2t} + 2e^t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= 3\,y_1 - e^{2\,t} - e^t \\ \frac{d}{dt} y_2 &= 2\,y_2 + e^{2\,t} + 2\,e^t \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= \frac{2\,e^{2\,t} + e^t}{2} \\ y_{2p}(t) &= t\,e^{2\,t} - 2\,e^t \end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\,e^{2\,t}+e^t}{2} \\ t\,e^{2\,t} - 2\,e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} - 3/2e^t + e^{2t} \\ -te^{2t} + e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\,e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{2t} - 3/2e^t + e^{2t} \\ -te^{2t} + e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$.

(c) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -2\,i - 1 & 0 \\ 0 & 2\,i - 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -i \\ \frac{1}{2} & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\cos t \\ 2\,\text{sen}\, t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t - 2\,i\,\text{sen}\, t \\ 2\,i\,\text{sen}\, t + 2\cos t \end{bmatrix}$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y_1 &= (-2\,i - 1)\;y_1 + 2\,e^{-i\,t} \\ \frac{d}{dt} y_2 &= (2\,i - 1)\;y_2 + 2\,e^{i\,t} \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação obtemos como solução particular

$$y_{1p}(t) = \frac{2\,e^{-i\,t}}{i+1}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$X_p(t) = 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}\{y_{1p}(t)\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix}\} = \begin{bmatrix} 2\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t \\ \cos t + \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix}$

Assim a solução geral real do sistema não homogêneo é

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t \\ \cos t + \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix} + c_1\,e^{-t}\left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathrm{sen}\,2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) +$
$c_2\,e^{-t}\left(\cos 2t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{sen}\,2t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2\,i-1 & -2\,i-1 \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 2-2\,i & 0 \\ 0 & 2\,i+2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{4} & -\frac{i}{4} \\ \frac{i}{4} + \frac{1}{2} & \frac{i}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\,\cos t \\ i\,\cos t \end{bmatrix}$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t}\,y_1 &= (2-2\,i)\;y_1 - i\,\frac{e^{i\,t}+e^{-i\,t}}{2} \\ \frac{d}{d\,t}\,y_2 &= (2\,i+2)\;y_2 + i\,\frac{e^{i\,t}+e^{-i\,t}}{2} \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação obtemos como solução particular

$$y_{1p}(t) = \frac{(2\,i+1)\,e^{it} + (2\,i+3)e^{-it}}{2-16\,i}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}\{y_{1p}(t)\begin{bmatrix} 1 \\ 2i-1 \end{bmatrix}\} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{65}\cos t + \frac{16}{65}\,\mathrm{sen}\, t \\ -\frac{44}{65}\cos t - \frac{12}{65}\,\mathrm{sen}\, t \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral real do sistema não homogêneo é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{28}{65}\cos t + \frac{16}{65}\,\mathrm{sen}\, t \\ -\frac{44}{65}\cos t - \frac{12}{65}\,\mathrm{sen}\, t \end{bmatrix} + c_1\, e^{2t}\left(\cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \mathrm{sen}\, 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) + c_2\, e^{2t}\left(\cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \mathrm{sen}\, 2t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

(e) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ t\,e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,e^t \\ -2\,t\,e^t \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = JY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t}\,y_1 &= y_1 + y_2 + t\,e^t \\ \frac{d}{d\,t}\,y_2 &= y_2 - 2\,t\,e^t \end{aligned}$$

Resolvendo a segunda equação e substituindo o resultado na primeira obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^t \\ y_{2p}(t) &= -t^2\,e^t \end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^t \\ -t^2\,e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2\,t^3}{3}\,e^t \\ \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^t \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\,e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\,e^t \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} -\frac{2\,t^3}{3}\,e^t \\ \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^t \end{bmatrix}.$

(f) As matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PJP^{-1}.$$

$$P^{-1}F(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6\,t\,e^{2\,t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6\,t\,e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável $Y(t) = P^{-1}X(t)$, a equação $X'(t) = AX(t) + F(t)$ se transforma em

$$Y'(t) = JY(t) + P^{-1}F(t),$$

que pode ser escrita na forma do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t} y_1 &= 2y_1 + y_2 \\ \frac{d}{d\,t} y_2 &= 2y_2 + 6\,t\,e^{2t} \end{aligned}$$

Resolvendo a segunda equação e substituindo o resultado na primeira obtemos como soluções particulares

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= t^3\,e^{2\,t} \\ y_{2p}(t) &= 3\,t^2\,e^{2\,t} \end{aligned}$$

Assim uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$X_p(t) = PY_p(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3\,e^{2\,t} \\ 3\,t^2\,e^{2\,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\,t^3 + 3\,t^2)\;e^{2\,t} \\ -2\,t^3\,e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Assim a solução geral do sistema não homogêneo é $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1\,e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\,e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} (2\,t^3 + 3\,t^2)\;e^{2\,t} \\ -2\,t^3\,e^{2\,t} \end{bmatrix}$.

4.2. (a) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} sX_1(s) - x_1(0) &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{2}{s} \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{4}{s^2} \end{aligned} \right.$$

substituindo-se $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 1$ obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} sX_1(s) &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{2}{s} \\ sX_2(s) - 1 &= X_1(s) + X_2(s) + \frac{4}{s^2} \end{aligned} \right.$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{3\,s^2-2\,s+2}{(s-2)\;s^3} \\ X_2(s) &= \frac{s^3-s^2+4\,s-2}{(s-2)\;s^3} \end{aligned}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= -\frac{5}{4\,s}+\frac{1}{2\,s^2}-\frac{1}{s^3}+\frac{5}{4\;(s-2)} \\ X_2(s) &= -\frac{1}{4\,s}-\frac{3}{2\,s^2}+\frac{1}{s^3}+\frac{5}{4\;(s-2)} \end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de $X_1(s)$ e $X_2(s)$ obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} \frac{5\,e^{2\,t}}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{5}{4} \\ \frac{5\,e^{2\,t}}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{3\,t}{2} - \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(b) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= X_1(s) - X_2(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) - X_2(s) + \dfrac{1}{s-2} \end{cases}$$

substituindo-se $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - 1 &= X_1(s) - X_2(s) + \dfrac{1}{s-1} \\ sX_2(s) &= X_1(s) - X_2(s) + \dfrac{1}{s-2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{s^3-6\,s^2+7\,s+1}{(s-3)\;(s-2)^2\;(s-1)} \\ X_2(s) &= \frac{3\,s^2-6\,s+1}{(s-3)\;(s-2)^2\;(s-1)} \end{aligned}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= -\frac{3}{2\;(s-1)}+\frac{5}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{5}{2\;(s-3)} \\ X_2(s) &= \frac{1}{s-1}-\frac{6}{s-2}-\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{5}{s-3} \end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de $X_1(s)$ e $X_2(s)$ obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} -\frac{5e^{3t}}{2} + t\,e^{2t} + 5\,e^{2t} - \frac{3\,e^{t}}{2} \\ 5\,e^{3t} - t\,e^{2t} - 6\,e^{2t} + e^{t} \end{bmatrix}$$

(c) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= -X_1(s) - 4X_2(s) + \dfrac{4\,s}{s^2+1} \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) - X_2(s) + \dfrac{2}{s^2+1} \end{cases}$$

substituindo-se $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 1$ obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - 1 &= -X_1(s) - 4X_2(s) + \dfrac{4\,s}{s^2+1} \\ sX_2(s) - 1 &= X_1(s) - X_2(s) + \dfrac{2}{s^2+1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{s^3 + s^2 + 5\,s - 11}{(s^2+1)\,(s^2+2\,s+5)} \\ X_2(s) &= \frac{s^3 + 2\,s^2 + 7\,s + 4}{(s^2+1)\,(s^2+2\,s+5)} \end{aligned}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{-s-1}{s^2+2\,s+5} + \frac{2\,s-2}{s^2+1} \\ X_2(s) &= \frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+2\,s+5} \end{aligned}$$

Achando a inversa da transformada de $X_1(s)$ e $X_2(s)$ obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} -e^{-t}\,\cos(2\,t) - 2\,\operatorname{sen} t + 2\,\cos t \\ -\frac{e^{-t}\,\operatorname{sen}(2\,t)}{2} + \operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

(d) Aplicando a transformada de Laplace às equações obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= X_1(s) - X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) &= 5X_1(s) + 3X_2(s) + \dfrac{4\,s}{s^2+1} \end{cases}$$

substituindo-se $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) &= X_1(s) - X_2(s) \\ sX_2(s) &= 5X_1(s) + 3X_2(s) + \dfrac{4s}{s^2+1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$X_1(s) = -\frac{4s}{(s^2+1)\,(s^2-4s+8)}$$

$$X_2(s) = \frac{4\,(s-1)\,s}{(s^2+1)\,(s^2-4s+8)}$$

Decompondo em frações parciais obtemos

$$X_1(s) = \frac{28\,s-128}{65\,(s^2-4s+8)} - \frac{28\,s-16}{65\,(s^2+1)}$$

$$X_2(s) = \frac{44\,s+96}{65\,(s^2-4s+8)} - \frac{44\,s+12}{65\,(s^2+1)}$$

Achando a inversa da transformada de $X_1(s)$ e $X_2(s)$ obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}\left(\frac{28\cos(2t)}{65} - \frac{36\,\mathrm{sen}(2t)}{65}\right) + \\ +\frac{16\,\mathrm{sen}\,t}{65} - \frac{28\cos t}{65} \\ e^{2t}\left(\frac{92\,\mathrm{sen}(2t)}{65} + +\frac{44\cos(2t)}{65}\right) + \\ -\frac{12\,\mathrm{sen}\,t}{65} - \frac{44\cos t}{65} \end{bmatrix}$$

(e) Aplicando a transformada de Laplace às equações e substituindo-se $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} sX_1(s) &= 3X_1(s) - 4X_2(s) \\ sX_2(s) &= X_1(s) - X_2(s) + \dfrac{1}{(s-1)^2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$X_1(s) = -\frac{4}{(s-1)^4}$$

$$X_2(s) = \frac{s-3}{(s-1)^4} = \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{(s-1)^4}$$

Achando a inversa da transformada de $X_1(s)$ e $X_2(s)$ obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2\,t^3\,e^t}{3} \\ \frac{t^2\,e^t}{2} - \frac{t^3\,e^t}{3} \end{bmatrix}$$

(f) Aplicando a transformada de Laplace às equações e substituindo-se $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} sX_1(s) & = & 4X_1(s) + 2X_2(s) + \dfrac{6}{(s-2)^2} \\ sX_2(s) & = & -2X_1(s) \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema linear obtemos

$$\begin{array}{rcl} X_1(s) & = & \dfrac{6\,s}{(s-2)^4} = \dfrac{6}{(s-2)^3} + \dfrac{12}{(s-2)^4} \\ X_2(s) & = & -\dfrac{12}{(s-2)^4} \end{array}$$

Achando a inversa da transformada de $X_1(s)$ e $X_2(s)$ obtemos

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2\,t^3\,e^{2\,t} + 3\,t^2\,e^{2\,t} \\ -2\,t^3\,e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Bibliografia

[1] William E. Boyce e Richard C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 7a. edition, 2002.

[2] F. Brauer e J. A. Nohel. *Ordinary Differential Equations: A First Course*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[3] Ricardo Motta Pinto Coelho. *Fundamentos em Ecologia*. Editora Artes Médicas, Porto Alegre, 2000.

[4] Djairo G. de Figueiredo e Aloisio F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. SBM, Rio de Janeiro, 2a. edition, 2005.

[5] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[6] E. C. de Oliveira e M. Tygel. *Métodos Matemáticos para Engenharia*. SBM, Rio de Janeiro, 2005.

[7] Morris W. Hirsch e Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York, 1974.

[8] Erwin Kreiszig. *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edition, 1985.

[9] Reginaldo J. Santos. *Álgebra Linear e Aplicações*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2006.

[10] Reginaldo J. Santos. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2007.

[11] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[12] Dennis G. Zill. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. Thomson, São Paulo, 2003.

[13] Dennis G. Zill e Michael R. Cullen. *Equações Diferenciais*. Makron Books, São Paulo, 3a. edition, 2001.

Índice Alfabético