
5^{ta} Lista de exercícios de cálculo II

Curitiba, 28 de Maio de 2014

INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR:

1. Calcule $\int_C f \, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$, onde $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (função escalar) e C uma curva, definida pela função $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.
 - (a) $f(x, y) = 2xy^2$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
 - (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ e C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $A(2, 0)$ a $B(0, 2)$.
 - (c) $f(x, y) = x + y$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.
 - (d) $f(x, y, z) = e^z$ e C é parametrizada por $r(t) = (1, 2, t^2)$, no intervalo $[0, 1]$.
 - (e) $f(x, y, z) = x + y$ e C é a curva obtida pela interseção de $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$ e $x = y$, $y \geq 0$.
 - (f) $f(x, y) = y$ e C é parametrizada por $r(t) = (t^2, t)$, no intervalo $[0, 2]$.
 - (g) $f(x, y) = xy^4$ e C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$.
 - (h) $f(x, y) = xy + \ln(x)$ e C é o arco da parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ a $(3, 9)$.
 - (i) $f(x, y, z) = xe^{yz}$ e C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$.
 - (j) $f(x, y) = xy$ e C é a curva dada pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $y + z = 8$.

APLICAÇÕES DE INTEGRAL DE LINHA DE FUNÇÃO ESCALAR:

2. Calcule a massa de um arame na forma de um semi-círculo de raio a , sabendo que a densidade de massa linear em qualquer um de seus pontos é proporcional à distância desse ponto até à reta que passa pelas extremidades do arame.
3. Calcule a massa total de um arame no formato de uma parábola $y = x^2$ ao longo de $1 \leq x \leq 4$. Considere a densidade de massa dada por $f(x, y) = \frac{y}{x}$ em unidades de grama por centímetro.
4. Calcule a massa de um fio com forma de um hélice com equações paramétricas $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$ e $z = 4t$ com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, sendo a função densidade $f(x, y) = \frac{kx}{1+y^2}$, ($k > 0$).
5. A base de uma cerca é uma curva C no plano xy definida por $x(t) = 30 \cos^3 t$, $y(t) = 30 \sin^3 t$ com $0 \leq t \leq 2\pi$, e a altura em cada ponto $(x, y) \in C$ é dada por $f(x, y) = 1 + \frac{|y|}{3}$ com (x e y em metros). Se para pintar cada m^2 um pintor cobra p reais, quanto cobrará para pintar a cerca?

6. Um arame tem a forma de uma curva obtida como a interseção da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, com o plano $x + z = 2$. sabendo-se que a densidade em cada ponto do arame é dada por $f(x, y, z) = xy$, calcule a massa total do arame.
7. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2$, $z \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa M reais, calcule o preço total da peça.

REPRESENTAÇÃO PARAMETRICA DE UMA SUPERFÍCIE: $\mathcal{S}$

$$\varphi : D \longmapsto \mathcal{S} \text{ onde } \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathcal{S}, \forall (u, v) \in D$$

8. Encontre uma parametrização da superfície:

- (a) Parabolóide: $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$
- (b) Tronco de cone: a porção do cone $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 2$ e $z = 4$.
- (c) Calota esférica: A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante entre o plano xy e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (d) Calota esférica: A porção superior cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ pelo plano $z = -2$.
- (e) Cilindro parabólico entre planos: A superfície cortada do cilindro parabólico $y = x^2$ pelos planos $z = 0$, $z = 3$ e $y = 2$.
- (f) Faixa cilíndrica circular: A porção do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ acima do plano xy entre os planos $y = -2$ e $y = 2$.
- (g) Plano inclinado dentro de um cilindro: A porção do plano $x - y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 3$

ÁREA DE SUPERFÍCIES:

$$A(\mathcal{S}) = \int \int_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv$$

9. Calcule a área das seguintes superfícies:

- (a) A porção do plano $y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
- (b) A porção do plano $z = -x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
- (c) A superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ limitada pelo plano $z = 0$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (d) A superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$ situada entre os planos $z = 0$ e $x + 2z = 3$.

- (e) A porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ entre os planos $z = -1$ e $z = \sqrt{3}$.
- (f) A porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.
- (g) A calota cortada do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (h) A superfície do parabolóide $z = 5 - \frac{x^2}{2} - y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE FUNÇÃO ESCALAR:

$$\int_S \int g \, ds = \int_S \int g(x, y, z) \, ds = \int_D \int g(\varphi(u, v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du \, dv$$

10. Integre a função dada sobre a superfície

- (a) $g(x, y, z) = x^2 + y^2$, sobre a esfera $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- (b) $g(x, y, z) = xyz$, sobre a porção do plano $\mathcal{S} : x + y + z = 1$, no primeiro octante.
- (c) $g(x, y, z) = y^2 + z^2$, sobre a superfície do sólido limitado pela parte superior da esfera $: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (d) $g(x, y, z) = x^2 \sqrt{5 - 4z}$, sobre a cúpula parabólica $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.
- (e) $g(x, y, z) = \frac{xy}{z}$, sobre a superfície $\mathcal{S} : z = x^2 + y^2$, $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.