Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

Lista de exercicios de cálculo II

Curitiba, 28 de Maio de 2014

INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL:

1. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F\cdot\, dr = \int_a^b F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\, dt$, onde $F:\mathcal{C}\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ (função vetorial) e $\mathcal{C}$ uma curva, definida pela função $\sigma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$.
   (a) $F(x,y)=(y+3x,2y-x)$ e $\mathcal{C}$ é a elipse $4x^2+y^2=4$, percorrida no sentido antihorário.
   (b) $F(x,y)=(xy,-y)$ e $\mathcal{C}$ é formado pela reta que ligando $A(-3,-3)$ a $B(-1,1)$ e pelo arco da parábola $y=x^2$ de $B(-1,1)$ a $C(2,4)$.
   (c) $F(x,y)=(x^2+y^2,x^2-y^2)$ e $\mathcal{C}$ é o círculo centrado na origem, percorrida no sentido anti-horário.
   (d) $F(x,y,z)=(x,y,xz-y)$ e $\mathcal{C}$ é o segmento de reta ligando $(0,0,0)$ e $(1,2,4)$.
   (e) $F(x,y,z)=(x^2-y^2,z^2-x^2,y^2-z^2)$ e C é a curva obtida pela interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e o plano $y=1$, percorrida no sentido anti-horário

2. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} y\, dx + x^2\, dy$, onde $\mathcal{C}$ é a curva parametrizada por:
   (a) $\gamma(t)=(\cos t,\text{sen } t),\ t\in[0,2\pi]$.
   (b) O quadrado de vertices $(\pm1,\pm1)$.
   (c) O quadrado de vertices $(0,0),(1,0),(1,1)$ e $(0,1)$.

3. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força dado:
   (a) $F(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ ao mover uma particula ao longo da fronteira da região limitada por $[0,a]\times[0,a],\ (a>0)$.
   (b) $F(x,y,z)=(y,x,z^2)$ para deslocar uma particula ao longo da helice: $\gamma(t)=(2\cos t,2\text{sen } t,2t)$ do ponto $(2,0,0)$ ao ponto $(2,0,4\pi)$.
   (c) $F(x,y,z)=(y,z,x)$ para deslocar uma particula ao longo de $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$ do ponto $(0,0,0)$ ao ponto $(2,4,8)$.

4. Verifique que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F\cdot dr$ é independente do caminho, achando seu potencial, em caso afirmativo

(a) $F(x,y) = (e^x \text{sen } y, e^x \cos y)$

(b) $F(x,y) = (3x^2y, x^3 + 4y^3)$

(c) $F(x,y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2y - 3xy^2 + 2)$

(d) $F(x,y) = (2x\text{sen } y + 4e^x, \cos y)$

(e) $F(x,y) = (3x^2 + 2y - y^2e^x, 2x - 2ye^x)$

(f) $F(x,y) = (-2y^3\text{sen } x, 6y^2\cos x + 5)$

(g) $F(x,y,z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$

(h) $F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$

(i) $F(x,y,z) = (y\text{sen } z, x\text{sen } z, xy\cos z)$

(j) $F(x,y,z) = (2xz + y2, 2xy + 3y^2, e^z + x^2))$

Teorema de Green:

$$\oint_{\partial D} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \int\int_D \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dx\,dy$$

5. Calcule $\oint_{\mathcal{C}} 4ydx + 7xdy$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(2,2)$, no sentido anti-horário:
   (a) diretamante.
   (b) utilizando o teorema de Green.

6. Calcule as seguintes integrais utilizando o teorema de Green, ao longo das curvas $\mathcal{C}$, orientadas positivamente.:
   (a) $\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^y}{x}dx + (e^y \ln x + 2x)dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.
   (b) $\oint_{\mathcal{C}} (\cos x - 5y)dx + (4x - \frac{1}{y})dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $y + x^2 - 9 = 0$ e $y - 5 = 0$.
   (c) $\oint_{\mathcal{C}} (x-y)dx - x^2dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região $[0,2] \times [0,2]$.
   (d) $\oint_{\mathcal{C}} (e^x - 3y)dx + (e^y + 6x)dy$, onde $\mathcal{C}$ é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.
   (e) $\oint_{\mathcal{C}} (x+y)dx + (y-x)dy$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

7. Utilizando os corolários do teorema de Green, calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas:

   (a) $y = x^2$ e $y^2 = x$

   (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

   (c) $y = 4x^2$ e $y = 16x$

   (d) $y^2 = x^3$ e $y = x$

8. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região nas hipóteses do teorema de Green. Utilizando o teorema, verifique que as coordenadas do centroide de D são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_{\partial D} x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_{\partial D} y^2\,dx$$

onde $A = \text{área}(D)$

(a) Ache o centróide do triângulo de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$.

(b) Ache o centróide da região definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ tal que $y \geq 0$

9. Verifique que $\oint_{\mathcal{C}} y^2\, dx + (2xy - 3)\, dy = 0$, sendo $\mathcal{C}$ a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Calcule a integral ao longo do arco dessa elipse, situado no primeiro quadrante

10. Encontre todos os possíveis valores de

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{y-x}{x^2+y^2}\right) dy$$

onde $\mathcal{C}$ é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

11. Calcule

$$\oint_{\mathcal{C}} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva definida por $y^2 = 2(x+2)$, $-2 \leq x \leq 2$, orientada no sentido decrescente em relação à variavel y.

12. Sejam F_1 e F_2 funções com derivadas parciais continuas no plano xy tais que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, exceto nos pontos $(4,0)$, $(0,0)$ e $(-4,0)$. Indique por $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$ as circunferências de equações:

$$(x-2)^2 + y^2 = 9, \quad (x+2)^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 25 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

respectivamente, orientadas no sentido anti-horário. Sabendo que:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} F_1\, dx + F_2\, dy = 11, \qquad \oint_{\mathcal{C}_2} F_1\, dx + F_2\, dy = 9 \quad \text{e} \quad \oint_{\mathcal{C}_3} F_1\, dx + F_2\, dy = 13$$

calcule $\oint_{\mathcal{C}_4} F_1\, dx + F_2\, dy$.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE CAMPO VETORIAL:

$$\iint_{S} G \cdot ds = \iint_{S} (G \cdot n) ds = \iint_{D} G(\varphi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) du\, dv$$

13. Calcule o fluxo do campo vetorial $G(x,y,z)$ através da superfície $\mathcal{S}$ no sentido dado:

(a) $G(x,y,z) = (z^2, x, -3z)$ para fora (normal para fora do eixo x) através da superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$

(b) $G(x,y,z) = (3z, -4, y)$ onde a normal unitaria apontando para cima da superfície $x + y + z = 1$ no primeiro octante.

(c) $G(x,y,z) = (x,y,z)$ onde a normal unitaria apontando para cima da superfície $z = 9 - x^2 - y^2, \quad 0 \leq z.$

(d) $G(x,y,z) = (z^2 - x, -xy, 3z)$ e $\mathcal{S}$ é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano xy, com vetor normal exterior.

(e) $G(x,y,z) = (-3xyz^2, x + 2yz - 2xz^4, yz^3 - z^2)$ e $\mathcal{S}$ é a união da superfície $x^2 + y^2 = 1, \;\; 0 \leq z \leq 1$ com $z = 0, \;\; x^2 + y^2 \leq 1$ indicando a orientação escolhida para $\mathcal{S}$.

Teorema de Stokes:

$$\int_{\partial \mathcal{S}} G \cdot dr = \int\int_{\mathrm{S}} rot(G) \cdot ds$$

14. calcule:

(a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $z + y = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

(b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} ydx + zdy + xdz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $x + y = 2$ com esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$.

(c) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} 2xydx + [(1-y)z + x^2 + x]dy + (\frac{x^2}{2} + e^z)dz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, com o cone $z^2 = x^2 + (y-1)^2$.

(d)Considere a superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \;\; z = \sqrt{x^2+y^2}; \;\; 1 \leq z \leq 3\}$.

Calcule:

$$\int\int_{\mathrm{S}} rot(G) \cdot ds$$

onde $G(x,y,z) = (yz, -xz, z^3)$.

Teorema de Gauss (Teorema da divergencia):

$$\int\int_{\partial \mathrm{W}} G \cdot ds = \int\int\int_{\mathrm{W}} div(G)\, dx\, dy\, dz$$

15. Seja W o sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4, \;\; z = 0$ e $z = 3$. Calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (y^2, x, zx)$ atraves da superficie $S = \partial W$, com campo de vetores normais exterior a S, se:

16. Calcule o fluxo do campo de vetores:

$$G(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$$

através da superfície do sólido $W: \quad 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, com campo de vetores normais exterior a superfície.

17. Calcule o fluxo do campo de vetores $G(x, y, z) = (2x, -1, z)$ através da superfície do tetraedro determinado pelo plano $2x + y + 3z = 6$ e pelos planos coordenados.

18. Encontre o fluxo do campo $G(x, y, z) = (e^y + \cos(yz), -2zy + \text{sen }(xz), z^2)$ através da superfície S, orientada positivamente, união das superfícies S_1 e S_2, onde S_1 é definida por $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$ e S_2 tem equação $z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.