Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

1^{ra} **Lista de exercicios de Álgebra Linear**

1. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]$ em cada caso:

   (a) A é do tipo $2x3$ e $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, \text{ se } i = j \\ \\ i - 2j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

   (b) A é quadrada de ordem 4 e $a_{ij} = \begin{cases} 2i, \text{ se } i < j \\ \\ i - j, \text{ se } i = j \\ \\ 2j, \text{ se } i > j \end{cases}$

   (c) A é quadrada de ordem 3 e $a_{ij} = 3i - j + 2$

2. Determine x e y tais que

   (a) $\begin{bmatrix} 2x + y \\ \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ \\ 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x^2 & y \\ \\ x & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Obtenha a transposta da matriz $A \in M_{2x4}(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + j, \text{ se } i = j \\ \\ i^2 - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

4. Determine a e b para que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2a - b \\ a + b & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ seja simétrica

5. Mostre que a soma de duas matrizes simétrica é uma matriz simétrica.

6. Determine a, b, c, x, y, z para que a matriz $\begin{bmatrix} 2x & a + b & a - 2b \\ -6 & y^2 & 2c \\ 5 & 8 & z - 1 \end{bmatrix}$ seja anti-simétrica

7. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, determine $A + B$

8. Determine a, b e c para que $\begin{bmatrix} a & 3 & 2a \\ c & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

9. Calcule AB, em cada caso abaixo:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

10. Uma matriz quadrada A é chamada simétrica se $A^t = A$; anti-simétrica se $A^t = -A$.

   (a) Mostre que se A e B são simétricas então $A + B$ e λA também o são.

   (b) Mostre que se A e B são anti-simétricas então$A + B$ e λA também o são.

   (c) O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica? Justifique sua resposta.

11. Seja A uma matriz quadrada.

   (a) Mostre que a matriz $S = A + A^t$ é uma matriz simétrica.

   (b) Mostre que a matriz $R = A - A^t$ é uma matriz anti-simétrica.

   (c) Mostre que toda matriz pode ser decomposta na soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.

   (d) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ Encontre duas matrizes B e C tais que B é uma matriz simétrica e C é uma matriz anti-simétrica e $A = B + C$.

12. Para cada uma das afirmativas abaixo decida se é verdadeira ou falsa. Justique a sua escolha

   (a)$(-A)^t = -(A)^t$

   (b) $(A + B)^t = B^t + A^t$

   (c) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.

   (d) $(k_1 A)(k_2 B) = (k_1 k_2)AB$

   (e) $(-A)(-B) = -(AB)$

   (f) Se A e B são simétricas, então $AB = BA$.

   (g) Se $AB = 0$, então $BA = 0$.

   (h) Se podemos efetuar o produto AA, entao A é uma matriz quadrada.

   (i) Se $A^2 = 0$, então $A = 0$.

   (j) Se $2A = 0$, então $A = 0$.

   (k) $det(A + B) = det(A) + det(B)$

   (l) Se $A^2 = 0$, então A é uma matriz não inversível.

   (m) Se A e B são matrizes inversíveis, então $A + B$ é uma matriz inversível.

   (n) Se $AC = BC$, então $A = B$.

   (0) Se $AC = BC$ e C é inversível, então $A = B$.

13. Reduza as matrizes abaixos á forma reduzida escalonada e determine o posto e a nulidade das mesmas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

14. Use as operações elementares sobre linhas para descubrir se A é inversível. Determine, se possivel, A^{-1} nos casos abaixo;

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

15. dadas as matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, calcular o determinante da matriz C onde $C = AB$.

16. Calcule cada um dos determinate a seguir , utilizando a regra de sarrus.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

17. Encontre a solução das equações:

(a) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{Vmatrix} = 12$ (b) $\begin{Vmatrix} x & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ x & -2 & 3 \end{Vmatrix} = 55$

18. Calcule os determinantes:

(a) $\begin{Vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$ (b) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$ (c) $\begin{Vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$

(d) $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{Vmatrix}$ (e) $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 10 & 8 & 1 \\ 5 & 16 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$

19. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, calcule

)(a) $\det(A)$ (b) $\det(2A)$ (c) $\det(A^2)$

20. O sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ kx + 2y = 2 \end{cases}$ é determinado para que valores de k?

21. Resolva

    (a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 1 \\ 4z = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -y - 2z = 9 \end{cases}$

22. Classifique o sistema $\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$

23. O sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

    (a) tem uma única solução

    (b) não tem soluções reais

    (c) tem 3 soluções distintas

    (d) tem infinitas soluções reais.

24. Considere o seguinte sistema de equações nas incógnitas x e y $\begin{cases} 3kx + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Esse sistema tem uma e uma só solução se o número real k for diferente de ?

25. Resolva os sistemas lineares

    (a) $\begin{cases} x + 5y + 2z = 10 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 3x + 6y + 5z = 19 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = 10 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x - y - z - t = -1 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases}$

26. Num retângulo, o triplo do comprimento é igual ao quádruplo da largura. O retângulo tem $56cm$ de perimetro. Calcule o comprimento e a largura.

27. Um orfanato recebeu uma certa quantidade x de brinquedos para ser distribuida entre as crianças. Se cada criança receber três brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuidos; mas, para cada criança possa receber cinco brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. Determine o número de crianças do orfanato e a quantidade x de brinquedos que o orfanato recebeu.

28. Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R\$ 5,40 por duas latas de cerveja e uma porção de batatas fritas. Osegundo pagou R\$ 9,60 por três latas de cerveja e 2 porções de batatas fritas. Nesse local e nesse dia, determine a diferença entre o preço de uma porção de batatas fritas e o preço de uma lata de cerveja.