

1^a Lista de exercicios de cálculo II

1. Esboce a curva usando as equações paramétricas para plotar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta. Em seguida, elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

$$\begin{array}{ll}
 (a) \gamma(t) = (3t - 5, 2t + 1) & (b) \gamma(t) = (4 \cos t, 2 \sin t) \\
 (c) \gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t) & (d) \gamma(t) = (\cos^2 t, \sin t) \\
 (e) \gamma(t) = (t^2 - 2, 5 - 2t) & (f) \gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \\
 (g) \gamma(t) = (\sin t, \cos 2t) & (h) \gamma(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, t) \\
 (i) \gamma(t) = \left(\frac{1-t}{1+t}, \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\right)
 \end{array}$$

2. Encontre o vetor tangente em cada ponto da curva. Ache os pontos da curva abaixo nos quais a tangente é horizontal ou vertical.

$$\begin{array}{ll}
 (a) \gamma(t) = (t^3 - 3t, 3t^2 - 9) & (b) \gamma(t) = (4 + t^2, t^2 + t^3) \\
 (c) \gamma(t) = (2 \cos t, \sin 2t) & (d) \gamma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)
 \end{array}$$

3. Encontre uma equação (paramétrica) da reta tangente à curva no ponto correspondente ao parâmetro indicado.

$$\begin{array}{l}
 (a) r(t) = (2t^2 + 1, \frac{1}{3}t^3 - t, t), \quad t = 1 \text{ (curva no espaço).} \\
 (b) x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad t = 0 \text{ (curva plana)}
 \end{array}$$

4. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t, t^4 - t + 3)$ onde a reta tangente passam pela origem.

5. Encontre o comprimento da curva

$$\begin{array}{l}
 (a) \sigma_1(t) = (2t^2 - 1, 4t^2 + 3), \quad t \in [-4, 4]. \\
 (b) \sigma_2(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t) \quad t \in [0, \pi]. \\
 (c) \sigma_3(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t) \quad t \in [0, \pi]. \\
 (d) \sigma_4(t) = (\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1 - t^2) \text{ de } (0, 0, 1) \text{ a } (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0). \\
 (e) \sigma_5(t) = (t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t) \quad t \in [-10, 10]. \\
 (f) \sigma_6(t) = (t, t^2, \frac{2t^3}{3}) \quad t \in [0, 1]. \\
 (g) \sigma_7(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].
 \end{array}$$

6. Em que instantes no intervalo $0 \leq t \leq \pi$ os vetores velocidade e aceleração do movimento $r(t) = \mathbf{i} + 5 \cos t \mathbf{j} + 3 \sin t \mathbf{k}$ são ortogonais. ?

7. Reparametrize a curva em relação ao comprimento do arco do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t .
- (a) $r(t) = (2t, 1 - 3t, 5 + 4t)$
 (b) $r(t) = (3\sin t, 4t, 3\cos t)$
8. Determine os vetores tangente e normal $T(t)$ e $N(t)$. Depois, encontre a curvatura.
- (a) $r(t) = (2\sin t, 5t, 2\cos t)$
 (b) $r(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$
9. Determine o ponto da curva onde a curvatura é máxima e encontre o limite de $k(x)$ quando $x \rightarrow \infty$.
- (a) $y = (x - 1)^2 + 3$, (b) $y = x^3$;
 (c) $y = x^{2/3}$, (d) $y = \ln x$.
10. Para a elipse dada por $x^2 + 4y^2 = 4$ mostre que a curvatura é máxima nos vértices pertencentes ao eixo maior e mínima nos vértices pertencente ao eixo menor.
11. Determine a curvatura das curvas abaixo nos pontos indicados:
- a) $y = x^3$ em um ponto arbitrário.
 b) $xy = 12$ no ponto $P(3, 4)$.
 c) $x^2 + 4y^2 = 4$ nos pontos $P(0, 1)$ e $Q(2, 0)$.
12. Determine o(s) ponto(s) da curva $r(t) = (2t - 3, t^2 - 1)$ onde o raio de curvatura é mínimo.
13. Determine o(s) ponto(s) da curva $\sigma(t) = (2e^t, 2e^{-t})$ onde a curvatura é máxima.
14. Determine os valores de a, b e c de modo que a parábola $y = ax^2 + bx + c$ tenha, no ponto $P(\frac{\pi}{2}, 1)$, tangente e curvatura comuns com a senoide $y = \sin x$.
15. Encontre a curvatura e o raio de curvatura no ponto P dado. Trace um esboço da curva e o círculo de curvatura.
- a) $x^2 + y^2 = 1$ em um ponto arbitrário.
 b) $xy = 2$ no ponto $P(2, 1)$.
16. Encontre os vetores $T(t)$, $N(t)$ e $B(t)$ no ponto indicado.
- $$r(t) = (t^2, \frac{2t^3}{3}, t), \quad P_o(1, 2/3, 1)$$
17. Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.
- $$r(t) = (2\sin 3t, t, 2\cos 3t), \quad P_o(0, \pi, -2)$$

18. A posição de uma partícula é dada por:

$$r(t) = (\sin t)i + (\cos 2t)j$$

- a) Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - b) Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - c) Para quais valores de t , no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, $\frac{dr}{dt}$ é igual a 0.
19. No instante $t = 0$, uma partícula está localizada no ponto $A(1, 2, 3)$. Ela percorre uma linha reta até o ponto $B(4, 1, 4)$, tem módulo de velocidade 2 em $C(1, 2, 3)$ e aceleração constante $3i - j + k$. Encontre uma equação para o vetor posição $r(t)$ da partícula no instante t .
20. Encontre o comprimento da curva

$$r(t) = (\sqrt{2}t)i + (\sqrt{2}t)j + (1 - t^2)k$$

de $(0, 0, 1)$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$.

21. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -ti - tj - tk \\ r(0) = 1i + 2j + 3k \end{cases}$$

22. Determine as representações explícitas em coordenadas polares das seguintes curvas:
- a.- O círculo de raio r centrado no ponto $P(r, 0)$.
 - b.- O círculo de raio r com centro no ponto $P(0, r)$.
 - c.- A parábola $x = y^2$.

23. A aceleração de uma partícula é dada por $\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = -(i + j + k)$ Utilizando as condições de contorno $\frac{dr(0)}{dt} = 0$ e $r(0) = 10i + 10j + 10k$ determine:

- a) O vetor velocidade da partícula;
 - b) O vetor posição da partícula.
24. A posição de uma partícula é dada por: $r(t) = (4 \cos t) \mathbf{i} + (\sqrt{2} \sin t) \mathbf{j}$
- a.- Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - b.- Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - c.- Encontre o ângulo entre os vetores velocidade e aceleração no ponto $P(2\sqrt{2}, 1)$
 - d.- Determine a reta tangente e reta normal no ponto da curva de instante $t = \frac{\pi}{4}$.
25. Em que instantes no intervalo $0 \leq t \leq \pi$ os vetores velocidade e aceleração do movimento $r(t) = \mathbf{i} + 5 \cos t \mathbf{j} + 3 \sin t \mathbf{k}$ são ortogonais. ?

26. encontre o ponto na curva $r(t) = 12\sin t \mathbf{i} - 12\cos t \mathbf{j} + 5t \mathbf{k}$ a uma distância de 13π unidades ao longo da curva a partir do ponto $(0, -12, 0)$, quando $t = 0$, no sentido oposto ao sentido do comprimento de arco crescente.
27. Uma partícula percorrendo uma linha reta está localizada no ponto $A(1, -1, 2)$ e tem módulo de velocidade 2 no instante $t = 0$. A partícula se move em direção ao ponto $B(3, 0, 3)$ com aceleração constante $2 \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Encontre seu vetor posição $r(t)$ no instante t .
28. Dois pássaros voam segundo os seguintes vetores posição:

$$\sigma_1(t) = (2t^2, 2 + t^2, 2) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (1 - t, 1 + t^2, 2)$$

- Mostre que eles nunca se chocarão;
 - Esboce os caminhos sobre os quais os pássaros se movem. Determine caso, existam os pontos onde estes caminhos se cruzam.
 - Calcule as velocidades dos pássaros no instante $t = 2$.
 - Calcule a distância percorrida em tempo positivo pelo primeiro pássaro entre os pontos $A(0, 2, 2)$ e $B(2, 3, 2)$.
29. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (1 - t^2, 2t, \cos t)$ onde a reta tangente é perpendicular ao plano $\pi x + y - z + 12 = 0$.
30. Uma partícula desloca-se no plano obedecendo a lei:

$$\sigma : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(t) = (t^2 - t, t).$$

- Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - Encontre os vetores velocidade e aceleração no instante t .
 - Encontre o ângulo entre os vetores velocidade e aceleração no ponto $P(0, 1)$
 - Determine a reta tangente e reta normal no ponto da curva de instante $t = 0$.
31. Encontre uma equação para o círculo de curvatura da curva $r(t) = t \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j}$ no ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$
32. Dois carros R_1 e R_2 percorrem, respectivamente, as estradas $BR - 01$ e $BR - 02$, tendo seus movimentos descritos por :

$$\sigma_1(t) = (t + 2, 2t + 1) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (t^2, 2t^4 - \frac{9}{2}), \quad t \geq 0.$$

Quais afirmações abaixo são verdadeiras:

- As duas estradas não se cruzam;
- As duas estradas se cruzam num ponto só;
- as duas estradas se cruzam em dois pontos;
- Os carros baterão;
- Os carros não baterão.

33. O comprimento do caminho percorrido por uma partícula que se move ao longo da curva dada pela equação $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ entre os pontos do plano $(1, 0)$ e $(0, e^{\pi/2})$ é:
34. calcule o comprimento de :
- $$\gamma_1(t) = (1 - \cos t, t - \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$
35. Considere a curva $\sigma_1(t) = (2 \cos t, \sin t)$; $\forall t \in \mathbb{R}$. Determine os pontos do traço de σ_1 onde a curvatura é máxima e os pontos onde é mínima.
36. Esboce as curvas dadas pelas equações paramétricas abaixo
- a) $x = \sin t, \quad y = \cos 2t, \quad t \in [0, 2\pi]$.
- b) $x = \cos t, \quad y = -3 + (\sin t)^2, \quad t \in [0, \pi]$.
37. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t^4 - 2t^3 - 2t^2, t^3 - 3t)$ onde a reta tangente é horizontal e vertical.
38. Calcule o comprimento de: $\gamma_1(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$, $t \in [0, \pi]$;
39. Determine a curvatura, o raio de curvatura e a equação do círculo de curvatura da parábola $y = x^2 - 2x + 2$ no ponto $(1, 1)$.
40. Esboce as curvas dadas pelas equações paramétricas abaixo
- a) $x = \cos^2 t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$.
- b) $x = t^2 - 4, \quad y = 1 - t, \quad t \in [-1, 1]$.
41. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$ onde a reta tangente é horizontal e vertical.
42. Calcule o comprimento de: $\gamma_1(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}$, $t \in [0, \pi/2]$.
43. Determine a curvatura, o raio de curvatura e a equação do círculo de curvatura da parábola $y = x^2 - 6x + 11$ no ponto $(2, 3)$.
44. Uma haste, presa na origem do plano xy , ocupa a posição da reta $y = tx$. A haste intercepta a reta $x = 2$ no ponto A e o círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ no ponto B . Quando t varia, o ponto P , que está localizado sobre a haste de modo que $|OP| = |AB|$, descreve uma curva. Escreva as equações paramétricas desta curva, em função do parâmetro t .

45. Seja $r(t) = (\frac{e^{4t}}{4} - t, e^{2t})$ vetor posição de uma partícula no instante t .
- Encontre o instante, ou instantes em que os vetores velocidades e aceleração são ortogonais
 - Determine a reta tangente e reta normal no ponto $(\frac{1}{4}, 1)$ da curva.
 - Determine o comprimento da trajetória da partícula para $-2 \leq t \leq 2$.
 - Determine a curvatura no ponto $(\frac{1}{4}, 1)$
46. Encontre o ponto da parábola $y = x^2 + 2x$ onde o raio de curvatura seja mínimo. (justifique sua resposta) -
47. A posição de uma partícula é dada por: $r(t) = (\cos^2 t, \sin t)$
- Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - Para quais valores de $t \in [0, 2\pi]$ a velocidade é nula.
48. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$ onde a reta tangente é paralela ao plano $x + 3y + 2z - 10 = 0$.
49. Calcule o comprimento de: $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t)\mathbf{i} + (e^{-t} \sin t)\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.
50. Determine o(s) ponto(s) da curva $y = x^3 - 27x - 5$ onde o raio de curvatura é mínimo.
51. A posição de uma partícula em movimento é dada por: $r(t) = (\frac{1-t}{1+t}, \frac{2\sqrt{t}}{1+t})$ $t \geq 0$
- Esboce o gráfico da trajetória da partícula.
 - Em que sentido a partícula se move quando t aumenta?
 - Encontre os vetores velocidade e aceleração.
 - Para quais valores de t a velocidade e aceleração são ortogonais.
52. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t, t^4 - t + 3)$ onde a reta tangente passam pela origem.
53. Calcule o comprimento de: $\gamma(t) = (t, t^2, \frac{2t^3}{3})$ $t \in [0, 1]$.

54. Determine o(s) ponto(s) da curva $r(t) = (2t - 3, t^2 - 1)$ onde o raio de curvatura é mínimo.
55. Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva. Esboce a curva e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = 5 - 2t \end{cases} \quad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

56. Calcule o comprimento da curva $\mathcal{C} : x(t) = e^t - t, \quad y(t) = 4e^{t/2}$, quando o parâmetro varia no intervalo $[-1, 1]$

57. Determine a equação paramétrica da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} : x(t) = e^{-t} \cos t, \quad y(t) = e^{-t} \sin t, \quad z(t) = e^{-t},$$

no ponto $(1, 0, 1)$.

58. Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical.

$$(a) \quad x(t) = 10 - t^2, \quad y(t) = t^3 - 12t \qquad (b) \quad x(t) = \cos 2t, \quad y(t) = \sin t$$

59. Determine o(s) ponto(s) da curva $r(t) = (e^t, e^{-t})$ onde a curvatura é máximo.

60. Considere duas partículas em movimento segundo os seguintes vetores posição

$$\sigma_1(t) = (t - 1, t^2 + 1) \quad \text{e} \quad \sigma_2(t) = (2t - 6, t)$$

sendo que t representa o tempo.

- (a) Os caminhos destas partículas se encontram? Se sim, determine o ponto de encontro.
- (b) As partículas se chocam? Se sim, determine o instante do choque.
61. Encontre o comprimento da curva $r(t) = (t^2, \sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t)$ com t percorrendo $[-10, 10]$.

62. Dado a curva $\mathcal{C}$ definida por $\sigma(t) = (\sin t, \cos 2t)$ com $t \in [0, \pi]$.

(a) Esboce o traço da curva $\mathcal{C}$.

(b) Determine a equação (paramétrica ou cartesiana) da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c)(2-ptos) Determine a área do triângulo formado por esta reta tangente (reta tangente do item (b)) com os eixos coordenados.

(d)(2-ptos) Em que ponto da curva $\mathcal{C}$ a reta normal é perpendicular à reta de equação:

$$x + y = 2$$

(e)(2-ptos) Encontre uma equação para o círculo de curvatura da curva $\mathcal{C}$ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

63. Esboce o gráfico da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (3t, 1 - 9t^2)$ com $t \in \mathbb{R}$.

64. Se a curva $\mathcal{C}$ é dada por $x = 3t^2 + 1$, $y = 4t$, $z = e^{t-1}$, determine a equação da reta tangente no ponto $P(4, 4, 1)$.

65. Determine a curvatura da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (\frac{1}{1+t}, \frac{1}{1-t})$ no ponto $(\frac{2}{3}, 2)$.

66. Determine o comprimento da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ de $t = 0$ até $t = \pi$.

67. A posição de uma partícula é dada por: $\sigma(t) = (e^{-t})i + (e^{2t})j$ quando $t \geq 0$

5i) Em que pontos da trajetória da partícula a reta tangente é paralela à reta $x + 4y = 2$.

5ii) Determine a curvatura da curva $\sigma(t)$ no ponto $(2, \frac{1}{4})$

68. Seja $r(t) = (\sqrt{2-t}, \frac{e^t - 1}{t}, \ln(t+1))$.

(a) Determine o Domínio de r .

(b) Determine $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)$.

(c) Determine $r'(t)$

69. Calcule o comprimento de: $\sigma(t) = (\cos^3 t)i + (\sin^3 t)j$, $t \in [0, \pi]$.

70. Em que ponto(s) da curva $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$, $z = \frac{t^2}{2}$ a tangente a esta curva é paralela ao plano $x + 3y + 2z = 10$.

71. Determine as equações da reta tangente e do círculo osculador da parábola $y = 2 - x^2$ no ponto $(1, 1)$.
72. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3\sin t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?
73. Esboce o gráfico da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (1+t, \sqrt{t})$ e determine o ponto onde a curva $\mathcal{C}$ tem reta tangente paralela à reta $x - 2y + 2 = 0$.
74. Obtenha o valor de x , $x > 0$ onde $y = x^3$ tem curvatura máxima.
75. No instante $t = 0$, uma partícula na origem de um sistema de coordenadas xyz tem uma velocidade de $V_o = i + 2j - k$. A função aceleração da partícula é $A(t) = 2t^2 i + j + \cos(2t) k$.
- (a) Encontre a função posição da partícula.
- (b) Encontre a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.
76. Considere a curva suave $\sigma(t) = (2t, t^2, \ln t)$, $t \in (0, \infty)$. Verifique que os pontos $(2, 1, 0)$ e $(4, 4, \ln 2)$ pertencem à curva de σ e calcule o comprimento de arco de σ entre estes pontos.
77. A trajetória de uma partícula é dada por $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, onde t é parâmetro de tempo. Em $t = \pi$ ela abandona a trajetória e passa a caminhar na direção da tangente. Ache sua posição em $t = 2\pi$.
78. Uma partícula se move com velocidade constante de 10 unidades por segundo, no sentido anti-horário, ao longo da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$. Ache o vetor aceleração $\vec{A}$ no instante em que a partícula passa pelo ponto $(0, 3)$.
79. Determinar as equações cartesianas das retas tangente e normal à curva $\sigma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ no ponto $(1, 0)$.
80. Considere a curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (10 - t^2, t^3 - 12t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- (i) Em que pontos a reta tangente é vertical?
- (ii) Em que pontos a reta tangente é horizontal?
81. Encontre o comprimento da curva $\sigma(t) = (e^t - t, 4e^{t/2})$ com $t \in [-8, 3]$.
82. Encontre uma equação para o círculo de curvatura da curva $r(t) = (t^2, t)$, no ponto $(4, 2)$.
83. A função posição de uma partícula em movimento é dada por $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ com $t \in [0, 2\pi]$.
- (i) Determine os instantes $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ onde a velocidade escalar $v(t) = 1$.
- (ii) Calcule o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.
84. Determinar a equação da reta tangente à curva $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1 - 2\sin t)$ no ponto $(-1, 0, 1)$.

85. Considere a curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (t^3 - 3t, t^3 - 5t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

(i) Determine o ponto onde a curva $\mathcal{C}$ tem reta tangente paralela à reta

$$-7x + 9y + 4 = 0.$$

(ii) Em que pontos a reta tangente é vertical?

(iii) Em que pontos a reta tangente é horizontal?

86. Encontre o comprimento da curva $\sigma(t) = (t^3, t^2)$ com $t \in [1, 3]$.

87. Encontre uma equação para o círculo de curvatura da curva $r(t) = (3 \cos t, 5 \sin t)$ com $t \in [0, 2\pi]$, no ponto $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}})$.

88. A função posição de uma partícula em movimento é dada por $r(t) = (t^2, 5t, t^2 - 16t)$.

(i) Em que ponto da trajetória a velocidade e aceleração são ortogonais ?

(ii) Em que ponto da trajetória sua velocidade escalar é mínima?

89. PROBLEMA QUENTE:

Mostre que o traço de $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma curva plana. Determine o plano que contém o traço de $\sigma(t)$. Determine os pontos da curva $\sigma(t)$ onde a curvatura é máxima ? e mínima?

90. Seja C uma curva de $\mathbb{R}^3$ definida pela função vetorial $r(t) = (2 - t^3, 2t - 1, \ln t)$. Determine:

(a) O ponto de interseção de C com o plano xz ,

(b) As equações paramétricas da reta tangente no ponto $(1, 1, 0) \in C$

(c) Uma equação para o plano normal a C no ponto $(1, 1, 0)$.

91. Determinar o comprimento da curva $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

92. Determine uma equação do círculo osculador da curva $y = x^4$ no ponto $(1, 1)$. Faça o gráfico da curva e do círculo osculador.

93. Seja C uma curva de $\mathbb{R}^2$ definida pela função vetorial $r(t) = (t, t^2 - t)$ com $t \in [-2, 5]$.

(a) Trace a curva C .

(b) As equações paramétricas da reta tangente no ponto $(1, 0) \in C$

(c) Encontre o vetor unitário normal $\vec{N}$ no ponto $(1, 0) \in C$

(d) Calcule a curvatura k da curva no ponto $(1, 0) \in C$

(e) Determine o círculo osculador da curva no ponto $(1, 0) \in C$

94. Considere duas partículas $P1$ e $P2$ viajando segundo as trajetórias:

$$r_1(t) = (t - 1, 3 + 2t, 4t - t^2) \text{ e } r_2(t) = (\sqrt{t+1}, t^2, 6 - t), \quad t \geq 0$$

As partículas colidem? Onde? Qual instante?

95. Determine $T(t)$, $N(t)$ (tangente unitário e normal principal) para a função vetorial $r(t) = (t^2 - 1, t)$ no ponto $t = 1$.
96. Determine o comprimento da trajetórias abaixo para o intervalo especificado:
- $$r(t) = (t^2, 2t, \ln t); \quad 1 \leq t \leq e$$
97. Seja $\mathcal{C}$ uma curva de $\mathbb{R}^2$ definida pela função vetorial $r(t) = (t^2 + 1, t)$ com $t \in [0, 2]$
- Trace a curva $\mathcal{C}$.
 - Determine a equação do círculo osculador da curva no ponto $(2, 1) \in \mathcal{C}$.
98. Esboce o gráfico da curva $\mathcal{C}$ descrita pela função vetorial $r(t) = (1 + t, \sqrt{t})$ e determine o ponto onde a curva $\mathcal{C}$ tem reta tangente paralela à reta $x - 2y + 2 = 0$.
99. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $2y = x^2$ nos pontos $(0, 0)$ e $(1, \frac{1}{2})$. Trace os dois círculos de osculadores e a parábola na mesma tela.
100. Calcule os seguintes limites:
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\cos t, \sin t, \frac{t - \sin t}{t^3} \right)$
 - $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{t+1} - 1}{t}, \frac{3}{t+1} \right)$
101. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva definida por $\sigma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t})$, no ponto $(1, 0, 1)$.
102. Determine o comprimento da curva $\sigma(t) = (1, t^2, t^3)$ com $t \in [0, 2]$
103. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $2y = x^2$ no ponto $(1, \frac{1}{2})$. Trace o círculo osculador e a parábola na mesma tela.
104. Dado a curva $\sigma(t) = (2 \sin t, 5t, 2 \cos t)$: Determine os vetores tangente e normal $T(t)$ e $N(t)$. Depois, encontre a curvatura.
105. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada pela função: $r(t) = (\sqrt{t-1}, \sqrt{2-t})$, encontre:
- O domínio de $r(t)$.
 - Trace a curva $\mathcal{C}$
 - $r'(t)$ e $r''(t)$.
 - Existem valores de t onde os vetores $r'(t)$ e $r''(t)$ são ortogonais? Quais são?
106. Encontre todos os pontos da curva $\sigma(t) = (t^3 - 3t^2, t^3 - 3t)$ onde a reta tangente é horizontal e vertical.

107. Calcule o comprimento de: $\gamma_1(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\sin^3 t)\mathbf{k}$, $t \in [0, \pi/2]$.
108. Determine a curvatura, o raio de curvatura e a equação do círculo de curvatura da parábola $y = x^2 - 6x + 11$ no ponto $(2, 3)$. Faça o esboço da Parábola e do círculo de curvatura.
109. Em que ponto(s) da curva: $\mathcal{C} : \sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ a reta tangente é perpendicular à reta de equação $3x + 5y - 8 = 0$? Faça o esboço da curva $\mathcal{C}$ e da reta $3x + 5y - 8 = 0$.