Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica
Prof. Juan Carlos Vila Bravo

2^{da} Lista de exercicios de Cálculo II

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$ dada por:

$(a)\ f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ $\quad (b)\ f(x,y) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x}$

$(c)\ f(x,y) = \frac{xy}{x-2y}$ $\quad (d)\ f(x,y) = \ln(xy-1)$

$(e)\ f(x,y) = \frac{\ln(x-2y)}{\sqrt{x^2-2x}}$ $\quad (f)\ f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2-1}$

$(g)\ f(x,y) = \sqrt{|x|-|y|}$ $\quad (h)\ f(x,y) = \sqrt{|x|+|y|-2}$

2. Trace um esboço das curvas/superfícies de nível de cada uma das seguintes funções:

$(a) f(x,y) = xy$ $\quad (b)\ f(x,y) = 4x^2 + 9y^2;$

$(c) f(x,y) = \frac{x^2}{y^2+1}$ $\quad (d) f(x,y) = (x-y)^2;$

$(e) f(x,y,z) = x + 2y + 3z,$ $\quad (f)\ f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2;$

$(g) f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z,$ $\quad (h) f(x,y,z) = x - y;$

LIMITE E CONTINUIDADE

3. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique:

$(a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+x^2+y}$, *Rpta :* $\quad (b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y}$; *Rpta :*

$(c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, *Rpta :* $\quad (d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x-y}$; *Rpta :*

$(e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, *Rpta :* $\quad (f)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$; *Rpta :*

$(g)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, *Rpta :* $\quad (h)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\text{sen}\,(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$; *Rpta :*

$(i)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, *Rpta :* $\quad (j)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$; *Rpta :*

4. Discuta a continuidade das seguintes funções:

$(a)\ \ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad (b)\ \ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$(c)\ \ f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad (d)\ \ f(x,y)=\begin{cases}\frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, & \text{se } (x,y,z)=(0,0)\end{cases}$

DERIVADAS PARCIAIS E DIFERENCIABILIDADE

5. Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função dada em todos os pontos do seu domínio

   (a) $f(x,y)=5x^2y^4+xy^3+4$ $\quad (b)$ $f(x,y)=\cos(xy)$

   (c) $f(x,y)=\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$ $\quad (d)$ $f(x,y)=\ln(xy-1)$

   (e) $f(x,y)=xye^{xy}$ $\quad (f)$ $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

   (g) $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$ $\quad (h)$ $f(x,y,z)=xyz^2\tan(yz)$

6. utilize derivação implicita para determinar $\frac{d\,y}{d\,x}$

   (a) $\sqrt{xy}+1=x^2y$ $\quad (b)$ $\cos(x-y)=xe^y$

7. Utilize derivação implicita para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

   (a) $x^2+y^2+z^2=3xyz$ $\quad (b)x-z=\arctan(yz)$

8. Seja $\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } \ (x,y)=(0,0),\end{cases}$

   prove que:

   (a) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem e

   (b) $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$. Por que?

9. Seja $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } \ (x,y)=(0,0),\end{cases}$

   (a) Verifique que $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$ e que existem as derivadas parciais $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

   (b) É $f(x,y)$ diferenciável em $(0,0)$? Por que?

REGRA DA CADEIA E VETOR GRADIENTE

10. Calcule $\frac{dz}{dt}$, usando a regra da cadeia:

    (a) $z = \ln(2x^2 + y), \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t^{2/3}$

    (b) $z = \sqrt{1 + x - 2xy^4}, \quad x = \ln t, \quad y = t$

    (c) $z = e^{1-xy}, \quad x = t^{1/3}, \quad y = t^3$

11. Calcule $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$ usando a regra da cadeia

    (a) $w = xy + yz + xz$ onde $x = u \ \cos v, \quad y = u \cos v$ e $z = v$.

    (b) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ onde $x = ue^v \text{sen } u, \quad y = ue^v \text{sen } u$ e $z = ue^v$.

    (c) $w = \cos x$ sen y onde $x = u - v, \quad y = u^2 + v^2$.

12. Use a regra da cadeia para calcular $\left.\frac{dw}{ds}\right|_{s=1/4}$, se $w = r^2 - r\tan\theta, \ r = \sqrt{s}, \ \theta = \pi s$

13. Use a regra da cadeia para calcular $\left.\frac{dz}{dr}\right|_{r=2,\ \theta=\pi/6}$ e $\left.\frac{dz}{d\theta}\right|_{r=2,\ \theta=\pi/6}$; se

    $z = xye^{x/y}, \ x = r\cos\theta, \ y = r\text{sen } \theta$

14. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto P,

    (a) $z = xe^{x^2-y^2}, \quad P(2,2,2)$

    (b) $z = \frac{1}{xy}, \quad P(1,1,1)$

    (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad P(-3,0,4)$

    (d) $y + x = 2xz, \quad P(4,4,1)$

    (e) $\cos(\pi x) - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad P(0,1,2)$

15. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, em (x_0, y_0, z_0), pode ser escrito na forma $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$

16. Considere a superfície de equação $xyz = 1$. Encontre as equações dos planos tangentes a esta superfície que são paralelos ao plano $x + y + z + 100 = 0$.

17. Encontre o ponto na superfície $3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - z = 5$ onde o plano tangente é horizontal.

18. determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao grafico da função $f(x,y) = xy$.

19. De um funil cônico escoa água à razão de $18\pi cm^3/seg$. Sea geratriz faz com o eixo do cone um ângulo $\alpha = \pi/3$, determine a velocidade com que baixa o nível de água no funil, no momento em que o raio da base do volume líquido é igual a $6cm$

20. Um lado de um retângulo mede $x = 20mts$ e aumenta a uma velocidade de $5mts/seg$, o outro lado mede $y = 30mts$ e diminui a uma velocidade de $4mts/seg$. Com que velocidade varia o perímetro e a área desse retângulo?

21. a altura de um cone circular reto é $15cm$ e esta aumentando a $1cm/seg$. O raio da base é $10cm$ e esta diminuindo a $0.5cm/seg$. Qual a taxa de variação do volume em relação ao tempo neste instante.

22. Em um instante dado, o comprimento de um lado de um triângulo retângulo é de $10cm$e cresce à razão de $1cm/seg$; O comprimento do outro lado é de $12cm$ e decresce à razão de $2cm/seg$. Calcule a razão de variação da medida do ângulo agudo oposto ao lado de $12cm$, medido em radianos, no instante dado.

DERIVADA DIRECIONAL

23. O que é o vetor gradiente de uma função $f(x, y)$? Como ele está relacionado às derivadas direcionais de uma função?

24. Calcule a derivada direcional de f em P na direção dada.

    (a)$f(x, y) = \text{sen}\,(xy^2)$; $P(\frac{\pi}{4}, 2)$; vetor na direção $\vec{u} = \vec{i}$.

    (b)$f(x, y) = 3x^2 + 4x - y^2$; $P(1, 2\sqrt{3})$; vetor na direção $\frac{\pi}{6}$.

    (c)$f(x, y, z) = xye^z + yze^x$; $P(1, 0, 0)$; vetor de P a $(2, 2, 1)$.

25. Determine as direcões em que f cresce e decresce mais rapidamente no ponto P, bem como as correspondentes derivadas direcionais (taxa de variiação de crecimento) máxima e mínima respectivamente em P.

    (a)$f(x, y) = x^3 - y^2, \quad P(1, 1)$

    (b)$f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad P(3, 4)$

    (c)$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2, \quad P(1, -1, 1)$

26. Seja $f(x, y) = x^2y$. Se $\vec{u} = (a, b)$ é um vetor unitário, escreva a fórmula para a derivada direcional de f em (1,-1) em termos de a e b. Em que direção devemos seguir a fim de que a taxa de variação de f seja 2? .

27. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

    (a) $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$.? Por que?

    (b) $f(x, y)$ é diferenciável em $(0, 0.)$? Por que?

    (c) Determine as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

    (d) $f(x, y)$ possui derivadas direcionais em todas as direções no ponto $(0, 0)$.?

DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

28. Nos itens abaixo calcule as derivadas parciais indicadas;

    (a)$f(x, y) = \frac{x+2y}{x^2-y}, \quad f_x, f_y, f_{xx}$

    (b)$f(x, y) = \ln(x^2y^2), \quad h_{12}, h_{21}, h_{212}$

    (c)$f(x, y) = y^3e^{-5x}, \quad f_{xyy}(0, 1), f_{xxx}(0, 1), f_{yyxx}(0, 1)$

29. Verifique que as funções abaixo satisfazem a equação de Laplace: $z_{xx} + z_{yy} = 0$

$$\text{(a)} \quad z = e^x \text{sen } y, \qquad (b) \quad z = \arctan(\frac{y}{x})$$

30. Dado $w = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$, verifique que w satisfaz a equação diferencial parcial:

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 5w$$

31. Use diferenciação implicita para determinar: $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$

    (a) $xy + yz = xz$ $\quad$ (b) $x^2 + y^2 - z^2 = 2x(y+z)$

    (c) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$ $\quad$ (d) $xyz = \cos(x+y+z)$

LINEARIZAÇÃO E DIFERENCIAIS

32. Determine a linearização das seguintes funções , ao redor dos pontos dados:

    (a) $f(x,y) = \text{sen}\,(xy), \quad P(0,1)$ $\quad$ (b) $f(x,y) = xyz, \quad P(1,1,1)$

    (c) $f(x,y,z) = xy^3 + \cos(\pi z), \quad P(1,3,1)$ $\quad$ (d) $f(x,y,z) = (xy)^z, \quad P(12,10,1)$

33. Calcule, aproximadamente:
    (a) $M = 0.98 \times 0.99 \times 1.02$
    (b) $N = (12.03 \times 10.04)^{1.08}$
    (c) $P = 3.001 \times (2.0023)^3 + \cos((1.002)\pi)$

34. Se $f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$, determine os valores de $\triangle f$ e df, quando (x,y) varia de $(2,-1)$ a $(1.99,-0.98)$

O Erro na aproximação Linear Padrão

Se f tem derivadas parciais de primeira e segunda ordem continuas em um conjunto aberto que contém um retângulo R centrado em (x_0,y_0) e se M é limitante superior para os valores de $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$ em R, então o erro $E(x,y) = f(x,y) - L(x,y)$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}M\{\ |x-x_0|^2 + |y-y_0|^2\ \}^2$$

---

35. Nos itens abaixo, encontre a linearização L da função f em P_0. Então encontre um limitante superior para a magnitude $|E|$ do erro na aproximação $f \approx L$ na região $\mathcal{R}$
    (a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5,\ \text{em} P_0(1,2),\ \ \mathcal{R} : |x-2| \leq 0.1,\ \ |y-1| \leq 0.1$
    (b) $f(x,y) = 1 + y + x\cos y,\ \text{em} P_0(0,0),\ \ \mathcal{R} : |x| \leq 0.2,\ \ |y| \leq 0.2$
    (c) $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz + \frac{z^2}{4},\ \text{em} P_0(1,1,2),$

    $\mathcal{R} : |x-1| \leq 0.01,\ \ |y-1| \leq 0.01,\ \ |z-2| \leq 0.08$

36. Você planeja calcular a área de um retângulo comprido e fino a partir de medidas de seu comprimento e largura. Qual dimensão você deve medir com mais cuidado? Justifique sua resposta.

37. Ao redor do ponto $P_0(1,0)$, a função $f(x,y) = x^2(y+1)$ é mais sensível a variações em x ou em y?. Qual razão entre dx e dy fará df igual a zero no ponto $P_0(1,0)$?

38. Sua empresa produz latas de refrigerantes padrão que tem $20cm$ de altura com raio de $3cm$. Qual é a sensibilidade do volume da lata em relação a pequenas variações do raio e da altura?

Coletânea de provas

39. Considere a função $f(x,y,z) = ln(xy) + ln(yz) + ln(xz)$.

    (a) Determine o gradiente de f em um ponto $P(x,y,z)$ qualquer de seu domínio.

    (b) Determine as direções nas quais f cresce e decresce mais rapidamente no ponto $P(1,1,1)$.

40. Verifique se existe ou não os seguintes limites, justifique sua resposta:

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}, \qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}.$$

41. (a) Calcular o plano tangente e a reta normal no ponto $P_o(1,1,9)$ do paraboloide $z - 2x^2 - y^2 = 6$.

    (b) Encontre os valores de m e n de tal forma que o plano $mx + ny + z = 2$ seja tangente ao paraboloide $z = x^2 + 2y^2 + 2$ no ponto $P_o(1,1,5)$.

42. Calcular as derivadas parciais $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial \phi}$ onde:

$$w = xy^2 + yz^2 + zy^2, \quad x = r\cos\theta \text{sen}\,\phi \ \ e \ \ y = r\text{sen}\,\theta\text{sen}\,\phi \ \ e \ \ z = r\cos\theta$$

43. Considere a função $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\text{sen}\,y$.

    (a) Determine o gradiente de f em um ponto $P(x,y)$ qualquer de seu domínio.

    (b) Determine as direções nas quais f cresce e decresce mais rapidamente no ponto $P(1,0)$.

44. Verifique se existe ou não os seguintes limites, justifique sua resposta:

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}, \qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

45. Determine a equação do plano tangente e a reta normal no ponto $P_o(-1, \frac{\pi}{2}, 1)$ à superfície de equação $z = e^{x\cos y}$.

46. Calcule, usando a regra da cadeia as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ onde:

$$z = e^{xy}, \quad x = u(u+v), \ \ y = v(u+v)$$

47. (a) Encontre o vetor gradiente da função $f(x,y) = e^{2x^2+2y}$.

(b) Determine a derivada direcional da função $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln(yz) + \ln(xz)$ no ponto dado P(2, 1, -1) e na direção do vetor $v = 3i + 4j + 12k$.

48. Encontre os pontos sobre a superficie

$$(y+z)^2 + (z-x)^2 = 16$$

onde a reta normal é paralela ao plano yz.

49. A derivada de $f(x,y,z)$ em um ponto P é maior na direção do vetor $v = i + j - k$. Nessa direção, o valor da derivada é $2\sqrt{3}$.

(a) Qual é valor de ∇f em P? Justifique sua resposta.

(b) Qual é a derivada de f em P na direção do vetor $u = i + j$.?

50. a)Se $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$ e $z = 2rs$, encontre w_r e w_s.

b)Seja $w = x^2 e^{2y} \cos(3z)$. Encontre o valor de w_t no ponto $A(1, \ln 2, 0)$ na curva

$$x = \cos t, \quad \ln(t+1), \quad z = t$$

51. (1,5 pontos) Encontre os pontos sobre a superficie

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

onde o plano tangente é paralelo ao plano xy.

52. (1,5 pontos) A derivada de $f(x,y)$ no ponto $P(1,2)$ na direção $u = i + j$ é $2\sqrt{2}$ e na direção $v = -2j$ é -3. Qual é a derivada de f na direção $w = -i - 2j$? Justifique sua resposta.

——————— 2007 ———————

53. Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ k, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

onde k é uma constante.

a) É ou não possível escolher k de tal forma que a função seja continua no ponto $(0,0)$?

b) Sem fazer calculos comente a seguinte afirmação: "Se ambas as derivadas parciais da função f existirem na vizinhança do ponto $(0,0)$ nenhuma delas pode ser contínua no $(0,0)$"

c) Calcule pela definição a derivada direccional da função f no ponto $(1,0)$ segundo a direção do vetor $u = (1,0)$. Uma perguntinha: Como se chama esta derivada direccional?

54. Suponha que você estaja sentado no ponto $p(\frac{-3}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4})$ de uma superficie que tem por equação $z = -x - 2y$. Qual é a direção em que vôce deve começar a escorregar para atingir o plano xy o mais depressa possível?

55. Encontre os pontos sobre a superfície $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$, onde o plano tangente é paralelo ao plano xy.

56. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

57. Calcule $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$ e $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}$ no ponto dado (r, θ).

$$z = 4e^x \ln y, \quad x = \ln(r\cos\theta), \quad y = r\mathrm{sen}\,\theta, \quad (r, \theta) = (2, \pi/4)$$

.

——————————- 2008 ——————————

58. Seja S a superficie definida por $z = \sqrt{y^2 - 4x^2}$.

    (i) Determine e esboce o dominio da funçaõ

    (ii) Descreva a interseção de S com o plano $z = k$, quando $k = -1, k = 0$ e $k = 1$.

    (iii) Identifique as interseções de S com os planos xz e yz.

59. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique

    $(a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 - y^2}$, $\qquad (b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x-y)}{x^4 + y^4}$;

60. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

    (a) $f(x, y)$ é contínua em $(0, 0)$.? Por que?

    (b) $f(x, y)$ é diferenciável em $(0, 0.)$? Por que?

    (c) Determine as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

    (d) $f(x, y)$ possui derivadas direcionais em todas as direções no ponto $(0, 0)$.?

61. Considere a superficie $S : 2x^2 - y^2 + 2xz + 10 = 0$. Determine os pontos de S nos quais o plano tangente a S é paralelo ao plano tangente ao gráfico da função $z = x^2 + y^2$ no ponto $P(1, 1, 2)$.

62. Seja S a superficie definida por $z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$.

    (i) Determine e esboce o dominio da funçaõ

    (ii) Descreva a interseção de S com o plano $z = k$, quando $k = 0, k = 1$ e $k = 2$.

    (iii) Identifique as interseções de S com os planos xz e yz.

63. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$, $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$;

64. Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy}{2x^2+3y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

possui derivadas parciais em $(0,0)$, mais não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

65. Encontre o ponto na superfície $\mathcal{S} : x^2 + y^2 - 6y + z = 3$ onde o plano tangente é horizontal.

66. O que significa uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ ser diferenciável em $(x_o, y_o) \in U^o$? Qual é a relação entre a diferenciabilidade de f e a continuidade de f em um ponto ?

67. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(a) Determine as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em todos os pontos.

(b) É $f(x,y)$ diferenciável em $(0,0)$? Por que?

68. Considerando as funções:

$$w = \ln(x^2+y^2+z^2), \quad x = ue^v \text{sen}\, u, \quad y = ue^v \cos u, \quad z = ue^v,$$

calcule $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial w}$ de dois modos:

a) Determinando w em termos de u e v e derivando em relação a u e a v.

b) Usando a regra da cadeia.

c) Determine os valores de $\dfrac{\partial w}{\partial u}(-2,0)$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}(-2,0)$.

69. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao gráfico de $f(x,y,z) = \cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$ no ponto $P_o(0,1,2)$.

70. Ache a reta tangente à interseção das superfícies

$$S_1 : z = x^2 + y^2, \quad \text{e} \quad S_2 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

no ponto $P_o(-1,1,2)$.

71. O que é o vetor gradiente de uma função $f(x,y)$? Como ele está relacionado às de

72. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3-1}{xy-1}$, $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$;

73. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

prove que:

(a) $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem e

(b) $f(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$. Por que?

74. Encontre $\dfrac{\partial w}{\partial s}(s,t)$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}(s,t)$ quando $s=1$ e $t=2\pi$ para a função:

$$w = xy + yz + xz$$

onde $x = s\ \cos t,\ \ y = s \operatorname{sen} t\ \text{ e }\ z = t.$

75. Encontre a equação do plano tangente e a equação da reta normal à superficie:

$$\mathcal{S} : y = x(2z-1) \quad \text{no ponto} \quad P_o(4,4,1).$$

76. Encontre o ponto na superfície $\mathcal{S} : 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - z = 5$ onde o plano tangente é horizontal.

77. A temperatura no ponto (x,y) de uma placa metálica é dada por:

$$T(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Encontre a direção de crescimento máximo da temperatura no ponto $(3,4)$.

78. Seja S a superficie definida por $z = \sqrt{|x| - |y|}$.

(i) Determine e esboce o dominio da funçaõ

(ii) Descreva a interseção de S com o plano $z = k$, quando $k = 0, 1, 2$

79. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, justifique

$(i)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y},$ $\qquad (ii)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2};$

80. Represente graficamente o domínio da seguinte função:

$$f(x,y) = \sqrt{|x| + |y| - 1}$$

81. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(a) $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.? Por que?

(b) $f(x,y)$ é diferenciável em $(0,0)$? Por que?

82. Suponha que o movimento de um pato numa piscina é dado pela curva $x = (3+t)^2,\ \ y = 2 - t^2$, enquanto a temperatura da agua é dada pela fórmula $T(x,y) = e^x(y^2+x^2)$. Ache $\frac{dT}{dt} =?$

83. Encontre a equação do plano tangente e a equação da reta normal à superficie:

$$\mathcal{S} : y = x(2z-1) \quad \text{no ponto} \quad P_o(4,4,1).$$

84. Determine os pontos sobre a superfície $\mathcal{S}$:$x^2-2y^2-4z^2=16$, onde o planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

85. Encontre os pontos sobre a superfície $\mathcal{S}$: $2x^2-y^2+2xz+10=0$, onde o planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

86. A derivada de $f(x,y,z)$ em um ponto P é menor na direção do vetor $v=i+j-k$. Nessa direção, o valor da derivada é $2\sqrt{3}$.

    (a) Qual é valor de ∇f em P? Justifique sua resposta.

    (b) Qual é a derivada de f em P na direção do vetor $u=i+j+k$.?

87. Represente graficamente o domínio da seguinte função:

$$f(x,y)=\sqrt{y-x^2}+\sqrt{x^2-4}.$$

88. Seja

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , & \text{se } x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{se } x^2+y^2=0, \end{cases}$$

    a) É $f(x,y)$ continua em $(0,0)$? Por que?

    b)É $f(x,y)$ diferenciável em $(0,0)$? Por que?

    c) $f(x,y)$ possui derivadas direcionais em todas as direções no ponto $(0,0)$.

89. Determine as equações das retas tangente e normal à curva $\mathcal{C}$: $y^2-x^2=3$ no ponto $P_o(1,2)$. Esboce então as retas, a curva de nível e o vetor gradiente ∇f em P_0.

90. Encontre os pontos sobre a superfície $\mathcal{S}$: $x^2+y^2-z^2-2x=0$, onde o planos tangentes são paralelos aos planos coordenados.

91. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciavel no ponto $P_0(1,2)$ tal que:

    A derivada de $f(x,y)$ em $P_0(1,2)$ na direção do vetor $u=i+j$ é $2\sqrt{2}$ e na direção do vetor $v=-2j$ é -3.

    a) Encontre os valores de $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$

    b) Qual é a derivada de $f(x,y)$ na direção do vetor $w=-i-2j$.

92. Represente graficamente o domínio da seguinte função: $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{1-y}{y-x^2}}$.

93. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \ , & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

É $f(x,y)$ diferenciável em $(0,0)$? Por que?

94. Determine as equações das retas tangente e normal à curva $\mathcal{C} : y = xe^{-x}$ no ponto $P_o(1, e^{-1})$.

95. Encontre os pontos sobre a superfície $\mathcal{S} : xy + yz + zx - x - z^2 = 0$, onde o plano tangente é paralelo ao plano xy.

96. Considere as duas superfícies $S_1 : x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $S_2 : 2x^2 - y^2 + 5z^2 = 6$.
   (a) Determine os vetores normais e os planos tangentes a S_1 e S_2 em $(1, 1, -1)$;
   (b) Determine o ângulo entre os dois planos;
   (c) Determine a equação da reta tangente em $(1, 1, -1)$ à curva de interseção das superfícies S_1 e S_2.

———————— 2009 ————————

97. Encontre o domínio da função: $f(x,y) = \sqrt{|xy| - 1}$

98. É possivel definir $f(0,0)$ de maneira que $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ se estenda a uma função contínua na origem.

99. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $P_0(1, 2, 1)$ na superfície $\mathcal{S} : z = \sqrt{y - x}$.

100. Qual é o maior valor que a derivada direcional de $f(x,y,z) = xyz$ pode ter no ponto $(1, 1, 1)$?

101. Seja $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2$ a temperatura no ponto (x,y) na elipse $x = 2\sqrt{2}\cos t, \quad y = \sqrt{2}\text{sen } t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Descubra onde ocorrem as temperaturas máxima e mínima na circunferência examinando as derivadas $\dfrac{dT}{dt}$ e $\dfrac{d^2T}{dt^2}$

102. Encontre o domínio da função: $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 - y}{1 + y^2}}$

103. É possivel definir $f(0,0)$ de maneira que $f(x,y) = \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ se estenda a uma função contínua na origem.

104. Determine as equações do plano tangente e da reta normal no ponto $P_0(0,1,2)$ na superfície $\mathcal{S} : \cos(\pi x) - x^2y + e^{xz} + yz = 4$.

105. Encontre as direções nas quais a função $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\text{sen } y$, cresce e decresce mais rapidamente em $P_0(1,0)$. Depois encontre as derivadas da função nessas direções.

106. Seja $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2$ a temperatura no ponto (x,y) na circunferência $x = \cos t, \quad y = \text{sen } t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Descubra onde ocorrem as temperaturas máxima e mínima na circunferência examinando as derivadas $\dfrac{dT}{dt}$ e $\dfrac{d^2T}{dt^2}$

107. Considere a função $f(x,y) = \sqrt{1-(x-y)^2}$

    a) Descreva a região $\mathcal{R}$ no plano que corresponde ao domínio da função dada e encontre a imagem da função.

    b) Esboce um numero finito (mínimo 3) de curvas de nível no domínio da função

108. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y}$ não têm limite quando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

109. Determine as equações do plano tangente e reta normal á superfície $\mathcal{S}: \ y = x(2z-1)$ no ponto $P(4,4,1)$.

110. Os dois raios de um tronco de cone circular reto estão aumentando a uma taxa de $4cm$ por minuto, enquanto a altura está diminuindo a uma taxa de $12cm$ por minuto. Encontre a taxa de variação do volume quando os raios medem $15cm$ e $25cm$ e altura mede $10cm$. $\quad V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

111. Você planeja calcular o volume dentro de um trecho de tubulação que tem cerca de $50cm$ de diametro e $10mts$ de comprimento. Com qual medida você deve ter mais cuidado, o comprimento o diametro? Por que? $\quad V = \pi r^2 h$

112. Considere a função $f(x,y) = \sqrt{|x|+|y|-2}$

    a) Descreva a região $\mathcal{R}$ no plano que corresponde ao domínio da função dada e encontre a imagem da função.

    b) Esboce um numero finito (mínimo 3) de curvas de nível no domínio da função

113. Seja $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
prove que:

    (a) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$. (usar a definição)

    (b) $f(x,y)$ é diferenciável em $(0,0)$? Por que?

114. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico $f(x,y)=xy$. Existe mesmo só um?

115. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2-y^2+2z^2=1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3,-1,0)$ e $(5,3,6)$.

116. O raio de um cilindro circular reto está aumentando a uma taxa de $6cm$ por minuto e sua altura está diminuindo a uma taxa de $4cm$ por minuto. Qual é a taxa de variação do volume e da área da superfície quando o raio e a altura tiverem, respectivamente, 12 e 36 centímetros?

117. Existe uma direção $\vec{u}$ na qual a taxa de variação de $f(x,y)=x^2-3xy+4y^2$ em $P(1,2)$ é igual a 14? Justifique sua respostas.

118. Ache o plano tangente e a reta normal ao hiperbolóide de uma folha $x^2+y^2-z^2=4$ no ponto $(2,-3,3)$.

119. Encontre os pontos sobre a superfície $\mathcal{S}: \; xy+yz+zx-x-z^2=0$ onde o plano tangente é paralelo ao plano xy.

120. Considere a função $f(x,y)=\ln(4-xy)$

   a) Descreva a região $\mathcal{R}$ no plano que corresponde ao domínio da função dada e encontre a imagem da função.

   b) Esboce um numero finito (mínimo 3) de curvas de nível no domínio da função

121. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função $f(x,y)=\dfrac{-xy^2}{x^2+y^4}$ não têm limite quando $(x,y)\longrightarrow(0,0)$.

122. Determine a equação do plano tangente á superfície $\mathcal{S}: \; xy^2+3x-z^2=4$ no ponto $P(2,1,-2)$.

123. Os comprimentos a,b e c das arestas de uma caixa retangular variam com o tempo. No instante em questão: $a=1$m, $b=2$m, $c=3$m, $\dfrac{da}{dt}=\dfrac{db}{dt}=1m/seg$ e $\dfrac{dc}{dt}=-3m/seg$. Quais são as taxas de variação do volume V e da área S da caixa no instante dado? As diagonais do interior da caixa estão aumentando ou diminuindo de conprimento?

124. Próximo ao ponto $(1,2)$, a função $f(x,y)=x^2-xy+y^2-3$ é mais sensivél às variações em x ou às variações em y? Como você sabe?

125. Considere a função $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

a) Descreva a região $\mathcal{R}$ no plano que corresponde ao domínio da função dada e encontre a imagem da função.

b) Esboce um numero finito (mínimo 3) de curvas de nível no domínio da função

126. Encontre a equação do plano tangente à superfície $\mathcal{S}: \; xy^2 + 3x - z^2 = 4$ no ponto $(2,1,-2) \in \mathcal{S}$

127. Ache a equação do plano tangente à superfície $z = 2x^2 - 3xy + y^2$ que seja paralelo ao plano $10x - 7y - 2z + 5 = 0$

128. Calcule, usando aregra da cadeia, as derivadas $\partial z/\partial u$ e $\partial z/\partial v$ quando:

$$z = e^{xy}, \quad x = u(u+v), \quad y = v(u+v)$$

129. Existe uma direção $\vec{u}$ na qual a taxa de variação de $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ em $P(1,2)$ é igual a 14? Justifique sua respostas.

130. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + y^3}{x^2 + 2y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$

(a) Seja $\vec{u} = (m,n)$ um vetor unitario (isto é, $m^2 + n^2 = 1$). Use a **definição** de derivada direcional para calcular $D_u f(0,0)$

(b) É f diferenciavel em $(0,0)$? Justifique.

131. Considere a função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_o(2,2)$. Determine:

(a) A derivada direcional de f no ponto P_o na direção do vetor $\vec{u} = (1,1)$.

(b) A derivada direcional de f no ponto P_o na direção do vetor tangente á curva $y = x^2 - x$ no ponto $(3,6)$.

(c) A direção na qual a taxa de variação de f em P_o é máxima.

———————— 2010 ————————

132. Considere a função $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 4x^2}$

a) Determine e esboce o domínio da função.

b) Esboce um numero finito (mínimo 3) de curvas de nível no domínio da função

133. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{xy}{y - x^3}$ não têm limite quando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

134. Determine um plano que passe pelos pontos $(5,0,1)$ e $(1,0,3)$ e que seja tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

135. Seja $T(x,y) = x^2 - xy + y^2$ a temperatura no ponto (x,y) na elipse $x = \cos t$, $y = 2 \text{ sen } t, \; 0 \leq t \leq 2\pi$. Descubra os pontos onde ocorrem as temperaturas máxima e mínima na elipse examinando as derivadas $\frac{dT}{dt}$ e $\frac{d^2T}{dt^2}$

136. Suponha que o gráfico de $z = 16 - 2x^2 - y^2$ represente a superfície de um monte (adote o km como unidade de medida) Um alpinista que se encontra na posição $(1, 2, 10)$ pretende descer.

(a) Determine o ponto em que ele tocará o plano XY admitindo que ele busque sempre a direção de maior aclive.

(b) Determine a parametrização da trajetoria a ser descrita pelo alpinista.

137. Considere a função $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

a) Descreva a região $\mathcal{R}$ no plano XY que corresponde ao domínio da função dada.

b) Esboce um numero finito (mínimo 3) de curvas de nível no domínio da função

138. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{y - 2x^2}$ não têm limite quando $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$.

139. Considere a superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ definida pela equação

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$$

(a) Determine a equação do plano tangente (π_t) à superficie $\mathcal{S}$ no ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ situado no primeiro octante.

(b) Determine os pontos de interseção deste plano tangente (π_t) com os eixos coordenados.

140. Se $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.

(a) Calcule $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$.

(b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

141. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz.$$

(a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = i + j - k$.

(b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

142. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função

$f(x, y) = \dfrac{xy}{xy + x - y}$ não têm limite quando $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$.

143. Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

144. Determine a equação de um plano tangente à superficie $z = 2x^2 - 3xy + y^2$ que seja paralelo ao plano $10x - 7y - 2z + 5 = 0$.

145. Calcule as derivadas parciais $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial v$ em função de x, y, u e v, onde:

$$z = x^3 \cos(xy^2), \qquad x = e^{uv}, \qquad y = \ln(uv)$$

146. Seja π o seguinte plano $x + 2y + 3z = 6$. Determine a reta contida no plano π, passando pelo ponto $(1, 1, 1)$ e que forma com o plano xy ângulo máximo.

147. Determine a equação do plano tangente à superfície $z = y\ \cos(x - y)$, no ponto $(2, 2, 2)$.

148. Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt e dw/dt em função de x, y e t, onde

$$z = \sin x \cos y,\ x = \pi t,\ y = \sqrt{t}.$$

149. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A = (1, 3), B = (3, 3), C = (1, 7)$, e $D = (6, 15)$. A derivada direcional de f em A na direção do vetor $\vec{AB}$ é 3, e a derivada direcional de f em A na direção $\vec{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\vec{AD}$.

150. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ não têm limite quando $(x, y) \longrightarrow (0, 0)$.

151. Dado a curva $\mathcal{C} : y = 4 - x^2$
   (a) Determine a equação da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $P_o(1, 3)$.
   (b) Determine a área do triangulo formado por esta reta tangente com os eixos coordenados.

152. Seja $2x + y + 3z = 6$ a equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$.
   (a) Calcule $f_x(1, 1)$ e $f_y(1, 1)$.
   (b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1, 1, 1)$.

153. Dado as funções $w = \dfrac{x}{y + z}$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$ e $z = e^{-2t}$.
   (a) Use a regra da cadeia para determinar $\dfrac{dw}{dt}$ em termos de $x,\ y,\ z$ e t.
   (b) Determine o valor de $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=0}$

154. Ache a derivada direcional máxima de $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$ no ponto $(1, 0)$ e dê a direção em que ela ocorre.

155. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{(x^2+y)^2}$ não têm limite quando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

156. Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

157. Calcule aproximadamente $8.99 \times \sqrt{9.99 - (1.03)^3}$.

158. Seja $T(x,y)$ a temperatura em um ponto (x,y) no círculo $x = \cos\ t,\ y = \text{sen}\ \ t$ com $0 \leq t \leq \pi$ e suponha que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x$$

(a) Encontre onde as temperaturas máximas e mínimas no círculo ocorrem examinando $\dfrac{dT}{dt}$ e $\dfrac{d^2T}{dt^2}$.

(b) Supondo $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2$, encontre o valor máximo e o valor mínimo de T no círculo.

159. Existe uma direção $\vec{u}$ na qual a taxa de variação da função temperatura $T(x,y,z) = 2xy - yz$ (a temperatura está sendo medida em graus $Celsius$ e a distância em cm) no ponto $P(1,-1,1)$ é de $-3^oC/cm$.?

160. Considerando caminhos diferentes que se aproximam da origem, mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{y}$ não têm limite quando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$.

161. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

162. Calcule aproximadamente $(1,01)^{2,03}$.

163. Seja $T(x,y)$ a temperatura em um ponto (x,y) na elipse $x = 2\sqrt{2}\cos\ t,\ y = \sqrt{2}\text{sen}\ \ t$ com $0 \leq t \leq \pi$ e suponha que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = x$$

(a) Encontre onde as temperaturas máximas e mínimas na elipse ocorrem examinando $\dfrac{dT}{dt}$ e $\dfrac{d^2T}{dt^2}$.

(b) Supondo $T(x,y) = xy - 2$, encontre o valor máximo e o valor mínimo de T na elipse.

164. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy (adimita que x e y são dados em km e que a temparatura é medida em ${}^0C$). Um indivíduo se encontra na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

(a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.

(b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

(c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01km$ na direção encontrada no item (b)?

——————— 2011 ———————

165. Mostre que o seguinte limites não existe: $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3y\sqrt{x}}{5x + 6y^2}$

166. Determine, se existir, o plano tangente ao gráfico das funções dadas nos pontos indicados.

(a) $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no ponto: $P(0, 0, 0)$.

(b) $ye^z + xz - x^2 - y^2 = 0$ no ponto $Q(0, 1, 0)$.

167. A altura de um cone circular é de $h = 100cm$ e decresce a razão de $10cm/seg$. O raio da base é de $r = 50cm$ e cresce a razão de $5cm/seg$. Com que velocidade está variando o volume, quando $h = 100cm$ e $r = 50cm$?

168. Usando diferencial calcule o valor aproximado de $(1,001)^{3,02}$.

169. Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3), B(3, 3), C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor $\vec{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção do vetor $\vec{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\vec{AD}$.

170. Encontre uma equação do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto especificado

(i) $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $\quad (1, -2, 1)$.

(ii) $xy + yz + zx = 3$, $\quad (1, 1, 1)$.

171. Plano tangente:

(iii) Encontre os pontos no hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $2x + 2y + z = 5$.

172. Regra da cadeia:

(iv) O comprimento x de um lado de um triângulo esta aumentando a uma taxa de $6cm/s$, o comprimento y de um outro lado está diminuindo a uma taxa de $4cm/s$ e o ângulo θ entre eles está aumentando a uma taxa de $0,05$ $radiano/s$. Quão rapidamente está variando a área do triângulo quando $x = 80cm$,

$y = 100cm$ e $\theta = \pi/6$.

——————— 2012 ———————

173. Determine uma equação do plano tangente à superfície $z = y\cos(x-y)$ no ponto $(2, 2, 2)$

174. Utilize a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$. Onde:

$$z = e^{x+2y}, \quad x = \frac{u}{v}, \quad y = \frac{v}{u}$$

175. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = y\ e^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

176. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de $1,2cm/s$ enquanto sua altura está crescendo à taxa de $3cm/s$. A que taxa o volume do cilindro está variando quando o raio é $80cm$ e a altura $150cm$?

177. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície

$$\mathcal{S} \ : \ x^2y - 4z^2 + 7 = 0$$

no ponto $P(-3, 1, -2)$.

178. Suponha que $f(x, y) = e^{xy+x-y}$ Qual a taxa de variação de $f(x, y)$ em $P(0, 0)$ quando nos movemos da origem a $(2, 1)$?. Em que direção devemos nos mover para que a taxa de vairação de $f(x, y)$ seja máxima? Qual é o valor dessa taxa? Em que direção a derivada é zero?

179. Mostre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$ não existe.

180. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \dfrac{2x+3}{4y+1}$ no ponto $P(0, 0)$.

181. Um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de $3cm/s$ e um segundo lado está decrescendo a uma taxa de $2cm/s$. Se área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem $20cm$ de comprimento e o segundo lado tem $30cm$ de comprimento e o ângulo é $\pi/6$.

182. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\vec{u} = (1, 1)$

——————————————— 2013 ———————————————

183. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6.9\ ,\ 2.06)$

184. Um lado de um triângulo esta aumentando a uma taxa de $3cm/seg$ e um segundo lado está decrescendo a uma taxa de $2cm/seg$. Se a área do triângulo permanece constante , a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem $20cm$ de comprimento, o segundo lado tem $30cm$ de comprimento e o ângulo entre os lados é $\pi/6$?

185. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

186. Aplicando limites por caminhos, mostre que $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{y}$ não tem limite quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$.

187. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$

188. A altura de um cone circular é de $h = 100cm$ e decresce a razão de $10cm/seg$. O raio da base é de $r = 50cm$ e cresce a razão de $5cm/seg$. Com que velocidade está variando o volume, quando $h = 100cm$ e $r = 50cm$?

189. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy (adimita que x e y são dados em km e que a temparatura é medida em ^0C). Um individuo se encontra na posição $(3, 2)$e pretende dar um passeio.

    a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele devería percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.

    b) Qual a direção e sentido que devería tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

    c) De quanto a temperatura se elevaría aproximadamente, caso caminhe $0,01km$ na direção encontrada no item b)?

190. **Derivadas Parciais:**

    (1-i) Determine todas as derivadas parciais de 1^{ra} ordem da função:

$$f(x, y) = \frac{5xy}{3x + y^2}$$

    (1-ii) Use a derivação implicita para determinar $\dfrac{dz}{dx}, \dfrac{dz}{dy},$

$$xz = \ln(y + z)$$

191. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superficie $f(x, y) = y\ \cos(x - y)$ no ponto $(2, 2, 2)$.

192. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = y\ e^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

193. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{y + \cos^2 x}$ em $(0, 0)$ e use-a para aproximar o valor de $f(0.1, 0.06)$

194. Um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de $3cm/s$ e um segundo lado está decrescendo a uma taxa de $2cm/s$. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem $20cm$ de comprimento, o segundo lado tem $30cm$ de comprimento e o ângulo é $\pi/6$?

195. Determine a faça o esboço do domínio da função:

$$f(x, y) = \ln(9 - xy)$$

196. Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

$$f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y}$$

197. Calcule o limite ou mostre que ele não existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + 2y^6}$$

198. Determine o domínio da função e represente-o graficamente $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{y^2 - 4x}}$

199. sabendo que a função $T((x, y) = 30 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ representa a temperatura nos pontos da região do espaço delimitada pela elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ analisando as curvas de nível, responda:
    (a) Em que pontos a temperatura é a mais alta possível?
    (b) Se uma partícula afasta-se da origem, deslocando-se sobre o eixo positivo dos x, sofrerá aumento ou diminuição de temperatura?
    (c) Em que pontos a temperatura é a mais baixa possível?

200. Mostre que o seguinte limite não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

201. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície definida implicitamente pela equação: $x^2y - 4z^2 = -7$ no ponto $(-3, 1, -2)$.

202. Suponha que $z = e^{xy+x-y}$. Qual a taxa de variação de z em $(0, 0)$ quando nos movemos da origem a $(2, 1)$?. Em que direção devemos nos mover para que a taxa de variação de z seja máxima? Qual é o valor dessa taxa? Em que direção a derivada é zero?

203. Determine as equações do plano tangente e reta normal a superficie $\mathcal{S}$ definida pela equação: $yz = \ln(x + z)$ no ponto $(0, 0, 1) \in \mathcal{S}$.

204. A temperatura em cada ponto (x, y) de uma placa de metal é definida por a função $T(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{8}$ graus Celsius. Uma formiga passeia pela placa percorrendo um caminho de modo que sua posição após t segundos seja dada por $x(t) = 1 + 2t$ e $y(t) = \frac{t^2}{3}$. Qual a taxa de variação de temperatura, em relação ao tempo, no caminho da formiga após 3 segundos?

205. Qual é o maior valor que a derivada direcional de $f(x,y,z) = xyz$ pode ter no ponto $(1,1,1)$? Em que direção isso ocorre?

——————————————— 2014 ———————————————

206. Considere a função f dada por

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y-1}{x^2}}$$

(i) Represente formalmente e graficamente o domínio da função $f(x,y)$.

(ii) Esboce algumas curvas de nivel da função

207. Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x+2y}$$

208. Uma caixa cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03m$. As medidas internas são: altura $2m$ e raio da base $1m$. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

209. Suponha que $z = x^2y$. Se $\vec{u} = (a,b)$ é um vetor unitário, escreva a fórmula para a derivada direcional em $(1,-1)$ na direção do vetor $\vec{u} = (a,b)$. Em que direção devemos seguir a fim de que a taxa de variação de z seja 2 ?

210. Considere a função f dada por

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x-1}}$$

(i) Represente formalmente e graficamente o domínio da função $f(x,y)$.

(ii) Esboce algumas curvas de nivel da função

211. Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y\sqrt{x}}{5x+3y^2}$$

212. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{U^2}{R}$ watts.

Se $U = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular um valor aproximado para a variação da energia quando U decresce de $0,001$ volts e R aumenta de $0,002$ ohms.

213. Suponha que $z = x^2 + xy + y^2$.

(a) Qual a taxa de variação de z em $(0,0)$ quando nos movemos da origem a $(2,1)$?.

(b) Em que direção devemos nos mover para que a taxa de variação de z seja máxima? Qual é o valor dessa taxa?

(c) Quais as duas direções em que a derivada direcional é zero?

214. A temperatura de um ponto qualquer de uma chapa de aço é dada por $T(x,y) = x^2 + 4y^2$, (T em celsius, x e y em centimetros).

   (i) Determine e represente no plano xy a equação da isoterma que passa pelo ponto $P(2,1)$.

   (ii) Determine as taxas de variação na direção dos eixos coordenados x e y, no ponto $P(2,1)$;

   (iii) Determine a direção segundo a qual f decresce mais rapidamente a partir do ponto $P(2,1)$ e a razão de variação de f nessa direção.

215. Seja S uma superficie do espaço $\mathbb{R}^3$, definida pela equação:

$$xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$$

   (i) Determinar um vetor normal à superficie S no ponto $P(1,-1,2) \in S$.

   (ii) Achar a equação do plano tangente e da reta normal à superficie S no ponto $P(1,-1,2) \in S$.

   (iii) Determine o valor de z aproximadamente quando $x = 0,99$ e $y = -1,01$.

216. As dimensões de um sólido com forma de uma paralelepípedo, num determinado instante t_0, são: $c(t_0) = 13cm$ (comprimento), $l(t_0) = 9cm$ (largura) e $h(t_0) = 5cm$ (altura). Se c e h crescerem à razão de $2cm/s$ e l decrescer à $4cm/s$. Determine as taxas de variação do volume e da área total no instante t_0.

217. Calcule os seguintes limites , caso existam. se não existirem, justifique:

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{y - x^2}$

   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2 \text{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

218. sabendo que a função $T(x,y) = 30 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ representa a temperatura nos pontos da região do plano delimitada pela elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, Analisando as curvas de nível responda:

   (i) Em que pontos a temperatura é a mais alta possível?

   (ii) Se uma partícula afasta-se da origem, deslocando-se sobre o eixo positivo dos x, sofrerá aumento ou disminuição de temperatura?

   (iii) Em que pontos a temperatura é a mais baixa possível?

219. Seja S uma superficie do espaço $\mathbb{R}^3$, definida pela equação implicita:

$$ye^z + xz - x^2 - y^2 = 0$$

   (i) Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superficie S no ponto $(0,1,0)$.

   (ii) Determine o valor de z aproximadamente quando $x = 0,01$ e $y = 1,01$.

220. Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de $3cm/s$ e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de $2cm/s$. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem $20cm$ de comprimento, o segundo lado tem $30cm$ de comprimento e o ângulo é $\pi/6$.?

221. Calcule os seguintes limites , caso existam. Se não existirem, justifique:

    (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\text{sen }(xy)}{\text{sen } x \text{ sen } y}$

    (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

222. Dada a função $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$

    (i) Determine o seu domínio e o represente no plano xy;

    (ii) Esboce as curvas de nivel $f(x,y) = k$ com os valores $k = 0, k = 1, k = 2$

    (iii) Esboce a curva de nivel $f(x,y) = k$ que pasa pelo ponto $(2,1)$.

223. Determine os limites , caso existam,

    (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3y}{x^2-y}$

    (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} \frac{x^3y^3-1}{xy-1}$

    (iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

224. Para cada função abaixo, encontre a equação do plano tangente e da reta normal no ponto indicado:

    (i) $f(x,y) = x^2y - 3$, em $P(2,1)$

    (ii) $f(x,y,z) = x^3y^2 + y^3z^2 - 76$, em $P(1,2,3)$

225. Determine os pontos da hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$

226. Regra da cadeia

    (i) seja $f(x,y) = x\text{sen }(xy)$, $x(t) = t^5$ e $y(t) = t^{-3}$ encontre $\dfrac{df}{dt}$.

    (ii) seja $f(x,y) = x\ln(xy)$, $x(u,v) = u\, e^v$ e $y(u,v) = u^2v^3$, encontre f_u e f_v.

——— 2015 ———

227. Dado a função $z = \sqrt{y - x^2}$,

    (1.1) Represente graficamente o domínio da função.

    (1.2) Determine as equações da reta normal e do plano tangente à superfície $z = \sqrt{y - x^2}$, no ponto $(1,2,1)$.

    (1.3) Determine a Linearização da função $z = \sqrt{y - x^2}$, no ponto $(1,5)$.

    (1.4) Use a linerização definida na questão (1.3) pra determinar o valor aproximado de $M = \sqrt{4,98 - (1,02)^2}$.

228. O comprimento x de um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 6 cm/s, o comprimento y de um outro lado está diminuindo a uma taxa de 4 cm/s e o ângulo θ entre eles está aumentando a uma taxa de $0,05$ $radiano/s$. Quão rapidamente está variando a área do triângulo quando $x = 80\ cm$, $y = 100\ cm$ e $\theta = \pi/6$?

229. Dado a função $z = \sqrt{x - y^2}$,

    (1.1) Represente graficamente o domínio da função.

    (1.2) Determine as equações da reta normal e do plano tangente à superfície $z = \sqrt{x - y^2}$, no ponto $(2, 1, 1)$.

    (1.3) Determine a Linearização da função $z = \sqrt{x - y^2}$, no ponto $(5, 1)$.

    (1.4) Use a linerização definida na questão (1.3) pra determinar o valor aproximado de $M = \sqrt{4,98 - (0,99)^2}$.

230. Um cone, num certo instante tem raio de $0,5m$ e altura de $1m$. Seu raio aumenta com velocidade de $0,1m/s$ e sua altura com velocidade de $0,05m/s$. Calcule a velocidade com que seu volume aumenta.

231. Seja $f(x, y)$ uma função diferenciavel no ponto $P_o(1, 2)$. Se as derivadas direcionais de $f(x, y)$ no ponto $P_o(1, 2)$ na direção do vetor $\vec{u} = (1, 1)$ é $2\sqrt{2}$ e na direção do vetor $\vec{v} = (0, -2)$ é -3. Qual é a derivada direcional de $f(x, y)$ no ponto $P_o(1, 2)$ na direção $\vec{w} = (-1, -2)$? Justifique a sua resposta

232. Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

$$z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + v\,e^w$$

Determinar os valores de $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$.

233. Determine os pontos da hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

234. Considere o campo escalar definido em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = x \text{ sen } (xy)$

    (i) Determine o gradiente de f no ponto $P(1, \frac{\pi}{2})$ e represente-o graficamente.

    (ii) Calcule $D_{\vec{u}} f(1, \frac{\pi}{2})$, onde $\vec{u} = (2, 1)$

    (iii) Qual é o vetor $\vec{u} =$? onde $D_{\vec{u}} f(1, \frac{\pi}{2}) = 0$

——————————- 2016 ——————————-

235. O raio de um cilindro circular está decrescendo à taxa de $1,2cm/s$ enquanto sua altura está crescendo à taxa de $3cm/s$. A que taxa o volume e a área superficial do cilindro está variando quando o raio é $80cm$ e a altura $150cm$?

236. Determine os pontos da hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

237. Considere o campo escalar definido em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = x^2\, y + e^{xy}$ sen y

(i) Determine o gradiente de f no ponto $P(1,0)$ e represente-o graficamente.

(ii) Determine as direções nas quais as funções crescem e decrescem mais rapidamente em $P(1,0)$

(ii) Calcule $D_{\vec{u}} f(1,0)$, onde $\vec{u} = (2,1)$

(iii) Qual é o vetor $\vec{u}$=? onde $D_{\vec{u}} f(1, \frac{\pi}{2}) = 0$

238. A derivada de $f(x,y,z)$ em um ponto P é maior na direção de $\vec{u} = (1,1,-1)$. Nessa direção , o valor da derivada é $2\sqrt{3}$.

(i) Qual é o valor do $\nabla f(P)$? Justifique sua resposta.

(ii) Qual é o valor da derivada de f em P na direção de $i + j$?

239. Em cerca de quanto variará

$$f(x,y,z) = x + x\cos z - y \text{ sen } z + y$$

quando o ponto $P(x,y,z)$ se deslocar de $P_0(2,-1,0)$ uma distância $ds = 0,2$ unidades em direção ao ponto $P_1(0,1,2)$.

——————————- 2017 ——————————-

240. Determine e esboce os dominios das seguintes funções:

(i) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

(ii) $f(x,y) = \sqrt{y-x}\ \ln(x+y)$

241. Calcule o limite, se ele existir, ou mostre que ele não existe

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3xy}{4x^4 + y^4}$

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,2)} \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$

242. **Regra da cadeia**

(i) Calcule $\dfrac{dz}{dt}$, onde $z = xy + x^2$, com $x = e^t\ \cos t$ e $y = e^{-t}$.

(ii) Um circuito elétrico consiste de um resistor R e de uma força eletromotriz V. Num dado instante, $V = 80volts$ e aumenta a uma taxa de $5volts/min$, enquanto que $R = 40ohms$ e decresce a uma taxa de $2ohms/min$. Da Lei de Ohm, sabe-se que a corrente é dada por $I = V/R$. Calcule $\dfrac{dI}{dt}$.

243. Determine as equações do plano tangente e reta normal às superficies abaixo, no ponto especificado.

(i) $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$, $P(-1,2,1)$.

(ii) $z = \dfrac{2x+y}{x-2y}$, $P(3,1,7)$

244. Seja S uma superficie do espaço $\mathbb{R}^3$, definida pela equação implicita:

$$xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$$

(i) Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superficie S no ponto $(-1, 2, 1)$.

(ii) Determine o valor de z aproximadamente quando $x = -1,02$ e $y = 1,98$.

245. Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de $3cm/s$ e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de $2cm/s$. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem $20cm$ de comprimento, o segundo lado tem $30cm$ de comprimento e o ângulo é $\pi/6$.?

246. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = y\, e^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

247. Determine e esboce os dominios das seguinte funções

(i) $f(x, y) = \sqrt{x - y^2}$

(ii) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - 3x^2 - 6y^2}}$

(iii) $f(x, y) = \sqrt{y - 2x + 4} + \sqrt{1 - y}$

(iv) $f(x, y) = \sqrt{y - x}\ \ln(x + y)$

(v) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 4)}$

248. Encontre algumas curvas de nivel $\mathcal{C}_k$ das funções abaixo e tente visualizar as superficies correspondentes, a partir das mesmas

(i) $f(x, y) = x - y^2$ para $k = -1, 0, 1$

(ii) $f(x, y) = (x - 1)(y - 2)$ para $k = -1, 0, 1$

249. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$. Verifique se f atinge um valor máximo na reta $x = 20 - t,\ y = t,\ \ t \in \mathbb{R}$.(Note que a restrição de f à reta é uma função diferenciável de uma variável)

250. Calcule o limite, se ele existir, ou mostre que ele não existe

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2 - 2}{3 + xy} =$

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(\frac{\pi}{2},1)} \frac{y + 1}{2 - \cos x} =$

(iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} =$

(iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2 + y^2} =$

(v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} =$

251. **Derivadas parciais:** Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguinte funções

(i) $f(x, y) = 3xy - 2x^3y^4$

(iv) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(ii) $g(x, y) = xe^{3y}$

(v) $f(x, y) = x^y$

(iii) $h(x, y) = y\ln(yx^2)$

252. **Plano tangente**

(i) Determine a equação do plano tangente a superfície $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$. **Rpta:**

(ii) Determine os pontos da superficie $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ onde o plano tangente é paralelo ao plano xy. **Rpta:**