Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matematica
Prof. Juan Carlos Vila Bravo

3^{ra} Lista de exercicios de Cálculo II

1. Encontre e classifique os extremos relativos da função

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

   (c) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$; $(x > 0,\ y > 0)$ (d) $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)^{2/3}$

   (e) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$ (f) $f(x,y) = 2xy + x^3 - y^3x$

   (g) $f(x,y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$ (h) $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

   (i) $f(x,y) = 2xy + x^3 - y^3x$ (j) $f(x,y) = (x^2+4y^2)e^{1-x^2-y^2}$

2. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x,y) = y^2 - xy - 3y + 2x$ sobre a região quadrada limitadas pelas retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$.

3. Encontre o maximo e minimo absoluto de $f(x,y) = \text{sen } x + \text{sen } y + \text{sen } (x+y)$, quando os pares (x,y) estão na placa retangular $0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

4. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$, na região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ; 1 \le x \le 3,\ \ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\}$

5. Encontre o máximo e o minimo global de $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, na região triangular no primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0,\ \ y = 0,\ \ y = 9 - x$.

6. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$, na placa triangular limitada pelas retas $x = 2,\ \ y = -2,\ \ x = y$.

7. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ na região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| + |y| \le 1\}$

8. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = 3x - y$ na região
$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ y - x \le 3,\ \ x + y \le 4,\ \ 3x + y \le 6\}$$

9. Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = e^{-xy}$ na região
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \le 1\}$$

10. Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x$ na região
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 4y^2 \le 1\}$$

Máximos e mínimos com restrições: Multiplicadores de Lagrange

11. Determine o retângulo de perímetro maximo, com os lados paralelos aos eixos coordenados, que pode ser inscrito na elipse $x^2 + 2y^2 = 4$.

12. uma caixa cilindrica de base circular tem volume de 27 m^3. Se o material usado nos lados custa 2 reais o m^2 e o material usado na base inferior e superior custa 2 e 4 reais o m^2 respectivamente. Quais devem ser as dimensões do cilindro mais barato.

13. Determinar os eixos da elipse $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$

14. Os cursos de dois rios (dentre dos limites de uma determinada região) são representada aproximadamente pela parábola $y = x^2$ e pela reta $x - y - 2 = 0$. Deve-se unir esses rios por meio de uma canal retilíneo que tenha o menos comprimento possível. Por quais pontos devemos traça-lo? Qual será sua extensão

15. Mostre que a distância do ponto (x_0, y_0) à reta de equação $l \ : \ ax + by + c = 0$ é dada por
$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

16. (Método dos mínimos quadrados) Suponhamos que você tenha feito um experimento varias vezes e obteve como resultados experimentais certas medidas de quantidades y, que varia quando alteramos a quantidade x. Suponhamos que por razões fisicas y é uma função afim de x, isto é $y = ax + b$. Devido a erros experimentais se plotarmos os resultados experimentais
$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$$
observamos que eles nã estarão dispostos extamante sobre uma reta (gráfico da função afim). Assim a pergunta é: Quais são os valores de a e b tal que o gráfico de $y = ax + b$ aproxima da "melhor" forma posivel os dados experimentais? Por "melhor" entendemos os valores de a e b que minimizam a função
$$f(a, b) = \sum_{i=0}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

17. Um container (no formato de paralelepípedo) tem que ter um volume de $81m^3$. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões do container com ese volume e custo mínimo, se o preço de construção nos lados custa 1 real o m^2 e o material usado na base e na tampa custa 2 e 4 reais respectivamente.

18. Um fazendeiro dispoe de 16 reais para construir um cercado. Dois lados (opostos) custam 1 real por metro, enquanto os otros dois lados (opostos) custam 2 reais por metro. Qual são as dimensões da maior area tectangular que ele pode cercar?

19. Encontre os pontos sobre a curva $x^2 + xy + y^2 = 1$ no plano xy que estão mais proximos e mais afastados da origem.

20. Mostre que dentre todos os paralelogramos de perímetro constante igual à $4mts$ o quadrado é aquele que fecha a maior área possivel.

21. Encontre as dimensões do retângulo de maior perimetro que pode ser inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é esse perímetro.?

22. Tanque de armazenamento mais barato: Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenha 8.000 m^3 de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio e altura da parte cilíndrica que você recomendaria para o tanque?.

23. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construida de modo sua área seja 36 mts^2.

24. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio a. Qual é essa área?

25. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

26. Encontre as dimensões da lata cilíndrica circular reta fechada de menor área cujo volume é $16\pi\text{cm}^3$.

27. Encontre o ponto sobre a superficie $z = xy + 1$ mais proximo da origem.

28. Encontre os pontos sobre a superfície $z^2 = xy + 4$ mais próximos da origem.

29. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

30. Encontre o volume da maior caixa retangular fechada no primeiro octante que tem três faces nos planos coordenados e um vértice no plano $2x + 3y + 4z = 12$.

31. Sua empresa está desenvolvendo caixas de papelão grosso para exportar pipocas. As arestas da embalagem presisam ser reforçados com arame. O custo do arame é de 3 *reais* o metro e o custo do papelão é de 1 *real* o metro quadrado, mas a tampa da caixa deve ser feita com um tipo diferente de papelão, que custa 2 *reias* o metro quadrado. Use o método dos multiplicadores de lagrange para encontrar as dimensões da embalagem de modo que ela possa conter 6 m^3 de pipocas tal que o custo da embalagem seja mínimo.

32. Dê as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construida com $27cm^2$ de papelão.

33. Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(2, 2, 1)$ e que delimita no primeiro octante um tetraedro de menor volume.

34. Sendo α, β e γ os ângulos de um triângulo, calcule o valor maximo de

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma$$

Coletânea de provas

-2005

35. Encontre os pontos sobre a curva $x^2+xy+y^2 = 1$ no plano xy que estão mais proximos e mais afastados da origem.

36. Encontre os maximos e minimos absolutos da função $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$, quando os pares (x, y) estão na placa triangular limitada pelas retas $x = 0, \ \ y = 0$ e $x + y = 1$ no primeiro quadrante.

37. Encontre o ponto sobre a superficie $z = xy + 1$ mais proximo da origem.

38. Encontre os maximos e minimos absolutos da função

$$f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y + \text{sen } (x + y),$$

quando os pares (x, y) estão na placa retangular $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \ \ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

-2006

39. Encontre todos os máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da função $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$.

40. Encontre os pontos sobre a superfície $z^2 = xy + 4$ mais próximos da origem.

41. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$$

sobre a região triangular cortada do primeiro quadrante pela reta $x + y = 4$.

42. Encontre todos os máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da função $f(x, y) = y \text{ sen } x$.

43. Determine as dimensões da caixa retangular sem tampa de maior volume que pode ser construida de modo sua área seja 36 mts^2.

44. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de

$$f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$$

sobre a região quadrada limitadas pelas retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$.

todos os máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da função $f(x, y) = 3+2x+2y - 2x^2 - 2xy - y^2$.

45. Encontre as dimensões da lata cilíndrica circular reta fechada de menor área cujo volume é $16\pi \text{cm}^3$.

-2007

46. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$, na placa triangular limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $x+y = 1$ no primeiro quadrante.

47. Encontre o volume da maior caixa retangular fechada no primeiro octante que tem três faces nos planos coordenados e um vértice no plano $2x + 3y + 4z = 12$.

48. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$, na placa triangular limitada pelas retas $x = 2$, $y = -2$, $x = y$.

49. **Tanque de armazenamento mais barato** Foi encomendado para sua empresa o projeto de um tanque para gás liquefeito de petróleo. As especificações do cliente pedem um tanque cilíndrico com extremidades hemisféricas que contenha 8.000 m^3 de gás. O cliente também quer usar a menor quantidade possível de material para construir o tanque. Qual raio e altura da parte cilíndrica que você recomendaria para o tanque?.

50. **Valores extremos. Multiplicadores de Lagrange**

    (c)Encontre o máximo e o minimo global de

    $$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

    na região triangular no primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$.

    (d) Encontre os pontos sobre a curva $x^2 + xy + y^2 = 1$ no plano xy que estão mais proximos e mais afastados da origem.

51. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função

    $$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y,$$

    na placa triangular cortada do primeiro quadrante pela reta $x + y = 4$..

52. Encontre as dimensões do retângulo de maior perimetro que pode ser inscrito na elipse

    $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

    com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é esse perímetro.?

53. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio a. Qual é essa área?

54. Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = e^{-xy}$ na região

    $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \;\; x^2 + 4y^2 < 1\}$$

55. Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

-2008

56. Encontre e classifique os extremos relativos da função

$$f(x,y) = 2xy + x^3 - y^3x$$

57. Um fazendeiro dispoe de 16 reais para construir um cercado. Dois lados (opostos) custam 1 real por metro, enquanto os otros dois lados (opostos) custam 2 reais por metro. Qual são as dimensões da maior area tectangular que ele pode cercar?

58. Encontre e classifique os extremos relativos da função

$$f(x,y) = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

59. Encontre os pontos sobre a curva $\mathcal{C} : x^2 + xy + y^2 = 1$ no plano xy que estão mais proximos e mais afastados da origem.

60. Um container (no formato de paralelepípedo) tem que ter um volume de $81m^3$. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões do container com ese volume e custo mínimo, se o preço de construção nos lados custa 1 real o m^2 e o material usado na base e na tampa custa 2 e 4 reais respectivamente.

61. Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x$ na região

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 3y^2 \leq 2\}$$

62. uma caixa cilindrica de base circular tem volume de 27 m^3. Se o material usado nos lados custa 2 reais o m^2 e o material usado na base inferior e superior custa 2 e 4 reais o m^2 respectivamente. Quais devem ser as dimensões do cilindro mais barato.

63. (1,5-ptos)Analise a natureza dos pontos críticos da seguinte função:

$$f(x,y) = e^{x^2y - xy^2 - xy}$$

64. (1,5-ptos) Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y) = 2x - 2xy + y^2$ na região do plano xy limitada pelos gráficos das funções: $y = x^2$ e $y = 1$.

65. (1,5-ptos)Determine as dimensões de um retangulo de área maxima com dois vértices no eixo-x e os outros dois vértices no gráfico da função $y = 4 - x^2$.

66. (1,5-ptos)Dispomos de $1200cm^2$ de material para fazer um copo cilíndrico (com tampa). Determine o volume máximo possível para este copo.

67. (2-ptos)Um arame de comprimento L é cortado em dois pedaços. Com um deles formaremos um circulo e com o outro um triângulo equilátero. Como devemos cortar o arame para que a soma das áreas limitas pelo círculo e pelo triângulo sejam mínimas

68. Analise a natureza dos pontos críticos da seguinte função:

$$f(x,y) = \frac{-4x}{x^2+y^2+1}$$

69. Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y) = 3x^2+2y^2-4y$ na região do plano xy limitada pelos gráficos das funções: $y = x^2$ e $y = 4$.

70. Encontre os pontos sobre a curva $\mathcal{C} : x^2 + xy + y^2 = 1$ no plano xy que estão mais proximos e mais afastados da origem.

71. Quais devem ser as dimensões de un retângulo de perímetro constante igual a $4m$, de tal forma que sua área seja máxima.

72. Um container (no formato de paralelepípedo) tem que ter um volume de $13,5m^3$. Use multiplicadores de Lagrange para encontrar as dimensões do container com ese volume e custo mínimo, se o preço de construção da base é de $R\$50,00$ por metro quadrado e os lados e a tampa custam $R\$30,00$ o metro quadrado.

73. Analise a natureza dos pontos críticos da seguinte função:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$$

74. Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ na região

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0\}$$

75. Mostre que dentre todos os paralelogramos de perímetro constante igual à $4mts$ o quadrado é aquele que fecha a maior área possivel.

76. **Extremos locais:**Encontre e classifique os extremos relativos da seguinte função:

$$f(x,y) = x^4 - 5x^2 + 3y^2 - 6yx$$

77. **Extremos sobre uma região triangular:** Encontre os extremos absolutos da função

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$$

na região triangular limitadas pelas retas $x = 2$, $y = -2$ e $y = x$.

78. **Distância mínima da origem:** Encontre o ponto sobre a superfície $z^2 - xy = 4$ mais próximos da origem.

79. **Caixa retangular de maior volume em um Elipsóide:** Determine o paralelepípedo retângulo de volume máximo, com as arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito no elipsóide $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

80. **Miscelânea:** Os leitos de dois rios são aproximadamente representados pela parábola $y = x^2$ e a reta $x - y - 2 = 0$. Deseja-se reunir os dois cursos por um canal retilíneo de tal maneira que o comprimento seja mínimo. Quais são os pontos pelos quais deve passar o canal?

    Observação: Distancia de um ponto (x_0, y_0) à reta $ax + by + c = 0$ é dada por:

    $$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

81. **Extremos locais:**Encontre e classifique os extremos relativos da seguinte função:

    $$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

82. **Extremos sobre uma região triangular:** Encontre os extremos absolutos da função

    $$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

    na região triangular limitadas pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y + 3 = 0$.

83. **Distância mínima da origem:** Encontre o ponto sobre a superfície $z = xy + 1$ mais próximos da origem.

84. **Caixa com um vértice sobre o plano:** Encontre o volume da maior caixa retangular fechada no primeiro octante que tem três faces nos planos coordenados e um vértice no plano $2x + 3y + 6z = 12$.

85. **Miscelânea:** Em que pontos da elipse

    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

    as retas tangente forma com os eixos coordenados o triangulo de menor área? ——

——————————————-2009 ——————————————

86. Analise a natureza dos pontos criticos da seguinte função:

    $$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 12x - 6y$$

87. Encontre os extremos absolutos da função

    $$f(x, y) = 12 - 3x - 2y$$

    na região fechada triangular no plano xy com vértices em $(2, 0), (0, 1)$ e $(1, 2)$.

88. Em que pontos da elipse de equação $4x^2 + y^2 = 4$ a tangente a esta forma com os eixos coordenados um triângulo de área minima?

89. Analise a natureza dos pontos criticos da seguinte função:

$$f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$

90. Encontre os extremos absolutos da função

$$f(x,y) = 4x - 8xy + 2y + 1$$

na placa triangular limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $x+y = 1$ no primeiro quadrante.

91. Encontre as dimensões do retângulo de maior perímetro que pode ser inscrito na elipse $4x^2 + y^2 = 4$ com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é ese perímetro?

92. Classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$$

93. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$$

sobre a região triangular no plano xy com vértices em $(2,0)$, $(0,1)$ e $(1,2)$.

94. Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} = \{\ 4x^2 + y^2 = 4, \text{com } x > 0,\ y > 0\}$$

tal que esta reta tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

95. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função $f(x,y) = x^2+y^2-3x-xy$ na região

$$\mathcal{R} = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 9\ \}$$

---

96. Considere o ponto $P(2;3;4)$ e a esfera $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Determine, usando o Teorema de Multiplicadores de Lagrange, os pontos sobre a esfera S que estão mais próximos e mais afastados de P.

97. Consideremos uma chapa com a forma $\mathcal{D} = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\ \}$ e suponhamos que a temperatura em $\mathcal{D}$ seja dada por $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determinar o ponto mais quente e o mais frio de $\mathcal{D}$.

---

98. Calcule o volume máximo de uma caixa retangular cuja soma dos comprimentos de suas arestas é 12mts.

99. Classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$

100. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x, y) = (2x - y)^2$ sobre a região triangular no plano xy com vértices em $(2, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$.

101. Um fabricante tem um pedido de 1000 *unidades* de sabonetes para a higiene pessoal que podem ser produzidos em dois locais diferentes. Sejam x e y o número de unidades produzidas nos dois locais. Encontre o número de unidades que devem ser produzidas em cada local, para esse pedido, de modo a minimizar os custos, se a função de custo é dado por:

$$C(x, y) = \frac{x^2}{4} + 10x + \frac{3y^2}{20} + 12y$$

102. Analise a natureza dos pontos criticos da seguinte função $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$.

---

103. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$ sobre a região triangular no plano xy limitada pelas retas $y = x$, $y = 2x$ e $x + 2y = 2$

---

104. Determine a equação da reta tangente à curva $\mathcal{C} : \{y = 4 - x^2,\ \text{com } x > 0,\ y > 0\}$ tal que esta reta tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

105. Classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$.

106. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x, y) = 2xy^2$ sobre a região triangular no plano xy com vértices em $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 0)$.

107. Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} = \{\ 4x^2 + y^2 = 4, \text{com } x > 0,\ y > 0\}$$

tal que esta reta tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

108. Seja $T(x, y) = xy - 2$ a temperatura no ponto (x, y) da elipse $x^2 + 4y^2 = 8$. Encontre os valores máximos e mínimos de $T(x, y)$ na elipse.

---

109. Encontre o raio e altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio 9. Qual é essa área.

110. Analise a natureza dos pontos críticos da seguinte função:

$$f(x,y) = y^3 + 3yx^2 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

---

111. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume que pode ser construída de modo que sua área superfícial seja 64 cm^2.

——————————————2010——————————————

112. Encontre e classifique os extremos relativos da seguinte função

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

113. Encontre o máximo e mínimo da função $f(x,y) = x^2 - 4xy$, na região triângular no plano xy com vértices em $(2,0)$, $(0,1)$ e $(1,2)$.

114. Determine a distância mais curta entre o ponto $(2,1,-1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

115. Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = x^2y$; sujeita à restrição $x^2 + 2y^2 = 6$.

116. A parte superior de uma janela é um semicírculo de raio r e a parte inferior é um retângulo de perímetro $4mts$. Determine o raio do semicírculo de modo que a área total da janela seja máxima.

117. Encontre e classifique os extremos relativos da seguinte função

$$f(x,y) = x^2 + (y-2)^2x - x$$

118. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = y^2 - 2xy - 2x^2$, na região do plano xy limitada pelos gráficos da parábola $y = x^2$ e a reta $y = 1$.

119. Encontre os pontos sobre o plano $x + y + z = 1$ onde $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ tem seus valores extremos.

120. Use o método dos multiplicadores de lagrange para encontrar as dimensões do retângulo com os lados paralelos ao os eixos coordenados de maior área que pode ser inscrito na região limitada pela parábola $y = 3 - x^2$ e a reta $y = 0$.

121. Encontre e classifique os extremos relativos da seguinte função

$$f(x, y) = (x - 2)^2 y + y^2$$

122. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = x^2 y^2$, na região triângular do plano xy no primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 4 - x$.

123. Achar o ponto da superfície $z = x^2 - y$, mais próximo do ponto $P(0, 1, 1)$.

124. Calcule o volume máximo de uma caixa retangular cuja soma dos comprimentos de suas arestas é 12 mts.

125. Encontre e classifique os extremos relativos da seguinte função

$$f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$$

126. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, na região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

127. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de $32.000 cm3$. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

128. Dado a seguinte função $f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$.

   (a) Encontre os pontos criticos ($\nabla f = \vec{0}$) da função $f(x, y)$.

   (b) Calcule as derivadas f_{xx}, f_{xy} e f_{yy}.

   (c) Enuncie o Teorema do teste da segunda derivada para funções de duas variaveis.

   (d) Classifique cada um dos pontos criticos.

129. Encontre o máximo e mínimo absoluto da função $f(x, y) = y^2 - 2y + 4x$ na região triângular do plano xy limitada pelas retas $2x - y = 2$, $y = x$ e $y = -2$.

   (a) Esboce a região triãngular no plano xy.

   (b) Encontre os pontos criticos ($\nabla f = \vec{0}$) da função $f(x, y)$ no interior do triângulo.

(c) Determine os pontos criticos na fronteira do triângulo.

(d) Identifique os pontos onde a função tem máximo e mínimo absoluto na região triangular.

130. Determine os pontos sobre a a reta $x + 3y = 1$ cujas coordenadas tenham o produto máximo.

131. Em que ponto da curva $\mathcal{C} : \{y = 4 - x^2, \;\; \text{com } x \geq 0, \; y \geq 0\}$ a reta tangente forma com os eixos coordenados um triangulo de menor área?

(a) Graficar a curva $\mathcal{C}$.

(b) Fazer um esboco do triangulo que uma reta tangente num ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ forma com os eixos coordenados.

(c) Determinar a área do triangulo em função de (x_0, y_0).

(d) Usar o teorema dos multiplicadores de lagrange para determinar os pontos (x_0, y_0) tal que a área do triangulo seja mínima.

132. Encontre e classifique os extremos relativos da seguinte função

$$f(x, y) = x^4 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$$

133. Encontre o máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$, na região triângular do plano xy limitada abaixo pelo $eixo - x$, acima pela reta $y = x + 2$ e à direita pela reta $x = 2$.

134. Encontre os pontos sobre a curva $x^2 y = 2$ mais proximos da origem.

135. Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = xy$; sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

136. Em que ponto da elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1, \text{ com } x > 0, \; y > 0$$

a reta tangente forma com os eixos coordenados um triangulo de menor área?

137. Analise a natureza dos pontos criticos da seguinte função:

$$f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$$

138. Encontre os valores máximo e mínimos absolutos de $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$ sobre a região triângular no primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0, \ y = 0$ e $y = 9 - x$.

139. Uma janela tem a forma de um retângulo superposto por um triângulo isósceles, comforme a figura a lado. Se o perímetro da janela é de 12 *pés*, que valores de $x, \ y$ e θ maximizarão a área total da janela?

140. Determine os pontos do gráfico de $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 1$ mais próximos da origem.

141. Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} : \{ \ \frac{x^2}{4} + y = 3, \text{com } x > 0, \ y > 0\}$$

tal que esta reta tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

142. Analise a natureza dos pontos criticos da seguinte função:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

143. Uma chapa circular é determinada pela circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. A temperatura em cada ponto dessa chapa é dada por $T(x, y) = 2x^3 + y^4$. Determine o ponto mais quente e o mais frio dessa chapa.

144. Determine a distância mais curta entre o ponto $(2, 1, -1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

145. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de $32.000cm^3$. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

146. (***)Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} : \{ \ 4x^2 + 9y^2 = 36, \text{com } x > 0, \ y > 0\}$$

tal que esta reta tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

——————————2011——————————-

147. Uma chapa circular é determinada pela circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. A temperatura em cada ponto dessa chapa é dada por $T(x, y) = 2x^3 + y^4$. Determine o ponto mais quente e o mais frio dessa chapa.

148. Considere a curva: $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 4x^2 + 9y^2 = 36, \text{com } x > 0,\ y > 0\}$

    (3-i) Achar a equação da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ num ponto arbitrario $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$.

    (3-ii) Determinar o valor de $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ tal que a reta tangente definido no item (3-i) forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

149. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os

    (v)$f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

    (vi)$f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

150. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D.)

    (vii) $f(x; y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

    (viii) $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D é a região triangular fechada do plano xy com vertices $(0, 0), (0, 6)$ e $(6, 0)$

151. Determine o máximo e o mínimo valores da função f sujeita às restrições explicitadas

    (ix) $f(x; y) = xy;\quad 9x^2 + y^2 = 4$

    (x) $f(x; y; z) = xyz;\quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

152. Multiplicadores de lagrange

    (xi) Determine os pontos da superfície $xy^2z^3 = 2$ que estão mais proximos da origem.

    (xii)Um pentágono é formado colocando-se um triãngulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perímetro $P = 9mts$ fixo, determine os comprimentos dos lados do pentágono que maximimiza sua área.

——————————2012——————————-

153. Encontre todos os máximos locais, Mínimos locais e pontos de sela da seguinte função

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

154. Determine o ponto do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está mais próximo do ponto $(4, 2, 0)$.

155. (PROBLEMA QUENTE)

    Se a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ circunda a circunferência $x^2 + y^2 = 2y$, quais são os valores de a e b que minimizam a área da elipse?

156. Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função:

$$f(x,y) = (1+xy)(x+y)$$

157. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14,1)$.

158. **problema quente:** Um retângulo com comprimento L e largura W é cortado em quatro retângulos menores por duas retas paralelas aos lados. Determine os valores máximos e mínimos da soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores.

159. Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função:

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)\, e^y$$

160. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

——————————————2013——————————————————————-

161. Classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = 3yx^2 - y^3 - 3y$$

162. Determine a distância mais curta entre o ponto $(2,1,-1)$ e o plano $x+y-z=1$.

163. (PROBLEMA QUENTE) Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} = \{\ 4x^2 + y^2 = 4, \text{com } x > 0,\ y > 0\}$$

tal que esta reta tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

164. Classifique os pontos críticos da função

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

165. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser $2cm$, qual é o maior volume possível?

166. (PROBLEMA QUENTE) Determine a equação da reta tangente à curva

$$\mathcal{C} = \{\ y = 4 - x^2, \text{com } x > 0,\ y > 0\}$$

tal que esta reta tangente forme com os eixos coordenados um triângulo de área mínima.

167. Encontre e classifique os extremos locais da função: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

168. Um disco circular tem a forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Se T graus é a temperatura no ponto (x, y) do disco e $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$, calcule o ponto mais frio e o mais quente deste disco.

169. Uma caixa retangular sem tampa, deve ter volume de 32 m^2. Quais devem ser suas dimensões para que sua superfície total seja mínima?

170. Deseja-se fabricar uma forma para 14 cubos de gelo. As dimensões da forma são: comprimento x, largura y e altura z conforme a figura abaixo:

O volume da forma deve ser de $81cm^3$. sabendo que nessas condições existe uma forma de área mínima, determine suas dimensões. Explicite claramente a função que voce está minimizando.

171. Determine os valores máximo e minimo absoluto de $f(x, y) = xy^2$ no conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$$

172. Encontre todos os máximos locais, Mínimos locais e pontos de sela da seguinte função:

$$f(x, y) = x^4 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$$

173. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito na região limitada pela reta $y = 0$ e pela Parábola $y = 4 - x^2$ com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é essa área?

174. Um disco circular tem a forma da região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Se T graus é a temperatura no ponto (x, y) do disco e $T(x, y) = xy$, calcule o ponto mais frio e o mais quente deste disco.

——————————2014——————————-

175. Encontre e classifique os extremos locais da função:

$$f(x, y) = x^2y(1 - x - y)$$

176. Um recipiente cilíndrico deverá ter um volume de 4π cm^3. O custo (por cm^2) de fabricação da tampa e da base de metal é o dobro do custo do restante do recipiente, feito de cartolina grossa. Quais são as dimensões do recipiente mais barato?

177. Seja $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Determine o plano tangente ao gráfico de f que forma com os planos coordenados um tetraedro de volume mínimo.

178. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ seja mínima.

179. Encontre e classifique os extremos locais da função:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

180. Encontre todos os máximos locais, Mínimos locais e pontos de sela da seguinte função:

$$f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$$

181. Consideremos uma chapa com a forma $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e suponhamos que a temperatura em Ω seja dada por $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Determine o ponto mais frio e o ponto mais quente na chapa.

182. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1000 cm^3 que tenha a área de sua superfície mínima.

183. **PROBLEMA QUENTE:** Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da secçaõ transversal perpendicular ao comprimento) for de, no máximo, 108 cm. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

184. Encontre todos os máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da seguinte função:

$$f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$

-

185. Encontre as dimensões da lata cilindrica, circular, reta e fechada de menor área cujo volume é 16π cm^3.

———————————-2015———————————————

–

186. Seja $T(x, y) = xy$ a temperatura no ponto (x, y) da placa de metal em formato de um disco, definida por

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Descubra os pontos onde ocorrem as temperaturas máxima e mínima na placa.

187. Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da seguinte função:

$$f(x, y) = (x^2 + y)\, e^{y/2}$$

Justifique a sua resposta

188. Encontre os pontos do cone $x^2 + y^2 = z^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$. Justifique a sua resposta.

189. Se a elípse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ circunda a circunferência $x^2 + y^2 = 2y$, quais são os valores de a e b que minimizam a área da elipse?

190. Seja $T(x, y) = xy$ a temperatura no ponto (x, y) da placa de metal em formato de uma elipse, definida por

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

Descubra os pontos onde ocorrem as temperaturas máxima e mínima na placa.

191. Encontre o ponto sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ mais distante do ponto $(1, -1, 1)$. Justifique a sua resposta.

192. O correio exige que algumas encomendas no formato de uma caixa tenham a seguinte condição: o perímetro da base somada com a altura não passe de 84cm. Qual é o maior volume que pode ser enviado ?

193. Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da seguinte função:

$$f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$$

Justifique a sua resposta.

194. A temperatura em um ponto (x, y) sobre uma placa metálica é $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga sobre a chapa anda ao redor da circunferência de raio 5 centrada na origem. Quais são as temperaturas máxima e mínima encontradas pela formiga?

195. Determine os valores máximos e minimos locais e os pontos de sela da função:

$$f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$$

196. Determine os valores máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

na região fechada e limitada $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

197. Determine os valores máximos e minimos locais e os pontos de sela da função:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy$$

198. Determine os valores máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$

na região fechada e limitada $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

199. Encontre as dimensões da caixa retangular fechada com máximo volume que pode ser inscrita na esfera unitária.

——————————————————2016——————————————————

-

200. Encontre o máximo e mínimo absoluto de $= f(x,y) = x\ y^2$ na região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 3\}$$

201. Um pentágono é formado colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perimetro P fixo, determine os comprimentos dos lados do pentagono que maximiza sua área.

——————————————————2017—————————————————-

202. Determine os valores máximos e minimos locais e os pontos de sela da seguinte função:

$$f(x,y) = (x-y)(1-xy)$$

Rpta:

203. Determine os valores máximo e mínimo absoluto da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ na região fechada e limitada $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Rpta:

204. Uma caixa retangular sem tampa é feita de $12m^2$ de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

Rpta:

205. Encontre as dimensões da caixa retangular fechada com máximo volume que pode ser inscrita na esfera unitária.

Rpta:

———————————————2018———————————————

206. Encontre todos os máximos locais, Mínimos locais e pontos de sela da seguinte função:

$$f(x,y) = (x - 2 + y^2)(x - y^2)$$

207. Encontre as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito na região limitada pela reta $y = 0$ e pela Parábola $y = 4 - x^2$ com os lados paralelos aos eixos coordenados. Qual é essa área?

- Esboce a região limitada pela reta $y = 0$ e pela Parábola $y = 4 - x^2$.
- Esboce um retângulo de maior área que pode ser inscrito na região com os lados paralelos aos eixos coordenados.
- Use multiplicadores de lagrange (indicando a função e a restrição) para determinar a área do maior retângulo que pode ser inscrito na região.
- Qual é essa área?