
Lista de exercicios de cálculo II

Curitiba, 28 de Maio de 2014

INTEGRAL DE LINHA DE CAMPO VETORIAL:

1. Calcule $\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$, onde $F : \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (função vetorial) e $\mathcal{C}$ uma curva, definida pela função $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
 - (a) $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ e $\mathcal{C}$ é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido antihorário.
 - (b) $F(x, y) = (xy, -y)$ e $\mathcal{C}$ é formado pela reta que ligando $A(-3, -3)$ a $B(-1, 1)$ e pelo arco da parábola $y = x^2$ de $B(-1, 1)$ a $C(2, 4)$.
 - (c) $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ e $\mathcal{C}$ é o círculo centrado na origem, percorrida no sentido anti-horário.
 - (d) $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ e $\mathcal{C}$ é o segmento de reta ligando $(0, 0, 0)$ e $(1, 2, 4)$.
 - (e) $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, z^2 - x^2, y^2 - z^2)$ e $\mathcal{C}$ é a curva obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o plano $y = 1$, percorrida no sentido anti-horário
2. Calcule $\int_C y dx + x^2 dy$, onde $\mathcal{C}$ é a curva parametrizada por:
 - (a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
 - (b) O quadrado de vertices $(\pm 1, \pm 1)$.
 - (c) O quadrado de vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.
3. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força dado:
 - (a) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ ao mover uma partícula ao longo da fronteira da região limitada por $[0, a] \times [0, a]$, $(a > 0)$.
 - (b) $F(x, y, z) = (y, x, z^2)$ para deslocar uma partícula ao longo da helice:
 $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2t)$ do ponto $(2, 0, 0)$ ao ponto $(2, 0, 4\pi)$.
 - (c) $F(x, y, z) = (y, z, x)$ para deslocar uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ do ponto $(0, 0, 0)$ ao ponto $(2, 4, 8)$.
4. Verifique que $\int_C F \cdot dr$ é independente do caminho, achando seu potencial, em caso afirmativo

$$(a) F(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$$

$$(b) F(x, y) = (3x^2y, x^3 + 4y^3)$$

$$(c) F(x, y) = (2xy^2 - y^3, 2x^2y - 3xy^2 + 2) \quad (d) F(x, y) = (2x \sin y + 4e^x, \cos y)$$

$$(e) F(x, y) = (3x^2 + 2y - y^2e^x, 2x - 2ye^x) \quad (f) F(x, y) = (-2y^3 \sin x, 6y^2 \cos x + 5)$$

$$(g) F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$$

$$(h) F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

$$(i) F(x, y, z) = (y \sin z, x \sin z, xy \cos z)$$

$$(j) F(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy + 3y^2, e^z + x^2)$$

Teorema de Green:

$$\oint_{\partial D} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

5. Calcule $\oint_C 4ydx + 7xdy$, onde C é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(2, 2)$, no sentido anti-horário:

(a) diretamente.

(b) utilizando o teorema de Green.

6. Calcule as seguintes integrais utilizando o teorema de Green, ao longo das curvas $\mathcal{C}$, orientadas positivamente.:

(a) $\oint_C \frac{e^y}{x} dx + (e^y \ln x + 2x) dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.

(b) $\oint_C (\cos x - 5y) dx + (4x - \frac{1}{y}) dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $y + x^2 - 9 = 0$ e $y - 5 = 0$.

(c) $\oint_C (x - y) dx - x^2 dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região $[0, 2] \times [0, 2]$.

(d) $\oint_C (e^x - 3y) dx + (e^y + 6x) dy$, onde $\mathcal{C}$ é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

(e) $\oint_C (x + y) dx + (y - x) dy$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

7. Utilizando os corolários do teorema de Green, calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas:

$$(a) y = x^2 \text{ e } y^2 = x$$

$$(b) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(c) y = 4x^2 \text{ e } y = 16x$$

$$(d) y^2 = x^3 \text{ e } y = x$$

8. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região nas hipóteses do teorema de Green. Utilizando o teorema, verifique que as coordenadas do centroide de D são dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_{\partial D} x^2 dy,$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_{\partial D} y^2 dx$$

onde $A = \text{área}(D)$

(a) Ache o centróide do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

(b) Ache o centróide da região definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ tal que $y \geq 0$

9. Verifique que $\oint_C y^2 dx + (2xy - 3) dy = 0$, sendo C a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Calcule a integral ao longo do arco dessa elipse, situado no primeiro quadrante

10. Encontre todos os possíveis valores de

$$I = \oint_C \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{y-x}{x^2+y^2} \right) dy$$

onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

11. Calcule

$$\oint_C \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) dy$$

onde C é a curva definida por $y^2 = 2(x+2)$, $-2 \leq x \leq 2$, orientada no sentido decrescente em relação à variável y .

12. Sejam F_1 e F_2 funções com derivadas parciais contínuas no plano xy tais que

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, exceto nos pontos $(4, 0)$, $(0, 0)$ e $(-4, 0)$. Indique por C_1 , C_2 , C_3 e C_4 as circunferências de equações:

$$(x-2)^2 + y^2 = 9, \quad (x+2)^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 25 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1$$

respectivamente, orientadas no sentido anti-horário. Sabendo que:

$$\oint_{C_1} F_1 dx + F_2 dy = 11, \quad \oint_{C_2} F_1 dx + F_2 dy = 9 \quad \text{e} \quad \oint_{C_3} F_1 dx + F_2 dy = 13$$

calcule $\oint_{C_4} F_1 dx + F_2 dy$.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE DE CAMPO VETORIAL:

$$\int_S \int G \cdot ds = \int_S \int (G \cdot n) ds = \int_D \int G(\varphi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) du dv$$

13. Calcule o fluxo do campo vetorial $G(x, y, z)$ através da superfície $\mathcal{S}$ no sentido dado:

(a) $G(x, y, z) = (z^2, x, -3z)$ para fora (normal para fora do eixo x) através da superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$

(b) $G(x, y, z) = (3z, -4, y)$ onde a normal unitária apontando para cima da superfície $x + y + z = 1$ no primeiro octante.

- (c) $G(x, y, z) = (x, y, z)$ onde a normal unitária apontando para cima da superfície $z = 9 - x^2 - y^2$, $0 \leq z$.
- (d) $G(x, y, z) = (z^2 - x, -xy, 3z)$ e $\mathcal{S}$ é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ e o plano xy , com vetor normal exterior.
- (e) $G(x, y, z) = (-3xyz^2, x + 2yz - 2xz^4, yz^3 - z^2)$ e $\mathcal{S}$ é a união da superfície $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ com $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ indicando a orientação escolhida para $\mathcal{S}$.

Teorema de Stokes:

$$\int_{\partial \mathcal{S}} G \cdot dr = \int_{\mathcal{S}} \text{rot}(G) \cdot ds$$

14. calcule:

- (a) $\oint_{\mathcal{C}} xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $z + y = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$
- (b) $\oint_{\mathcal{C}} ydx + zdy + xdz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do plano $x + y = 2$ com esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.
- (c) $\oint_{\mathcal{C}} 2xydx + [(1 - y)z + x^2 + x]dy + (\frac{x^2}{2} + e^z)dz$ onde $\mathcal{C}$ é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$, com o cone $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$.
- (d) Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = \sqrt{x^2 + y^2}; 1 \leq z \leq 3\}$.

Calcule:

$$\int_{\mathcal{S}} \text{rot}(G) \cdot ds$$

onde $G(x, y, z) = (yz, -xz, z^3)$.

Teorema de Gauss (Teorema da divergencia):

$$\int_{\partial W} G \cdot ds = \int_W \text{div}(G) dx dy dz$$

15. Seja W o sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$. Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (y^2, x, zx)$ através da superfície $S = \partial W$, com campo de vetores normais exterior a S , se:
16. Calcule o fluxo do campo de vetores:

$$G(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

através da superfície do sólido $W : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, com campo de vetores normais exterior a superfície.

17. Calcule o fluxo do campo de vetores $G(x, y, z) = (2x, -1, z)$ através da superfície do tetraedro determinado pelo plano $2x + y + 3z = 6$ e pelos planos coordenados.
18. Encontre o fluxo do campo $G(x, y, z) = (e^y + \cos(yz), -2zy + \sin(xz), z^2)$ através da superfície S , orientada positivamente, união das superfícies S_1 e S_2 , onde S_1 é definida por $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$ e S_2 tem equação $z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.

2005

19. Verifique se o seguinte campo vetorial

$$F(x, y, z) = (y^2 + 2x + 4z)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5z)\mathbf{j} + (4x - 5y + 3z)\mathbf{k}$$

é conservativo, em caso afirmativo, encontre a função potencial f da qual ela deriva.

20. Use o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy,$$

onde C é contorno no 1º quadrante, formado pelas retas $x = 0$, $y = 1$ e a parábola

$$y = x^2.$$

21. Calcule $\int_S (F \cdot n) dS$ onde:

$F(x, y, z) = (0, y, z)$ e S é o hemisfério $x = \sqrt{4 - y^2 - z^2}$, com vetor normal n exterior.

22. Calcule a seguinte integral, ao longo da curva C , orientada positivamente

$$\oint_C \frac{e^y}{x} dx + (e^y \ln x + 2x) dy,$$

onde C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.

2006

23. A força em um ponto (x, y, z) em três dimensões é $F(x, y, z) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por $F(x, y, z)$ quando seu ponto de aplicação desloca-se na curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ a $(2, 4, 8)$.

24. Verifique se o seguinte campo vetorial

$$F(x, y, z) = (y^2 + 2x + 4z)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5z)\mathbf{j} + (4x - 5y + 3z)\mathbf{k}$$

é conservativo, em caso afirmativo, encontre a função potencial f da qual ela deriva.

25. Use o teorema de Green para calcular a integral de linha $\oint_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$, onde C é contorno no 1º quadrante, formado pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e a parábola $y = x^2$.

26. Calcule a seguinte integral de superfície: $\int_S z\sqrt{x^2 + y^2} dS$ onde S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ compreendida entre os planos $z = 1$, e $z = 2$.

27. Calcule $\int_S (F \cdot n) dS$ onde: $F(x, y, z) = y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ e $\mathcal{S}$ é o hemisfério $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, com vetor normal n exterior a $\mathcal{S}$.

28. Calcule a seguinte integral, ao longo da curva $\mathcal{C}$, orientada positivamente

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^y}{x} dx + (e^y \ln x + 2x) dy,$$

onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.

- 2007 -

29. Use uma parametrização para encontrar o fluxo $I = \iint_S F \cdot n \, ds$ através da superfície no sentido dado:

a) **Esfera:** $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante com vetor normal n no sentido oposto à origem.

b) **Tronco de cone:** $F(x, y, z) = (-x, -y, z^2)$ através do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, com vetor normal n para fora (normal para fora do eixo z).

30. Use uma parametrização para encontrar o fluxo $F = \iint_S F \cdot n \, ds$, através da superfície no sentido dado:

a) **Parabolóide:** $F(x, y, z) = 4x \mathbf{i} + 4y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$ através da superfície cortada do fundo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ pelo plano $z = 1$, com vetor normal n para fora (normal para fora do eixo z).

31. Calcule a seguinte integral:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva definida por $y^2 = 2(x + 2)$, $-2 < x < 2$, orientada no sentido decrescente de y .

32. Integral de Linha

a) Integre a função vetorial $F(x, y, z) = (-y \sin z) \mathbf{i} + (x \sin z) \mathbf{j} + (xy \cos z) \mathbf{k}$ ao redor da circunferência cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ pelo plano $z = -1$, no sentido horário quando visto de cima.

b) Calcule a seguinte integral:

$$I = \oint_{\mathcal{C}} (y + e^x \ln y) dx + \frac{e^x}{y} dy,$$

onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região que é limitada acima pela curva $y = 3 - x^2$ e abaixo pela curva $y = x^4 + 1$, orientada no sentido anti-horário.

- 2008 -

33. Encontre o trabalho realizado pela força $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ no sentido anti-horário ao redor da elipse $4x^2 + y^2 = 4$ do ponto $(1, 0)$ a ele mesmo.

34. Para que valores de a e b a função vetorial:

$$F(x, y, z) = (y^2 + 2bxz)\mathbf{i} + y(ax + bz)\mathbf{j} + (y^2 + bx^2)\mathbf{k}$$

será um campo gradiente?

35. Integre $F(x, y, z) = -(y \sin z)\mathbf{i} + (x \sin z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$ ao redor da circunferência cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ pelo plano $z = -1$, no sentido horário quando visto de cima.

36. Calcule o trabalho realizado pela força $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$ ao longo da curva C definida por $y^2 = 2(x + 2)$ do ponto $(2, 2\sqrt{2})$ até $(2, -2\sqrt{2})$.

37. Calcule a integral de linha:

$$I = \int_C (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy$$

onde $\mathcal{C}$ é o arco de parábola $2x = \pi y^2$, do ponto $A(0, 0)$ até o ponto $B(\frac{\pi}{2}, 1)$.

38. Integre

$$F(x, y) = \left\{ \frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{-x^3}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \mathbf{j}$$

ao redor da elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4} + (y - \frac{1}{3})^2 = 1$, percorrida no sentido anti-horário.

39. Seja $\vec{F}(x, y) = (axy, e^y + 2x^2)$

i.- Encontre o valor de a para que $\vec{F}(x, y)$ seja um campo gradiente.

ii.- Para este valor de a encontrado na parte (i), encontre a função

potencial para $\vec{F}(x, y)$

iii.- Para este mesmo valor de a obtido em (i) e (ii), encontre o trabalho

feito por $\vec{F}(x, y)$ ao longo da trajetória $x = t, y = \cos t, 0 \leq t \leq \pi$.

40. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (2xy + y, x^2)$ e a curva $\mathcal{C}$: fronteira da região triangular limitado pelas retas: $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 1$, percorrida no sentido anti-horário

(iv) Calcule a integral de linha $I = \int_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r}$, usando o Teorema de

Green.

(v) Calcule esta mesma integral de linha usando a definição.

41. Integre $\vec{F}(x, y, z) = (-y \sin z, x \sin z, xy \cos z)$ ao redor da circunferência cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ pelo plano $z = -1$, no sentido horário quando visto de cima.
42. Calcule a integral de linha

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva definida por $y^2 = 2(x + 2)$, com $-2 \leq x \leq 2$, orientada no sentido decrescente de y .

43. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, z \sin y, 2z + axz + b \cos y)$
- Encontre o valor de a e b para que $\vec{F}(x, y, z)$ seja um campo gradiente.
 - Para estes valores de a e b encontrado na parte (i), encontre a função potencial para $\vec{F}(x, y, z)$
 - Para estes mesmos valores de a e b obtidos em (i) e (ii), encontre o trabalho feito por $\vec{F}(x, y, z)$ ao longo da trajetória $x = t^3$, $y = 1 - t^2$, $z = t$ para $-1 \leq t \leq 1$.
44. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (xy^2, -x^2y)$ onde $\mathcal{C}$: é a elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, percorrida no sentido anti-horário

iv.-(10 pts) Calcule a integral de linha $I = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\mathbf{r}$, usando o Teorema de Green.

v.-(15 pts) Calcule esta mesma integral de linha usando a definição.

45. Integre $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y, x + y, 4y^2 - z)$ ao redor da circunferência cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pelo plano $z = -y$, no sentido anti-horário quando vista de cima.
46. Calcule a integral de linha

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva definida por $y^2 = 2(2 - x)$, com $-2 \leq x \leq 2$, orientada no sentido crescente de y .

- 2009 -

47. Considere γ um caminho de classe C^1 ligando o ponto $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Dado o campo vetorial $F(x, y) = (2y^2 - 12x^3y^3)\mathbf{i} + (4xy - 9x^4y^2)\mathbf{j}$.
- (i) Mostre que a integral $\int_{\gamma} F d\gamma$ não depende do caminho γ .

(ii) Calcule a integral acima.

48. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo- x até $(0, 2)$, e logo ao longo do semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $F(x, y) = x\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$.
49. Encontre o trabalho realizado por $F(x, y) = (2xy^3)\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$ para mover uma partícula uma vez no sentido anti-horário ao redor da curva $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$: é a fronteira da região "triangular" no primeiro quadrante limitada pelo eixo x , pela reta $x = 1$ e pela curva $y = x^3$
-

50. Encontre o trabalho realizado pela força $F(x, y) = (yz) \vec{\mathbf{i}} + (zx) \vec{\mathbf{j}} + (xy) \vec{\mathbf{k}}$ ao longo da curva $\mathcal{C}$ obtida pela interseção do cilindro $y = x^2$ com o parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$, contida no primeiro octante percorrido do ponto $(1, 1, 0)$ até o ponto $(0, 0, 2)$.
-

51. Use o Teorema de Green para calcular a seguinte integral de linha:

$$\oint_{\mathcal{C}} (y^2) dx + (xy) dy$$

$\mathcal{C}$: a fronteira da região entre os gráficos de $y = -3x$ e $y = 4 - x^2$, orientado no sentido anti-horário. Faça um esboço da região.

52. Calcule:

$$\int_{\mathcal{C}} (e^x - 3y) dx + (e^y + 6x) dy$$

ao longo da curva $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ até $(0, 1)$, percorrida no sentido anti-horário. Faça um esboço da curva.

53. Use o Teorema de Green para calcular a seguinte integral de linha:

$$\oint_C (y^2) dx + (xy) dy$$

$\mathcal{C}$: a fronteira da região entre os gráficos de $y = -3x$ e $y = 4 - x^2$, orientado no sentido anti-horário. Faça um esboço da região.

54. Calcule:

$$\int_C (e^x - 3y) dx + (e^y + 6x) dy$$

ao longo da curva $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ até $(0, 1)$, percorrida no sentido anti-horário. Faça um esboço da curva.

55. Determinar o trabalho realizado pela força

$$F(x, y) = 2(x^2 + y^2) \vec{\mathbf{i}} + (x + y)^2 \vec{\mathbf{j}}$$

ao mover uma partícula ao longo do caminho fechado $\mathcal{C}$: fronteira do triângulo de vértices $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ e $C(1, 3)$ percorrida em sentido horário.

56. Determinar o trabalho realizado pela força

$$F(x, y) = \frac{y + x}{x^2 + y^2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{y - x}{x^2 + y^2} \vec{\mathbf{j}}$$

ao mover uma partícula ao longo do caminho fechado $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ percorrida em sentido anti-horário.

57. Encontre o trabalho realizado pela força $F(x, y) = (xy) \vec{\mathbf{i}} + (y - x) \vec{\mathbf{j}}$ ao longo da curva $x = y^2$ de $(4, 2)$ até $(1, -1)$. Faça um esboço da curva.

58. Encontre uma função potencial $f(x, y, z)$ para o campo:

$$F(x, y, z) = (e^x \ln y) \vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right) \vec{\mathbf{j}} + (y \cos z) \vec{\mathbf{k}}$$

59. Calcule:

$$\oint_{\mathcal{C}} (2xy) \, dx + (x + y) \, dy$$

$\mathcal{C}$: a fronteira da região entre os gráficos de $y = x$ e $y = \sqrt{x}$, orientado no sentido horário. Faça um esboço da região.

60. Calcule:

$$\int_{\mathcal{C}} (\sin x \cos y) \, dx + (\cos x \sin y) \, dy$$

ao longo da curva $x = y^2$ de $(0, 0)$ até $(1, 1)$. Faça um esboço da curva.

61. Determinar o trabalho realizado pela força

$$F(x, y) = \frac{y + x}{x^2 + y^2} \vec{\mathbf{i}} + \frac{y - x}{x^2 + y^2} \vec{\mathbf{j}}$$

ao mover uma partícula ao longo do caminho fechado $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ percorrida em sentido anti-horário.

62. Use o teorema de Green para determinar o trabalho realizado pela força

$$F(x, y) = (3y + x) \vec{\mathbf{i}} + (9y - x) \vec{\mathbf{j}}$$

ao longo da curva $y = 2|x|$ do ponto $(-1, 2)$ até o ponto $(2, 4)$. Faça um esboço da curva $\mathcal{C}$.

- 2010 -

63. Calcule a integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ e $\mathcal{C}$ consiste no segmento de reta de $(1, 0, 0)$ à $(3, 4, 2)$.

64. Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força

$$\vec{F} = (\sin x \cos y) \vec{\mathbf{i}} + (xy + \cos x \sin y) \vec{\mathbf{j}}$$

ao mover uma partícula do ponto $(0, 0)$ até o ponto $(2, 4)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

-
-
65. Encontre o fluxo de $\vec{F}$, isto é, $\int \int_{\mathcal{S}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\mathcal{S}$, onde $\vec{F} = (x + y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathcal{S}$ é a superfície do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ entre os planos $z = 0$ e $z = 1$, com vetor normal apontando para fora de $\mathcal{S}$.
-

-
66. Calcule a integral de linha $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2x)$ e $\mathcal{C}$ consiste na parte da parábola $y = 2x^2$ de $(1, 2)$ à $(-2, 8)$.
-

67. Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força

$$\vec{F} = (\sin x \cos y) \mathbf{i} + (xy + \cos x \sin y) \mathbf{j}$$

ao mover uma partícula do ponto $(-1, 1)$ até o ponto $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

68. Use o Teorema de Green para calcular a seguinte integral de linha:

$$\oint_{\mathcal{C}} (x^2 + y) dx + (xy^2) dy, \text{ onde } \mathcal{C} \text{ é a curva fechada definida por } y^2 = x \text{ e } y = -x.$$

69. Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força

$$\vec{F} = (yz + 1) \mathbf{i} + (xz + 1) \mathbf{j} + (xy + 1) \mathbf{k}$$

ao mover uma partícula do ponto $(4, 0, 3)$ até o ponto $(-1, 1, 2)$ através de um segmento retilíneo.

70. Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força

$$\vec{F} = (\sin x \cos y) \mathbf{i} + (xy + \cos x \sin y) \mathbf{j}$$

ao mover uma partícula do ponto $(-1, 1)$ até o ponto $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

71. Use o Teorema de Green para calcular a seguinte integral de linha:

$$\oint_{\mathcal{C}} (x + y^2) dx + (1 + x^2) dy,$$

onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região delimitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

72. Achar o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y) = (x^2 + xy, xy^2)$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$, e então de volta à origem ao longo do eixo y .
-

73. Determine se $\vec{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$, isto é, exiba uma função potencial associada ao campo.

(a) $\vec{F}(x, y) = (ye^x + \sin y) \vec{i} + (e^x + \cos y) \vec{j}$

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (2xy) \vec{i} + (x^2 + 2yz) \vec{j} + (y^2) \vec{k}$

74. Use o Teorema de Green para calcular a seguinte integral de linha:

$\oint_{\mathcal{C}} (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (\cos(y^2) + 2x) dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

2011

75. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y) = (6y + x, y + 2x)$ para mover uma partícula uma vez no sentido horário ao redor da curva fechada $\mathcal{C}$: fronteira da região "triangular" no primeiro quadrante limitada pelo eixo x , eixo y e pela curva $x = 1 - y^2$.

76. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta de $(1, 0, 0)$ à $(3, 4, 2)$.

77. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha: $\oint_{\mathcal{C}} (e^x - x^2y) dx + (3x^2y) dy$ ao longo da curva fechada $\mathcal{C}$ determinada por $y = x^2$ e por $x = y^2$ com orientação positiva.

78. Use o Teorema da Divergência para calcular a integral de superfície $\int \int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\mathcal{S}$ ou seja, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de $\mathcal{S}$, onde:

$$\vec{F}(x, y, z) = 3xy^2 \vec{i} + x e^z \vec{j} + z^3 \vec{k}$$

$\mathcal{S}$ é a superfície limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$.

79. Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y) = (6y + x, y + 2x)$ para mover uma partícula uma vez no sentido horário ao redor da curva fechada $\mathcal{C}$: fronteira da região "triangular" no primeiro quadrante limitada pelo eixo x , eixo y e pela curva $x = 4 - y^2$.

80. Encontre a circulação do campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 y^3, 1, z)$ ao redor da curva

$\mathcal{C}$: Interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

81. Calcule $\int_{\mathcal{C}} (xy) dx + (x + y) dy$ ao longo da curva $y = x^2$ de $(-1, 1)$ até $(2, 4)$.

82. Encontre uma função potencial $f(x, y, z)$ para o campo vetorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

83. Aplique o teorema de Green para calcular a integral de linha: $\oint_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy$ onde $\mathcal{C}$ é a fronteira do triângulo limitado pelas retas: $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$.

2012

84. Calcule $\int_{\mathcal{C}} -2y dx + 3z dy + x dz$, sendo $\mathcal{C}$ a interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$, com $y \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(-1, 0, 0)$ ao ponto $(1, 0, 0)$.

85. O campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (\frac{e^y}{x}, e^y \ln x + 2x)$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva $x = y^2 + 1$ percorrida uma vez do ponto $(2, 1)$ ao ponto $(2, -1)$. Calcule o trabalho realizado por $F(x, y)$.

86. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ através da superfície $\mathcal{S}$: $z = 1 - x^2 - y^2$, com $0 \leq z \leq 1$, na direção do vetor normal $\vec{n}$ exterior.

87. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xy, xz)$ e $\mathcal{C}$ é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, percorrido nessa ordem;

88. **Problema quente:** Dentre todas as curvas fechadas, simples e lisas no plano XY orientadas no sentido anti-horário, encontre aquela ao longo da qual o trabalho realizado por $\vec{F}(x, y) = (y^3 - y, -2x^3)$ é maior.
89. Encontre o trabalho realizado pela força $F(x, y) = xy \vec{i} + (y - x) \vec{j}$ sobre o segmento de reta de $(1, 1)$ até $(2, 3)$.
90. O campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (\frac{2x}{y} - 3y, \frac{1 - x^2}{y^2})$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva $y = x^2 + 1$ percorrida uma vez do ponto $(1, 2)$ ao ponto $(-1, 2)$. Calcule o trabalho realizado por $F(x, y)$.
91. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, -2xy, 3xz)$ através da superfície $\mathcal{S} : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, com $1 \leq z \leq 2$, na direção do vetor normal $\vec{n}$ exterior.
92. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (y, xz, z^2)$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, percorrido nessa ordem;
93. **Encontre o trabalho** realizado pela força $\vec{F}(x, y) = (\frac{2x}{y} - 3y, \frac{1 - x^2}{y^2})$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva $y = x^2 + 1$ percorrida uma vez do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(2, 5)$.
94. Fechando, de uma forma adequada, a superfície aberta $\mathcal{S}$ dada e utilizando o **teorema de Gauss**, calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (z \arctan(y^2), z^3 \ln(x^2 + 1), z)$ através da superfície $\mathcal{S} : z = 2 - x^2 - y^2$, com $1 \leq z \leq 2$, com normal $\vec{n}$ exterior
95. Use o **teorema de Stokes** para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ e C é a curva interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima;

— 2013 —

96. Sabe-se que o campo $\vec{F}(x, y) = (e^{x+y} + 1, e^{x+y})$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.
- (a) Encontre uma função potencial para $\vec{F}(x, y)$
- (b) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é o arco de circunferência $(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, com $x \geq 1$ que vai de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.
97. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

$$\oint_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$$

C é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

98. O campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (\frac{e^y}{x}, e^y \ln x + 2x)$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva $x = y^2 + 1$ percorrida uma vez do ponto $(2, 1)$ ao ponto $(2, -1)$. Calcule o trabalho realizado por $F(x, y)$.
99. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xy, xz)$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 2)$, $((1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, percorrido nessa ordem;
100. O campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (\frac{e^y}{x}, e^y \ln x + 2x)$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva $y = \sin x$ percorrida uma vez do ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ao ponto $(\pi, 0)$. Calcule o trabalho realizado por $F(x, y)$.
101. Determine o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x, y, z) = (3y + z, y - 3x, e^z + x)$ para deslocar uma partícula ao longo da **hélice circular** : $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ que vai de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, 2\pi)$.

102. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$ e C é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, percorrido nessa ordem;

— 2014 —

103. Determine se $\vec{F}(x, y, z) = (2xy)\vec{i} + (x^2 + 2yz)\vec{j} + (y^2)\vec{k}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$, isto é, exiba uma função potencial associada ao campo.
104. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y, z) = (x)\vec{i} + (y + 2)\vec{j}$ para movimentar um objeto sobre um arco da cicloide $\sigma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.
105. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva,

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy,$$

onde C é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

106. Use o Teorma de Stokes para calcular:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2)\vec{i} + (y + z^2)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$ e C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

107. Use o Teorema da Divergência para calcular a integral de superfície $\int \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$; ou seja, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S . Onde:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy \sin z) \vec{i} + \cos(xz) \vec{j} + (y \cos z) \vec{k}$$

$$S : \text{é o elipsóide } x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

108. Determine se $\vec{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$, isto é, exiba uma função potencial associada ao campo.

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y + yz) \vec{i} + (xz - e^x \sin y) \vec{j} + (xy + z) \vec{k}$$

109. Calcule a integral de linha $\int_C xy^2 ds$, onde a curva C é parametrizada por:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad \text{com } t \in [0, \pi].$$

110. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

$$\vec{F}(x, y) = (e^x + yx^2, e^y - xy^2), \quad C \text{ consiste na circunferência } x^2 + y^2 = 25 \text{ orientada no sentido horário.}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ entre os planos } z = 0 \text{ e } z = 2.$$

111. Determine se $\vec{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$, isto é, exiba uma função potencial associada ao campo.

$$(i) \quad \vec{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x) \vec{i} + (-x^2 \sin y - \sin x) \vec{j}$$

$$(ii) \quad \vec{F}(x, y, z) = (yze^{xz}) \vec{i} + (e^{xz}) \vec{j} + (xye^{xz}) \vec{k}$$

112. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

$$\vec{F}(x, y) = (e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2), \quad C \text{ consiste no arco de curva } y = \cos x \text{ de } (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

$$\text{à } (\frac{\pi}{2}, 0) \text{ e do segmento de reta } (\frac{\pi}{2}, 0) \text{ à } (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

113. Determine se $\vec{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$, isto é, exiba uma função potencial associada ao campo.

$$(i) \quad \vec{F}(x, y) = (ye^x + \sin y) \vec{i} + (e^x + x \cos y) \vec{j}$$

$$(ii) \quad \vec{F}(x, y, z) = (2xy) \vec{i} + (x^2 + 2yz) \vec{j} + (y^2) \vec{k}$$

114. Use o Teorema de Green para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

$$\vec{F}(x, y) = (\sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y}), \quad C \text{ consiste no arco de curva } y = \sin x \text{ de } (0, 0) \text{ à}$$

$(\pi, 0)$ e do segmento de reta $(\pi, 0)$ à $(0, 0)$.

— 2015 —

115. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\vec{i} + (x^3z - 3x)\vec{j} + (x^3y + 2z)\vec{k}$.

Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva com início em $(0, 0, 2)$ e término em $(3, 0, 0)$, como mostrado na figura:

[width=0.3]fig1(prova-4)

116. Calcule $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS$; onde $\vec{F}(x, y, z) = (x)\vec{i} + (y)\vec{j} + (z^4)\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$, com vetor normal $\vec{n}$ apontando para o plano xy .

117. Use o **Teorema de Stokes** para calcular:

Onde $\vec{F}(x, y, z) = (e^{-x}, e^x, e^z)$ e C é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

118. Use o **Teorema de Gauss** para calcular a integral de superfície $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}_e) dS$; ou seja, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S .

Onde $\vec{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\vec{i} + (xe^{-z})\vec{j} + (\sin yz + zx^2)\vec{k}$ e S é a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

119. (**Problema quente**) Encontre uma curva fechada simples C para o qual o valor da integral de linha $\oint_C (y^3 - y) dx - 2x^3 dy$ é máximo.

120. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\vec{i} + (x^3z - 3x)\vec{j} + (x^3y + 2z)\vec{k}$. Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva de interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$, situada no primeiro octante.

121. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2)\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, Onde C é a fronteira cortado do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

122. Mostre que $\vec{F}(x, y, z) = (2x \ln y - yz, \frac{x^2}{y} - xz, -xy)$ é um campo vetorial conservativo. Então, encontre a função f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Use esse fato para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde C é o segmento de reta de $(1, 2, 1)$ a $(2, 1, 1)$.

Rpta:

123. Use o Teorema de Green para calcular $\oint_C (y^2 - x^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, onde C é triângulo limitado por $y = 0$, $x = 3$, $y = x$. Orientado no sentido anti-horário.

Rpta:

124. Determine o fluxo exterior(para longe do eixo z) do campo $\vec{F}(x, y, z) = (4x, 4y, 2)$ através da superfície cortada do fundo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ pelo plano $z = 1$.

Rpta: $Fluxo =$

125. Use o **Teorema de Stokes** para calcular a seguinte integral (Circulação de $\vec{F}$ na curva $\mathcal{C}$):

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 y^3 dx + 1 dy + z dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$.

Rpta: $Circulação =$

126. Use o **Teorema de Gauss** para calcular a seguinte integral (Fluxo de $\vec{F}$ através de $\mathcal{S}$):

$$\int \int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\mathcal{S}$$

Onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2, -2xy, 3xz)$$

e $\mathcal{S}$ é a superfície da região cortada do primeiro octante pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Rpta: $Fluxo =$

127. Calcule o trabalho (W) realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y) = (x \sin y, y)$ sobre uma partícula que se move sobre a parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.

Rpta: $W =$

128. Mostre que $\vec{F}(x, y, z) = (e^y, xe^y + e^z, ye^z)$ é um campo vetorial conservativo. Então, encontre a função f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Use esse fato para calcular $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde $\mathcal{C}$ é o segmento de reta de $(0, 2, 0)$ a $(4, 0, 3)$.

Rpta:

129. Use o Teorema de Green para calcular $\oint_{\mathcal{C}} yx^2 dx - xy^2 dy$, onde $\mathcal{C}$ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ orientado no sentido anti-horário.

Rpta:

130. Determine o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ através da parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima.

Rpta: $Fluxo =$

131. Use o **Teorema de Stokes** para calcular a seguinte integral (Circulação de $\vec{F}$ na curva $\mathcal{C}$):

$$\oint_{\mathcal{C}} xy dx + 2z dy + 3y dz$$

onde $\mathcal{C}$ é a curva interseção do plano $x + z = 5$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Rpta: *Circulação* =

132. Use o **Teorema de Gauss** para calcular a seguinte integral (Fluxo de $\vec{F}$ através de $\mathcal{S}$):

$$\int \int_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\mathcal{S}$$

Onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z, xe^{-z}, zx^2 + \sin y)$$

e $\mathcal{S}$ é a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

Rpta: *Fluxo* =

2016

133. Determine se os seguintes campos são conservativos e, em caso afirmativo, ache seu potencial

a) $\vec{F}(x, y) = (e^{x+y} + 1, e^{x+y})$

b) $\vec{F}(x, y, z) = (2xz + y^2, 2xy, e^z + x^2)$

134. Dado o campo $\vec{F}(x, y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$. Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\mathcal{C}$ é o arco de circunferência $(x - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, com $x \geq 1$ que vai de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

135. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

$$\oint_{\mathcal{C}} (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$$

$\mathcal{C}$ é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

136. Aplique o teorema de Gauss para obter o fluxo do campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z, x^2y + \sin z, e^y)$$
 através de $\mathcal{S}$, orientada positivamente.

Onde $\mathcal{S}$ é a superfície do $\mathcal{W}$ limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

137. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xy, xz)$ e $\mathcal{C}$ é a fronteira do triângulo de vértices $(1, 0, 2)$, $((1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$, percorrido nessa ordem;

2017

138. Determine se $\vec{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$, isto é, exiba uma função potencial associada ao campo.

$$\vec{F}(x, y, z) = (ze^{xz} + ye^{xy} + 6x) \vec{i} + (xe^{xy} + ze^{yz}) \vec{j} + (xe^{xz} + ye^{yz} - \sin z) \vec{k}$$

139. Seja $\mathcal{C}$ parte da curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}$, com $r > 0$, situada no primeiro octante. Determine o valor de r de modo que :

$$\int_{\mathcal{C}} xyz \, dr = \frac{81\sqrt{3}}{2}.$$

140. Use o Teorema de Green para calcular $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

(i) $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{e^y}{x}, e^y \ln x + 2x\right)$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$, orientada no sentido anti-horário.

141. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ através da superfície $\mathcal{S}$ do sólido $\mathcal{W}$ limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$ com campo de vetores normais a $\mathcal{S}$ apontando para fora de $\mathcal{W}$.

142. Calcule a circulação do campo $\vec{F}(x, y, z) = (z - y, \ln(1 + y^2), \ln(1 + z^2) + y)$ ao redor da curva $\mathcal{C}$, no sentido horário quando vista da origem.

Onde a curva $\mathcal{C}$ é obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ com o plano $x + z = 4$.

143. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

$$\int_{\mathcal{C}} y^3 \, dx - x^3 \, dy, \quad \mathcal{C} \text{ é o círculo } x^2 + y^2 = 4.$$

144. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x, y) = (x, y + 2)$ para movimentar um objeto sobre um arco da cicloide $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

145. Determine uma função f tal que $\vec{F} = \nabla f$ e, em seguida, calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ sobre a curva $\mathcal{C}$ dada. Onde:

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy + 2z) \text{ e } \mathcal{C} \text{ é o segmento de reta de } (1, 0, -2) \text{ a } (4, 6, 3)$$

2018

146. Calcule $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (e^y + y e^x)\vec{i} + (x e^y + e^x)\vec{j}$ ao longo da curva $x = y^2 - 1$ de $(0, 1)$ até $(0, -1)$.

147. Calcular $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, para o campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (e^x + x^2 y, e^y - xy^2)$ onde $\mathcal{C}$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, orientada no sentido horário.

148. Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (4x)\vec{\mathbf{i}} + (4y)\vec{\mathbf{j}} + (2)\vec{\mathbf{k}}$ através da superfície orientada $\mathcal{S}$ do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com $1 \leq z \leq 4$ com normal apontando para o eixo z