1a. Lista de Exercícios de Equações Diferenciais I

1. Calcule a solução do PVI:

Respostas:

(a) $y\,' = \dfrac{1}{x^2(1+x)}, y(1) = ln(2),$ $\qquad y = ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) - \dfrac{1}{x} + 1$

(b) $y\,' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, y(0) = 0,$ $\qquad y = arcsen(x)$

(c) $y\,' = \dfrac{4x-2}{x^3-x^2-2x}, y(3) = ln(3)$ $\qquad y = ln\left|\dfrac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right| + ln(16)$

(d) $y\,' = \dfrac{ln(x)}{x},\ \ y(1) = 2$ $\qquad y = ln^2(x)/2 + 2$

(e) $y\,' = xe^x,\ \ y(0) = 0$ $\qquad y = xe^x - e^x + 1$

2. Resolva as seguintes equações diferenciais separáveis e os problemas de valor inicial.

Respostas:

(a) $x^{-2}\ dx = y^{-1}\ dy$ $\qquad y = C\ e^{-1/x}$

(b) $(1+y)\ dx - (1+x)\ dy = 0$ $\qquad y = C(1+x) - 1$

(c) $y\,' = x^2/[y(1+x^3)]$ $\qquad$ R: $y^2 = ln(1+x^3)^{2/3} + C$

(d) $y\,' = xe^x/2y$ $\qquad$ R: $y^2 = xe^x - e^x + C$

(e) $sen(x)\ dx + y\ dy = 0;\ y(0) = -2$ $\qquad y = -\sqrt{2 + 2\ cos(x)}$

(f) $(x^2+1)dx + y^{-1}\ dy = 0;\ y(-1) = 1$ $\qquad y = e^{-(x^3+3x+4)/3}$

(g) $xe^{x^2}\ dx + (y^5 - 1)\ dy = 0,\ y(0) = 0$ $\qquad 3e^{x^2} + y^6 - 6y = 3$

(h) $y\,' = (x^2y - y)/(y+1),\ y(3) = -1$ $\qquad (x^3/3) - x - y - ln|y| = 7$

3. Verifique se as seguintes equações diferenciais são homogêneas, e resolva as que o forem.

Respostas:

(a) $[x\ sen(y/x) - y\ cos(y/x)]\ dx + x\ cos(y/x)\ dy = 0$ $\qquad x\ sen(y/x) = C$

(b) $y\,' = (y-x)/x$ $\qquad y = x\ ln|C/x|$

(c) $y\,' = (x^2+2y^2)/xy$ $\qquad y^2 = Cx^4 - x^2$

(d) $y\,' = (2x+y^2)/xy$ $\qquad$ Não-homogênea

(e) $y\,' = 2xy/(y^2-x^2)$ $\qquad 3yx^2 - y^3 = C$

(f) $y\,' = y/(x+\sqrt{xy}),\ x > 0$ $\qquad -2\sqrt{x/y} + ln|y| = C$

(g) $y\,' = y^2/(xy + (xy^2)^{1/3})$ $\qquad$ Não-homogênea

(h) $y\,' = (x^4 + 3x^2y^2 + y^4)/x^3y$ $\qquad y^2 = -x^2[1 + (ln|Cx^2|)^{-1}]$

4. Verifique se as seguintes equações diferenciais são exatas, e resolva as que o forem.

Respostas:

(a) $(2xy + x)\ dx + (x^2 + y)\ dy = 0$ $\qquad 2yx^2 + x^2 + y^2 = C$

(b) $ye^{xy}\ dx + xe^{xy}\ dy = 0$ $\qquad e^{xy} = C$

(c) $xe^{xy}\ dx + ye^{xy}\ dy = 0$ — Não-exata
(d) $y\ dx + x\ dy = 0$ — $xy = C$
(e) $(x - y)\ dx + (x + y)\ dy = 0$ — Não-exata
(f) $(y\ sen(x) + xy\ cos(x))\ dx + (x\ sen(x) + 1)\ dy = 0$ — $xy\ sen(x) + y = C$

5. Mostre que as equações a seguir não são exatas mas tornam-se exatas quando multiplicadas pelo fator integrante $\mu(x, y)$ dado. Resolva as equações exatas assim obtidas.

(a) $x^2y^3 + x(1 + y^2)y\,' = 0, \quad \mu(x, y) = 1/(xy^3)$
(b) $\left(\dfrac{sen(y)}{y} - 2e^{-x}sen(x)\right)\ dx + \left(\dfrac{cos(y) + 2e^{-x}cos(x)}{y}\right)\ dy, \quad \mu(x, y) = ye^x$

Respostas:
(a) $x^2 + 2ln|y| - y^{-2} = C$
(b) $e^x\ sen(y) + 2ycos(x) = C$

6. Mostre que cada equação a seguir possui um fator integrante que depende apenas de uma variável. Determine esse fator integrante e resolva a equação.

	Respostas:
(a) $(3x^2y + 2xy + y^3)\ dx + (x^2 + y^2)dy = 0$	$\mu(x) = e^{3x}, \quad (3x^2y + y^3)e^{3x} = C$
(b) $y\,' = e^{2x} + y - 1$	$\mu(x) = e^{-x}, \quad y = Ce^x + 1 + e^{2x}$
(c) $dx + (x/y - sen(y))\ dy = 0$	$\mu(y) = y, \quad xy + ycos(y) - sen(y) = C$
(d) $y\ dx + (2xy - e^{-2y})\ dy = 0$	$\mu(y) = e^{2y}/y, \quad xe^{2y} - ln|y| = C$
(e) $e^x\ dx + [e^x cotg(y) + 2y\ cossec(y)]\ dy = 0$	$\mu(y) = sen(y), \quad e^x sen(y) + y^2 = C$

7. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares e os problemas de valor inicial.

	Respostas:
(a) $y\,' - 7y = sen(2x)$	$y = Ce^{7x} - (2/53)cos(2x) - (7/53)sen(2x)$
(b) $y\,' + x^2y = x^2$	$y = Ce^{-x^3/3} + 1$
(c) $y\,' + \frac{2y}{x} = x, \quad y(1) = 0$	$y = (-x^{-2} + x^2)/4$
(d) $y\,' + 6xy = 0, \quad y(\pi) = 5$	$y = 5\ e^{-3(x^2 - \pi^2)}$
(e) $y\,' + 2xy = 2x^3, \quad y(0) = 1$	$y = 2e^{-x^2} + x^2 - 1$

8. Resolva as seguintes equações diferenciais e os problemas de valor inicial.

	Respostas:
(a) $y\,' = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$	$y = \dfrac{C}{x^2} + \dfrac{x^3}{5}$
(b) $(x + y)\ dx - (x - y)\ dy = 0$	$arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - ln\sqrt{x^2 + y^2} = C$
(c) $y\,' = \dfrac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0$	$x^2 + xy - 3y - y^3 = 0$

(d) $(x+e^y)\ dy - dx = 0$ $\qquad$ $x = Ce^y + ye^y$

(e) $y\,' = -\dfrac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$ $\qquad$ $x^2y + xy^2 + x = C$

(f) $xy\,' + xy = 1 - y,\ \ y(1) = 0$ $\qquad$ $y = \dfrac{1-e^{1-x}}{x}$

(g) $y\,' = \dfrac{x}{x^2y+y^3}$ $\qquad$ $(x^2+y^2+1)\ e^{-y^2} = C$

(h) $xy\,' + 2y = \dfrac{sen(x)}{x},\ \ y(2) = 1$ $\qquad$ $y = \dfrac{4+cos(2)-cos(x)}{x^2}$

(i) $y\,' = -\dfrac{2xy+1}{x^2+2y}$ $\qquad$ $x^2y + x + y^2 =$

(j) $(3y^2+2xy)\ dx - (2xy+x^2)\ dy = 0$ $\qquad$ $\dfrac{y^2}{x^3} + \dfrac{y}{x^2} = C$

(k) $(x^2+y)\ dx + (x+e^y)\ dy = 0$ $\qquad$ $x^3/3 + xy + e^y = C$

(l) $y\,' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ $\qquad$ $y = Ce^{-x} + e^{-x}\ ln(1+e^x)$

(m) $x\ dy - y\ dx = \sqrt{xy}\ dx,\ \ x > 0$ $\qquad$ $2\sqrt{\dfrac{y}{x}} - ln(x) = C$

(n) $(x+y)\ dx + (x+2y)\ dy = 0,\ \ y(2) = 3$ $\qquad$ $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$

(o) $(e^x+1)\ y\,' = y - ye^x$ $\qquad$ $y = Ce^x/(1+e^x)^2$

9. Determine as trajetórias ortogonais das seguintes famílias de curvas

   (a) $x^2 - y^2 = C^2$ $\qquad$ (b) $y = Ce^x$ $\qquad$ (c) $x^2 - y^2 = Cx$

   Respostas: (a) $xy = k$ $\qquad$ (b) $y^2 = -2x + k$ $\qquad$ (c) $3x^2y + y^3 = k$

10. De acordo com a lei de resfriamento de Newton, a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente. Coloca-se um corpo à temperatura de 0^oF em um quarto à temperatura de 100^oF. Se após 10 minutos a temperatura do corpo é 25^oF, determine:

    (a) o tempo necessário para a temperatura do corpo atingir 50^oF.

    (b) a temperatura do corpo após 20 minutos.

11. Certa substância radioativa decresce a uma taxa proporcional à quantidade de substância presente. Sabendo-se que, para uma quantidade inicial de 100 miligramas da substância, observa-se, após dois anos, um decréscimo de 5%, determine:

    (a) uma expressão para a quantidade restante após t anos.

    (b) o tempo necessário para uma redução de 10% da quantidade inicial.

12. Sabe-se que a população de determinada cidade cresce a uma taxa proporcional ao número de habitantes existentes. Se, após 10 anos, a população triplica, e, após 20 anos,é de 150 000 habitantes, determine a população inicial.

13. Deixa-se cair um corpo de 10 "slugs" de massa, sem velocidade inicial. A resistência do ar é, em módulo igual à velocidade do corpo. Determine uma expressão para a velocidade do corpo no instante t.

14. Um corpo de 1 "slug" de massa com velocidade inicial de 1 pé/s "para baixo", é solto num meio onde encontra uma resistência dada por $8v^2$, onde v é a velocidade do corpo no instante t. Determine v.

Respostas:

10. $T = -100^{-0.029t} + 100$, (a) $23,9$min, (b) 44^oF
11. (a) $Q = 100\ e^{-0.026t}$, (b) 4.05 anos
12. $N = N_0\ e^{tln(3)/10}$, $N_0 = 16\ 666$
13. $v = 320\ e^{-0,1t} - 320$
14. $v = 2(3\ e^{32t} + 1)/(3\ e^{32t} + 1)$

15. Considere a equação $y\ ' = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$.

 (a) Determine o valor das constantes "h" e "k" de modo que a substituição $x = X - h$ e $y = Y - k$ transforme a euqação acima na equação homogênea $Y\ ' = \dfrac{2Y - X}{2X - Y}$.

 (b) Resolva a equação dada usando o item (a).

16. Considere a equação $y\ ' - (3/x)y = x^4 y^{1/3}$.
Esta é uma equção de Bernoulli: $y\ ' + p(x)y = q(x)y^n$, com n real. Observe que para $n = 0$ e $n = 1$ tal equação é linear. Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$, verifica-se que a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear.

 (a) Determine a equação linear obtida usando a substituição mencionada acima.

 (b) Determine a solução geral desta equação de Bernoulli.

17. Considere a equação $y\ ' = -(1/x^2) - (1/x)\ y + y^2$.
Essa é uma equação de Ricatti: $y\ ' = p(x) + q(x)\ y + r(x)\ y^2$. Se uma solução y_1 for conhecida, verifica-se que a substituição $y = y_1(x) + [1/v(x)]$ reduz a equação de Riccati a uma equação linear. Sabendo que $y_1(x) = 1/x$ é uma solução da equação dada, determine:

 (a) a equação linear obtida usando a substituição mencionada.

 (b) a solução geral dessa equação de Ricatti.

Respostas:

15. (a) $h = -1,\ k = 2$ (b) $y - x + 3 = C(y + x + 1)^3$
16. (a) $v\ ' - (2/x)v = (2/3)x^4$ (b) $y^{2/3} = Cx^2 + (2/9)x^5$
17. (a) $v\ ' + (1/x)v = -1$ (b) $y = x^{-1} + 2x(C - x^2)^{-1}$