2a. Lista de Exercícios de Equações Diferenciais Aplicadas

1. Resolva as seguintes equações diferenciais.

	Respostas:
(a) $y'' - y' - 30y = 0,$	$y = C_1\ e^{-5x} + C_2\ e^{6x}$
(b) $y'' + y = 0,$	$y = C_1\ cos(x) + C_2 sen(x)$
(c) $y'' + 6y' + 9y = 0$	$y = C_1\ e^{-3x} + C_2\ xe^{-3x}$
(d) $y'' + 2y' + 3y = 0$	$y = C_1\ e^{-x} cos(\sqrt{2}\ x) + C_2\ e^{-x} sen(\sqrt{2}\ x)$
(e) $y'' - 3y' - 5y = 0$	$y = e^{(3/2)x}[C_1 cosh((\sqrt{29}/2)\ x) + C_2 senh((\sqrt{29}/2)\ x)$
(f) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$
(g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$	$y = e^{x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$
(h) $y^{iv} + 2y'' + y = 0$	$y = (C_1 + C_2 x) cos(x) + (C_3 + C_4 x) sen(x)$
(i) $y^{iv} - y = 0$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 cos(x) + C_4 sen(x)$
(j) $y^{iv} + 5y''' = 0$	$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-5x}$

2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais utilizando

   (a) O método dos coeficientes a determinar.
   (b) O método dos operadores.

	Respostas:
(a) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$	$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - (1/2)e^{2x}$
(b) $2y'' + 3y' + y = x^2$	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x/2} + x^2 - 6x + 14$
(c) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + x^2 e^{-x}$
(d) $y'' + 2y' = 3 + 4sen(2x)$	$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + 3x/2 - (sen(2x) + cos(2x))/2$

3. Determine a forma apropriada da solução particular y_p para se utilizar o método dos coeficientes a determinar. Não calcule as constantes.

	Respostas:
(a) $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^{x}$	$y_p = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + Ex^2 e^{x}$
(b) $y^{iv} + 4y'' = sen(2x) + xe^{x} + 4$	$y_p = Ax^2 + (Bx + C)e^{x} + x(Dcos(2x) + Esen(2x))$
(c) $y^{iv} + 2y''' + 2y'' = 3e^{x} + e^{-x} sen(x)$	$y_p = Ae^{x} + xe^{-x}(Bcos(x) + Csen(x))$

4. Determine a solução geral das equações diferenciais utilizando o método de variação de parâmetros.

   (a) $y'' + y = tg(x),\ \ 0 < x < \pi/2$
   (b) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2} e^{-2x},\ \ x > 0$
   (c) $y'' + 4y = 3\ cossec(2x),\ \ 0 < x < \pi/2$
   (d) $y''' + y' = tg(x),\ \ 0 < x < \pi/2$

Respostas:

(a) $y = C_1 cos(x) + C_2 sen|(x) - cos(x)\ ln(sec(x) + tg(x))$
(b) $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x - ln(x))$
(c) $y = cos(2x)\ (C_1 - 3x/2) + sen(2x)\ [C_2 + (3ln(sen(2x)))/4]$
(d) $y = C_1 + C_2 cos(x) + sen(x)\ [C_3 - ln(sec(x) + tg(x))] - ln(cos(x))$

5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

(a) $9\ y'' + 6y' + 82y = 0,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2$
(b) $y'' + 4y' + 4y = 0,\ \ y(-1) = 2,\ \ y'(-1) = 1$
(c) $6\ y''' + 5y'' + y' = 0,\ \ y(0) = -2,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = 0$
(d) $y'' + y = x,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1$
(e) $y'' + 4\ y = sen^2(2x),\ \ y(\pi) = 0,\ \ y'(\pi) = 0$

Respostas:
(a) $y = e^{-x/3}[-cos(3x) + (5sen(3x))/9]$
(b) $y = e^{-2(x+1)}(7 + 5x)$
(c) $y = 8 - 18e^{x/3} + 8e^{-x/2}$
(d) $y = -cos(x - 1) + x$
(e) $y = -(cos(2x))/6 + (cos^2(2x))/4 + (sen^4(2x) - cos^4(2x))/12$

6. Determine os intervalos nos quais se tem certeza da existência de soluções.

	Respostas:
(a) $y^{iv} + 4\ y''' + 3y = x$	$-\infty < x < \infty$
(b) $xy''' + (sen(x))\ y'' + 3y = cos(x)$	$x < 0$ ou $x > 0$
(c) $x(x-1)\ y^{iv} + e^x\ y'' + 4x^2\ y = 0$	$x < 0$ ou $0 < x < 1$ ou $x > 1$
(d) $y''' + xy'' + x^2 y' + x^3\ y = ln(x)$	$x > 0$

7. Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução de cada equação diferencial proposta.

	Respostas:
(a) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0,\ \ x > 0;\ \ y_1(x) = x^{-1}$	$y_2(x) = x^{-1}\ ln(x)$
(b) $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0,\ \ x > 0;\ \ y_1(x) = x$	$y_2(x) = xe^x$
(c) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0,\ \ x > 0;\ \ y_1(x) = sen(x^2)$	$y_2(x) = cos(x^2)$
(d) $(x-1)\ y'' - xy' + y = 0,\ \ x > 1;\ \ y_1(x) = e^x$	$y_2(x) = x$

8. Verifique que as funções y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea correspondente. Depois determine uma solução particular y_p da equação não-homogênea dada.

	Respostas:
(a) $x^2 y'' - 2y = 3x^2 - 1,\ \ x > 0;\ \ y_1(x) = x^2,\ \ y_2(x) = x^{-1}$	$y_p(x) = (1/2) + x^2\ ln(x)$
(b) $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3,\ \ x > 0;\ \ y_1(x) = x,\ \ y_2(x) = xe^x$	$y_p(x) = -2x^2$

(c) $xy'' - (1+x)y' + y = x^2e^{2x}, \;\; x > 0; \;\; y_1(x) = 1 + x, \;\; y_2(x) = e^x \qquad y_p(x) = (x-1)e^{2x}/2$

9. Resolva os seguintes problemas:

   (a) Um corpo, com peso de 32 libras, acha-se suspenso em uma mola, distendendo-a de 8 pés além de seu comprimento natural. Coloca-se o corpo em movimento deslocando-o de 1 pé no sentido "para cima", e aplicando-lhe uma velocidade inicial de 2 pés/s "para baixo". Determine a posição do corpo em qualquer instante, se a resistência do meio é desprezível. Determine também a frequência, o período e a amplitude do movimento.

   (b) Um corpo, com massa de 1 slug, acha-se suspenso em uma mola cuja constante é 8 lb/pé. Põe-se o corpo em movimento, a partir da posição de equilíbrio, sem velocidade inicial, aplicando uma força externa $F(t) = 16\ cos(4t)$. Determine a posição do corpo em função do tempo, se a resistência do ar é numericamente igual a 4 vezes módulo da velocidade.

   (c) Um circuito RLC em série, com $R = 6$ Ohms, $C = 0,02$ Farad, $L = 0,1$ Henry, tem uma voltagem de $E(t) = 6$ volts. Supondo que não haja corrente inicial, nem carga inicial ao ser aplicada inicialmente a voltagem, determine a carga subsegquente no capacitor e a corrrente no circuito.

   (d) Um circuito RLC em série, com $R = 6$ ohms, $C = 0,02$ farad, $L = 0,1$ henry, não tem voltagem aplicada. Determine a corrente subsequente no circuito se a carga inicial no capacitor é $0,1$ Coulomb e a corrente inicial é nula.

Respostas:

(a) $y = sen(2t) - cos(2t), \;\; w = 2, \;\; T = \pi, \;\; R = \sqrt{2}$

(b) $y = (1/5)\ [e^{-2t}(2cos(2t) - 6sen(2t)) + 4sen(4t) - 2cos(4t)]$

(c) $Q(t) = (3/100)(e^{-50t} - 5e^{-10t} + 4), \;\; I(t) = (3/2)(e^{-10t} - e^{-50t})$

(d) $I(t) = (5/4)(e^{-50t} - e^{-10t})$.