Capítulo 1

Funções Vetoriais

Neste capítulo estudaremos as funções $\vec{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, funções que descrevem curvas ou movimentos de objetos no espaço.

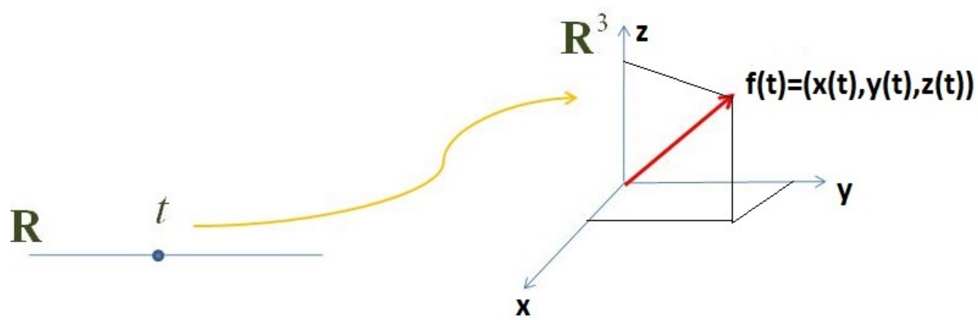
1.1 Definições e propriedades

Definição 1.1.1 *Uma função vetorial, é uma função cujo dominio é um subconjunto I dos numeros reais $\mathbb{R}$ e cuja imagem é um conjunto de vetores $\mathbb{R}^n$.*

Uma função vetorial definida em $I \subset \mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^n$, é denotada por:

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_i(t), ..., f_n(t)), \quad t \in I \tag{1.1}$$

onde cada f_i é uma função real definida em I, isto é, $f_i : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Pra poder visualizar e entender melhor nossas definições e exemplos consideraremos os casos em que $n = 2$ ou $n = 3$.



Definição 1.1.2 *Definimos o dominio da função vetorial dada em* (1.1) *como:*

$$dom(\vec{f}) = \bigcap_{i=1}^{n} dom(f_i)$$

Exercícios : Determine o domínio das seguintes funções vetoriais.

1. $\vec{f}(t) = (t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$
2. $\vec{f}(t) = \left(\frac{t-2}{t+2}, \operatorname{sen} t, \ln(9-t^2)\right)$

Definição 1.1.3 *O limite de $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ quando t aproxima-se de t_0 é definido por:*

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} \vec{f}(t) = (\lim_{t\longrightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t\longrightarrow t_0} f_2(t), \lim_{t\longrightarrow t_0} f_3(t))$$

Portanto

$$\exists \lim_{t\longrightarrow t_0} \vec{f}(t) \text{ se somente se } \exists \lim_{t\longrightarrow t_0} f_i(t); \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Definição 1.1.4 *A função $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ é dita contínua em t_0 se somente se*

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0).$$

Portanto $\vec{f}(t)$ é contínua em t_0 se somente se cada função $f_i(t)$ é contínua em t_0.
Dizemos que a função $\vec{f}(t)$ é contínua em I se $\vec{f}(t)$ é contínua em cada $t \in I$.

Definição 1.1.5 *A derivada da função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a função vetorial, denotada por $\vec{f}'(t)$, definida por*

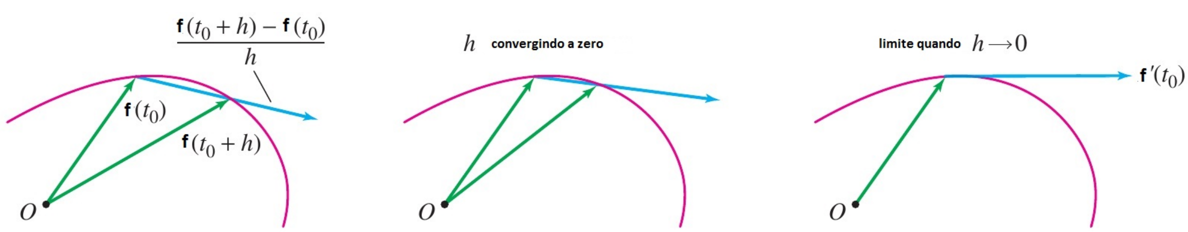
$$\vec{f}'(t) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

observe que no caso $n = 2$, temos que :

$$\frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h} \right)$$

Portanto pra a função vetorial $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ temos que a sua derivada é $\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t))$

Interpretação geometrica pra o vetor $\vec{f}'(t)$



(A) (B) (C)

Propriedades: consideremos as funções vetoriais $\vec{f}, \vec{g} \ : \ I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e a função escalar $\mu : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

i) $(\vec{f}+\vec{g})'(t)=\vec{f}\,'(t)+\vec{g}\,'(t)$
ii)$(\mu\ \vec{f})'(t)=\mu'(t)\vec{f}(t)+\mu(t)\vec{f}\,'(t)$
iii) $(\vec{f}\cdot\vec{g})'(t)=\vec{f}\,'(t)\cdot\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\cdot\vec{g}\,'(t)$
iv) $(\vec{f}\times\vec{g})'(t)=\vec{f}\,'(t)\times\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\times\vec{g}\,'^{(t)}$

Definição 1.1.6 *Integral de uma função vetorial*

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n,$$

é definida por:

$$\int_a^b f(t)dt=\Big(\int_a^b f_1(t)dt,\int_a^b f_2(t)dt,....,\int_a^b f_n(t)dt\Big)$$

1.2 Movimento no espaço

Suponhamos que a função vetorial

$$\sigma:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

descreve o movimento de uma particula no espaço ($\mathbb{R}^3$), onde $\sigma(t)$ representa o vetor posição da particula. Nesta seção assumiremos que a função posição ($\sigma(t)$) é diferenciavel tantas quanto necessário.

Definição 1.2.1 *Considerando a função vetorial*

$$\sigma:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3,$$

função que descreve o movimento de uma particula no espaço ($\mathbb{R}^3$) *, temos que:*
i) A derivada $\sigma'(t)$ é chamado de vetor velocidade,
ii) O comprimento do vetor velocidade ($||\sigma'(t)||$) é chamado de velocidade escalar,
iii) A deriva da segunda, $\sigma''(t)$ é chamado de vetor aceleração.

1.3 Traço de uma função vetorial

Quando a função vetorial $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é continua em I, o ponto final do vetor

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{1.2}$$

descreve uma curva $\mathcal{C}$ no espaço $\mathbb{R}^3$, isto é, pra cada $t \in I$, obtemos um ponto $P(x, y, z) \in \mathcal{C}$, onde:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

A equação (1.2) é chamada de parametrização da curva $\mathcal{C}$, e as equações (1.3) são chamadas de equações paramétricas da curva $\mathcal{C}$.

Pra determinar o traço da função vetorial $\sigma(t)$ seguimos os seguintes etapas

1) Se eliminarmos o parametro t no sistema de equações (1.3), obteremos a equação cartesiana da curva $\mathcal{C}$.
2) usamos o intervalo I pra indicar que parte da curva da equação cartesiana é o traço da função vetorial $\sigma(t)$.

Exemplo 1 As curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, no plano xy, de equações paramétricas $x = t,\ y = t^2$ com $(t \in \mathbb{R})$ e $x = t^2,\ y = t^4$ com $(t \in \mathbb{R})$, respectivamente, possuem a mesma equação cartesiana, embora sejam curvas diferentes.

Exemplo 2 Seja $\mathcal{C}$ a curva do plano xy, gráfico de uma função contínua $y = f(x),$ com $x \in I$. Uma parametrização natural de $\mathcal{C}$ é

$$\sigma(t) = (t, f(t)), \ \text{ com } \ t \in I$$

Exemplo 3 Seja $\mathcal{C}$ a curva do plano xy, gráfico de $x = g(y),$ com $y \in I$. Uma parametrização natural de $\mathcal{C}$ é

$$\sigma(t) = (g(t), t), \ \text{ com } \ t \in I$$

Exemplo 4 Seja $\mathcal{C}$ a curva do plano xy, gráfico de $x^2 + y^2 = a^2$. Uma parametrização natural de $\mathcal{C}$ usando coordenadas polares é

$$\sigma(t) = (a \cos t, a \text{sen } t), \ \text{ com } \ t \in [0, 2\pi]$$

Exemplo 5 Seja $\mathcal{C}$ a curva do plano xy, gráfico de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Uma parametrização natural de $\mathcal{C}$ usando coordenadas polares é

$$\sigma(t) = (a\ \cos t, b \text{ sen } t), \ \text{ com } \ t \in [0, 2\pi]$$

Definição 1.3.1 *Uma curva $\sigma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular (ou suave) se*

i) $\sigma(t)$ for diferenciavel de classe C^1 para todo $t \in I$,
ii) $\sigma^{'}(t) = (x^{'}(t), y^{'}(t), z^{'}(t)) \neq (0, 0, 0), \forall t \in I$

1.4 Comprimento de arco

Definição 1.4.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma curva definida por a função vetorial $\sigma(t)$, com $a \leq t \leq b$, de classe C^1.* **O comprimento de** *$\mathcal{C}$ é definido por :*

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\sigma^{'}(t)\| dt$$

Observação

- Se $\mathcal{C}$ é uma curva de $\mathbb{R}^2$ definida por $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ com $a \leq t \leq b$, então

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^{\ 2} + [y'(t)]^{\ 2}} dt$$

- Se $\mathcal{C}$ é uma curva de $\mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $a \leq t \leq b$, então

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^{\ 2} + [y'(t)]^{\ 2} + [z'(t)]^{\ 2}} dt$$

- Esta fórmula ainda é válida se $\sigma(t)$ é de classe C^1 por partes.
- O comprimento de uma curva $\mathcal{C}$ é independente das parametrizações equivalentes escolhidas.
- Consideremos a função comprimento de arco

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma^{'}(t)\| dt.$$

A função $s = s(t)$ é crescente e, portanto, tem inversa $t = t(s)$. Isto nos permite parametrizar a curva $\mathcal{C}$ em função do parametro s do seguinte modo:

$$\sigma(s) = \sigma(t(s)).$$

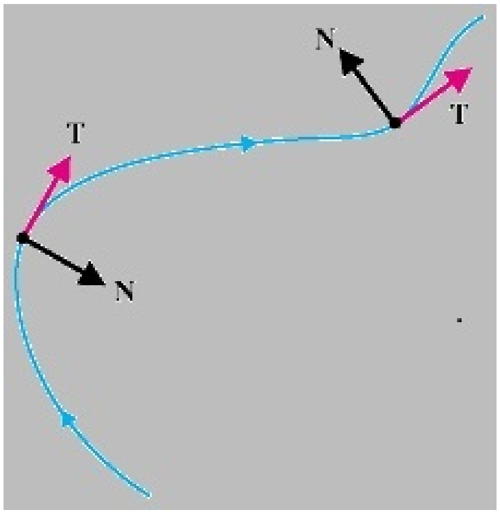
1.5 Os vetores tangente unitário e normal principal

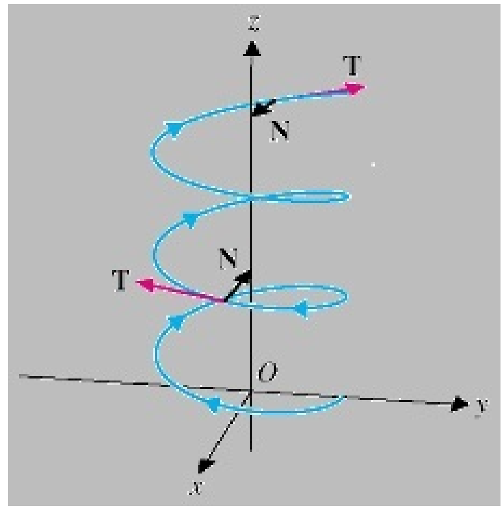
Se $\mathcal{C}$ for uma curva suave definida por uma função vetorial $\sigma(t)$, então o vetor tangente unitário $T(t)$ é definidos por:

$$T(t) = \frac{\sigma^{'}(t)}{\|\sigma'(t)\|}$$

Como o vetor $T(t)$ tem comprimento constante, então $T(t)$ é perpendicular a $T^{'}(t)$. Logo, se $T^{'}(t) \neq \vec{0}$, o vetor unitário na ditreção de$T^{'}(t)$ é chamado de **vetor normal principal** $N(t)$ à curva e é definido por:

$$N(t) = \frac{T^{'}(t)}{\|T'(t)\|}$$

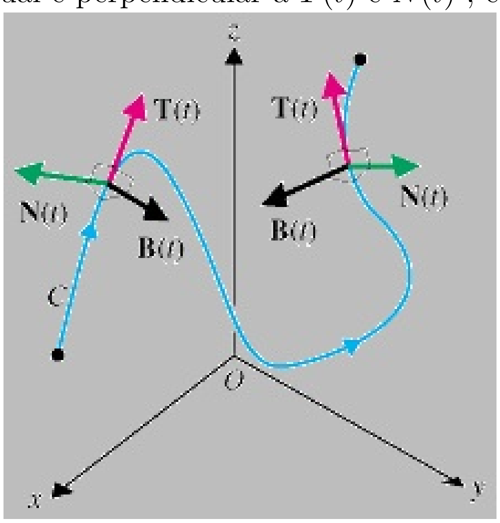




Definimos o vetor binormal , por:

$$B(t) = T(t) \times N(t),$$

o qual é perpendicular a $T(t)$ e $N(t)$, e também é unitario.



definição

- O plano determinado pelos vetores N e B no ponto P da curva C é chamado de **Plano normal** de C em P.
- O plano determinado pelos vetores N e T no ponto P da curva C é chamado de **Plano osculador** de C em P.