Cálculo para la ingeniería

Salvador Vera

9 de enero de 2005

Índice general

1. Conceptos básicos **1**
1.1. La recta real . . . 1
1.1.1. Orden, desigualdades e intervalos . . . 1
1.1.2. Valor absoluto y distancia . . . 7
1.2. El plano y el espacio cartesiano . . . 15
1.2.1. Sistema rectangular de coordenadas cartesianas . . . 15
1.2.2. Distancia entre dos puntos . . . 16
1.2.3. El círculo y la esfera . . . 17
1.3. Funciones . . . 22
1.3.1. Definiciones . . . 22
1.3.2. Representación de funciones . . . 26
1.3.3. Dominio implícito de una función . . . 30
1.3.4. Restricciones y extensiones de funciones . . . 32
1.3.5. Composición de funciones. . . . 32
1.3.6. Funciones inyectivas e inversas . . . 36
1.3.7. Funciones suprayectivas y biyectivas . . . 43
1.3.8. Imágenes directa e inversa de un conjunto . . . 43
1.3.9. Funciones pares e impares . . . 44
1.3.10. La función valor absoluto . . . 45
1.4. Límite de sucesiones . . . 46
1.4.1. Cálculo de límites de sucesiones . . . 49
1.4.2. Sucesiones monótonas . . . 54
1.5. Límite y continuidad de funciones . . . 56
1.5.1. Definición de límite . . . 56
1.5.2. Límites laterales . . . 65
1.5.3. Propiedades de los límites . . . 66
1.5.4. Continuidad de una función en un punto . . . 66
1.5.5. Propiedades de las funciones continuas . . . 68
1.5.6. Límites infinitos . . . 69
1.5.7. Límites en el infinito . . . 75
1.5.8. Técnicas elementales para el cálculo de límites . . . 78
1.5.9. Infinitésimos equivalentes . . . 82
1.5.10. Infinitésimos más frecuentes en $z \to 0$ . . . 83
1.6. Funciones hiperbólicas. . . . 85
1.6.1. Coseno y seno hiperbólico . . . 85
1.6.2. Fórmula fundamental de la Trigonometría hiperbólica . . . 86
1.6.3. Significado del término “hiperbólicas”. . . . 86

1.6.4. Otras razones hiperbólicas . . . 87
1.6.5. Fórmulas del ángulo doble . . . 87
1.6.6. El cuadrado del senh y del cosh . . . 88
1.6.7. Gráfica de las funciones hiperbólicas . . . 88
1.6.8. Funciones hiperbólicas inversas . . . 89
1.6.9. Identidad hiperbólica . . . 90
1.6.10. Fórmula logarítmica de las funciones hiperbólicas inversas . . 90
1.7. Problemas propuestos del Capítulo 1 . . . 91

2. Funciones de varias variables: Límites **93**
2.1. Funciones de varias variables . . . 93
2.1.1. Definiciones . . . 93
2.1.2. Dominio de una función de varias variables . . . 97
2.1.3. Operaciones con funciones de varias variables. . . . 102
2.1.4. Composición de funciones . . . 104
2.1.5. Gráfica de una función de dos variables . . . 110
2.1.6. Otras representaciones de las funciones de varias variables . . 118
2.2. Límite y continuidad . . . 119
2.2.1. Introducción . . . 119
2.2.2. Entorno de un punto en el plano . . . 119
2.2.3. Límite y continuidad en dos variables . . . 121
2.2.4. Límite de las funciones elementales . . . 123
2.2.5. Comprobando límites aplicando la definición . . . 126
2.2.6. Cálculo de límites mediante operaciones algebraicas . . . 130
2.2.7. Teorema del encaje y de la acotación . . . 132
2.2.8. Infinitésimos equivalentes. . . . 133
2.2.9. Inexistencia de límites . . . 136
2.2.10. Límites en el infinito . . . 145
2.3. Problemas propuestos del Capítulo 2 . . . 146

3. Derivada de Funciones de una variable **149**
3.1. Derivada y continuidad. Tangente y normal . . . 149
3.1.1. Idea intuitiva de recta tangente. . . . 149
3.1.2. Rectas tangentes no intuitivas . . . 150
3.1.3. La pendiente de la recta tangente . . . 152
3.1.4. Definición de derivada . . . 152
3.1.5. Otra forma de la derivada . . . 152
3.1.6. Derivadas laterales . . . 153
3.1.7. Derivada y continuidad . . . 154
3.1.8. Significado gráfico de la derivada: Suavidad. . . . 156
3.1.9. La ecuación de la recta tangente . . . 156
3.1.10. La ecuación de la recta normal . . . 158
3.1.11. Curvas de tangente horizontal y curvas de tangente vertical . 158
3.2. Función derivada. reglas de derivación. . . . 159
3.2.1. Función derivada . . . 159
3.2.2. Reglas de derivación. . . . 160
3.2.3. Derivadas de funciones con un punto aparte . . . 162
3.2.4. Derivada de funciones definidas a trozos . . . 164
3.2.5. Derivación de funciones implícitas . . . 166
3.2.6. Derivación logarítmica . . . 168

3.2.7. Derivadas de orden superior . . . 169
3.2.8. Aproximación lineal y notación diferencial . . . 170
3.3. Límite de funciones . . . 172
3.3.1. Infinitésimos equivalentes . . . 172
3.3.2. Infinitésimos más frecuentes en $z \to 0$ . . . 172
3.3.3. Formas indeterminadas. Reglas de L'Hôpital. . . . 173
3.4. Límite de sucesiones . . . 181
3.5. Estudio local de funciones. Polinomio de Taylor . . . 183
3.5.1. Introducción. . . . 183
3.5.2. Algunas propiedades de los polinomios . . . 184
3.5.3. Polinomio de Taylor de una función no polinómica . . . 187
3.5.4. Polinomio de Taylor de las funciones elementales . . . 189
3.5.5. Resto de Taylor . . . 192
3.5.6. Aplicaciones de la fórmula de Taylor a cálculos aproximados . 193
3.5.7. Aplicaciones de la Fórmula de Taylor al cálculo de límites . . 195
3.6. Extremos de funciones de una sola variable . . . 196
3.6.1. Máximos y mínimos absolutos . . . 196
3.6.2. Máximos y mínimos relativos o locales . . . 200
3.6.3. Determinación de funciones conocidos sus puntos críticos . . 203
3.6.4. Problemas de aplicación de máximos y mínimos . . . 204
3.7. Problemas propuestos del Capítulo 3 . . . 208

4. Derivación de funciones multivariables 211
4.1. Derivadas parciales . . . 211
4.1.1. Introducción . . . 211
4.1.2. Definición . . . 212
4.1.3. La función derivada parcial . . . 214
4.1.4. Funciones de más de dos variables . . . 216
4.1.5. Razón de cambio . . . 218
4.1.6. Interpretación geométrica de las derivadas parciales . . . 219
4.1.7. Continuidad y derivadas parciales . . . 220
4.2. Derivadas parciales de órdenes superiores . . . 222
4.3. Derivadas direccionales. . . . 227
4.3.1. Derivadas direccionales . . . 227
4.3.2. Derivada direccional y derivadas parciales . . . 231
4.4. Diferenciabilidad . . . 233
4.4.1. Generalización del concepto de diferenciabilidad . . . 233
4.4.2. Diferenciabilidad y derivadas parciales . . . 237
4.4.3. La diferencial . . . 239
4.4.4. Diferenciabilidad y continuidad . . . 239
4.4.5. Diferenciabilidad de funciones de n variables . . . 243
4.4.6. Condición suficiente para la diferenciabilidad . . . 244
4.4.7. Caracterización de las funciones diferenciables . . . 246
4.4.8. Diferenciabilidad y derivadas direccionales . . . 248
4.4.9. La derivada según una dirección curva . . . 249
4.5. Gradiente . . . 249
4.5.1. Definición . . . 249
4.5.2. Vector gradiente y derivada direccional . . . 251
4.5.3. Gradiente y curvas de nivel . . . 254

4.6. Plano tangente . . . 254
4.6.1. Vectores normales . . . 254
4.6.2. Plano tangente . . . 257
4.6.3. Recta tangente y plano normal a una curva en el espacio . . . 261
4.6.4. La diferencial como aproximación del incremento . . . 263
4.7. Funciones vectoriales y matriz Jacobiana . . . 268
4.7.1. Funciones vectoriales de variable vectorial . . . 268
4.7.2. Continuidad de las funciones vectoriales . . . 269
4.7.3. Derivadas parciales de funciones vectoriales . . . 271
4.7.4. Funciones vectoriales diferenciables . . . 272
4.8. Regla de la cadena . . . 276
4.8.1. Funciones compuestas, inversas e implícitas de una variable . 276
4.8.2. Composición de funciones vectoriales . . . 277
4.8.3. Regla de la cadena. Perspectiva teórica: Diferencial . . . 280
4.8.4. Regla de la cadena. Perspectiva práctica: Parciales . . . 282
4.8.5. Regla de la cadena. Perspectiva general: Matriz jacobiana . . 290
4.9. Funciones implícitas . . . 296
4.9.1. Funciones de una variable . . . 296
4.9.2. Funciones de dos variables . . . 301
4.10. Extremos de las funciones de varias variables . . . 305
4.10.1. Introducción . . . 305
4.10.2. Definiciones . . . 305
4.10.3. Estudio de la naturaleza de los puntos críticos . . . 307
4.10.4. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange . 315
4.10.5. Máximos y mínimos absolutos . . . 321
4.11. Problemas propuestos del Capítulo 4 . . . 326

5. Integral definida. Cálculo de primitivas **329**
5.1. La estimación de un área. Sumas de Riemann. . . . 329
5.1.1. Significado geométrico de la integral . . . 329
5.1.2. Cálculo de límites utilizando el concepto de integral . . . 334
5.1.3. Propiedades de la integral definida . . . 340
5.2. El teorema fundamental del Cálculo . . . 343
5.2.1. Regla de Barrow: La integral como una primitiva . . . 347
5.3. Integración inmediata. . . . 350
5.3.1. Propiedades de la integral indefinida . . . 350
5.3.2. Tabla de integrales inmediatas . . . 351
5.4. Integración mediante cambio de variable . . . 352
5.5. Integración por partes. . . . 356
5.6. Integración de funciones racionales . . . 359
5.6.1. Integración de fracciones elementales . . . 359
5.6.2. Integración mediante desarrollo en fracciones simples . . . 360
5.7. Integración de expresiones trigonométricas . . . 367
5.7.1. Integración de potencias de funciones trigonométricas . . . 367
5.7.2. Integración de funciones racionales del sen y del cos . . . 369
5.8. Integración de funciones irracionales . . . 371
5.8.1. Radicales semejantes . . . 371
5.8.2. La sustitución trigonométrica . . . 372
5.9. Problemas propuestos del Capítulo 5 . . . 375

6. Aplicaciones de la integral. **377**
6.1. Cálculo del área de una figura plana. 377
6.2. Cálculo del volumen de un cuerpo 380
6.2.1. Volumen de un cuerpo cualquiera: Método de secciones . . . 380
6.2.2. Volumen de un sólido de revolución: Método de discos 381
6.2.3. Volumen de un sólido de revolución: Método de los cilindros . 381
6.3. Límite de sumas 387
6.4. Problemas propuestos del Capítulo 6 388

Soluciones a los ejercicios y problemas propuestos **389**

Bibliografía **393**

Índice alfabético **394**

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. La recta real

Suponemos conocidos los números reales, así como su representación en la *recta real*.

Los números reales se pueden representar mediante expresiones decimales finitas o infinitas. Si la expresión decimal es finita o periódica infinita, entonces el número real se puede expresar como el cociente de dos números enteros y se dice que el número real es *racional*. Recíprocamente cualquier número racional (cociente de dos enteros) se puede expresar mediante una expresión decimal finita o infinita periódica. Cuando la expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten de manera periódica se dice que el número real es *irracional*.

Los números reales admiten una representación geométrica en una recta. En dicha representación cada número real se representa por un solo punto de la recta y cada punto de la recta representa un solo número real. En consecuencia, hablaremos indistintamente de *número* o de *punto*. Por convenio, los números *positivos* se representan a la derecha del cero y los *negativos* a la izquierda. Se llama *recta real* a una recta en la que se han representado los números reales.

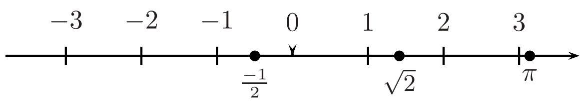


Figura 1.1: La recta real

1.1.1. Orden, desigualdades e intervalos

Definición 1.1 (Números positivos y números negativos).
1) *Para cada número real, a, está definida una y sólo una de las siguientes relaciones:*

a) *a es mayor que cero (es positivo),* $a > 0$*;*
b) *a es igual a cero,* $a = 0$*;*
c) *a es menor que cero (es negativo),* $a < 0$*.*

2) *Si a y b son números positivos, entonces:*

a) *Su suma es positiva,* $a + b > 0$*.*
b) *Su producto es también positivo,* $ab > 0$*.*

Definición 1.2 (Orden en la recta real). *Dados dos números reales a y b. Se dice que a es menor que b y se denota* $a < b$*, si* $b - a$ *es positivo.*

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad b - a > 0$$

Si a es menor que b, también se dice que b es mayor que a y se escribe $b > a$

El símbolo $a \leq b$ *significa que a es menor o igual que b.*

Si $a < b$, entonces a se representa en la recta a la izquierda de b.

Proposición 1.1 (Propiedades de las desigualdades). *Si a, b, c y d son números reales, se tiene:*

1. *Transitiva: Si* $a < b$ *y* $b < c$*, entonces* $a < c$
2. *Aditiva: Si* $a < b$ *y* $c < d$*, entonces* $a + c < b + d$
3. *Si* $a < b$*, entonces, para cualquier número real c* $\begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases}$
4. *Si* $a < b$ *y* $p > 0$*, entonces* $ap < bp$
5. *Si* $a < b$ *y* $n < 0$*, entonces* $an > bn$

Nota: En consecuencia, podemos decir que con las desigualdades se pueden realizar las mismas transformaciones que con las igualdades, salvo que al multiplicar o dividir, ambos miembros, por un número negativo hay que invertir el sentido de la desigualdad. Así,

$$-2x < 6 \quad \leftrightarrow \quad x > -3$$

Una desigualdad en la que aparecen una o varias variables también se llama *inecuación.*

Definición 1.3 (Intervalos). *Sean a y b dos números reales tales que* $a \leq b$*. Se llama intervalo abierto de extremos a y b, al conjunto de puntos comprendidos entre a y b, excluidos dichos puntos*

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/\, a < x < b\}$$

Se llama intervalo cerrado de extremos a y b, al conjunto de puntos comprendidos entre a y b, incluidos dichos puntos

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/\, a \leq x \leq b\}$$

Nota: Usamos paréntesis (a, b), tanto para representar el intervalo abierto (a, b), como para indicar el punto del plano de coordenadas (a, b). No obstante, el contexto determinará en cada caso a qué nos estamos refiriendo.

También se definen los siguientes tipos de intervalos:

Intervalos semiabiertos

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / \, a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / \, a < x \leq b\}$$

Intervalos infinitos

$$\begin{aligned} &(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / \, x \leq b\} \\ &(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / \, x < b\} \\ &(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / \, a < x\} \\ &[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / \, a \leq x\} \\ &(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1 (Resolviendo inecuaciones). *Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades*

$$\text{a) } 2x - 3 < 5 \qquad\qquad \text{b) } 3 - 2x < 5$$

Solución. a) Operando, como si se tratara de una ecuación, resulta:

$$2x - 3 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 5 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{8}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

Por tanto, el conjunto solución es el intervalo $(-\infty, 2)$.

b) En este caso operamos de la misma manera, pero al dividir por -2 invertimos el sentido de la desigualdad. Así,

$$3 - 2x < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2x < 5 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{2}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$$

Luego el conjunto solución es el intervalo $(-1, +\infty)$.

Ejemplo 1.2 (Resolviendo sistemas de inecuaciones). *Hallar el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades*

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 1 \geq -1 \\ 3x - 7 \leq 2 \end{array}\right\}$$

Solución. Se trata de hallar la intersección de los conjuntos solución de cada una de las desigualdades. Para ello, resolvemos ambas inecuaciones por separado y luego hallamos la intersección

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 1 \geq -1 \\ 3x - 7 \leq 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x \geq -1 - 1 \\ 3x \leq 2 + 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x \geq -2 \\ 3x \leq 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq 3 \end{array}\right\}$$

Luego el intervalo solución es $[-1, 3]$

Ejemplo 1.3 (Resolviendo inecuaciones dobles). *Hallar el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades*

$$\left.\begin{array}{l} 2-3x \geq -1 \\ 2-3x \leq 11 \end{array}\right\}$$

Solución. Podemos resolver cada inecuación por separado, o bien, utilizar el hecho de que la expresión $2-3x$ aparece en ambas inecuaciones y trabajar conjuntamente. Así,

$$\left.\begin{array}{l} 2-3x \geq -1 \\ 2-3x \leq 11 \end{array}\right\} -1 \leq 2-3x \leq 11$$

restando 2 en los tres miembros, resulta

$$-3 \leq -3x \leq 9$$

y dividiendo por -3

$$1 \geq x \geq -3$$

Luego el conjunto solución es el intervalo $[-3, 1]$.

Ejemplo 1.4 (Resolviendo inecuaciones cuadráticas). *Hallar el conjunto solución de la inecuación* $x^2 < 6x - 8$

Solución. El camino más fácil para resolver estas inecuaciones es dejar solamente cero en el segundo miembro. Así,

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

hallamos las raíces del polinomio $p(x) = x^2 - 6x + 8$,

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta que un polinomio cambia de signo sólo en sus ceros[1], podemos resolver la desigualdad probando el signo del polinomio en cada uno de los intervalos

$$x < 2, \qquad 2 < x < 4, \qquad x > 4$$

que puede hacerse eligiendo un punto cualquiera en cada uno de los intervalos y viendo el valor del polinomio en ese punto (puesto que en todo el intervalo el polinomio conserva el signo). Así,

$$p(0) = +8 > 0, \quad p(3) = 9 - 18 + 8 = -1 < 0, \quad p(5) = 25 - 30 + 8 = +3 > 0$$

Como la desigualdad se cumple sólo en el intervalo central, se concluye que el conjunto solución es

$$2 < x < 4 \quad \text{es decir, el intervalo } (2, 4)$$

[1] ver Corolario 1.3 en la página 69

Ejemplo 1.5 (Resolviendo inecuaciones racionales). *Hallar el conjunto solución de la desigualdad*

$$\frac{x-2}{x-4} < 2$$

Solución. Dejamos cero en el segundo miembro, y operamos

$$\frac{x-2}{x-4} < 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-2}{x-4} - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-2-2x+8}{x-4} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6-x}{x-4} < 0$$

Consideramos la función racional

$$r(x) = \frac{6-x}{x-4}$$

Y teniendo en cuenta que una función racional puede cambiar de signo tanto en los ceros del numerador como en los ceros del denominador, resulta que la función puede cambiar de signo en los puntos: $x = 4$ y $x = 6$. Luego podemos resolver la desigualdad comprobando el signo de la función racional en cada uno de los intervalos

$$x < 4, \qquad 4 < x < 6, \qquad x > 6$$

que puede hacerse eligiendo un punto cualquiera en cada uno de los intervalos y viendo el valor de la función en ese punto. Así,

$$r(0) = \frac{6}{-4} < 0, \qquad r(5) = \frac{1}{1} > 0, \qquad r(7) = \frac{-1}{3} < 0$$

Como la desigualdad se cumple sólo en los dos intervalos de los extremos, se concluye que el conjunto solución es

$$x < 4 \;\text{ ó }\; x > 6, \text{ es decir, la unión de los intervalos } (-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$$

Ejemplo 1.6 (Resolviendo inecuaciones racionales mediante la consideración sucesiva de distintos casos). *Hallar el conjunto solución de la desigualdad*

$$\frac{2x-3}{x+3} < \frac{1}{2} \qquad (x \neq -3)$$

Solución. Puesto que no sabemos de antemano si $x+3$ es positivo o negativo, no podemos multiplicar, ambos miembros de la desigualdad, por $x+3$, ya que no sabemos si ha de mantenerse el sentido de la desigualdad o si ha de cambiarse. Para ello, consideramos sucesivamente los dos casos siguientes:

a) $x + 3 > 0$
b) $x + 3 < 0$

a) Consideremos el caso $x+3>0$. Al ser $x+3$ positivo podemos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x+3$, manteniendo el sentido de la misma. Co lo que resulta,

$$\left.\begin{array}{l} x+3>0 \\ \dfrac{2x-3}{x+3}<\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x>-3 \\ 4x-6<x+3 \Leftrightarrow 3x<9 \Leftrightarrow x<3 \end{array}\right\} -3<x<3$$

b) Consideremos ahora el caso $x+3<0$. Al ser $x+3$ negativo para multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x+3$, tenemos que invertir el sentido de la misma. Co lo que resulta,

$$\left.\begin{array}{l} x+3<0 \\ \dfrac{2x-3}{x+3}<\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x<-3 \\ 4x-6>x+3 \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3 \end{array}\right\}$$

que no tiene solución, puesto que ningún número x es, a la vez, $x<-3$ y $x>3$.

En consecuencia se concluye que el conjunto solución es:

$$-3<x<3, \text{ es decir, el intervalo } (-3,3).$$

Resolución de desigualdades por factorización

Las desigualdades polinómicas y las racionales también pueden resolverse por factorización, como se describe en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.7 (Resolviendo desigualdades por factorización). *Resolver*

$$(x+2)(x-1)(x-3)>0$$

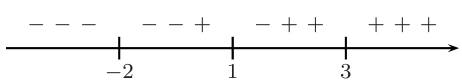
Solución. Hallamos los ceros de cada uno de los factores:

$$x=-2, \quad x=1, \quad x=3$$

y consideramos los intervalos determinados por dichos ceros,

$$(-\infty,-2), \quad (-2,1), \quad (1,3), \quad (3,+\infty)$$

Como el producto $(x+2)(x-1)(x-3)$ conserva el signo dentro de cada intervalo, se trata de estudiar el signo del mismo en cada uno de ellos. Sin embargo, en vez de elegir un número en cada intervalo y ver el signo del producto para dicho valor, lo que hacemos es recorrer la recta de derecha a izquierda y tener en cuenta que cada factor cambia de signo al pasar por su raíz correspondiente. En consecuencia tenemos la siguiente relación de signos,



Multiplicando los signos en cada intervalo, resulta que el producto es positivo para los intervalos $(-2, 1)$ y $(3, +\infty)$, luego el conjunto solución es

$$(-2, 1) \cup (3, +\infty).$$

Las desigualdades racionales se resuelven igual que las polinómicas. En efecto, teniendo en cuenta que el signo del cociente de dos números es el mismo que el signo de su producto, resulta que el conjunto solución del cociente $P(x)/Q(x) > 0$ es el mismo que el del producto $P(x) \cdot Q(x) > 0$. En consecuencia, consideramos los ceros, tanto del numerador como del denominador, y repetimos el proceso del ejemplo anterior.

1.1.2. Valor absoluto y distancia

El valor absoluto de un número real x se designa por $|x|$ y se define del modo siguiente:

$$\begin{array}{ll} |x| = x & \text{si } x > 0, \\ |x| = -x & \text{si } x < 0, \\ |0| = 0. & \end{array}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que para $x = 0$ es válida la igualdad $|x| = x$, podemos escribir más brevemente

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En consecuencia, podemos dar la siguiente

Definición 1.4 (Valor absoluto). *Se llama valor absoluto de un número real x, y se denota por el símbolo $|x|$, a dicho número si es positivo o cero, y a su opuesto si es negativo.*

$$| \ x \ | = \begin{cases} x & si \ x \geq 0 \\ -x & si \ x < 0 \end{cases}$$

Es decir, $|x|$ representa la distancia desde el origen al punto x.

Ejemplo, $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$.

Nota: El valor absoluto de un número nunca es negativo. Puede sorprender que $-x$ sea positivo, sin embargo, esto no es nada sorprendente, ya que podemos pensar en $-(-3) = +3$ que también es positivo, a pesar del signo menos inicial, ya que los dos signos menos se compensan. Igual ocurre con $-x$ donde el signo menos que aparece de manera explícita se compensa con el signo menos que x tiene implícitamente, ya que hemos supuesto, en el segundo apartado, que x es negativo.

El valor absoluto también se puede definir de la siguiente forma.

$$|x| = \text{máx}\{x, -x\}$$

Al valor absoluto de un número también se le llama su *módulo*.

Ejemplo 1.8. *Eliminar el valor absoluto en las siguientes expresiones:*

$$\text{(a)}\ |1+\sqrt{2}-\sqrt{3}| \qquad \text{(b)}\ |1+\sqrt{2}-\sqrt{10}|$$

Solución. Tenemos que comprobar si la expresión que hay dentro del valor absoluto da como resultado un número positivo o negativo, si es positivo la dejamos igual, y si es negativo la cambiamos de signo para convertirlo en positivo. En consecuencia:

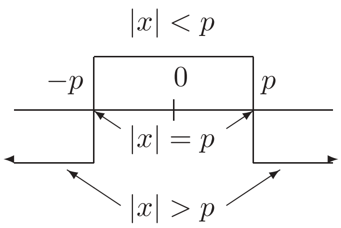
(a) $|1+\sqrt{2}-\sqrt{3}| = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$
(b) $|1+\sqrt{2}-\sqrt{10}| = -(1+\sqrt{2}-\sqrt{10}) = -1-\sqrt{2}+\sqrt{10}$

Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$ El valor absoluto nunca es negativo.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ El valor absoluto igualado a cero se puede suprimir.
3. $|x|^2 = |x^2| = x^2$ El valor absoluto elevado al cuadrado se puede suprimir.
4. $|x| = |-x|$ Dentro del valor absoluto se puede cambiar de signo.
5. $\sqrt{x^2} = |x|$
6. $-|x| \leq x \leq |x|$
7. $|x+y| \leq |x| + |y|$
8. $|xy| = |x| \cdot |y|$
9. $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y$

   Si p es positivo, se tiene:

10. $|x| \leq p \Leftrightarrow -p \leq x \leq p$
11. $|x| \geq p \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq p \\ \text{o} \\ x \leq -p \end{cases}$



Aunque formalmente no es correcto, esta propiedad puede expresarse de la forma:

$$|x| \geq p \Leftrightarrow -p \geq x \geq p$$

Habrá que tener en cuenta que cada desigualdad va por separado.

Nota: (Aclaraciones sobre la raíz cuadrada). Veamos algunas aclaraciones acerca de la raíz cuadrada. En Matemáticas, la raíz cuadrada de un número se define de la siguiente forma

Definición 1.5. *El número b se llama raíz cuadrada del número a si $b^2 = a$.*

$$b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a$$

Esta definición significa lo siguiente:

1. Si el número a es positivo, existen exactamente dos raíces cuadradas de a, una positiva y la otra negativa.
2. Si $a = 0$, existe una sola raíz cuadrada de a, la que es igual a cero.
3. Si el número a es negativo, no existe ninguna raíz cuadrada de a.

En Cálculo, esta definición de raíz cuadrada, si la aceptamos tal cual, presenta varias dificultades:

1. La ecuación $y = \sqrt{x}$ no representaría una función ya que, dicha relación, asignaría dos valores a un mismo número, por ejemplo, $f(4) = \pm 2$, lo que no está permitido para las funciones como veremos en la Sección 1.3.
2. Según esta definición $\sqrt{4}$ no sería un número, sino un conjunto de números, ya que $\sqrt{4} = \{-2, 2\}$, y no tendría sentido hablar de la suma $3 + \sqrt{4}$, ya que no sabríamos si dicha suma es 1 o 5.

Para resolver estos problemas, en Cálculo, lo que se hace es diferenciar ambas raíces, introduciendo el concepto de *raíz aritmética*.

Definición 1.6 (Raíz cuadrada aritmética). *Se llama raíz cuadrada aritmética de un número positivo, a, a la raíz cuadrada positiva de este número.*

$$b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \quad y \quad b \geq 0$$

En consecuencia, la afirmación de que b es la raíz cuadrada aritmética de a es equivalente a un conjunto de dos afirmaciones: $b^2 = a$ y $b \geq 0$; con esto se supone que a es un número positivo o cero.

En Cálculo, cuando hablamos de raíz cuadrada nos referimos, siempre, a la raíz cuadrada aritmética. Así, por ejemplo, aunque 4 tenga dos raíces cuadradas, 2 y -2, con el símbolo $\sqrt{4}$ solamente nos referimos a la raíz cuadrada positiva $\sqrt{4} = +2$. Para indicar la raíz cuadrada negativa tendremos que explicitarlo con un signo menos $-\sqrt{4} = -2$. Es decir, en Cálculo, para evitar la ambivalencia, el símbolo $\sqrt{x}$ denota exclusivamente la raíz no-negativa de x.

Tenemos que tanto x como $-x$ son raíces cuadradas de x^2, ya que $(+x)^2 = x^2$ y $(-x)^2 = x^2$. Sin embargo, en Cálculo, $\sqrt{x^2}$ no es simplemente un número cualquiera que elevado al cuadrado da x^2, sino que es indispensablemente un número positivo o cero. En consecuencia,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Lo que significa que, en general, no se va a poder compensar el cuadrado con la raíz cuadrada, salvo que el radicando sea positivo.

$$\sqrt{x^2} \neq x$$

Por otro lado, la solución de la ecuación $x^2 = p$ no se puede expresar simplemente con $x = \sqrt{p}$, ya que con este símbolo nos vamos a referir, exclusivamente, a una de las dos posible soluciones. En consecuencia tendremos que indicar

$$x^2 = p \Rightarrow x = \pm\sqrt{x}$$

Ejemplo 1.9 (Ecuaciones con valor absoluto). *Resolver las siguientes ecuaciones:*

$$1.\ |x-5| = 4, \quad 2.\ |x-5| = -4, \quad 3.\ |x-5| = 0, \quad 4.\ |x+1| = 3x - 9$$

Solución.

1. $|x-5|=4 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x-5=4 \\ \text{ó} \\ x-5=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=9 \\ \\ x=1 \end{array}$

2. $|x-5|=-4$ No tiene solución.

3. $|x-5|=0 \quad \Rightarrow \quad x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=5$

4. $|x+1|=3x-9 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1\geq 0 \\ x+1=3x-9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x\geq -1 \\ 10=2x \end{array}\right\} x=5 \\ \qquad \text{ó} \\ \left.\begin{array}{l} x+1\leq 0 \\ -x-1=3x-9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x\leq -1 \\ 8=4x \end{array}\right\} \text{No} \end{array}\right\} \Rightarrow x=5$

En general, el método más directo de atacar un problema referente a valores absolutos requiere la consideración por separado de distintos casos, con objeto de eliminar el valor absoluto. En particular, siempre habrá que considerar si lo que hay dentro del valor absoluto es positivo o es negativo. Esto hace que cuando aparecen varios valores absolutos, la casuística se complique, ya que hay que considerar, por separado, todas las posibilidades, en cuanto al signo, de las expresiones que hay dentro de cada uno de los valores absolutos.

Sin embargo, en ocasiones pueden emplearse otros métodos más sencillo que eliminen el valor absoluto, sin tener que acudir a la casuística de los signos. Bien, acudiendo a las propiedades del valor absoluto, o bien, utilizando la representación gráfica. Por ejemplo, la ecuación $|x+1|=3x-9$ también puede resolverse gráficamente, estudiando los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x)=|x+1|$ y $g(x)=3x-9$. Otra manera de abordar esta ecuación es resolviendo la ecuación irracional: $\sqrt{(x+1)^2}=3x-9$

Nota: Al resolver una ecuación con valores absolutos, cada caso supone resolver un sistema formado por una inecuación y una ecuación. Evidentemente, la inecuación no es necesario resolverla, ya que podemos resolver la ecuación y comprobar si las soluciones de la misma cumplen o no la inecuación. Si la cumplen la aceptamos como solución y si no la cumplen la rechazamos.

Puede ocurrir que una solución rechazada en un caso, aparezca como solución valida en otro de los casos. En tal caso se acepta la solución (siempre está la posibilidad de comprobar las soluciones en la ecuación inicial).

Cuando se trata de resolver una inecuación con valores absolutos, entonces sí que hay que resolver todas las desigualdades, ya que se trata de encontrar la intersección de los conjuntos solución.

Si aparecen varios valores absolutos cada sistema tendría varias inecuaciones que correrían la misma suerte de lo dicho anteriormente.

Ejemplo 1.10. *Resolver la ecuación* $|x^2-2x-8|=x+2$

Solución. Consideramos sucesivamente los dos casos:

$$\begin{array}{l} a)\ x^2-2x-8\geq 0, \\ b)\ x^2-2x-8<0. \end{array}$$

a) $x^2 - 2x - 8 \geq 0$. En este caso resulta la ecuación: $x^2 - 2x - 8 = x + 2$. En consecuencia tenemos que resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{array}\right\}$$

Para ello resolvemos la ecuación y comprobamos las soluciones en la inecuación. Así,

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \to \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \left\{\begin{array}{l} 5 \\ -2 \end{array}\right.$$

de donde,

$$\begin{array}{l} x = 5 \Rightarrow 5^2 - 2 \cdot 5 - 8 = 25 - 10 - 8 = 7 > 0, \\ x = -2 \Rightarrow (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0. \end{array}$$

Luego las dos soluciones son válidas.
b) $x^2 - 2x - 8 < 0$. En este caso resulta la ecuación: $-x^2 + 2x + 8 = x + 2$. En consecuencia tenemos que resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 < 0 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

Para ello resolvemos la ecuación y comprobamos las soluciones en la inecuación. Así,

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \to \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\{\begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}\right.$$

de donde,

$$\begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow 3^2 - 2 \cdot 3 - 8 = 9 - 6 - 8 = -5 < 0, \\ x = -2 \Rightarrow (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0. \end{array}$$

En este caso la primera solución es valida y la segunda no. No obstante, $x = -2$ es valida, por el caso anterior.

En consecuencia las soluciones de la ecuación inicial son $x = -2$, $x = 3$ y $x = 5$.

Ejemplo 1.11. *Resolver la ecuación* $x^2 - 4|x| - 5 = 0$

Solución. En este ejemplo, para liberarnos del módulo podemos considerar sucesivamente los dos casos $x \geq 0$ y $x < 0$; o bien, teniendo en cuenta que $x^2 = |x|^2$, transformar la ecuación inicial en $|x|^2 - 4|x| - 5 = 0$ que se resuelve con un cambio de variable, o bien, directamente:

$$|x|^2 - 4|x| - 5 = 0 \Rightarrow |x| = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \left\{\begin{array}{l} 5 \Rightarrow x = 5 \text{ ó } -5 \\ -1 \text{ no es solución} \end{array}\right.$$

Luego la ecuación inicial tiene dos soluciones $x = 5$ y $x = -5$.

Ejemplo 1.12 (Desigualdades con valor absoluto). *Resolver las siguientes desigualdades:*

$$\begin{array}{llllll} 1. & |x-1| \leq 3, & 2. & |2-4x| \leq 6, & 3. & |x| \geq 2 \\ 4. & |x-1| \geq 2 & 5. & |2x-3| \leq -2, & 6. & |2x-3| \geq -2 \end{array}$$

Solución.

1. $|x-1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in \big[-2, 4\big]$
2. $|2-4x| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq 2-4x \leq 6 \Rightarrow -8 \leq -4x \leq 4 \Rightarrow 2 \geq x \geq -1 \Rightarrow$
$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in \big[-1, 2\big]$$
3. $|x| \geq 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \big(-\infty, -2\big] \cup \big[2, +\infty\big)$
4. $|x-1| \geq 2 \Rightarrow -2 \geq x-1 \geq 2 \Rightarrow -1 \geq x \geq 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$
$$\Rightarrow x \in \big(\infty, -1\big] \cup \big[3, +\infty\big)$$
5. $|2x-3| \leq -2 \Rightarrow$ No tiene solución.
6. $|2x-3| \geq -2 \Rightarrow$ Se cumple siempre, luego $x \in (-\infty, +\infty)$

Ejemplo 1.13 (Sistemas de desigualdades). *Resolver el sistema de desigualdades:*

$$\left. \begin{array}{l} |2x-2| \leq 4 \\ |2x-3| \geq 1 \end{array} \right\}$$

Solución. Resolvemos cada desigualdad por separado y luego hallamos la intersección de los conjuntos solución.

$$\left. \begin{array}{l} |2x-2| \leq 4 \\ |2x-3| \geq 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -4 \leq 2x-2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \\ -1 \geq 2x-3 \geq 1 \Rightarrow 2 \geq 2x \geq 4 \Rightarrow 1 \geq x \geq 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \big[-1, 1\big] \cup \big[2, 3\big]$$

Expresión de intervalos mediante valor absoluto

Cualquier intervalo se puede expresar en términos de valor absoluto de la siguiente forma:

$$\big[a, b\big] = \left\{ x \in \mathbb{R} / \, |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2} \right\}$$

Si m es el punto medio del intervalo $[a, b]$, y r el radio, entonces:

$$|x-m| \leq r$$

Nota: Para hallar el punto medio de un intervalo basta con hallar la media aritmética de sus extremos. Es decir, el punto medio del intervalo (a, b) es

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Ejemplo 1.14 (Expresión de intervalos mediante valor absoluto). *Expresar mediante valor absoluto los siguientes intervalos:*

1. $\big[-2, 2\big]$, 2. $\big[-1, 3\big]$, 3. $\big(-\infty, -2\big] \cup \big[2, +\infty\big)$, 4. $\big(-\infty, 1\big] \cup \big[5, +\infty\big)$.

Solución.

1. $\big[-2, 2\big] = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x| \leq 2\}$
2. $\big[-1, 3\big] = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x-1| \leq 2\}$
3. $\big(-\infty, -2\big] \cup \big[2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x| \geq 2\}$
4. $\big(-\infty, 1\big] \cup \big[5, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x-3| \geq 2\}$

Definición 1.7 (Intervalo reducido de un punto). *Se llama entorno reducido de un punto a un entorno en el que se ha suprimido el punto.*

Ejemplo 1.15 (Expresión mediante valor absoluto de un entorno reducido). *Expresar mediante valor absoluto un entorno reducido de 4 de radio 2.*

Solución.

$$(2, 4) \cup (4, 6) = \{x \in \mathbb{R}/ \quad 0 < |x-4| < 2\}$$

La manera de expresar que $x \neq 4$ es mediante la desigualdad $0 < |x-4|$

Distancia entre dos puntos de la recta real

Definición 1.8 (Distancia entre dos puntos de la recta real). *La distancia entre dos puntos x_1 y x_2 de la recta real, viene definida por el valor absoluto de su diferencia*

$$\boxed{d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}}$$

Nota: El orden en que se restan los puntos x_1 y x_2 no importa, ya que $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

A la diferencia de los números (sin el valor absoluto) se le llama *distancia dirigida*. Así,

a) la distancia dirigida de x_1 a x_2 es $x_2 - x_1$; y,

b) la distancia dirigida de x_2 a x_1 es $x_1 - x_2$.

En consecuencia, la distancia dirigida es positiva cuando se mide hacia la derecha (orden creciente de los números) y negativa cuando se mide hacia la izquierda (orden decreciente de los números).

Ejemplo 1.16 (Distancia en la recta). *Hallar la distancia entre -2 y 5*

Solución. a) La distancia entre -2 y 5 viene dada por:

$$d = |5 - (-2)| = |7| = 7$$

b) La distancia dirigida desde -2 a 5 es 5-(-2)=7
c) La distancia dirigida desde 5 a -2 es -2-5=-7

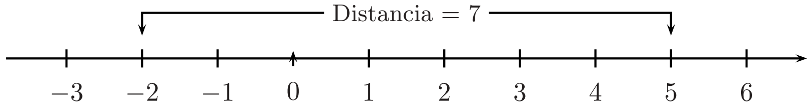


Figura 1.2: Distancia en la recta real

Ejercicios propuestos de la sección 1.1. La recta real

Soluciones en la página 389

1.1.1. Resolver las inecuaciones:

$$\text{a) } 3x - 4 \leq -1 \qquad \text{b) } 2 - 3x \geq 11$$

1.1.2. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones

$$\text{a)} \quad \left.\begin{array}{l} 3x - 2 \geq 7 \\ 5x - 7 \leq 3 \end{array}\right\} \qquad \text{b)} \quad \left.\begin{array}{l} 4x - 1 \geq -5 \\ 7x - 1 \leq 13 \end{array}\right\} \qquad \text{c)} \quad \left.\begin{array}{l} 3 - 2x \geq -1 \\ 3 - 2x \leq 7 \end{array}\right\}$$

1.1.3. Resolver las desigualdades:

$$\text{a) } x^2 + 5 \leq 6x \qquad \text{b) } \frac{2x - 3}{x - 5} < 1$$

1.1.4. Resolver las desigualdades:

$$\text{a) } x < \frac{1}{x} \qquad \text{b) } 3 \leq x^2 - 6x + 8 \leq 8$$

1.1.5. Resolver las ecuaciones:

$$\text{a) } \big||x+1| + 2\big| = 2 \quad \text{b) } \big||x+1| + 2\big| = 1 \quad \text{c) } \big||x+1| + 2\big| = 3$$

1.1.6. Resolver las ecuaciones:

$$\text{a) } |3x - 6| = x + 2 \qquad \text{b) } \left|\frac{x-2}{x-1}\right| = 3$$

$$\text{c) } |x^2 - 6x + 8| = x - 2 \qquad \text{d) } x^2 + |x| - 2 = 0$$

1.1.7. Resolver las desigualdades

$$\text{a) } |3x - 6| < x + 2 \qquad \text{b) } \left|\frac{x-2}{x-1}\right| < 3$$

1.1.8. Expresar mediante valor absoluto las siguientes desigualdades:

$$\text{a)} \quad \left.\begin{array}{c} x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ x \neq x_0 \end{array}\right\} \qquad \text{b) } \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

1.2. El plano y el espacio cartesiano

1.2.1. Sistema rectangular de coordenadas cartesianas

a) Plano cartesiano. Un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano, en el plano, se construye mediante dos rectas perpendiculares, llamadas ejes de coordenadas. La recta real horizontal se llama tradicionalmente *eje* x y la vertical *eje* y. Su punto de intersección se llama *origen de coordenadas*.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes*.

Cada punto del plano se identifica por un par ordenado (x, y) de números reales, llamados *coordenadas* del punto. El número x se llama coordenada x o *abscisa* y representa la distancia dirigida desde el eje y al punto. El número y se llama coordenada y u *ordenada* y representa la distancia dirigida desde el eje x al punto.

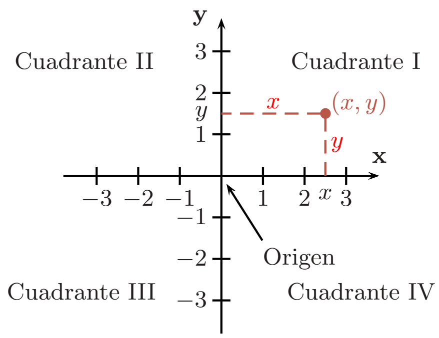


Figura 1.3: El plano cartesiano

Nota: Usamos paréntesis (a, b), tanto para representar el intervalo abierto (a, b), como para indicar el punto del plano de coordenadas (a, b). No obstante, el contexto determinará en cada caso a qué nos estamos refiriendo.

b) Espacio cartesiano. Un sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano, en el espacio, se construye mediante tres rectas perpendiculares, llamadas ejes de coordenadas. El primer eje se llama tradicionalmente *eje* x, el segundo *eje* y, y el tercero *eje* z. Su punto de intersección se llama *origen de coordenadas*.

Un sistema de referencia tridimensional puede tener orientación positiva u orientación negativa. Tiene orientación positiva si un *"tornillo"* situado en el eje z que gire desde el eje x hacia el eje y, avanza hacia la dirección positiva del eje z; y orientación negativa si avanza en dirección contraria.

Los ejes de coordenadas, tomados de dos en dos, determinan tres *planos coordenados*, denominados por *plano* xy, *plano* xz y *plano* yz. Estos planos

Figura 1.4: Las dos orientaciones del espacio.

coordenados dividen el espacio en ocho regiones llamadas *octantes*. El primer octante es aquel en que las tres coordenadas son positivas.

Cada punto del espacio se identifica por una terna ordenada (x, y, z) de números reales, llamados *coordenadas* del punto. El número x se llama coordenada x o *abscisa* y representa la distancia dirigida desde el plano yx al punto. El número y se llama coordenada y u *ordenada* y representa la distancia dirigida desde el plano xz al punto. El número z se llama coordenada z o *cota* y representa la distancia dirigida desde el plano xy al punto.

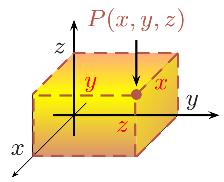


Figura 1.5: El espacio cartesiano

1.2.2. Distancia entre dos puntos

a) En el plano. Para hallar la distancia entre dos puntos del plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Formamos con ellos un triángulo rectángulo, con lados paralelos a los ejes de coordenadas, y aplicamos el teorema de Pitágoras.

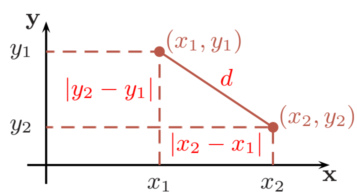


Figura 1.6: Distancia entre dos puntos

En su virtud, resulta

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

de donde, tomando la raíz cuadrada positiva, ya que la distancia entre dos puntos es un número positivo, resulta

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Proposición 1.2 (Distancia entre dos puntos del plano). *La distancia d entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) viene dada por*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

b) En el espacio. Para hallar la distancia entre dos puntos del espacio, (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), se aplica el teorema de Pitágoras dos veces y se obtiene la siguiente fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

c) En el espacio n-dimensional. Se llama punto $\mathbf{x}$ de un espacio n-dimensional al conjunto ordenado (n-upla) de números reales $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

El número x_i se llama coordenada i-ésima del punto $\mathbf{x}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 1.9 (Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$). *La distancia entre dos puntos $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ se define por la fórmula*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.17 (Distancia entre dos puntos). *Hallar la distancia:*

a) Entre los puntos $(-2, 4)$ y $(2, 1)$.
b) Entre los puntos $(2, 2, 3)$ y $(3, 4, 5)$.

Solución. Aplicando, en cada caso, la fórmula (1.1), resulta

a) $d = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

b) $d = \sqrt{(3 - 2)^2 + (4 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

1.2.3. El círculo y la esfera

a) La circunferencia en el plano. Teniendo en cuenta que la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r está formada por los puntos del plano cuya distancia al centro (x_0, y_0) es el radio r, resulta

Proposición 1.3 (Ecuación de la circunferencia). *El punto (x, y) está en la circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r si y sólo si*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{1.2}$$

Demostración. En efecto, si (x, y) es un punto de la circunferencia, su distancia al centro (x_0, y_0), será r, en consecuencia

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$

y elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad se obtiene la ecuación de la circunferencia

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$ □

Si la circunferencia tiene su centro en el origen de coordenadas $(0, 0)$ y radio r, su ecuación será

$$x^2+y^2=r^2$$

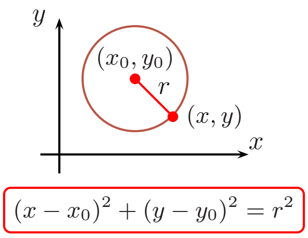
Se llama *círculo* o *disco* al interior de una circunferencia. En consecuencia

Proposición 1.4 (Ecuación de un círculo o disco). *El punto (x, y) está en el círculo de centro (x_0, y_0) y radio r si y sólo si*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2 \tag{1.3}$$

Si consideramos que el círculo incluye la circunferencia, su ecuación es

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$$



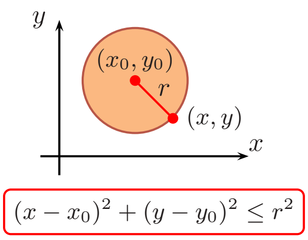


Figura 1.7: Circunferencia y círculo

Ejemplo 1.18 (Hallando la ecuación de una circunferencia). *Una circunferencia tiene su centro en el punto $(-2, 1)$ y contiene al punto $(1, 3)$*

a) Halla la ecuación de la circunferencia
b) Halla la ecuación del círculo delimitado por la circunferencia

Solución. El radio es la distancia entre el centro $(-2, 1)$ y el punto $(1, 3)$. En consecuencia,

$$r=\sqrt{[1-(-2)]^2+(3-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

Por lo tanto, se tiene: a) *Ecuación de la circunferencia.*

$$[x-(-2)]^2+(y-1)^2=(\sqrt{13})^2$$

de donde,

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$$

b) *Ecuación del círculo.*

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 < 13$$

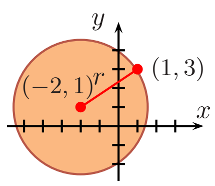


Figura 1.8: $(x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 13$

Ecuación general de la circunferencia. Si en la ecuación canónica de la circunferencia

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

eliminamos los paréntesis y simplificamos, resulta una ecuación del tipo

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0 \tag{1.4}$$

que es la forma general de la ecuación de la circunferencia.

Nota: Obsérvese que los coeficientes de x^2 y de y^2 han de ser iguales para que se trate de una circunferencia.

Ejemplo 1.19 (Completando cuadrados). *Hallar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación en forma general es*

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 13 = 0$$

Solución. Pasamos de la forma general a la forma canónica completando cuadrados. Para ello; en primer lugar, dividimos por 4 para que los coeficientes de x^2 e y^2 sean 1.

$$4x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 13 = 0 \quad \to \quad x^2 + y^2 + x - 4y + \frac{13}{4} = 0$$

y, en segundo lugar, agrupamos los términos semejantes.

$$(x^2 + x + \quad) + (y^2 - 4y + \quad) = -\frac{13}{4}$$

Completamos los cuadrados

$$\left(x^2 + 1x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 - 4y + 4) = -\frac{13}{4} + \frac{1}{4} + 4$$

de donde resulta

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = 1$$

y por tanto, la circunferencia tiene centro en el punto $(\frac{-1}{2}, 2)$ y radio 1.

Ejemplo 1.20 (Conjunto solución con un único punto). *Discutir la gráfica de la ecuación*

$$3x^2 + 3y^2 - 18x - 12y + 39 = 0$$

Solución. Pasamos de la forma general a la forma canónica completando cuadrados. Para ello, en primer lugar dividimos por 3 para que los coeficientes de x^2 e y^2 sean 1.

$$3x^2 + 3y^2 - 18x - 12y + 39 = 0 \quad \to \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$$

en segundo lugar agrupamos los términos semejantes

$$(x^2 - 6x + \quad) + (y^2 - 4y + \quad) = -13$$

completamos los cuadrados, con lo que resulta

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -13 + 9 + 4$$

de donde

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$$

y esta ecuación sólo se cumple cuando $x = 3$ e $y = 2$. Es decir, la gráfica de la ecuación se reduce al punto $(3, 2)$

Ejemplo 1.21 (Ecuación sin conjunto solución). *Discutir la gráfica de la ecuación*

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$$

Solución. Pasamos de la forma general a la forma canónica completando cuadrados. Agrupamos los términos semejantes, tenemos

$$(x^2 + 2x + \quad) + (y^2 - 4y + \quad) + 9 = 0$$

completando cuadrados

$$(x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 9 = 0$$

de donde resulta

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = -4$$

que no tiene solución ya que la suma de dos cuadrados no puede dar un resultado negativo.

Nota: La ecuación general $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$ no siempre representa una circunferencia, sino que, en algunas ocasiones se reduce a un punto, y en otras no tiene solución

b) La esfera en el espacio. Teniendo en cuenta que la superficie esférica de centro (x_0, y_0, z_0) y radio r está formada por los puntos del espacio cuya distancia al centro (x_0, y_0, z_0) es el radio r, resulta la siguiente

Proposición 1.5 (Ecuación de la superficie esférica). *El punto (x, y, z) está en la superficie esférica de centro (x_0, y_0, x_0) y radio r si y sólo si*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \tag{1.5}$$

Demostración. En efecto, si (x, y, z) es un punto de la superficie esférica, su distancia al centro (x_0, y_0, z_0), será r. En consecuencia

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

y elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad se obtiene la ecuación de la superficie esférica

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \qquad \square$$

Si la esfera tiene su centro en el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$ y radio r, la ecuación de la superficie esférica será

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Se llama *esfera* o *bola* al interior de una superficie esférica. En consecuencia

Proposición 1.6 (Ecuación de una esfera o bola). *El punto (x, y, z) está en la esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio r si y sólo si*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2 \tag{1.6}$$

Si consideramos que la esfera incluye la superficie esférica, su ecuación es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$$

Ejemplo 1.22 (Hallando la ecuación de una esfera). *Una superficie esférica tiene su centro en el punto $(-2, 1, 3)$ y contiene al punto $(1, 3, 2)$*

a) Halla la ecuación de la superficie esférica
b) Halla la ecuación de la esfera delimitada por la superficie esférica

Solución. El radio es la distancia entre el centro $(-2, 1, 3)$ y el punto $(1, 3, 2)$. En consecuencia,

$$r = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (3 - 1)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

Por lo tanto, se tiene: a) *Ecuación de la superficie esférica.*

$$[x-(-2)]^2+(y-1)^2+(z-3)^2=(\sqrt{14})^2$$

de donde,

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=14$$

b) *Ecuación de la esfera.*

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2\le 14$$

Ejercicios propuestos de la sección 1.2. El plano y el espacio cartesiano

Soluciones en la página 389

1.2.1. Hallar la distancia entre las siguientes parejas de punto:

a) $(-1,-1)$ y $(-2,-2)$ b) $(2,1,3)$ y $(4,2,1)$

1.2.2. Hallar x tal que la distancia del origen al punto $(x,4)$ sea 5.

1.2.3. Hallar y de modo que la distancia de $(-1,2)$ a $(2,y)$ sea 5.

1.2.4. Hallar la ecuación de una circunferencia:
a) Que tiene su centro en el punto $(1,1)$ y pasa por el origen de coordenadas.
b) Que pasa por los puntos $(1,1)$, $(3,1)$ y $(3,3)$.

1.2.5. Discutir las gráficas de las ecuaciones:

a) $x^2+y^2+6x-4y+12$ b) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$ c) $x^2+y^2-4x-6y+14=0$

1.2.6. Hallar, en cada caso, el conjunto de todos los puntos que verifican la desigualdad

a) $x^2+y^2-6x-4y+9\le 0$ b) $x^2+y^2-4x-2y+1>0$ c) $x^2+y^2+2x-4y+6<0$

1.2.7. Determinar la gráfica de la ecuación: $2(x+y)-(x+y)^2=(x-y)^2$

1.2.8. Hallar la ecuación de una superficie esférica que tiene a los puntos $(3,2,3)$ y $(-1,-2,1)$ como extremos de un diámetro.

1.3. Funciones

1.3.1. Definiciones

En la vida real nos encontramos con magnitudes que están relacionadas entre sí, bien, porque existe una relación numérica entre ella, de manera que el valor de una de ellas depende del valor de la otra. Por ejemplo la distancia recorrida por un automóvil depende del tiempo que lleva circulando. La demanda de un determinado producto depende de su precio; o bien, porque existe entre ellas una relación no numérica, de cualquier naturaleza. Por ejemplo los ciudadanos y los países del mundo están relacionados por la nacionalidad.

De las *causas* de estas relaciones se ocupan las distintas ramas del saber (Física, Economía, Derecho, etc.). En Cálculo nos ocupamos del estudio de estas relaciones vistas en sí mismas, desposeyéndolas del significado material de las magnitudes que intervienen. Además, nos limitamos, en gran medida, a un tipo particular de relaciones denominadas *funciones.*

Una función es una correspondencia entre dos magnitudes (numéricas o no numéricas). Ahora bien, cuando nos referimos a funciones, la correspondencia siempre hay que entenderla en una dirección determinada, por ejemplo, el espacio función del tiempo (el espacio sería la imagen y el tiempo el origen). No obstante, hay que advertir que no se considera función a cualquier correspondencia, sino que para que una correspondencia sea función, la imagen de cada elemento tiene que ser única y estar bien determinada. Por ejemplo, la relación entre los ciudadanos y los países del mundo mediante la nacionalidad no es una función, porque existen ciudadanos con doble nacionalidad. Es decir, para que una correspondencia sea función, los originales no pueden tener más de una imagen, si bien, varios originales distintos sí que pueden tener la misma imagen. En consecuencia una correspondencia puede ser función en un sentido y no serlo en el sentido contrario.

Nota: Aunque el concepto de función nace del estudio de la relación existente entre dos magnitudes que están vinculadas por una relación de causalidad (causa-efecto), y se establece la *causa* como *variable independiente* y el *efecto* como *variable dependiente*. Sin embargo, en Matemáticas se pueden establecer funciones entre dos magnitudes, aunque no exista ningún tipo de causalidad entre ellas. Es decir, se pueden establecer relaciones de manera artificial.

La idea de «función» que se adquiere en los primeros contactos con el Cálculo, tanto en la Enseñanza Secundaria como en el Bachillerato, por lo común, suele identificar el concepto de función con una «fórmula», por ejemplo
$$f(x) = x^2 - 5x + 6,$$
y se entiende que esta fórmula asocia a cada número real x otro número real $f(x)$. Basta sustituir x por un número concreto y hacer las operaciones indicadas, para obtener su imagen. También se comprende que ciertas fórmulas, tales como
$$g(x) = \sqrt{x-4},$$
no estén definidas para todos los números reales, y por tanto, que haya números reales que no tengan imagen mediante dichas funciones, de ahí el estudio de los dominios. Sin embargo, el alumno de Secundaria, e incluso el de Bachillerato, se suele resistir a comprender que haya funciones definidas «a trozos», «en partes», o «según los casos». Es decir, funciones en las que no todos los números tienen el mismo tratamiento, sino que según sea el número se le aplica una fórmula u otra para calcular su imagen. El ejemplo

más característico de este tipo de funciones es la función valor absoluto

$$h(x) = |x|$$

que se define «a trozos» de la siguiente forma

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Más incomprensible suelen se las funciones que se definen «con un punto aparte» como la función

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

o las funciones definidas «según la naturaleza» del punto, como por ejemplo

$$l(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

en donde a los números racionales se les aplica una fórmula y a los irracionales otra.

Dentro de esta asociación de ideas, función *versus* fórmula, todavía es mucho más incomprensible el hecho de que haya funciones para las que no exista una «fórmula» que las represente.

Otra asociación de ideas que también suele resultar perniciosa a la hora de generalizar el concepto de función es el identificar la función con su «gráfica». Tanto la «fórmula» como la «gráfica» son dos instrumentos que nos ayudan, enormemente, a comprender el concepto de «función», pero no debemos identificar los instrumentos con el concepto mismo, ni sentirnos "*atrapados*" por los instrumentos a la hora de generalizar los conceptos.

Estas identificaciones de ideas que realizan los alumnos de Secundaria y Bachillerato no nos deben de preocupar en demasía ya que responden a las mismas identificaciones de ideas que han realizado los matemáticos a lo largo de la historia de las Matemáticas, pero es bueno explicitarlas y ponerlas de manifiesto con objeto de superarlas.

Estas observaciones ponen de manifiesto que el requisito de que una función sea una fórmula es indebidamente restrictivo, y más aún, el identificar las funciones con sus gráficas. Por otro lado, también resulta importante hacer una clara distinción entre la función misma y los valores de la función. Es decir, una cosa es la función f y otra el valor $f(x)$.

Una primera aproximación al concepto de función podría ser la siguiente definición:

Una función f de un conjunto A a un conjunto B (A y B no necesariamente distintos) es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x de un cierto subconjunto $\mathcal{D}$ de A, un elemento (y sólo uno) bien determinado y de B (además, ni A ni B pueden ser el conjunto vacío).

Esto lo indicaremos de la siguiente forma,

$$\mathcal{D} \subseteq A \xrightarrow{f} B \quad \text{o bien} \quad f : \mathcal{D} \subseteq A \to B$$
$$f : x \mapsto y, \quad \text{o bien} \quad y = f(x)$$

Esta definición admite la posibilidad de que la función pueda no estar definida para ciertos elementos de A, así como que haya elementos de B que no sean imágenes de elementos de A. Es decir, que tanto en A como en B puede haber elementos no relacionados mediante la función f. Y además, admite la consideración de funciones para las cuales los conjuntos A y B no son necesariamente de números reales. Sin embargo, la definición presenta un inconveniente y es que no es totalmente clara, ya que no se define lo que deba interpretarse por «regla de correspondencia».

Una forma más precisa de definir el concepto de función consiste en imaginarla como el *conjunto formado por las parejas de elementos que están relacionados entre sí.* La función, así concebida, sería un conjunto de pares ordenados $f \subseteq A \times B$. Evidentemente cualquier conjunto de pares ordenados no define una función, ya que el primer elemento de las parejas no se puede repetir dentro del conjunto. La función, así concebida, sería un *conjunto*, y la podemos pensar como el conjunto de puntos que integran la gráfica de la función. La definición, en estos términos, es la siguiente:

Definición 1.10 (Función). *Sean A y B conjuntos (no vacíos y no necesariamente distintos). Una función de A a B es un conjunto f de pares ordenados de $A \times B$ con la propiedad de que si (a, b) y (a, b') son elementos de f, entonces $b = b'$.*

$$f = \{(a, b) \in A \times B \,/\, (a, b) \in f \ y \ (a, b') \in f \Rightarrow \ b = b'\}$$

Resulta conveniente tener siempre presente esta doble concepción de las funciones: una estática, como un *conjunto* de pares ordenados (a, b); y otra dinámica, como una *transformación* del primer elemento de cada par en el segundo $b = f(a)$.

Si (a, b) es un elemento de una función f, entonces, en vez de escribir $(a, b) \in f$, se escribe:

$$b = f(a) \quad \text{ó} \quad f : a \mapsto b$$

es decir, por lo general, se hace referencia al elemento b como el *valor* de f en el punto a, o la *imagen* de a bajo f.

Al exigir que la imagen ha de estar *bien determinada* lo que estamos haciendo es eliminar la posibilidad de definir una función mediante la que se estableciera, por ejemplo, que la imagen de 4 será 2 o -2, según nos convenga en cada caso.

Dominio y recorrido de una función

Dominio. Al conjunto de todos los elementos de A que pueden aparecer como primeros miembros de elementos de f se le llama *dominio* de f, y se denota por $\mathcal{D}_f$, o simplemente $\mathcal{D}$. Es decir, el dominio está formado por todos los elementos de A que tienen imagen.

Recorrido. Al conjunto de todos los elementos de B que puedan aparecer como segundos miembros de elementos de f se le llama *rango*, *recorrido*, *imagen* o *conjunto de valores* de f y se denota por $\mathcal{R}_f$, o simplemente $\mathcal{R}$. Es decir, el recorrido está formado por todos los elementos de B que son imagen.

En el caso de que $\mathcal{D}_f = A$, la función se llama «aplicación», y se dice que f *mapea* o *proyecta* A en B (o que es un mapeo o proyección de A en B) y se escribe $f : A \to B$.

Nota: No obstante, hay que advertir que algunos autores exigen en la definición de función que el dominio coincida con el conjunto inicial, $\mathcal{D}_f = A$, e identifican «función» con «aplicación».

Sin embargo, nosotros entendemos que no es necesario incluir dicha restricción en la definición de función, y preferimos considerar las «aplicaciones» como un caso particular de las «funciones».

Nosotros hablaremos indistintamente de la función $f : A \to B$ con dominio $\mathcal{D} \subseteq A$, y de la aplicación $f : \mathcal{D} \to B$, salvo que, por cualquier motivo, tengamos que diferenciarlas. Y, en general, escribiremos $f : \mathcal{D} \subseteq A \to B$ para hacer referencia a cualquiera de las dos funciones.

En las funciones que se estudian en Cálculo los conjuntos A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}^n$, y escribiremos:

$$\begin{gathered} f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f : \, x \longmapsto y \;\text{ o bien, }\; y = f(x) \end{gathered}$$

En esta notación se enfatiza el dominio $\mathcal{D}$ de la función, sin embargo, el rango no queda explícito. En Cálculo nos ocupamos mucho más del dominio que del rango. Las funciones de este tipo se llaman *funciones reales de una variable real* (funciones reales porque las imágenes, $f(x)$, son números reales; de una variable real porque $x \in \mathbb{R}$).

1.3.2. Representación de funciones

Existen diversas maneras de visualizar una función, las más usuales son mediante las cuatro representaciones siguientes:

1. Verbal – mediante una *descripción con palabras*.
2. Numérica – mediante una *tabla de valores*.
3. Algebraica – mediante una *ecuación*.
4. Visual – mediante
   – una *gráfica*,
   – un *diagrama de flechas*,
   – una *máquina*.

Unas representaciones responden mejor a la concepción estática de la función, como conjunto de pares ordenados; y otras a la concepción dinámica, como proyección o transformación.

Nota: Si bien, una misma función puede representarse mediante todas las maneras posibles, incluso, a veces, es conveniente utilizar varias representaciones de una misma función para tener un conocimiento más completo de la misma. Hay que tener en cuenta que ciertas funciones se describen de manera más natural con uno de los métodos que con otro.

a) Descripción verbal. Una función puede venir definida mediante una descripción verbal. Por ejemplo, la función que indica la *relación existente entre el peso de las manzanas y el precio que hay que pagar por ellas, suponiendo que el kilo de manzanas cuesta 1.5 euros.*

b) Representación tabular. Una manera importante de representar una función es mediante una *tabla.* Es lo que hacemos, normalmente, cuando vamos a representar gráficamente una función: darle valores y formar una tabla con ellos. La tabla puede construirse de manera horizontal o vertical.

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$

x	x_0	x_1	$\cdots$
y	y_0	y_1	$\cdots$

Este procedimiento es especialmente útil cuando se trata de representar funciones no numéricas. Por ejemplo, si queremos asociar una serie de países con sus capitales, podemos tener la siguiente función:

País	Capital
Argentina	Buenos Aires
Chile	Santiago
España	Madrid
México	México
Perú	Lima

c) Expresión algebraica. En Cálculo la principal manera de representar una función es mediante una ecuación que liga a las variables (dependiente e independiente). Para evaluar la función se aísla la variable dependiente en la parte izquierda de la ecuación, con objeto de obtener la relación funcional. Así, si escribimos la ecuación $3x + 2y = 1$ de la forma

$$y = \frac{1 - 3x}{2}$$

tenemos descrita y como función de x y podemos denotar la relación funcional mediante la expresión

$$f(x) = \frac{1 - 3x}{2}$$

Lo que nos permite evaluar la función f en cualquier punto de su dominio, sin más que sustituir x por el valor concreto. Así,

$$f(5) = \frac{1-3(5)}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Esta manera de expresar las funciones permite definir funciones por secciones, es decir, mediante varias fórmulas, de tal manera que según los casos se aplica una u otra.

Ejemplo 1.23 (Evaluando una función definida por varias fórmulas). *Dada la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & si\ x \geq 1 \\ 2x+5 & si\ x < 1 \end{cases}$$

Evaluar $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

Solución. Lo que significa la expresión de $f(x)$ es que antes de decidirnos por la fórmula a aplicar hay que ver de qué número se trata. Así, para evaluar los números mayores o iguales que 1 se aplica la expresión x^2+3, y para evaluar los números menores que 1 se aplica la expresión $2x+5$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} f(0) &= 2\cdot 0+5 = 0+5 = 5 \\ f(1) &= 1^2+3 = 1+3 = 4 \\ f(2) &= 2^2+3 = 4+3 = 7 \end{aligned}$$

d) Gráfica. Una manera de visualizar una función es por medio de una gráfica. La gráfica de una función de una variable, por lo general, es una curva en el plano. Sin embargo, no toda curva del plano es la representación de una función. Para que una curva represente una función no puede tener dos puntos en la misma vertical, ya que para que una correspondencia entre dos magnitudes sea función, la imagen tiene que ser única. Por lo tanto, una recta vertical puede cortar a la gráfica de una función a los sumo una vez (*test de la recta vertical*).

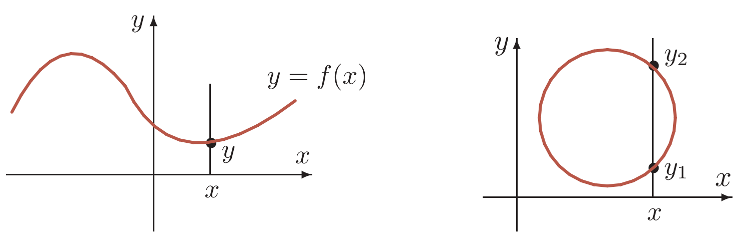


Figura 1.9: Gráfica de una función de una variable. La circunferencia no es la gráfica de una función (test de la recta vertical).

Nota: Aunque la gráfica de una función y la propia función son dos conceptos totalmente diferentes (la gráfica no es más que uno de los multiples instrumentos que podemos utilizar para visualizar la función), es usual identificar una función con su gráfica. Así, por ejemplo, es costumbre referirse a *la parábola* $y = x^2$, como si ambos conceptos fueran lo mismo. (Nosotros, para evitar sutilezas, por lo general, diremos *la parábola de ecuación* $y = x^2$).

De lo dicho se desprende que existe una gran cantidad de «curvas» que quedan excluidas del concepto de función, entre ellas, la circunferencia y la elipse. Sin embargo, no por ello quedan excluidas de nuestro estudio. Sino que aplicaremos las propiedades de las funciones a las correspondencias que no lo son descomponiéndolas en funciones. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no representa (globalmente) una función, ya que para cada valor de una de las variables hay dos valores de la otra, con lo cual se viola el concepto de función. En consecuencia, la descomponemos en dos funciones: una que toma el valor positivo (semicircunferencia superior), y otra el valor negativo (semicircunferencia inferior). En efecto, tenemos:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = +\sqrt{1-x^2} \\ y_2 = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

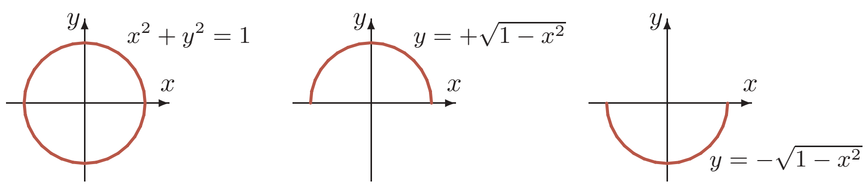


Figura 1.10: La circunferencia no es una función, pero podemos descomponerla en dos funciones.

e) Diagrama de flechas. Existe otra manera de visualizar una función, sobre todo a nivel teórico, como una *proyección* de una parte del conjunto A hacia una parte del conjunto B. Para visualizarla se utiliza un diagrama de flechas.

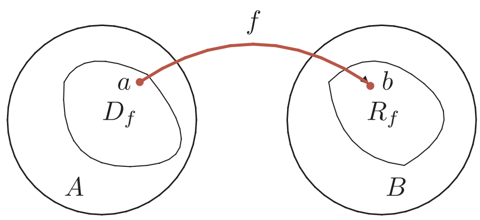


Figura 1.11: Función vista como proyección

Cuando $(a, b) \in f$, nos imaginamos que f toma el elemento a del subconjunto $\mathcal{D}_f$ de A y lo *proyecta* o *mapea* en el elemento $b = f(a)$ del subconjunto $\mathcal{R}_f$ de B.

f) La función como una máquina. Existe otra manera de visualizar una función, concebida como una *transformación*, especialmente útil para comprender algunas propiedades teóricas, y que consiste en imaginar la función como una «máquina» que acepta elementos de $\mathcal{D}_f$ como materia prima produciendo elementos correspondientes de $\mathcal{R}_f$ como producto final.

$$x \;\to\; \boxed{\quad f \quad} \;\to\; f(x)$$

Figura 1.12: La función como una máquina de transformación.

Esta representación aclara la diferencia entre f y $f(x)$; lo primero es la máquina y lo segundo el producto de la máquina al ser alimentada por x.

1.3.3. Dominio implícito de una función

El dominio de una función puede venir expresado explícitamente junto con la ecuación que define la función (dominio explícito), o bien, no se expresa porque se entiende que viene determinado implícitamente en la ecuación que define la función (dominio implícito). El dominio implícito es el conjunto de todos los números para los que está definida la ecuación que define la función. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad x \in \{1,\, 6,\, 13\}$$

tiene como dominio explícito solamente $\mathcal{D}_f = \{1,\, 6,\, 13\}$, y por tanto sólo se debe aplica a los número indicados, mientras que la función

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

tiene como dominio implícito $\mathcal{D}_f = \{x \,/\, x \geq -3\}$ que son todos los números para los que tiene sentido la ecuación que define la función.

En las aplicaciones prácticas del Cálculo, cuando se conoce el significado de las magnitudes que intervienen, el dominio de la función, por lo general, queda determinado por el contexto del problema (dominio contextual).

Ejemplo 1.24 (Hallando el dominio de una función). *Encontrar el dominio de las funciones*

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad \text{b) } g(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{c) } h(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} \quad \text{d) } k(x) = \ln x$$

Solución. a) Se trata de encontrar aquellos números, x, para los cuales tiene sentido la fórmula dada para $f(x)$. Es decir ¿qué valores pueden darse a x, de manera que al realizar las operaciones indicadas en la expresión que define $f(x)$ se obtenga un valor numérico y no tropecemos con una operación imposible?

Es evidente que, en este caso, el dominio de la función es todo el conjunto $\mathbb{R}$ excepto los números 1 y -1, es decir, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, pues la expresión puede ser calculada para cualquier número real, excepto para esos dos números. En efecto,

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3} \\ f(0) &= \frac{0}{0^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, al sustituir cualquiera de los números 1 o -1 tropezamos con una operación imposible, como es dividir por cero.

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{1^2 - 1} = \frac{1}{0} \\ f(-1) &= \frac{-1}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1}{0} \end{aligned}$$

La determinación de los números 1 y -1 se realiza resolviendo la ecuación

$$x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$$

Téngase en cuenta que en una fracción la única limitación que existe es que el denominador no puede tomar el valor cero, mientras que el numerador puede tomar cualquier valor.

b) Se trata de una raíz cuadrada, luego el radicando no puede ser negativo. En consecuencia

$$x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_g = [1, +\infty)$$

c) En esta caso, al estar la raíz cuadrada en el denominador no puede tomar el valor cero, luego el radicando ha de ser estrictamente positivo, En consecuencia

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_h = (1, +\infty)$$

d) El logaritmo sólo está definida para los números positivos. En consecuencia

$$\mathcal{D}_k = (0, +\infty)$$

Nota: Al calcular el dominio de una función deben tenerse en cuenta, entre otras, las siguientes circunstancias:

1. Que no se puede dividir por cero.
2. Que las raíces de índice par sólo están definidas para los números positivos y el cero.
3. Que los logaritmos sólo están definidos para los números positivos.

1.3.4. Restricciones y extensiones de funciones

Restricción Si f es una función con dominio $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_1$ es un subconjunto de $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_f$, se puede definir una nueva función f_1 con dominio $\mathcal{D}_1$ por medio de $f_1(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathcal{D}_1$. Esta función se llama *restricción de f al conjunto $\mathcal{D}_1$*. Es decir,

$$f_1 = \{(a, b) \in f / \ a \in \mathcal{D}_1\}$$

y se escribe $f_1 = f|\mathcal{D}_1$ para denotar la restricción de la función f al conjunto $\mathcal{D}_1$.

Extensión Si g es una función con dominio $\mathcal{D}_g$ y $\mathcal{D}_2 \supseteq \mathcal{D}_g$, entonces cualquier función g_2 con dominio $\mathcal{D}_2$ tal que $g_2(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}_g$ se llama una *extensión de g al conjunto $\mathcal{D}_2$*.

Nota: Usualmente no nos referiremos explícitamente a las restricciones de una función, sino que lo haremos de manera implícita utilizando el siguiente lenguaje: *Sea f una función definida en un entorno de x_0, entonces ...* o bien, *sea f una función definida y que cumple tal condición en un conjunto D_1, entonces ...* u otras expresiones similares. Entendemos que, en dichos casos, la función puede tener un dominio superior, pero que el entorno o el conjunto D_1, respectivamente, están contenidos en ese dominio. Sin hacer disquisiciones exquisitas sobre si nos estamos refiriendo a la función o a una restricción de la misma.

1.3.5. Composición de funciones.

Composición de funciones, en general. *Componer dos funciones consiste en aplicar la segunda función al resultado de la primera.* Es decir, para «componer» dos funciones se aplica primero f a cada x en $\mathcal{D}_f$ y después se aplica g a $f(x)$, siempre que sea posible (es decir, cuando $f(x)$ pertenezca a $\mathcal{D}_g$).

$$\begin{aligned} x &\xmapsto{f} \ y \ \xmapsto{g} z \\ x &\longmapsto f(x) \longmapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si f está definida en todo $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3$ y g está definida sólo para $x \geq 0$ por $g(x) = \sqrt{x}$, entonces, la composición $g \circ f$ sólo se puede definir para $x \geq 0$, y para estos números reales deberá tener el valor $\sqrt{x^3}$.

En consecuencia, para poder componer dos funciones el conjunto final de la primera función tiene que coincidir, de alguna manera, con el conjunto inicial de la segunda.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Definición 1.11 (Composición como aplicación sucesiva de funciones). *Sea f una función con dominio $\mathcal{D}_f$ en A y rango $\mathcal{R}_f$ en B y sea g una función con dominio $\mathcal{D}_g$ en B y rango $\mathcal{R}_g$ en C. La composición $g \circ f$ (observe el orden) es la función desde A a C dada por*

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \ / \ \textit{existe un elemento } b \in B \textit{tal que } (a, b) \in f \ \ y \ (b, c) \in g\}$$

De la propia definición se desprende inmediatamente que si f y g son funciones, entonces la composición $g \circ f$ es una función con

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \,/\, f(x) \in \mathcal{D}_g\}$$
$$\mathcal{R}_{g\circ f} = \{g\big(f(x)\big) \,/\, x \in \mathcal{D}_{g\circ f}\}$$

La composición de funciones también se puede interpretar como una *sustitución de una función en la otra*. En este sentido, la composición también se puede definir de la siguiente forma

Definición 1.12 (Composición como sustitución de la variable). *Sean f y g dos funciones cualesquiera. Se llama composición de f con g, y se representa por $g \circ f$, a la función definida del siguiente modo:*

$$g \circ f(x) = g\big[f(x)\big]$$

El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de todas las x del dominio de f tales que $f(x)$ esté en el dominio de g

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \;/\; f(x) \in \mathcal{D}_g\}$$

Obsérvese que el orden en que se escribe la composición $g \circ f$ es el inverso al orden en que actúan las funciones (primero f, después g).

La composición de funciones se puede visualizar mediante un diagrama de *máquinas* (Fig. 1.13) o un diagrama de flechas (Fig. 1.14)

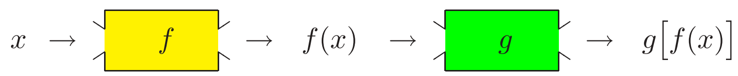


Figura 1.13: La máquina $g \circ f$ está compuesta por las dos máquinas.

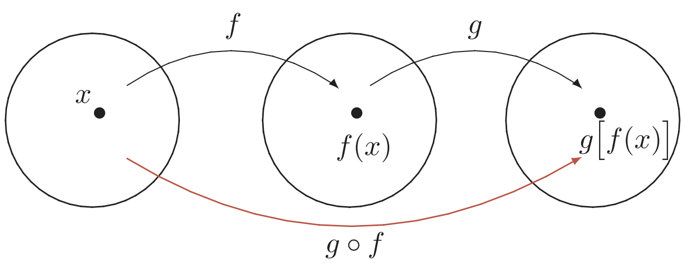


Figura 1.14: Composición de funciones

De la definición se deduce que la composición de funciones no siempre está definida, siendo necesario y suficiente para ello que el recorrido de la primera tenga puntos comunes con en el dominio de la segunda. Es decir,

$$\mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}g \neq \emptyset$$

con objeto de que se pueda establecer la conexión

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g\big(f(x)\big)$$

para algún elemento $x \in \mathcal{D}_f$.

Nota: No obstante, en ocasiones, y sobre todo a nivel teórico, nos va a interesar que el dominio de la función compuesta no se reduzca a un conjunto de «puntos aislados», sino que se trate de un «conjunto abierto», con objeto de poder asegurar determinados teoremas, por ejemplo, de derivación. En el caso particular de que el recorrido de la primera función esté totalmente contenido en el dominio de la segunda, resultará que el dominio de la composición coincidirá con el dominio de la primera función.

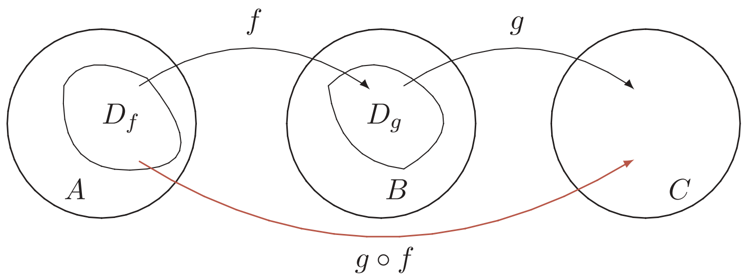


Figura 1.15: $f\big(\mathcal{D}_f\big) \subseteq \mathcal{D}_g \Leftrightarrow \mathcal{D}_{g\circ f} = \mathcal{D}_f$

Si no se da esta situación, entonces exigiremos la posibilidad de poder restringir la función f a un nuevo dominio $\mathcal{D}_f^*$, que cumpla las condiciones exigidas en el teorema correpondiente, y para el que se cumpla $f\big(\mathcal{D}_f^*\big) \subseteq \mathcal{D}_g$, con objeto de que $\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathcal{D}_f^*$.

Ahora bien, en la práctica, cuando vamos a resolver un problema de composición de funciones, para ver si es posible la composición, simplemente nos fijaremos en los conjuntos inicial y final de cada función, sin hacer referencia a los dominios. En consecuencia, bastará observar si el conjunto final de la primera función coincide (o se puede hacer coincidir, de alguna manera) con el conjunto inicial de la segunda, y posteriormente haremos referencia al dominio de la composición obtenida. Es decir, para componer buscaremos la posibilidad de la situación:

$$A \xrightarrow{f} B \quad B \xrightarrow{g} C$$

para poder establecer:

$$A \xrightarrow{g\circ f} C$$

Para representar la composición de funciones, algunas veces, son cómodos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Decir que el esquema es *conmutativo* significa que da lo mismo pasar de A a C por la derecha que por la izquierda. Lo que equivale a escribir: $h = g \circ f$.

También es costumbre representar el diagrama anterior con un aspecto más lineal

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Hay que advertir que, en general, la composición de funciones no es conmutativa, es decir, en la generalidad de los casos será $f \circ g \neq g \circ f$, incluso, puede suceder que esté definida la composición en un orden y no en el otro. Sin embargo, sí se cumple la propiedad asociativa $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Composición de funciones reales de *una* variable real. Componer dos funciones consiste en aplicar la segunda función al resultado de la primera. Ahora bien, desde el punto de vista analítico, este concepto puede tener una segunda lectura. Analíticamente, la composición de funciones, también significa *sustituir una función en la otra*. Es decir, si tenemos la función $y = f(x)$ que establece la dependencia entre y y x, y la función $x = g(t)$, que establece la dependencia entre x y t, podemos sustituir esta última en la primera y obtener $y = f\big(g(t)\big)$. A la función así obtenida (que envía t a y) se le llama composición de f con g y se denota por $f \circ g$. Obsérvese que el orden en que se escribe la composición $f \circ g$ es el inverso al orden en que actúan las funciones (primero g, después f).

Conviene tener siempre presente esta doble visualización de la composición de funciones: como aplicación sucesiva de dos funciones, y como sustitución de la variable por una función de otra variable. En esquema sería lo siguiente:

(a) Como aplicación sucesiva de funciones:

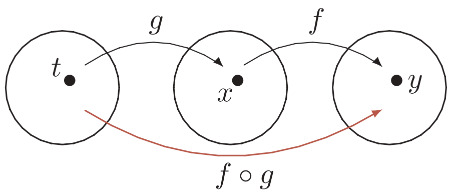


Figura 1.16: Composición de funciones

(b) Como sustitución de la variable:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(t) \end{array}\right\} y = f\big(g(t)\big)$$

Es evidente, como ya se ha dicho, que para poder componer dos funciones, en su totalidad, el *rango* de la primera ha de estar contenido en el *dominio* de la segunda $g(\mathcal{D}_g) \subseteq \mathcal{D}_f$, en caso contrario, después de aplicar g no podríamos aplicar f. Sin embargo, esta restricción no es necesaria para poder realizar, parcialmente, la composición de las funciones, sólo que, en este caso, habrá que reducir el dominio de la composición a los puntos del dominio de la primera que tienen su imagen en el dominio de la segunda.

Desde el punto de vista formal la composición, de funciones reales de una variable real, puede enunciarse de la siguiente forma: *Dadas las funciones*

$g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tales que $g(I) \subseteq J$), se llama composición de f con g y se denota $f \circ g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a la función $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

$$\left.\begin{array}{l} g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ f \circ g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

En el caso de que no se cumpla la condición $g(I) \subseteq J$, la composición también es posible, siempre que $g(I) \cap J \neq \varnothing$. En tal caso habrá que restringir las funciones a aquellos puntos en los que la composición sea posible. Es decir, a los puntos del dominio de la primera que tienen su imagen en el dominio de la segunda.

Ejemplo 1.25 (Componiendo funciones). *Dada las funciones*

$$f(x) = 3x - 1 \quad y \quad g(x) = x^2 + 2$$

Hallar $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$

Solución. Tenemos que $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$, luego, bastará con sustituir en $f(x)$ el valor de x por $g(x)$. Así,

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = 3g(x) - 1 = 3(x^2 + 2) - 1 = 3x^2 + 6 - 1 = 3x^2 + 5$$

Mientras que $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, luego, bastará con sustituir en $g(x)$ el valor de x por $f(x)$. Así,

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \big(f(x)\big)^2 + 2 = (3x - 1)^2 + 2 = 9x^2 - 6x + 1 + 2 = 9x^2 - 6x + 3$$

Nota: Como se observa en este ejemplo, en general, la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa. Es decir, $f \circ g \neq g \circ f$.

1.3.6. Funciones inyectivas e inversas

Función inyectiva. Una función se dice que es *inyectiva* cuando *elementos distintos tienen imágenes distintas*, es decir, cuando *no existen dos elementos distintos con la misma imagen*. Por tanto, f es inyectiva si y sólo si:

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

O bien, alternativamente, f es inyectiva si y sólo si, para a y a' en $\mathcal{D}_f$, se tiene

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

Formalmente se puede establecer la siguiente definición:

Definición 1.13 (Función inyectiva). *Sea f una función con dominio $\mathcal{D}_f$ en A y rango $\mathcal{R}_f$ en B. Se dice que f es* inyectiva *o* uno a uno *si, cada vez que (a, b) y (a', b) son elementos de f, entonces $a = a'$*

Si f es inyectiva se dice que f es una *inyección*.

Función inversa. Se llama recíproca de una función a la correspondencia que se obtiene al intercambiar las imágenes por los correspondientes originales de dicha función. Evidentemente la recíproca de una función no tiene por qué ser otra función. En efecto, basta que dos elementos diferentes tengan la misma imagen, para que la recíproca asigne a esa imagen los dos originales, lo que contradice la definición de función. Sin embargo, si la función es inyectiva, entonces la recíproca es una función y, además, es inyectiva. Es decir, si f es inyectiva desde A a B, entonces el conjunto de pares ordenados en $B \times A$ que se obtienen al intercambiar las componentes de cada uno de los pares ordenados de f da una función g que también es inyectiva.

Teorema 1.1 (Existencia de función la inversa). *Una función posee función inversa si y sólo si es inyectiva*

Las relaciones entre una función f y su inversa g son las siguientes:

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \qquad \begin{cases} \mathcal{D}_g = \mathcal{R}_f, \ \mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f \\ (a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in g \quad \text{o bien} \quad b = f(a) \Leftrightarrow a = g(b) \end{cases}$$

La función g se llama función *inversa* o *recíproca* de f y se denota por f^{-1}. En consecuencia:

$$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \qquad \begin{cases} \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f, \ \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f \\ (a,b) \in f \Leftrightarrow (b,a) \in f^{-1} \text{ o bien } b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \end{cases}$$

En consecuencia, se puede establecer la siguiente

Definición 1.14 (Función recíproca o inversa). *Sea f una inyección con dominio $\mathcal{D}_f$ en A y rango $\mathcal{R}_f$ en B. Si $g = \{(b,a) \in B \times A \,/\, (a,b) \in f\}$, entonces g es una inyección con dominio $\mathcal{D}_g = \mathcal{R}_f$ en B y con rango $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$ en A. La función g se llama función* inversa *de f y se denota por f^{-1}*

Desde el punto de vista del mapeo, la función inversa se puede interpretar de la siguiente forma: Si f es inyectiva mapea elementos distintos de $\mathcal{D}_f$ hacia elementos distintos de $\mathcal{R}_f$. De tal manera que cada elemento b de $\mathcal{R}_f$ es la imagen bajo f de un único elemento a de $\mathcal{D}_f$. La función inversa f^{-1} mapea el elemento b hacia este elemento único a.

Proposición 1.7 (Composición de funciones recíprocas). *Dos funciones son recíprocas si y solamente si, al componerlas se obtiene la identidad. Es decir,*

$$\begin{aligned} & f\big(f^{-1}(x)\big) = x \quad \textit{para todo } x \textit{ del dominio de } f^{-1} \\ y \quad & \\ & f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \textit{para todo } x \textit{ del dominio de } f \end{aligned}$$

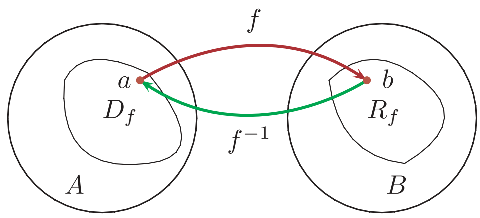


Figura 1.17: Función inversa

Nota: En consecuencia, para que dos funciones reales de variable real, f y g, sean inversas la una de la otra se ha de cumplir:

1. $\mathcal{D}_g = \mathcal{R}_f$, y $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$.
2. Que ambas sean inyectivas:
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ y $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
3. Que su composición sea la identidad $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x$

Ejemplo 1.26 (Componiendo funciones recíprocas). *Comprobar que las siguientes funciones son recíprocas*

$$f(x) = x^3 + 1 \quad y \quad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

Solución. Se tiene:
a) Los dominios y recorridos de ambas funciones coinciden con el conjunto de los números reales. En consecuencia $\mathcal{D}_g = \mathcal{R}_f$, y $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$
b) Ambas funciones son inyectivas. En efecto.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{x_1 - 1} = \sqrt[3]{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

c) La composición de f con g viene dada por

$$f\big(g(x)\big) = \big(\sqrt[3]{x-1}\big)^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

y la composición de g con f viene dada por

$$g\big(f(x)\big) = \sqrt[3]{\big(x^3+1\big) - 1} = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Luego se tiene que $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x$ y, en consecuencia, podemos concluir que f y g son inversas una de otra.

En la Figura 1.18 aparecen las gráfica de las funciones f y g. Como puede verse, son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, $y = x$. Es decir, la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la línea $y = x$.

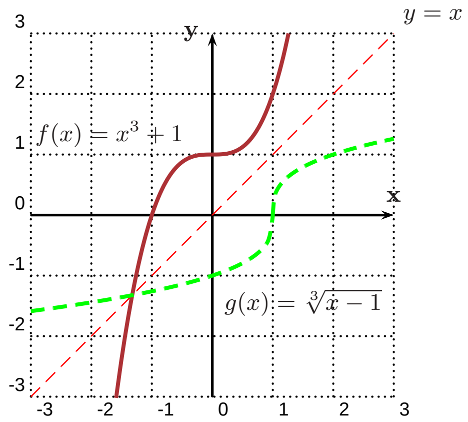


Figura 1.18:

Proposición 1.8 (Recíproca de la recíproca). *Si g es la inversa de f, entonces también f es la inversa de g. Es decir, la recíproca de la recíproca es la propia función.*

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

Nota: Hay que advertir que aunque para denotar a la función inversa se utiliza el exponente -1, no por eso se trata de una potencia. La utilización de esta notación es cómoda porque algunas propiedades de la función inversa recuerdan las propiedades de las potencias, como es que la recíproca de la recíproca coincide con la propia función $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Sin embargo, hay que advertir que esta notación puede inducir a engaño, ya que, en general

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Cálculo de la correspondencia recíproca. Para calcular la recíproca de una función se pueden seguir dos procedimientos:

a) Deshaciendo operaciones. Consiste en *deshacer* las operaciones en el orden inverso al que están realizadas en la función dada. Este método solamente es aplicable a funciones que vienen definidas mediante ecuaciones sencillas, en las que aparece una sola vez la variable independiente x. Partiendo de x vemos qué operaciones hay que realizar para construir la función $f(x)$. La inversa se obtiene deshaciendo las operaciones en el orden inverso al que están realizadas en la función dada.

b) Despejando la variable independiente. Consiste en despejar la variable independiente, x, en la ecuación $y = f(x)$, con objeto de obtener la recíproca, $x = g(y)$ (que puede expresarse en términos de x intercambiando x por y para obtener $y = g(x)$).

Nota: Los pasos a seguir para calcular la función inversa son:

1. Comprobar que la función es inyectiva y, en consecuencia, tiene función inversa (Teorema 1.1 pág. 37).
2. Despejar x en función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x por y, con objeto de tener la función inversa en términos de x: $y = g(x) = f^{-1}(x)$.

4. Definir el dominio de f^{-1} como el recorrido de f.

Ejemplo 1.27 (Deshaciendo operaciones). *Calcular la recíproca de las siguientes funciones*

$$a)\ f(x) = x + 3 \qquad b)\ f(x) = 3x \qquad b)\ f(x) = 5x^3 + 2$$

Solución. Las tres funciones son inyectivas y están definidas para todos los números reales, en consecuencia, sus correspondencias recíprocas son funciones. Para calcularlas, partimos de x y deshacemos las operaciones, en el orden inverso al que están dadas. Así,
a) La función f supone *sumar 3*. En consecuencia, su recíproca consistirá en *restar 3*.

$$f(x) = x + 3 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = x - 3$$

b) La función f supone *multiplicar por 3*. En consecuencia, su recíproca consistirá en *dividir por 3*.

$$f(x) = 3x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = x/3$$

c)La función f supone:

1º) Elevar al cubo 2º) Multiplicar por 5 3º) Sumar 2

En consecuencia, su recíproca consistirá en:

1º) Restar 2 2º) Dividir por 5 3º) Extraer la raíz cúbica.

Luego, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{5}}$

Ejemplo 1.28 (Hallando la función recíproca). *Hallar, si existen, las funciones inversas de:*

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) = x^2 \\ b) & f(x) = x^2 \text{ con } \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / \, x \geq 0\} \\ c) & f(x) = x^2 \text{ con } \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} / \, x \leq 0\} \end{array}$$

Solución. a) La función $f(x) = x^2$ con dominio $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ no es inyectiva y en consecuencia la correspondencia inversa no es una función. En efecto, la función f es la función $f = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$, y fácilmente se ve que no es uno a uno. En efecto, $f(2) = f(-2) = 4$, y en consecuencia los dos pares ordenados $(2, 4)$ y $(-2, 4)$ pertenecen a f. En general, se tiene

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

b) En este caso, al haberse restringido el dominio de la función, exclusivamente, a los números no negativos, la función resulta inyectiva. En efecto,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

En consecuencia, la función tiene inversa. El procedimiento para calcular la función inversa consiste en expresar x en función de y.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \quad y \in \mathcal{R}_f = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}$$

O bien, expresado en términos de x, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

c) Este caso es similar al caso anterior. La función también es inyectiva y, en consecuencia, tiene inversa.

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

Ejemplo 1.29 (Hallando la función recíproca). *Hallar, si existe, la función recíproca de:*

$$f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$$

Solución. –La función es inyectiva. En efecto, sea $f(x_1) = f(x_2)$, será;

$$\frac{3x_1+5}{x_1-2} = \frac{3x_2+5}{x_2-2}$$

de donde, quitando denominadores y operando, resulta

$$(3x_1+5)(x_2-2) = (3x_2+5)(x_1-2)$$

$$3x_1x_2 - 6x_1 + 5x_2 - 10 = 3x_1x_2 - 6x_2 + 5x_1 - 10$$

y simplificando, resulta $x_1 = x_2$

–Despejando la variable x resulta,

$$y = \frac{3x-5}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = 3y+5 \Rightarrow yx - 2y = 3y+5 \Rightarrow x(y-3) = 2y+5$$
$$\Rightarrow x = \frac{2y+5}{y-3}$$

De donde, intercambiando la variables, se tiene

$$y = \frac{2x+5}{x-3} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-3}$$

–En lo que respecta al dominio y recorrido, se tiene:

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$$

Nota: El proceso para obtener la ecuación correspondiente a la recíproca de una función, suele ser complicado y en muchos casos imposible. Así,

1. Mediante el procedimiento de deshacer operaciones solamente es posible hallar la ecuación de la recíproca de funciones sencillas, tales que en su fórmula sólo aparezca una vez la variable x. De manera que sea posible establecer una cadena lineal que vaya desde x hasta y. Con objeto de poder invertir el proceso.
2. Mediante el despeje de la variable independiente es posible hallar la ecuación correspondiente a la función inversa de función con ecuaciones algo más complejas que el caso anterior. Sin embargo, no siempre es posible despejar la variable independiente en una ecuación.
3. Existen muchas ecuaciones para las que no es posible encontrar la ecuación que corresponde a la función inversa, a pesar de que dicha función existe. Por ejemplo, la función $f(x) = e^x + x$ es inyectiva y, en consecuencia, tiene función inversa, sin embargo, no sabemos encontrar su ecuación.

Proposición 1.9 (Simetría de las correspondencias inversas). *La gráfica de una correspondencia f y la de su recíproca f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, $y = x$*

Demostración. En efecto, por definición de la inversa, se tiene

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$ □

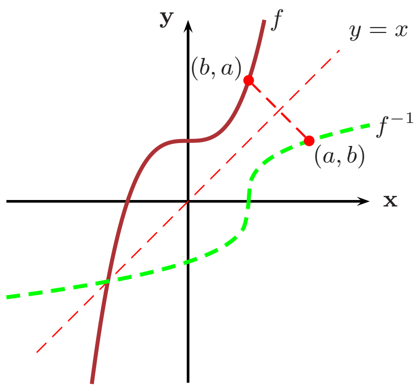


Figura 1.19: Simetría de las correspondencias inversas

Para que la correspondencia recíproca f^{-1} de una función f sea otra función, la función f ha de ser inyectiva. Gráficamente puede determinarse si una función es inyectiva o no mediante el *criterio de la recta horizontal. Una función es inyectiva si y sólo si su gráfica no tiene nunca dos puntos en la misma horizontal.* Por tanto, una función f tiene función inversa si y sólo si cada recta horizontal corta a la gráfica de f a lo sumo una vez.

Nota: En consecuencia se tienen los dos criterios:
a) Criterio de la recta vertical. Para que una curva represente una función, no puede tener dos puntos en la misma vertical.

b) Criterio de la recta horizontal. Para que una función sea inyectiva y, en consecuencia, tenga función inversa, su gráfica no puede tener dos puntos en la misma horizontal.

Proposición 1.10 (Las funciones estrictamente monótonas son inyectivas). *Si una función f es estrictamente monótona en un intervalo, entonces es inyectiva en ese intervalo.*

Demostración. Una función es estrictamente monótona en un intervalo si es: o bien estrictamente creciente, en dicho intervalo; o bien estrictamente decreciente.

Por otro lado, una función es inyectiva si puntos distintos tienen imágenes distintas. Es decir,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Elijamos x_1 y x_2 en el intervalo dado. Si $x_1 \neq x_2$ será: o bien $x_1 < x_2$; o bien $x_1 > x_2$. Y al ser f estrictamente monótona será $f(x_1) < f(x_2)$; o bien $f(x_1) > f(x_2)$. En ambos casos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto f es inyectiva en el intervalo.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 < x_2 \\ \text{ó} \\ x_1 > x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x_1) < f(x_2) \\ \text{ó} \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \square$$

Nota: El recíproco de esta proposición no es cierto. Es decir, una función inyectiva no tiene porqué ser estrictamente monótona. Es más, puede ser estrictamente creciente en un intervalo y estrictamente decreciente en otro intervalo, con tal de que no haya dos puntos en la misma horizontal

Corolario 1.1. *Si una función es estrictamente monótona, entonces tiene función inversa.*

Demostración. En efecto, si la función es estrictamente monótona, entonces será inyectiva y, en consecuencia, tendrá inversa. $\square$

1.3.7. Funciones suprayectivas y biyectivas

Definición 1.15 (Función suprayectiva). *Sea f una función con $\mathcal{D}_f \subseteq A$ y rango $\mathcal{R}_f \subseteq B$. Se dice que f es suprayectiva o sobreyectiva cuando el rango coincide con el conjunto final $\mathcal{R}_f = B$*

Definición 1.16 (Función biyectiva). *Sea f una función con $\mathcal{D}_f \subseteq A$ y rango $\mathcal{R}_f \subseteq B$. Se dice que f es biyectiva si es, simultáneamente, inyectiva y suprayectiva.*

Si una función es biyectiva, se dice que es una biyección.

1.3.8. Imágenes directa e inversa de un conjunto

Sea f una función arbitraria con dominio $\mathcal{D}_f$ en A y rango $\mathcal{R}_f$ en B. Se define[2],

Definición 1.17 (Imagen directa de un conjunto). *Si E es un subconjunto de A, entonces la imagen directa de E bajo f es el subconjunto de $\mathcal{R}_f$ dado por*

$$f(E) = \{f(x); x \in E \cap \mathcal{D}_f\}$$

[2] Para más detalles sobre estos temas véase [3, Bartle], citado en la bibliografía.

Si $E \cap \mathcal{D}_f = \varnothing$, entonces $f(E) = \varnothing$. Si E contiene un único elemento p de $\mathcal{D}_f$, entonces el conjunto $f(E)$ contiene un único punto $f(p)$

Definición 1.18 (Imagen inversa de un conjunto). *Si H es un subconjunto de B, entonces, la imagen inversa de H bajo f es el subconjunto de $\mathcal{D}_f$ dado por:*

$$f^{-1}(H) = \{x; f(x) \in H\}$$

1.3.9. Funciones pares e impares

Definición 1.19 (Funciones pares e impares). *Una función $y = f(x)$ se dice que es par si*

$$f(-x) = f(x)$$

Una función $y = f(x)$ se dice que es impar si

$$f(-x) = -f(x)$$

Nota: En las funciones pares al cambiar x por $-x$ se obtiene la misma expresión total. En las funciones impares al cambiar x por $-x$ la expresión total cambia de signo.

Ejemplo 1.30. *Determinar si las siguientes funciones son pares o impares*

a) $f(x) = x^2 - 1$ *b)* $g(x) = x^3 + x$ *c)* $h(x) = x^2 + x$

Solución. a) Esta función es par ya que

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$$

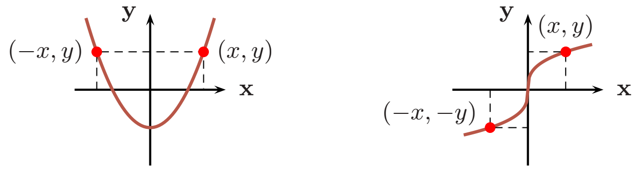
b) Esta función es impar ya que

$$g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$$

c) Esta función no es ni par ni impar. En efecto,

$$h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \begin{cases} \neq h(x) \\ \neq -h(x) \end{cases}$$

Proposición 1.11 (Simetría de las funciones pares e impares). *La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje vertical y la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.*



Función par: $f(-x) = f(x)$ Función impar: $f(-x) = -f(x)$

Figura 1.20: Simetría de las funciones pares e impares

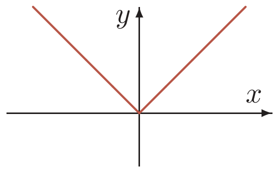


Figura 1.21: Gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$

1.3.10. La función valor absoluto

Ejemplo 1.31. *Representar la función* $f(x) = |x|$

Solución. Expresando la función “por casos”, se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Luego, se trata de dos semirrectas con un origen común (las bisectrices del primer y segundo cuadrante que confluyen en el origen de coordenadas).

Ejemplo 1.32. *Representar la función* $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$

Solución. La gráfica de la función $g(x) = x^2 - 6x + 5$, es una parábola. El valor absoluto convierte la parte negativa de esa parábola en positiva. En consecuencia, lo que en la parábola está por debajo del eje horizontal se refleja por encima de dicho eje.

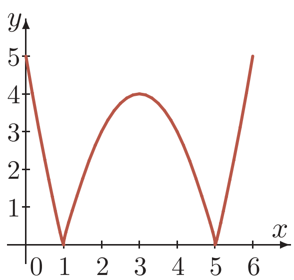


Figura 1.22: Gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$

Ejercicios propuestos de la sección 1.3. Funciones

Soluciones en la página 389

1.3.1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, hallar

$$\text{a) } f(-2) \qquad \text{b) } f(-1) \qquad \text{c) } f(3) \qquad \text{d) } f(x+\Delta x)$$

1.3.2. Hallar el dominio de las funciones

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad \text{b) } g(x) = \ln(x-3) \qquad \text{c) } h(x) = \operatorname{arc\,sen}(x-1)$$

1.3.3. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x - 1$, Hallar

$$\text{a) } f\big(g(1)\big) \qquad \text{b) } f\big(g(0)\big) \quad \text{c) } f\big(g(x)\big) \qquad \text{d) } g\big(f(1)\big) \quad \text{e) } g\big(f(0)\big) \quad \text{f) } g\big(f(x)\big)$$

1.3.4. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2+1} \qquad g(x) = 2x+3$$

hallar a) $g\big(f(x)\big)$ b) $f\big(g(x)\big)$

1.3.5. Comprobar, mediante su composición, que las siguientes funciones son recíprocas:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}+1, \qquad g(x) = (x-1)^3$$

1.3.6. Hallar la recíproca de las funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

1.3.7. Eliminar el valor absoluto de las siguientes ecuaciones, expresando las funciones "por casos".

$$\text{a) } \; f(x) = x^2 - 3|x| + 2 \qquad \text{b) } \; g(x) = |x-2| + |x| + 3$$

1.4. Límite de sucesiones

Sucesión

Una sucesión es un conjunto de infinitos números ordenados según algún criterio. Ejemplo,

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$$

$$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\}$$

$$\{1, 0, -1, 0, 1, \cdots, \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}, \cdots\}$$

Las sucesiones se pueden considerar como funciones, donde el primer conjunto es el de los números naturales.

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots & & & \mathbb{N} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & & & \downarrow \\ \{ & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \cdots & \} & & \mathbb{R} \end{array}$$

Aunque las sucesiones son funciones, es costumbre representarlas mediante subíndices en lugar de la notación funcional. Así, en vez de $a(n)$ se escribe a_n.

Nota: El motivo de esta notación es que con a_n queremos enfatizar, más que la imagen del número n, el término que ocupa en lugar n en la sucesión.

A los números que componen la sucesión a_1, a_2, a_3, ..., se les llama términos de la sucesión y a a_n se le llama *"término general"* o *"n-simo término"* de la sucesión y denotaremos la sucesión por $\{a_n\}$.

Definición 1.20 (Sucesión). *Una sucesión a_n es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. A los valores de la función a_1, a_2, a_3, ..., se les llama términos de la sucesión y al término a_n se le llama* "término general" *o* "n-simo término" *de la sucesión y denotaremos la sucesión por $\{a_n\}$.*

La gráfica de una sucesión es un conjunto de infinitos puntos separados (aislados) unos de otros.

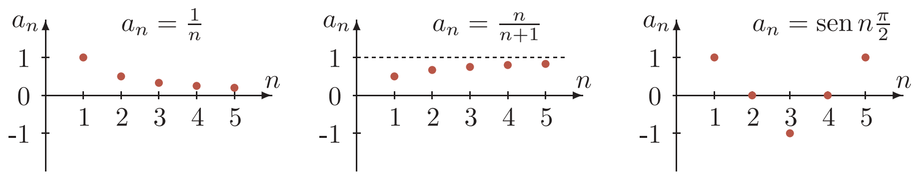


Figura 1.23:

Límite de una sucesión

Centraremos nuestra atención en ver si los términos de una sucesión se van aproximando cada vez más a algún valor. A ese valor se le llama límite de la sucesión. Las sucesiones que tienen límite se llaman convergentes.

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\} \to 0$$

$$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\} \to 1$$

$$\{1, 0, -1, 0, 1, \cdots, \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}, \cdots\} \to \text{Sin límite}$$

Definición 1.21 (Límite de una sucesión). *Se dice que el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es ℓ y escribimos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ siempre que $n > k$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \;\Leftrightarrow\; \big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists k > 0\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\boxed{n > k \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon}}$$

Las sucesiones que tienen límite finito se llaman convergentes y las demás divergentes

Gráficamente, la definición dice que desde un lugar en adelante ($n > k$), todos los términos de la sucesión tienen que estar comprendidos dentro de la franja limitada por las rectas $y = \ell - \varepsilon$ e $y = \ell + \varepsilon$

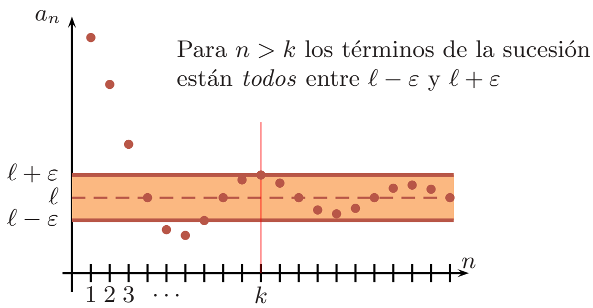


Figura 1.24: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

Nota: Para que exista el límite, ℓ, por muy estrecha que sea la franja $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$, siempre se ha de poder encontrar un término a partir del cual todos los que le siguen están dentro de la franja.

Ejemplo 1.33 (Determinando la convergencia o divergencia de una sucesión). *Determinar la convergencia o divergencia de las sucesiones*

$$\text{a) } a_n = 2 + (-1)^n \qquad \text{b) } b_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

Solución. a) Los términos de la sucesión $a_n = 2 + (-1)^n$ son

$$1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, \cdots$$

Como la sucesión siempre tiene términos que oscilan entre 1 y 3, resulta que no tiene límite y en consecuencia diverge (por oscilación).

b)Los términos de la sucesión $b_n = \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}$ son

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \cdots$$

Como la sucesión siempre tiene términos que oscilan entre -1 y 1, resulta que no tiene límite y en consecuencia diverge (por oscilación).

1.4.1. Cálculo de límites de sucesiones

Proposición 1.12 (Propiedades algebraicas de los límites de sucesiones). *Si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \ell_2$$

entonces se cumplen las siguientes propiedades

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \ell_1 \pm \ell_2$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} r a_n = r\ell_1,\ r \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \ell_1 \ell_2$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}, \quad b_n \neq 0$ *y* $\ell_2 \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = (\ell_1)^{\ell_2}$, *si* $\ell_1 > 0$

Reglas elementales para el cálculo de límites. Las reglas más frecuentes para eliminar la indeterminación del límite de una sucesión son las siguientes:

1. *Indeterminación del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$. Se suele eliminar dividiendo numerador y denominador por un término que elimine uno de los dos infinitos (por ejemplo, máxima potencia de n).

2. *Cociente de dos polinomios.* Es un caso particular de la anterior. Este caso se reduce al cociente de los términos de mayor grado, y se simplifica la n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$$

3. *Indeterminación del tipo* $\infty - \infty$. En el caso de que se trate de raíces cuadradas la indeterminación se suele eliminar multiplicando y dividiendo por el *conjugado*, con objeto de tener *suma por diferencia*, de manera que al aplicar la *diferencia de cuadrados* se elimine la raíz cuadrada.

4. *Indeterminación del tipo* 1^∞. Se aplica el número e.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718$$

que se generaliza para los límites del tipo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e = 2{,}718$$

siempre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Ejemplo 1.34. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^3} = 0$

2. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3n}\right)^{\frac{3n}{-1}}\right]^{\frac{-1}{3n}2n} = e^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

3. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1$

4. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln 5n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln 5+\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\ln 5}{\ln n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$

5. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+3)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[n(1+\frac{3}{n})\right]}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln(1+\frac{3}{n})}{\ln n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln(1+\frac{3}{n})}{\ln}\right) = 1+0 = 1$$

6. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{(n+a)(n+b)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\left(n^2+(a+b)n+ab\right)}{n+\sqrt{(n+a)(n+b)}} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-(a+b)n-ab}{n+\sqrt{n^2+(a+b)n+ab}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-(a+b)-\frac{ab}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{(a+b)}{n}+\frac{ab}{n^2}}} =$$

$$= -\frac{a+b}{2}$$

Criterio de Stoltz.

Es un criterio relacionado con las Reglas de L'Hôpital que sólo se puede aplicar a las sucesiones. Y del que, sin ánimo de demostrar nada, podemos dar la siguiente justificación:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \approx \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \approx \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Nota: Téngase en cuenta que si dos fracciones son equivalente, entonces, al restar los numeradores y los denominadores, también se obtiene otra fracción equivalente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b}$$

El Criterio de Stoltz se puede resumir en el siguiente esquema:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \left[\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}}$$

Formalmente el Criterio de Stoltz puede enunciarse de la siguiente manera

Teorema 1.2 (Criterio de Stolz). *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones.*

$$\textit{Si existe } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}, \textit{ entonces } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

siempre que:

1. $\{b_n\}$ *es una sucesión monótona divergente, o bien,*
2. $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ *y* b_n *es monótona.*

Ejemplo 1.35 (Aplicando el criterio de Stolz). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2+4+\cdots+2^n}{3+9+\cdots+3^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2+4+\cdots+2^n+2^{n+1})-(2+4+\cdots+2^n)}{(3+9+\cdots+3^n+3^{n+1})-(3+9+\cdots+3^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

2. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0$

3. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\sqrt[n]{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = \left[e^{\frac{\infty}{\infty}}\right] =$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{n+1-n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n}} = e^{\ln 1} = e^0 = 1$$

4. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n)}{n}} =$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left[(n+1)^2+n+1\right]-\ln(n^2+n)}{n+1-n}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{n^2+2n+1+n+1}{n^2+n}} = e^{\ln 1} = e^0 = 1$$

Nota: Hay que advertir que el Criterio de Stoltz, en general, no se puede aplicar de manera parcial dentro de un límite. Por ejemplo, el siguiente límite existe y vale 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

Sin embargo, una aplicación incorrecta del Criterio de Stoltz puede producir un resultado erróneo. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n^2}{n} \neq$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{(n+1)^2-n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{n^2+2n+1-n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$$

Por eso en el Teorema 1.2, en la página 50, se exige que el límite del cociente de las diferencias de los términos consecutivos exista. Así, sería correcta la siguiente aplicación del Criterio de Stoltz

$$\lim_{n\to\infty} c_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} c_n \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} c_n \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ell_1 \cdot \ell_2 = \ell$$

Ahora bien, si ℓ_1 o ℓ_2 no existen o son infinito, no está permitido continuar con el límite unificando nuevamente ambos factores.

Teorema 1.3 (Criterio de la Raíz n-sima). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión estrictamente creciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Demostración: En efecto, aplicando el Criterio de Stolz a la raíz resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln n}{n+1-n}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Nota: En el criterio de la raíz hay que hacer la misma advertencia que en el criterio de Stotlz. No se puede hacer una aplicación parcial. En este caso,

1. La raíz tiene que ser n-sima.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_n} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

2. La raíz ha de estar sola

$$\lim_{n\to\infty} b_n \sqrt[n]{a_n} \neq \lim_{n\to\infty} b_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ejemplo 1.36 (Aplicando el criterio de la raíz). *Calcula los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)\cdots(n+n+2)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)} = +\infty$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+4)(3n+5)\cdots(3n+n+4)}{(n+1)^{n+1}} : \frac{(3n+1)\cdots(3n+n)}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+4)(3n+5)\cdots(3n+n+4)n^n}{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)(n+1)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+n+1)(3n+n+2)(3n+n+3)(3n+n+4)n^n}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+1)(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{4}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{3}4\frac{1}{e} = \frac{4^3}{3^3 e}$$

Simplificación de sumas.

Algunas sumas se pueden simplificar expresando sus términos de forma telescópica, es decir, como la diferencia de dos términos consecutivos, de manera que al sumar se eliminan los términos intermedios.

Ejemplo 1.37 (Simplificando sumas). *Calcula el siguiente límite.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Cálculo de límites por acotación.

Teorema 1.4 (Teorema del encaje para sucesiones). *Si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\ell=\lim_{n\to\infty} b_n$$

y existe un entero k tal que $a_n\le c_n\le b_n$ para todo $n>k$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\ell$$

Esquemáticamente podemos escribir,

$$\ell\leftarrow a_n\le c_n\le b_n\to\ell \quad\Rightarrow\quad c_n\to\ell$$

Ejemplo 1.38 (Encajando sucesiones). *Calcular el siguiente límite.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$$

Solución. Teniendo en cuenta las siguientes desigualdades,

$$0\le\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{1}\sqrt{2}\cdots\sqrt{n-1}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}\le$$

$$\le\frac{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n-1})}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}=\frac{1}{1+\sqrt{n}}\to 0$$

Resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}=0$$

La constante de Euler.

Para resolver algunos límites puede tenerse en cuenta la siguiente igualdad:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\epsilon_n$$

donde:

1. $\epsilon_n \to 0$
2. $\gamma =$ Constante de Euler $\approx 0'5$

Ejemplo 1.39 (Aplicando la constante de Euler). *Calcular los siguientes límites:*

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\gamma+\epsilon_n}{\ln n}=1+0+0=1$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{e\sqrt{e}\sqrt[3]{e}\cdots\sqrt[n]{e}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^1e^{1/2}\cdots e^{1/n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\ln n+\gamma+\epsilon_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot e^{\gamma}e^{\epsilon_n}}{n}=e^{\gamma}e^0=e^{\gamma}$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}{\ln(\ln n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n+\gamma+\epsilon_n)}{\ln(\ln n)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[\ln n\cdot\left(1+\frac{\gamma+\epsilon_n}{\ln n}\right)\right]}{\ln(\ln n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n)+\ln\left(1+\frac{\gamma+\epsilon_n}{\ln n}\right)}{\ln(\ln n)}=1$$

1.4.2. Sucesiones monótonas

Definición 1.22 (Sucesión monótona). *Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es monótona si sus términos son crecientes*

$$a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n\le\cdots$$

o decrecientes

$$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\cdots\ge a_n\ge\cdots$$

Ejemplo 1.40 (Determinando la monotonía de una sucesión). *Determinar la monotonía de la sucesión*

$$a_n=\frac{3n}{n+2}$$

Solución. Determinar que una sucesión no es monótona puede hacerse, de una manera fácil, comparando tres términos de la misma. Sin embargo, determinar que es monótona es algo más complicado, ya que hay que determinar que sus términos crecen o decrecen siempre, para todo valor de n. Para determinar la monotonía de una sucesión pueden seguirse varios métodos.

Veamos aquí varios de ellos. En primer lugar hallamos a_n y a_{n+1}. En este caso,

$$a_n = \frac{3n}{n+2} \qquad a_{n+1} = \frac{3(n+1)}{(n+1)+2}$$

a) *Construyendo comparativamente a_n y a_{n+1}.*

$$(n+1)+2 > n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{(n+1)+2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3n}{n+2} < \frac{3n}{(n+1)+2} < \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

luego la sucesión es monótona (estrictamente creciente).

b) *Deshaciendo comparativamente a_n y a_{n+1}.* Partimos del supuesto de que $a_n < a_{n+1}$ y deshacemos las operaciones. Así,

$$a_n = \frac{3n}{n+2} <^? \frac{3(n+1)}{(n+1)+2} = a_{n+1}$$
$$3n\big[(n+1)+2\big] <^? 3(n+1)(n+2)$$
$$3n(n+3) <^? 3(n^2+3n+2)$$
$$3n^2+9n <^? 3n^2+9n+6$$
$$0 < 6$$

Como hemos llegado a una desigualdad final válida, podemos invertir los pasos para concluir que la desigualdad original también es válida, y por tanto la sucesión es monótona.

c) *Usando derivadas.* Consideramos que n es una variable continua. Es decir consideramos la función $f(n) = a_n$. O bien en términos de x.

$$f(x) = \frac{3x}{x+2}$$

Hallamos su derivada

$$f'(x) = \frac{3(x+2)-3x}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

que es positiva para todo x, luego podemos concluir que la función f es creciente en todo $\mathbb{R}$. En consecuencia la sucesión a_n es creciente.

Definición 1.23 (Sucesión acotada). *Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es acotada si existe un número real positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.*

$$\boxed{\{a_n\} \text{ acotada } \Leftrightarrow \big(\exists M \in \mathbb{R}^+\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big) \boxed{|a_n| \leq M}}$$

Teorema 1.5 (Sucesiones monótonas y acotadas). *Si una sucesión $\{a_n\}$es monótona y acotada, entonces es convergente.*

Nota: Además de los métodos aquí expuestos para el cálculo de límite de sucesiones veremos otros métodos basados en los criterios para el cálculo de límite de funciones, así como un caso particular para comprobar que el límite de una sucesión es cero, basado en la convergencia de las series.

Ejercicios propuestos de la sección 1.4. Límite de sucesiones

Soluciones en la página 390

1.4.1. Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones

$$\text{a) } a_n = (-1)^{n+1}n \quad \text{b) } b_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{c) } c_n = \frac{n!}{(n-1)!} \quad \text{d) } d_n = \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}$$

1.4.2. Escribir una expresión del término general de las sucesiones

$$\text{a) } 2, -4, 6, -8, 10, \dots \qquad \text{b) } \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{2}{3\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 5}, \frac{4}{5\cdot 6}, \dots \qquad \text{c) } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \dots$$

1.4.3. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^n$$

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right) \qquad \text{d) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+3} - \sqrt{n^2+5}\right)$$

1.4.4. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \quad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n}{2n^2+4}\right)^n \quad \text{c) } \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{2n+3}{2n+5}}\right)^{(n^2+2)}$$

1.4.5. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N}, \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1\cdot 2\cdots n)}{n \ln n},$$

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(2 + \frac{3^2}{2} + \cdots \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right).$$

1.4.6. Determinar si son convergentes las siguientes sucesiones y en caso afirmativo calcular su límite.

$$\text{a) } c_n = \frac{n!}{n^n}$$

1.4.7. Determinar la monotonía de las siguientes sucesiones

$$\text{a) } a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n} \quad \text{b) } b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{b) } b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

1.5. Límite y continuidad de funciones

1.5.1. Definición de límite

Nota: El concepto de límite es fundamental en el Cálculo, de manera que para poder profundizar en el conocimiento de la materia es impresindible, tanto el manejo práctico de las reglas para el cálculo de límites, como la comprensión teórica del concepto de límite.

Suponemos conocida la idea intuitiva de límite y las reglas básicas para el cálculo de límites. No obstante, profundizaremos en ambos puntos.

En este curso centraremos la atención en los potentes instrumentos para el cálculo de límites de funciones de una variable, como son

1. Los infinitésimos (apartado 1.5.9, en la página 82).
2. Las reglas de L´Hôpital (apartado 3.3.3, en la página 173).
3. El desarrollo de Taylor (apartado 3.5.7, en la página 195).
4. El concepto de integral (apartado 5.1.2, en la página 334).

Así mismo estudiaremos los límites para funciones de varias variables en el capítulo 2.

Idea intuitiva. En el lenguaje ordinario la palabra límite tiene un carácter estático y significa *término, confín o lindero*. Sin embargo, en Cálculo, el concepto de límite es un concepto *dinámico* y tiene que ver con la idea de *acercarse los más posible* a un punto o un valor ($x \to x_0$). En otras ocasiones tiene que ver con la idea de alejarse lo más posible del origen, o hacer lo mas grande posible un número ($x \to \infty$). Y, en otras ocasiones, el concepto de límite tiene que ver con traspasar una frontera, aparentemente infranqueable, como es el caso de la suma de infinitos números. Veamos la noción de límite a partir de un ejemplo.

Ejemplo 1.41. *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$

a) *Estudiar su comportamiento en los alrededores del punto* $x = 1$

b) *Esbozar su gráfica.*

Solución. a) Para estudiar el comportamiento de la función en los alrededores del punto $x = 1$ damos a x valores cada vez más próximos a 1. Aproximándonos tanto por la izquierda como por la derecha. Los correspondientes valores de $f(x)$ se muestran en la siguiente tabla

	x se acerca a 1 por la izquierda						x se acerca a 1 por la derecha				
x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	**1**	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
$f(x)$	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5
	$f(x)$ se acerca a 2						$f(x)$ se acerca a 2				

b) Al representar estos puntos, se ve que la gráfica de f es una recta con un hueco en el punto $(1, 2)$ (véase Figura 1.25).

Aunque x no puede ser igual a 1, podemos acercarnos a 1 cuanto queramos y como resultado $f(x)$ se aproxima cuanto queramos al valor 2. Por eso decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 2, y lo denotamos como

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

En consecuencia podemos dar la siguiente descripción intuitiva del concepto de límite. *Decimos que el límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 *es* ℓ, *si*

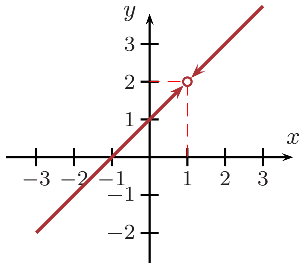


Figura 1.25: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

$f(x)$ se aproxima, tanto como se quiera, a un único número ℓ cuando x se aproxima a x_0 por ambos lados, y escribimos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Nota: Al calcular el límite de la función f en el punto x_0, el valor de la función en dicho punto, $f(x_0)$, no afecta al límite. Es más no importa que la función no esté definida en dicho punto.

Hablaremos indistintamente de límite en x_0, o bien, límite cuando x tiende o se aproxima a x_0.

Para muchas funciones se puede *intuir* el valor del límite usando una calculadora y evaluando los valores de la función en varios puntos próximos a x_0.

Ejemplo 1.42 (Estimación del límite con calculadora). *Dada la función*

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}, \qquad x \neq 2$$

a) *Estudiar su comportamiento en los alrededores del punto $x = 2$*
b) *Esbozar su gráfica.*

Solución. a) Para estudiar el comportamiento de la función en los alrededores del punto $x = 2$ damos a x valores cada vez más próximos a 2. Aproximándonos tanto por la izquierda como por la derecha. Los correspondientes valores de $f(x)$ se muestran en la siguiente tabla

x se acerca a 2 por la izquierda → ← x se acerca a 2 por la derecha

x	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	**2**	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5
$f(x)$	1.707	1.866	1.949	1.99	1.999	?	2.0005	2.005	2.49	2.12	2.22

$f(x)$ se acerca a 2 → ← $f(x)$ se acerca a 2

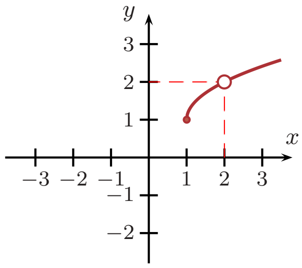


Figura 1.26: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} = 2$

b) Al representar estos puntos, se ve que la gráfica de f es una curva con un hueco en el punto $(2, 2)$ (véase Figura 1.26

Aunque x no puede ser igual a 2, podemos acercarnos a 2 cuanto queramos y como resultado $f(x)$ se aproxima cuanto queramos al valor 2. Por eso decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 2, y lo denotamos como

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2 \quad \text{o bien,} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} = 2$$

Inexistencia de límite. En los ejemplos anteriores cuando x se acerca a x_0, tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ se acerca, en ambos casos, a un mismo valor ℓ, que llamábamos límite de la función. En ocasiones esto no ocurre y entonces decimos que la función f no tiene límite en el punto x_0. Las situaciones más frecuentes que conducen a la inexistencia del límite de la función f en el punto x_0 son las siguientes:

1. *Límites laterales diferentes.* $f(x)$ se aproxima por la derecha de x_0 a un valor y por la izquierda a otro valor diferente.
2. *El límite se hace infinito.* $f(x)$ crece o decrece sin tope cuando x se acerca a x_0, por la derecha o por la izquierda.
3. *Inexistencia del límite por oscilación.* Las valores de $f(x)$ oscilan, indefinidamente, entre dos valores fijos cuando x se acerca a x_0.

Ejemplo 1.43 (Límites laterales diferentes). *Probar que el siguiente límite no existe*

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Solución. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

Para comprender su significado, demos varios valores a x. Así,

$$f(3) = \frac{|3|}{3} = \frac{3}{3} = 1, \quad f(0) = \frac{0}{0} = \text{no definido}, \quad f(-3) = \frac{|-3|}{-3} = \frac{+3}{-3} = -1$$

En general, $f(x)$ para valores positivos de x toma el valor 1, y para valores negativos de x toma el valor -1. En efecto

$$\begin{array}{lllll} x > 0 & \Rightarrow & |x| = x & \Rightarrow & f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1 \\ x < 0 & \Rightarrow & |x| = -x & \Rightarrow & f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1 \end{array}$$

En consecuencia, la función f puede definirse *por casos* de la siguiente forma

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Y su gráfica viene reflejada en la figura 1.27

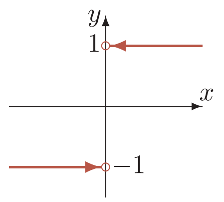


Figura 1.27: $f(x) = \frac{|x|}{z}$

En consecuencia el límite no existe, ya que se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} = 1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 0^-} = -1$$

Ejemplo 1.44 (Comportamiento no acotado). *Discutir la existencia del siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Solución. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Demos valores a x cada vez más cercanos al origen

x se acerca a 0 por la izquierda — x se acerca a 0 por la derecha

x	-0.5	-0.25	-0.1	-0.01	-0.001	**0**	0.001	0.01	0.1	0.25	0.5
$f(x)$	4	16	100	10000	1000000	?	1000000	10000	100	16	4

$f(x)$ crece sin tope — $f(x)$ crece sin tope

De la tabla se desprende que cuando x se acerca a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ crece sin límite. Es más, podemos hacer que $f(x)$ crezca cuanto queramos sin más que acercarnos suficientemente al origen. Así, por ejemplo, si queremos que $f(x)$ sea mayor que 100 000 000, bastará tomar un valor de x menor que 1/10 000. En efecto,

$$0 < |x| < \frac{1}{10\,000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 100\,000\,000$$

Como $f(x)$ no se aproxima a ningún número real cuando x se acerca a 0, decimos que el límite no existe. La gráfica de la función f viene reflejada en la figura 1.28

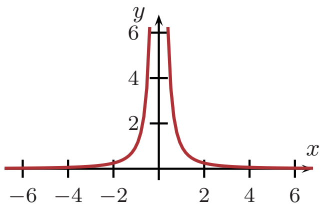


Figura 1.28: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \text{No existe}$

Nota: Aunque el límite no existe, como número real, la situación reflejada en este ejemplo es lo suficientemente importante y lo suficientemente frecuente en Cálculo, como para tenerla en especial consideración. Así, en las situaciones del ejemplo anterior se dice que el límite de la función cuando x tiende a cero, es infinito, y se expresa

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

No obstante hay que decir que $+\infty$ no es ningún número real, sino que es un símbolo que se utiliza para reflejar el comportamiento no acotado de la función.

Ejemplo 1.45 (Comportamiento oscilante). *Discutir la existencia del siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solución. Consideremos la función

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Su gráfica viene representada en la figura 1.29.

El límite no existe, puesto que siempre es posible coger una sucesión de puntos, con límite cero; y sin embargo, la sucesión formada con sus imágenes no tiene límite.

$$\{x_n\} \to 0 \quad \text{y sin embargo} \quad \{f(x_n)\} \text{ no tiene límite}$$

como puede verse en la siguiente tabla

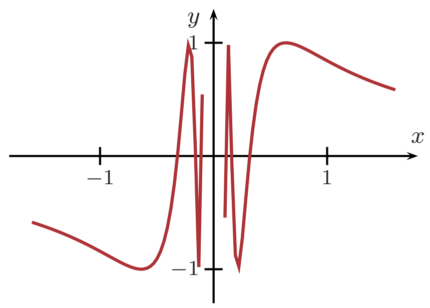


Figura 1.29: $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{No existe}$

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$x \to 0$
$f(x)$	1	-1	1	-1	1	-1	No tiene límite

Para probar que el límite no existe, también podemos encontrar dos sucesiones diferentes con límite cero tales que sus imágenes tengan límites diferentes.

$$\left.\begin{array}{l}\{x_n\} \to 0\\ \{x'_n\} \to 0\end{array}\right\} \text{mientras que} \left\{\begin{array}{l}\{f(x_n)\} \to \ell_1\\ \{f(x'_n)\} \to \ell_2 \neq \ell_1\end{array}\right\}$$

Por ejemplo, para la sucesión

$$\{x_n\} = \{\frac{1}{n\pi}\} = \{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \cdots\} \to 0 \text{ se tiene}$$

$$\{f(x_n)\} = \{f\left(\frac{1}{n\pi}\right)\} = \{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1/n\pi}\right)\} = \{\operatorname{sen}(n\pi)\} = \{0, 0, 0, \cdots\} \to 0$$

mientras que para la sucesión

$$\{x_n\} = \{\frac{2}{(2n-1)\pi}\} = \{\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{5\pi}, \cdots\} \to 0 \text{ se tiene}$$

$$\{f(x_n)\} = \{f\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)\} = \{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{1/(2n-1)\pi}\right)\} =$$

$$= \{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)\} = \{1, 1, 1, \cdots\} \to 1 \neq 0$$

Definición 1.24 (La definición $\varepsilon - \delta$ de límite). *Se dice que el límite de la función f en el punto x_0 es ℓ, y se denota por*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}} \tag{1.7}$$

Nota: La definición refleja la siguiente idea:

El hecho de que $f(x)$ está tan cerca de ℓ como queramos, quiere decir que para cualquier ε, todo lo pequeño que queramos, estará $f(x)$ entre $\ell-\varepsilon$ y $\ell+\varepsilon$, es decir,

$$\ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$$

que en valor absoluto se expresa como

$$|f(x)-\ell| < \varepsilon$$

y esta situación tiene que darse cuando x se acerca suficientemente a x_0. Este acercamiento se mide encontrando algún δ para el cual x esté entre $x_0-\delta$ y $x_0+\delta$, es decir,

$$x_0-\delta < x < x_0+\delta$$

que en valor absoluto se expresa como

$$|x-x_0| < \delta$$

El hecho de que el punto x_0 no interviene en la definición de límite se indica con la expresión

$$0 < |x-x_0| < \delta$$

A pesar de la importancia de la definición $\varepsilon-\delta$, a nivel teórico, especialmente en la demostración de teoremas; a nivel práctico, en el cálculo de límites, la definición $\varepsilon-\delta$ no es útil. La definición $\varepsilon-\delta$ solamente nos permite comprobar si un límite dado es correcto o no, pero no nos permite calcular límites, el posible límite tendremos que intuirlo por otro método. Además, su aplicación para comprobar límites suele ser artificial y difícil.

La definición de límite se refleja en el gráfico de la figura 1.30

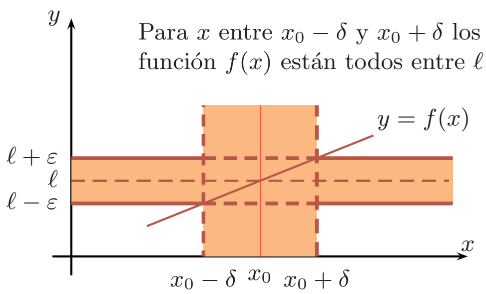


Figura 1.30: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

Ejemplo 1.46 (Hallando δ para un ε dado). *Sabiendo que*

$$\lim_{x\to 3}(2x+1) = 7$$

hallar δ tal que $|(2x+1)-7| < 0{,}01$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$.

Solución. Dado $\varepsilon = 0{,}01$ queremos encontrar el δ apropiado. Para ello intentamos establecer una relación entre los dos valores absolutos

$$|(2x+1)-7| < 0{,}01 \quad \text{y} \quad |x-3| < \varepsilon$$

de manera que desde el segundo se pueda llegar hasta el primero. La manera de hacerlo consiste en expresar el primer valor absoluto en función del segundo. Así,

$$|(2x+1)-7| = |2x-6| = 2|x-3| < 0{,}01$$

En consecuencia se tiene que

$$|x-3| < \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$$

Por tanto, eligiendo $\delta = 0{,}005$, se tiene que

$$0 < |x-3| < 0{,}005 \Rightarrow |(2x+1)-7| = 2|x-3| < 2(0{,}005) = 0{,}01$$

Luego hemos encontrado un δ para el ε dado. Esto no demuestra la existencia del límite dado. Para demostrar que el límite existe tenemos que encontrar un δ para cada ε.

Ejemplo 1.47 (Usando la definición $\varepsilon - \delta$). *Usando la definición $\varepsilon - \delta$ probar que*

$$\lim_{x\to 1}(5x-2) = 3$$

Solución. Tenemos que probar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que dependerá del ε correspondiente, tal que

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(5x-2)-3| < \varepsilon$$

Para ello intentamos establecer una conexión entre ambos valores absolutos, expresando el segundo en función del primero

$$|(5x-2)-3| = |5x-5| = 5|x-1| < \varepsilon$$

Luego, para que se cumpla la desigualdad $|(5x-2)-3| < \varepsilon$ se ha de cumplir que $5|x-1| < \varepsilon$ y, en consecuencia

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Luego eligiendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$, se tiene que la desigualdad

$$0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

implica que

$$|(5x-2)-3| = |5x-5| = 5|x-1| < 5\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = \varepsilon$$

y la veracidad del límite queda probada.

Proposición 1.13 (Unicidad del límite). *El límite de una función en un punto, si existe es único.*

1.5.2. Límites laterales

Al calcular el límite de una función f en un punto x_0, nos acercamos al punto x_0 tanto por la derecha como por la izquierda. Si limitamos nuestro estudio, exclusivamente, a los puntos que están a la derecha de x_0, o bien a la izquierda, respectivamente, obtenemos lo que se llaman los límites laterales.

Definición 1.25 (Límites laterales). *Se dice que el límite de la función f cuando x tiende a x_0, por la derecha, es ℓ, y se denota por*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \ell$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad 0 < x - x_0 < \delta$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0+} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}} \tag{1.8}$$

Se dice que el límite de la función f cuando x tiende a x_0, por la izquierda, es ℓ, y se denota por

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \ell$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad 0 < x_0 - x < \delta$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0-} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}} \tag{1.9}$$

Nota: Para simplificar la escritura, en ocasiones escribiremos

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) \qquad f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

Ejemplo 1.48 (Calculando un límite lateral). *Hallar el límite de la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x = 0$*

Solución. La función solamente está definida a la derecha del origen, por lo tanto no podemos hablar de límite por la izquierda, pero si de límite por la derecha. Si observamos la gráfica se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Teorema 1.6 (Unicidad de los límites laterales). *El límite de la función f en el punto x_0 existe y es igual a ℓ si y solamente si, los dos límites laterales existen y son iguales a ℓ.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \ell$$

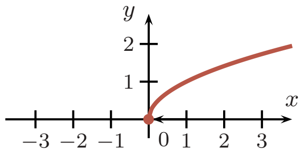


Figura 1.31: $f(x) = \sqrt{x}$

1.5.3. Propiedades de los límites

Proposición 1.14 (Propiedades algebraicas de los límites). *Son ciertas las siguientes propiedades:*

1. *Múltiplo escalar:* $\lim\limits_{x \to x_0} \big[r\, f(x)\big] = r\big[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\big], \quad r \in \mathbb{R}$

2. *Suma o diferencia:* $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

3. *Producto:* $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

4. *Cociente:* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad$ *si* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

5. *Potencia:* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^r = \Big[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\Big]^r$

1.5.4. Continuidad de una función en un punto

En el lenguaje cotidiano la palabra *continuo* se utiliza para indicar *que algo dura sin interrupción*, o bien *que las cosas tienen unión entre sí*. En Cálculo el significado es similar. Decir que una función f es continua en un punto x_0 significa que no sufre interrupción en x_0, que no se rompe ni tiene huecos, que su gráfica *"atraviesa"* el punto (x_0, y_0).

Definición 1.26 (Continuidad en un punto). *Una función f se dice que es continua en el punto x_0 si se verifican las tres relaciones siguientes:*

1. $f(x_0)$ *está definido* 2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe* 3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

lo que se puede resumir escribiendo

$$\boxed{f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)} \tag{1.10}$$

Nota: Las situaciones por las que una función no es continua en un punto son las siguientes:

1. La función no está definida en el punto.
2. El límite de la función en el punto no existe.

3. El límite de la función en el punto existe pero no coincide con el valor de la función en dicho punto.

Definición 1.27 (Discontinuidad en un punto). *Se dice que la función f es discontinua en un punto x_0 si la función está definida en un entorno de dicho punto (excepto quizás en x_0) y no es continua en dicho punto.*

Una discontinuidad se dice evitable si la función puede hacerse continua redefiniendola en dicho punto; y se llama inevitable si esto no es posible.

Nota: Para hablar de discontinuidad se exige que la función esté definida en los alrededores del punto. No tiene sentido decir que $f(x) = \sqrt{x}$ es discontinua en $x = -3$, ya que en los alrededores de -3 la función no está definida.

Para que la discontinuidad de una función f en un punto x_0 sea *evitable* el límite de la función en dicho punto tiene que existir, con objeto de hacerla continua redefiniendo $f(x_0)$ con el valor del límite

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Es evidente que la nueva función que se obtiene con esta redefinición de $f(x_0)$, es continua en x_0

La gráfica de una función de una variable es una curva en el plano. Esta

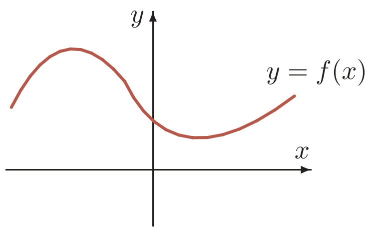


Figura 1.32: Gráfica de una función de una variable.

curva puede presentar las situaciones de discontinuidad que se muestran en la figura 1.33.

Definición 1.28 (Continuidad en un intervalo). *Una función f se dice que es continua en un intervalo abierto (a, b) si lo es en todos los puntos del intervalo.*

Una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si lo es en el intervalo abierto (a, b) y además:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Nota: Una función se dice que es continua por la derecha en x_0 cuando

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

y se dice que es continua por la izquierda cuando

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

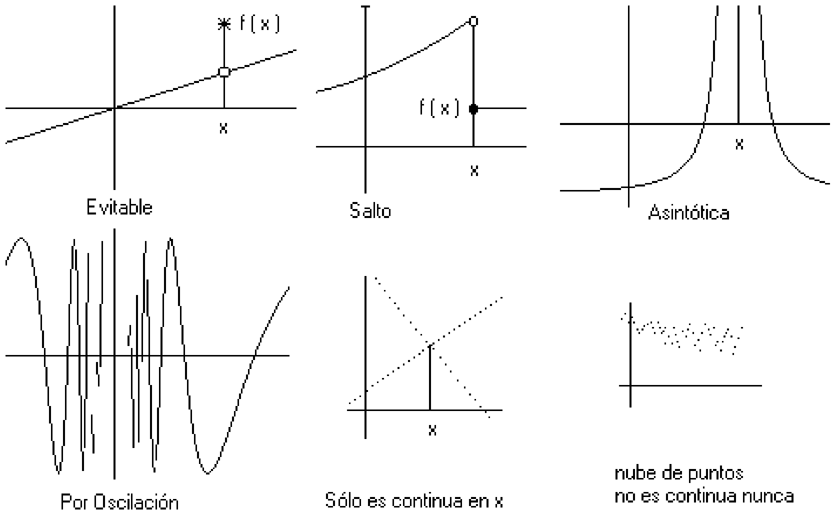


Figura 1.33: Situaciones de discontinuidad en funciones de una variable

1.5.5. Propiedades de las funciones continuas

Proposición 1.15 (Propiedades algebraicas). *Si f y g son continuas en x_0, entonces también son continuas:*

1. *Múltiplo escalar:* rf
2. *Suma y diferencia:* $f \pm g$
3. *Producto:* fg
4. *Cociente:* $\dfrac{f}{g}$, *si* $g(x_0) \neq 0$

Proposición 1.16 (Continuidad de las funciones elementales). *Las siguientes funciones son continuas en todos los puntos de su dominio*

1. *Polinómicas*
2. *Racionales*
3. *Radicales*
4. *Trigonométricas*
5. *Exponenciales*

En general, cualquier función elemental es continua en todos los puntos en los que están definidas.

Teorema 1.7 (Continuidad de la función compuesta). *Si g es continua en x_0 y f lo es en $g(x_0)$, entonces la función compuesta dada por $f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$ es continua en x_0.*

Nota: La importancia de este teorema la podemos ver con un simple ejemplo. Si la función $y = f(x)$ es continua en un punto, entonces también son continuas en ese punto $e^{f(x)}$, sen $\big(f(x)\big)$, etc.

Teorema 1.8 (Teorema del valor intermedio). *Si f es continua en $[a, b]$ y C es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = C$.*

El teorema afirma que si x toma todos los valores entre a y b, entonces la función continua f debe tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Corolario 1.2 (Teorema de los ceros de Bolzano). *Si f es continua en $[a, b]$ y $\operatorname{Sig} f(a) \neq \operatorname{Sig} f(b)$, entonces existe al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$.*

Nota: Con $\operatorname{Sig} f(a) \neq \operatorname{Sig} f(b)$, queremos indicar que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos. Es decir; o bien, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$; o bien, $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.

Corolario 1.3 (Intervalos de signo constante). *Una función solamente puede cambiar de signo al* pasar *por por puntos en los que sea nula o puntos en los que sea discontinua*

Ejemplo 1.49 (Probando la existencia de raíces). *Probar que*

1. *La ecuación $x^3 + 2x - 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz real en el intervalo $(0, 1)$*

2. *La ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz real*

Solución. a) Consideramos la función $f(x) = x^3+2x-1$, que al ser polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$, y en consecuencia en $[0, 1]$, además, se tiene

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{y} \quad f(1) = 2 > 0$$

luego, aplicando el Teorema 1.2 de los ceros de Bolzano, podemos concluir que existe al menos un c en $(0, 1)$ en el cual $f(c) = 0$.
b) Consideramos la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, que al ser polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$. En esta ocasión no se nos da el intervalo, en consecuencia lo determinamos nosotros. Buscamos, para ello, un punto donde la función sea negativa y otro donde sea positiva. Así,

$$f(0) = +1 > 0 \quad \text{y} \quad f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$$

En consecuencia la ecuación tiene, al menos, una raíz en el intervalo $(-2, 0)$.

1.5.6. Límites infinitos

Comencemos realizando nuevamente el ejemplo 1.44. Allí se dijo que el límite no existía como número real, pero que la situación planteada merecía un tratamiento particular. Veámoslo.

Ejemplo 1.50 (Comportamiento no acotado). *Discutir la existencia del siguiente límite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

Solución. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Demos valores a x cada vez más cercanos al origen

x se acerca a 0 por la izquierda — x se acerca a 0 por la derecha

x	-0.25	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.25
$f(x)$	16	100	10000	1000000	?	1000000	10000	100	16

$f(x)$ crece sin tope — $f(x)$ crece sin tope

De la tabla se desprende que cuando x se acerca a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x)$ crece sin límite. Es más, podemos hacer que $f(x)$ crezca cuanto queramos sin más que acercarnos suficientemente al origen. Así, por ejemplo, si queremos que $f(x)$ sea mayor que 100 000 000, bastará tomar un valor de x menor que $1/10\,000$. En efecto,

$$0 < |x| < \frac{1}{10\,000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > 100\,000\,000$$

Como $f(x)$ no se aproxima a ningún número real cuando x se acerca a 0, decimos que el límite no existe. Ahora bien, aunque el límite no existe, como número real, la situación reflejada en este ejemplo es lo suficientemente importante y lo suficientemente frecuente en Cálculo, como para tenerla en especial consideración. Así, en estas situaciones, se dice que el límite de la función cuando x tiende a cero, es infinito, y se expresa

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

No obstante hay que decir que $+\infty$ no es ningún número real, sino el reflejo de una situación concreta.

Ahora bien, para que quede probado que el límite es infinito, no basta con probar que la función toma valores superiores a 100 000 000 en los alrededores del origen, sino que hemos de probar que la función, en los alrededores del origen, toma valores superiores a *cualquier número real* M, por muy grande que sea. En efecto. Sea $M > 0$ un número positivo cualquiera, será

$$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x^2} > M$$

Lo que prueba que $f(x)$ toma valores arbitrariamente grandes en los alrededores del origen. Es decir, para cualquier numero positivo M, se tiene que

$$f(x) > M \quad \text{cuando} \quad 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Lo que prueba que el límite es infinito.

La gráfica de la función f viene reflejada en la figura 1.34

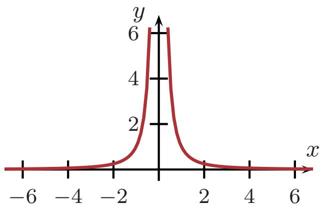


Figura 1.34: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Veamos otra situación parecida.

Ejemplo 1.51 (Límites + y - infinito). *Estudiar el comportamiento de la siguiente función en los alrededores del punto* $x = 2$

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Solución. Demos valores a x cada vez más cercanos a 2

x se acerca a 2 por la izquierda ⟶ ⟵ x se acerca a 2 por la derecha

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.25
$f(x)$	-4	-10	-100	-1000	?	1000	100	10	4

$f(x)$ decrece sin tope ⟶ ⟵ $f(x)$ crece sin tope

De la tabla se desprende que cuando x se acerca a 2, por la derecha, $f(x)$ crece sin límite, mientras que cuando x se acerca a 2, por la izquierda, $f(x)$ decrece sin límite. Es más, podemos hacer que $f(x)$ crezca cuanto queramos sin más que acercarnos suficientemente al origen, por la derecha; y que $f(x)$ decrezca cuanto queramos sin más que acercarnos suficientemente al origen, por la izquierda. Así, por ejemplo, si queremos que $f(x)$ sea mayor que 100 000 000, bastará tomar un valor de $x > 2$ y menor que $2 + 1/100\,000\,000$. En efecto,

$$2 < x < 2 + \frac{1}{100\,000\,000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x-2} > 100\,000\,000$$

Por otro lado, si, por ejemplo, queremos que $f(x)$ sea menor que -100 000 000, bastará tomar un valor de $x < 2$ mayor que $2 - 1/100\,000\,000$. En efecto,

$$2 > x > 2 - \frac{1}{100\,000\,000} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x-2} > 100\,000\,000$$

En estas situaciones, se dice que el límite de la función cuando x tiende a 2, por la derecha, es más infinito, y el límite de la función cuando x tiende a 2, por la izquierda, es menos infinito, y se expresa

$$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

No obstante, igual que en ejemplo anterior, hay que decir que $+\infty$ y $-\infty$ no son ningún número real, sino el reflejo de una situación concreta.

Ahora bien, para que quede probado que el límite es más infinito o menos infinito, no basta con probar que la función toma valores superiores a 100 000 000 o menores a -100 000 000 en los alrededores de $x = 2$, sino que hemos de probar que la función, en los alrededores de $x = 2$, toma valores superiores a *cualquier número real* M, por muy grande que sea, o menores a *cualquier número real negativo* N (por muy grande que sea, en valor absoluto). En efecto. Sea $M > 0$ un número positivo cualquiera, será

$$2 < x < 2 + \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x-2} > M$$

Lo que prueba que $f(x)$ toma valores arbitrariamente grandes a la derecha del 2. Es decir, para cualquier numero positivo M, se tiene que

$$f(x) > M \quad \text{cuando} \quad 2 < x < 2 + \frac{1}{M}$$

Y, por otro lado, sea $N = -M < 0$ un número negativo cualquiera. Será

$$2 > x < 2 - \frac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x-2} < -M$$

Lo que prueba que $f(x)$ toma valores negativos (arbitrariamente grandes en valor absoluto) a la izquierda del 2. Es decir, para cualquier numero negativo $N = -M$, se tiene que

$$f(x) < -M \quad \text{cuando} \quad 2 > x > 2 - \frac{1}{M}$$

Lo que prueba que el límite es menos infinito.

La gráfica de la función f viene reflejada en la figura 1.35

Definición 1.29 (Límites infinitos). *Se dice que el límite de la función f en el punto x_0 es más infinito, y se denota*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

si para cada $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > M \quad \textit{siempre que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

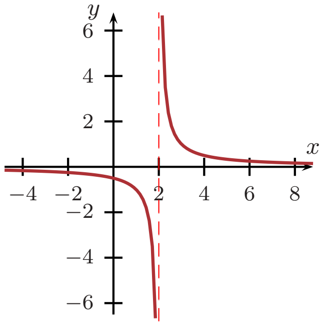


Figura 1.35: $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty, \quad \lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R}, \boxed{0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M} \qquad (1.11)$$

Se dice que el límite de la función f en el punto x_0 es menos infinito, y se denota

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

si para cada $N<0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$f(x)<N \quad \textit{siempre que} \quad 0<|x-x_0|<\delta.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall N<0, \exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R}, \boxed{0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<N} \qquad (1.12)$$

Las definiciones se ilustran en la Figura 1.36

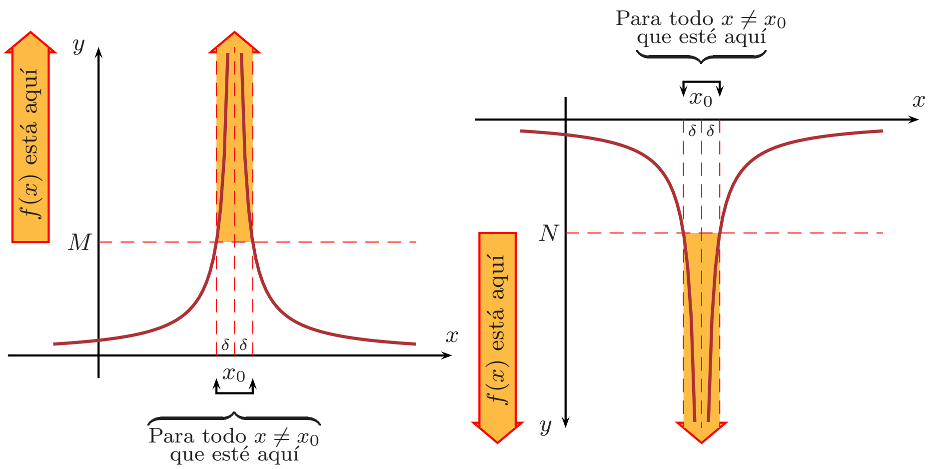


Figura 1.36: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty, \qquad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

Para definir el *límite infinito por la izquierda*, basta con sustituir

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{por} \quad x_0 - \delta < x < x_0$$

y para definir el *límite infinito por la derecha*, basta con sustituir

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \textit{por} \quad x_0 < x < x_0 + \delta$$

Si el límite de la función f en el punto x_0 es más o menos infinito, o bien alguno de los límites laterales es más o menos infinito, entonces decimos que la función f presenta en $x = x_0$ una *discontinuidad infinita o asintótica.*

Proposición 1.17 (Propiedades de los límites infinitos). *Si f y g son funciones tales que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$

entonces son válidas las siguientes propiedades:

1. *Suma o diferencia:* $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x) \pm g(x)\big] = +\infty$
2. *Producto:* $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x)g(x)\big] = +\infty \quad \textit{si } \ell > 0$
   $\lim\limits_{x \to x_0} \big[f(x)g(x)\big] = -\infty \quad \textit{si } \ell < 0$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades similares son válidas si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Las propiedades anteriores pueden recordarse de la siguiente forma:

$$\boxed{\begin{array}{ll} +\infty \pm \ell = +\infty & -\infty \pm \ell = -\infty \\ p\,(+\infty) = +\infty & p\,(-\infty) = -\infty \\ -p\,(+\infty) = -\infty & -p\,(-\infty) = +\infty \\ \dfrac{\ell}{+\infty} = 0 & \dfrac{\ell}{-\infty} = 0 \end{array}}$$

No está permitido dividir por cero. Sin embargo, Cuando el límite del denominador es cero, el cociente puede tener límite infinito, si bien, hay que determinar el signo del denominador para poder determinar el signo del infinito. Así,

$$\frac{p}{0} =? \begin{cases} \dfrac{p}{0^+} = +\infty \\ \dfrac{p}{0^-} = -\infty \end{cases} \qquad \frac{-p}{0} =? \begin{cases} \dfrac{-p}{0^+} = -\infty \\ \dfrac{-p}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

Definición 1.30 (Asíntotas verticales). *Diremos que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f, si el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0 por la derecha o por la izquierda, es $+\infty$ (o $-\infty$).*

Nota: Cuando la función f venga definida por un cociente

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

las asíntotas verticales habrá que buscarlas en los ceros del denominador $h(x) = 0$.

1.5.7. Límites en el infinito

Con concepto de límite de una función cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$ se pretende estudiar el comportamiento de la función cuando x crece (o decrece) sin límite. Es decir, x toma valores extremadamente grandes, positivos (o negativos). El concepto es análogo al de límite de una sucesión. Veámoslo con un ejemplo,

Ejemplo 1.52. *Estudiar el comportamiento de la función*

$$f(x) = \frac{3x}{|x| + 1}$$

cuando x crece o decrece sin límite.

Solución. Los valores de $f(x)$, cuando a x crece o decrece sin límite, vienen recogidos en la siguiente tabla.

		x decrece sin límite					x crece sin límite		
x	$-\infty \leftarrow$	-1000	-100	-10	0	10	100	1000	$\rightarrow +\infty$
$f(x)$	$-3 \leftarrow$	-2.997	-2.97	-2.73	0	2.73	2.97	2.997	$\rightarrow 3$
		$f(x)$ se acerca a -3					$f(x)$ se acerca a 3		

De la tabla se desprende que los valores de $f(x)$ tienden a 3 cuando x crece sin límite y a -3 cuando x decrece sin límite. En consecuencia diremos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{|x|+1} = -3, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{|x|+1} = 3$$

La gráfica de la función f es una curva con dos asíntotas horizontales: la recta $x = 3$, por la derecha; y la recta $x = -3$, por la izquierda. (véase Figura 1.37).

En consecuencia podemos decir que:

El límite de la función f, cuando x tiende a $+\infty$ es ℓ, si $f(x)$ está tan próximo a ℓ como queramos, siempre que x sea los suficientemente grande, y se escribe:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

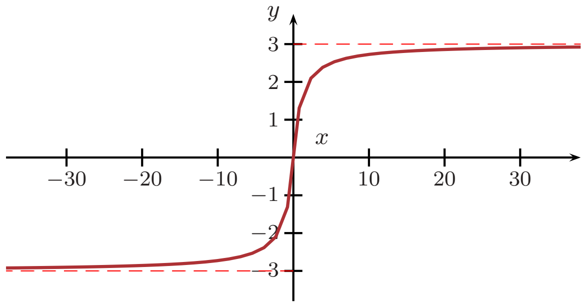


Figura 1.37: $f(x) = \dfrac{3x}{|x|+1}$

De manera análoga, se dice que el límite de la función f, cuando x tiende a $-\infty$ es ℓ, si $f(x)$ está tan próximo a ℓ como queramos, siempre que x tome valores negativos, suficientemente grande en valor absoluto, y se escribe:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

Formalmente se puede dar la siguiente definición:

Definición 1.31 (Límites en el infinito). *El límite de la función f, cuando x tiende a $+\infty$ es ℓ, y se denota*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad x > M$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}} \tag{1.13}$$

El límite de la función f, cuando x tiende a $-\infty$ es ℓ, y se denota

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N < 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad x < N$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N < 0 : \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{x < N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}} \tag{1.14}$$

Las definiciones se ilustran en la Figura 1.38

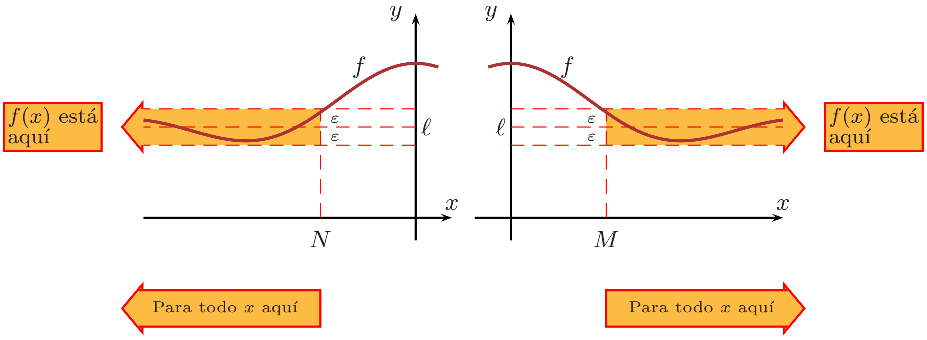


Figura 1.38: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

Definición 1.32 (Asíntotas horizontales). *Si*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad o \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

entonces la recta $y = \ell$ se llama asíntota horizontal de la gráfica de f.

Nota: La asíntota por la derecha y la asíntota por la izquierda pueden coincidir o no. Ahora bien, la gráfica de una función puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales, una por la derecha y otra por la izquierda.

Los límites en el infinito comparten muchas propiedades con los límites de funciones en un punto x_0 y con los límites de sucesiones.

Proposición 1.18 (Propiedades algebraicas de los límites en el infinito). *Son ciertas las siguientes propiedades:*

1. *Constante:* $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c$
2. *Múltiplo escalar:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[r\, f(x)\big] = r\big[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\big], \quad r \in \mathbb{R}$
3. *Suma o diferencia:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[f(x) \pm g(x)\big] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
4. *Producto:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
5. *Cociente:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}, \quad si \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$
6. *Potencia:* $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]^r = \Big[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Big]^r$
7. *Raíces:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$

Las mismas propiedades se dan cuando $x \to -\infty$

1.5.8. Técnicas elementales para el cálculo de límites

Todas las funciones elementales son continuas en todos los puntos en los que están definidas. En consecuencia para calcular el límite de una función elemental en un punto de su dominio bastará con hacer la *sustitución directa*. Es decir

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

El problema está en calcular el límite de una función elemental en un punto en el que no está definida. Es decir, en un punto tal que al hacer la sustitución directa nos encontramos con una *indeterminación*. Habrá que hacer las operaciones necesarias para *romper* la indeterminación.

Teorema 1.9 (Funciones que coinciden en todos sus puntos excepto en uno). *Sea x_0 un número real y sean f y g dos funciones que coinciden en todos los puntos de un entorno de x_0, salvo quizás en x_0. Entonces, si existe el límite de una de ellas en x_0, también existe el límite de la otra y además son iguales.*

$$f(x) = g(x) \ \textit{para} \ x \neq x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Demostración. Supongamos que existe el límite de $g(x)$ cuando $x \to x_0$ y que dicho límite es ℓ. Entonces, por definición, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $f(x) = g(x)$ para todo x del entorno de x_0, salvo quizás para x_0 y teniendo en cuenta que x_0 no se contempla en la definición de límite (ya que $0 < |x - x_0|$), resulta que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

luego el límite de $f(x)$ cuando $x \to x_0$ también es ℓ. □

a) Técnicas de cancelación. Se aplica en las funciones racionales cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo 0/0. Sea

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

y supongamos que nos encontramos con la situación

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \left[\frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \frac{0}{0}\right]$$

Al ser $p(x_0) = 0$ quiere decir que $p(x)$ es múltiplo de $(x - x_0)$. Del mismo modo, al ser $q(x_0) = 0$ quiere decir que $q(x)$ es múltiplo de $(x - x_0)$. En consecuencia, en virtud del Teorema 1.9, cancelando el factor $(x - x_0)$ en el numerados y denominador podemos eliminar la indeterminación y aplicar la sustitución directa.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \Big[\frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \frac{0}{0}\Big] = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)p_1(x)}{(x-x_0)q_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{p_1(x_0)}{q_1(x_0)}$$

Ejemplo 1.53 (Cálculo de límites mediante cancelación de factores). *Calcular*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}$$

Solución. Al probar la sustitución directa nos encontramos con una indeterminación del tipo 0/0. En consecuencia factorizamos numerador y denominador y cancelamos los factores comunes, con lo cual se tiene,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8} = \Big[\frac{0}{0}\Big] = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x+4} = \frac{2-3}{2+4} = \frac{-1}{6}$$

b) Técnicas de racionalización. Se aplica en las funciones irracionales cuando nos encontramos con indeterminaciones del tipo 0/0 o bien $\infty - \infty$. En el caso de que se trate de raíces cuadradas la indeterminación se suele eliminar multiplicando y dividiendo por el *conjugado*, con objeto de tener *suma por diferencia*, de manera que al aplicar la *diferencia de cuadrados* se elimine la raíz cuadrada.

Ejemplo 1.54 (Cálculo de límites mediante racionalización). *Calcular*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Solución. Al aplicar la sustitución directa nos encontramos con una indeterminación del tipo 0/0. En consecuencia racionalizamos el numerador, multiplicando y dividiendo por el *conjugado*, del numerador, de manera que al aplicar la *diferencia de cuadrados* se elimine la raíz cuadrada. En efecto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \Big[\frac{0}{0}\Big] = \lim_{x\to 1} \frac{\big(\sqrt{x} - 1\big)\big(\sqrt{x} + 1\big)}{(x-1)\big(\sqrt{x} + 1\big)} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)\big(\sqrt{x} + 1\big)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\big(\sqrt{x} + 1\big)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$$

c) Cálculo de límites mediante el número e. Las indeterminaciones del tipo 1^∞ se pueden resolver haciendo transformaciones para expresar el límite de cualquiera de las formas siguientes:

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

o bien, de manera general

$$\lim_{x\to x_0}\big(1+h(x)\big)^{1/h(x)}=e,\quad \text{si } \lim_{x\to x_0}h(x)=0$$

Nota: Estos límites se resuelven en la sección 3.3.3 (pág. 177) mediante las reglas de L'Hôpital.

Ejemplo 1.55. *Calcular:* $\lim\limits_{x\to 4}\big(x-3\big)^{\dfrac{2}{x-4}}$

Solución. Si hacemos la sustitución directa nos encontramos con una indeterminación del tipo 1^∞. El límite se resuelve mediante el número e de la siguiente forma

$$\lim_{x\to 4}\big(x-3\big)^{\dfrac{2}{x-4}}=\lim_{x\to 4}\left[\big(1+(x-4)\big)^{\dfrac{1}{x-4}}\right]^2=e^2$$

d) Teorema del encaje y de la acotación. Si una función está comprendida, en los alrededores de un punto, entre dos que tienen el mismo límite, en dicho punto, entonces dicha función también tiene el mismo límite en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\le h(x)\le g(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)$$

Teorema 1.10 (Teorema del encaje). *Si $f(x)\le h(x)\le g(x)$ para todo x en un entorno de x_0, excepto quizás en el propio x_0, y si*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell=\lim_{x\to x_0}g(x)$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\ell$$

Demostración. Dado $\varepsilon>0$ existen δ_1 y δ_2 tales que

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon\quad\text{siempre que}\quad 0<|x-x_0|<\delta_1$$

y

$$|g(x)-\ell|<\varepsilon\quad\text{siempre que}\quad 0<|x-x_0|<\delta_2$$

Sea δ el menor de δ_1 y δ_2. Entonces si $0<|x-x_0|<\delta$, se siguen las dos relaciones

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon\quad\text{y}\quad |g(x)-\ell|<\varepsilon$$

lo cual, expresado mediante desigualdades, significa que

$$-\varepsilon<f(x)-\ell<\varepsilon\quad\text{y}\quad -\varepsilon<g(x)-\ell<\varepsilon$$

de donde, sumando ℓ

$$\ell - \varepsilon < f(x) \quad \text{y} \quad g(x) < \ell + \varepsilon$$

y teniendo en cuenta que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, se tiene

$$\ell - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon$$

de donde,

$$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$$

que en valor absoluto, se expresa

$$|h(x) - \ell| < \varepsilon$$

lo que significa que $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ □

Si una función tiene límite cero, en un punto, y otra está acotada en los alrededores del punto, entonces su producto también tiene límite cero en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) \text{ acotada} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -k \leq g(x) \leq k \Rightarrow -kf(x) \leq f(x)g(x) \leq kf(x) \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} \Big[f(x)g(x)\Big] \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \Big[f(x)g(x)\Big] = 0 \Rightarrow 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

Nota: Si $f(x) < 0$, cambiaría el sentido de la desigualdad, pero el resultado final sería el mismo.

El teorema se cumple aunque la función $g(x)$ no tenga límite en el punto x_0. De ahí la importancia del teorema.

Ejemplo 1.56 (Cero por acotado). *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

Solución. Dado que la función *seno* está acotada

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$$

resulta

$$\lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

Nota: El resultado es correcto, a pesar de que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no existe.

1.5.9. Infinitésimos equivalentes

Definición 1.33 (Infinitésimos). *Una función, f, se dice que es un infinitésimo en un punto x_0, si su límite en dicho punto es cero.*

$$f \text{ infinitésimo en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Definición 1.34 (Infinitésimos equivalentes). *Dos infinitésimos, en un mismo punto, se dice que son equivalentes, cuando el límite de su cociente es la unidad.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1 \Leftrightarrow f(x) \sim g(x)$$

Teorema 1.11 (Sustitución de infinitésimos). *Cuando, en un límite, un infinitésimo esté multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente.*

Demostración. Supongamos que, en x_0, es $f(x) \sim g(x)$, será $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Y supongamos que nos encontramos con un límite en el que aparece $f(x)$ multiplicando o dividiendo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} 1 \cdot g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)h(x)$$

Es decir, hemos sustituido $f(x)$ por $g(x)$ y el nuevo límite puede resultar más fácil que el anterior.

Proposición 1.19. *Si un infinitésimo está sumando o restando, en general, no se le puede sustituir por otro equivalente.*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm h(x)\big) \neq \lim_{x \to x_0} \big(g(x) \pm h(x)\big)$$

Existen casos muy concretos en los que se pueden aplicar infinitésimos al caso de sumas, como es el siguiente

Proposición 1.20. *La suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menor orden.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + x^3 + x^6)f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2)f(x)}{g(x)}$$

1.5.10. Infinitésimos más frecuentes en $z \to 0$

Trigonométricos

$$\begin{array}{rl} \operatorname{sen} z \sim z & \operatorname{arc\,sen} z \sim z \\ \operatorname{tg} z \sim z & \operatorname{arc\,tg} z \sim z \end{array}$$
$$1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2}$$

Exponenciales, logarítmicos, potencias y raíces

$$\ln(1+z) \sim z \begin{cases} z \sim \ln(1+z) \\ e^z - 1 \sim z \\ a^z - 1 \sim z \cdot \ln a \\ (1+z)^r - 1 \sim r\, z \\ \sqrt[n]{1+z} - 1 \sim \dfrac{z}{n} \end{cases}$$

Ejemplo 1.57. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ 2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} 2x}$ 3. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$

4. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$ 5. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ 6. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x}$

Solución.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos x} = \frac{2}{2} = 1$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+x-1)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{1-x} = \lim_{x\to 1} -\frac{1-x}{1-x} = -1$

4. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to\infty} -x\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} - 1\right] =$

$$= \lim_{x\to\infty} -x\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{5}\right) = -\ln\frac{1}{5} = -(\ln 1 - \ln 5) = -(0 - \ln 5) = \ln 5$$

5. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left[1 + (\sqrt[n]{x}-1)\right]}{\ln\left[1 + (\sqrt[m]{x}-1)\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\sqrt[n]{x}}{\ln\sqrt[m]{x}} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{n}\ln x}{\frac{1}{m}\ln x} = \frac{m}{n}$$

6. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2$

Límite de sucesiones considerándolas como funciones

Si unimos los puntos que representan una sucesión obtenemos la gráfica de una función. Sin embargo, podemos obtener infinitas funciones que contienen los puntos de una misma sucesión. Lo normal es coger la función que tiene la misma fórmula que la sucesión, es decir considerar que la variable n es continua y no discreta.

Si la función que representa a la sucesión tiene límite, ese es el límite de la sucesión, pero si la función no tiene límite, entonces la sucesión si puede tenerlo.

Por tanto, se pueden aplicar los infinitésimos y las reglas de L'Hôpital a las sucesiones, el límite que encontremos será el límite de la sucesión y si la sucesión considerada como función no tiene límite entonces habrá que aplicar otro criterio.

Ejemplo 1.58. *Calcular los siguientes límites:*

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(1-\sqrt[3]{\frac{n-1}{n}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}-\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{-1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}-\sqrt[3]{n}\frac{-1}{3n}=0$$

2. $$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{a}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}-n\frac{-a}{3n}=\frac{a}{3}$$

3. $$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n-1]{a}\right)=\lim_{n\to\infty}n\sqrt[n]{a}\left(1-\frac{a^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n}}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\sqrt[n]{a}\left(1-a^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\sqrt[n]{a}\left(1-a^{\frac{n-n+1}{n(n-1)}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\sqrt[n]{a}\left(-\frac{\ln a}{n(n-1)}\right)=0$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}\left[1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p+1}\right]}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\left[1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{p+1}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\frac{p+1}{n+1}}=\frac{1}{p+1}$$

Ejercicios propuestos de la sección 1.5. Límite de funciones

Soluciones en la página 390

1.5.1. Hallar, si existen, los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-16} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0}(x^2+x)\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

1.5.2. Determinar los valores de a y b que hacen continua la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\leq 1\\ ax+b & \text{si } 1<x<3\\ 5 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

1.5.3. Hallar, si existen, los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x\to 2-}\frac{x}{x-2} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 2+}\frac{x}{x-2} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$$

1.5.4. Hallar, si existen, los siguientes límites

$$\text{a) } \lim_{x\to 2}\frac{x}{(x-2)^2} \qquad \text{b) } \lim_{x\to -2}\frac{x}{(x+2)^2} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)^3}$$

1.6. Funciones hiperbólicas.

Las dos funciones siguientes, a primera vista, no presentan ninguna particularidad, incluso pueden parecer dos funciones "ingenuas":

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\\ g(x)&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\end{aligned}\right\}$$

Sin embargo, el comportamiento de estas dos funciones es bastante curioso ya que nos recuerdan las funciones circulares de la trigonometría, por eso reciben unos nombres especiales: coseno hiperbólico y seno hiperbólico.

1.6.1. Coseno y seno hiperbólico

Definición 1.35. *Se llaman funciones hiperbólicas a las siguientes:*

$$\left.\begin{aligned} \cosh(x)&=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\\ \operatorname{senh}(x)&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\end{aligned}\right\}$$

Con las funciones hiperbólicas se puede construir una trigonometría muy parecida a la ordinaria.
Una primera analogía la podemos ver en el 0 donde toman los mismos valores que el coseno y el seno de la trigonometría ordinaria. En efecto:

$$\left.\begin{aligned} \cosh(0)&=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1\\ \operatorname{senh}(0)&=\frac{e^0-e^{-0}}{2}=\frac{1-1}{2}=\frac{0}{2}=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\cosh 0&=1\\ \operatorname{senh} 0&=0\end{aligned}$$

Sin embargo, una diferencia fundamental está en que estas funciones no son periódicas, ni van oscilando en torno al cero. En efecto.

$$\left.\begin{array}{l} \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Siempre es positivo (y además siempre es} \geq 1) \\ \text{Puede ser positivo o negativo} \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow \operatorname{senh} x > 0 \\ x < 0 \Rightarrow \operatorname{senh} x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1.6.2. Fórmula fundamental de la Trigonometría hiperbólica

Si en vez de hacer la suma de los cuadrados hacemos la diferencia, tenemos:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Que nos da la fórmula fundamental de la trigonometría hiperbólica:

$$\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$$

Que también puede expresarse de la forma:

$$\boxed{\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x}$$

Lo que permite expresar cada una de las funciones hiperbólicas en términos de la otra.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cosh x = +\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 x} \\ \operatorname{senh} x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1} \end{array} \right.$$

Esto no quiere decir que el senh tome dos valores simultáneamente, sino que en cada caso, habrá que elegir como signo de la raíz el del propio x.

1.6.3. Significado del término "hiperbólicas".

Estas funciones se llaman *hiperbólicas* porque la trigonometría que se construye con ellas viene definida sobre una hipérbola, de manera análoga a cómo la trigonometría ordinaria se construye sobre una circunferencia.

Trigonometría circular:

Un punto (x, y) de la circunferencia cumple:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Y llamando: $\left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array} \right\}$ se tiene : $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$

Trigonometría hiperbólica:

Nota: En la trigonometría hiperbólica nos limitamos a la rama derecha de la hipérbola.

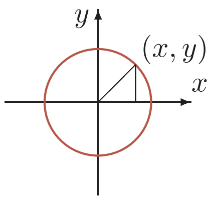


Figura 1.39: $x^2 + y^2 = 1$

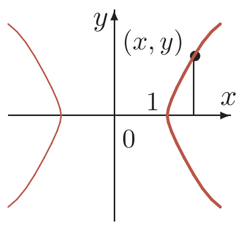


Figura 1.40: $x^2 - y^2 = 1$

Un punto (x, y) de la hipérbola cumple:

$$x^2 - y^2 = 1$$

Y llamando: $\left\{ \begin{array}{l} x = \cosh t \\ y = \operatorname{senh} t \end{array} \right\}$ se tiene : $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$

1.6.4. Otras razones hiperbólicas

Las demás razones hiperbólicas se definen igual que en la trigonometría circular:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

1.6.5. Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{senh} 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - \left(e^{-x}\right)^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} =$$
$$= 2\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \cdot \operatorname{senh} x \cdot \cosh x$$

$$\boxed{\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x}$$

$$\cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + \left(e^{-x}\right)^2}{2} = \frac{(e^x)^2 + 2 + \left(e^{-x}\right)^2 - 2}{2} =$$

$$= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2 - 2}{2} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}{2} - 1 = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 =$$

$$= 2\cosh^2 x - 1 = 2\cosh^2 x - (\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x) =$$

$$= 2\cosh^2 x - \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

$$\boxed{\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x}$$

1.6.6. El cuadrado del senh y del cosh

Las siguientes fórmulas se emplean en el cálculo de integrales.

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 \Rightarrow 2\cosh^2 x = 1 + \cosh 2x \Rightarrow \boxed{\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = (1 + \operatorname{senh}^2 x) + \operatorname{senh}^2 x = 1 + 2\operatorname{senh}^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{senh}^2 x = \cosh 2x - 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}}$$

1.6.7. Gráfica de las funciones hiperbólicas

Gráfica de la función $f(x) = \operatorname{senh} x$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1/2e^x - 1/2e^{-x}$$

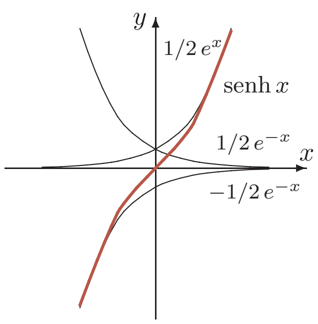


Figura 1.41: $f(x) = \operatorname{senh} x$

Gráfica de la función $f(x) = \cosh x$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1/2e^x + 1/2e^{-x}$$

Gráfica de la función $f(x) = \operatorname{tgh} x$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

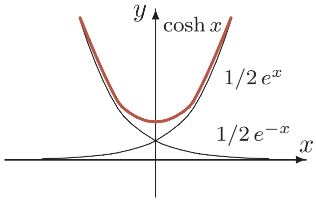


Figura 1.42: $f(x) = \cosh x$

$\operatorname{tgh} 0 = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \dfrac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \dfrac{e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{e^x}{e^{-x}} - 1}{\dfrac{e^x}{e^{-x}} + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

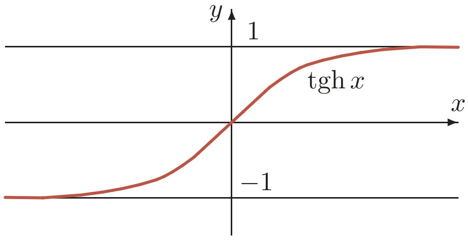


Figura 1.43: $f(x) = \operatorname{tgh} x$

1.6.8. Funciones hiperbólicas inversas

Para las funciones hiperbólicas inversas en vez de la palabra *arco* se utiliza la palabra *argumento*.

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{arg}\cosh x \Longleftrightarrow x = \cosh y \\ y = \operatorname{arg}\operatorname{senh} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{senh} y \end{array}\right\} \leftarrow \text{Siempre positivo}$$

Dado que la función cosh no es inyectiva, ya que existen dos *argumentos* con el mismo coseno hiperbólico: $\cosh y = \cosh(-y)$, su correspondencia recíproca no es función, ya que para cada valor de x tendríamos dos posibles valores para su imagen: y y $-y$. Para salvar esta circunstancia elegiremos siempre el valor positivo del argumento.

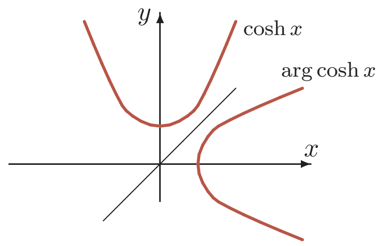


Figura 1.44: $f(x) = \arg\cosh x$

1.6.9. Identidad hiperbólica

$$\left.\begin{array}{l} \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}\right\} \cosh x + \operatorname{senh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

$$\boxed{e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x} \Rightarrow \boxed{x = \ln\left[\cosh x + \operatorname{senh} x\right]}$$

1.6.10. Fórmula logarítmica de las funciones hiperbólicas inversas

Sea $y = \arg\cosh x$, a partir de ahí, los valores del $\cosh y$ y $\operatorname{senh} y$ son los siguientes:

a) Por la propia definición del arg cosh, será: $\cosh y = x$.

b) A partir de la fórmula fundamental podemos expresar el senh en función del cosh, y a partir de ahí, expresarlo en función de x.

$$\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \operatorname{senh}^2 y = \cosh^2 y - 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{senh} y = +\sqrt{\cosh^2 y - 1} \Rightarrow \operatorname{senh} y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Y sustituyendo ambas expresiones en la identidad logarítmica resulta:

$$y = \ln\left[\cosh y + \operatorname{senh} y\right] = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]$$

de donde:

$$\boxed{\arg\cosh x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]}$$

De la misma forma se obtiene la expresión para el arg senh:

Sea $y = \arg\operatorname{senh} x$, a partir de ahí, los valores del $\cosh y$ y $\operatorname{sen} y$ son los siguientes:

a) Por la propia definición del arg senh, será: $\operatorname{senh} y = x$.

b) A partir de la fórmula fundamental podemos expresar el cosh en función del senh, y a partir de ahí, expresarlo en función de x.

$$\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1 \Rightarrow \cosh^2 y = \operatorname{senh}^2 y + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cosh y = +\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1} \Rightarrow \cosh y = \sqrt{x^2+1}$$

Y sustituyendo ambas expresiones en la identidad logarítmica resulta:

$$y = \ln\left[\cosh y + \operatorname{senh} y\right] = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$$

de donde:

$$\boxed{\operatorname{arg\,senh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]}$$

También puede hacerse despejando y en las ecuación $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$ para el $\operatorname{arg\,cosh}$, o bien en $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ para el arg senh

1.7. Problemas propuestos del Capítulo 1

Ejercicios propuestos del Capítulo 1

Soluciones en la página 390

1.1. Hallar los intervalos definidos por las siguientes desigualdades:

a) $x^2 - 2x < 3$, b) $\dfrac{x-2}{x-4} < 2$, c) $|2x-6| \leq 4$, d) $|7-3x| \geq 2$,

1.2. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
a) Hallar el centro y el radio
b) Determinar si los puntos $(0,0)$, $(-2,-1)$ y $(-2,1)$ están dentro, fuera o en ella.

1.3. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \sqrt{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \sqrt{x+1}$

1.4. Hallar, si existen, los siguientes límites de sucesiones

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+5}{6n^2+5n-1}$, b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+n+1} - \sqrt{9n^2-2n}\right)$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right)$, d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+5n+1}{n^2+2n+5}\right)^n$

1.5. Hallar, si existen, los siguientes límites de funciones

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

Problemas resueltos del Capítulo 1

1.1 (Aplicando el criterio de Stolz). *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[(n+1)!\right]}{\ln\left[(n+1)^n\right]}$$

Solución. Aplicando el criterio de Stolz, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[(n+1)!\right]}{\ln\left[(n+1)^n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[(n+2)!\right] - \ln\left[(n+1)!\right]}{\ln\left[(n+2)^{n+1}\right] - \ln\left[(n+1)^n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \dfrac{(n+2)!}{(n+1)!}}{\ln \dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln\left[(n+2)\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+2) + \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n / \ln(n+2)} = \frac{1}{1+1/\infty} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Donde se ha tenido en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \ln \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\dfrac{n}{n+1}} = \ln e^1 = 1$$

Problemas propuestos del Capítulo 1

Soluciones en la página 390

1.1. Hallar, si existen, los siguientes límites de sucesiones

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{3n+2}{3n-5}}\right)^{(n^2+3)}$$

Capítulo 2

Funciones de varias variables: Límites

2.1. Funciones de varias variables

2.1.1. Definiciones

Función de una variable Una función de una variable es una correspondencia entre dos magnitudes. Por ejemplo, el espacio y el tiempo. No obstante, hay que advertir que no se considera función a cualquier correspondencia, sino que para que una correspondencia sea función, la imagen de cada elemento tiene que ser única y estar bien determinada.

Una manera de visualizar una función es por medio de una gráfica. La gráfica de una función de una variable, por lo general, es una curva en el plano. Sin embargo, no toda curva del plano es la representación de una función. Para que una curva represente una función no puede tener dos puntos en la misma vertical (criterio de la recta vertical), ya que para que una correspondencia entre dos magnitudes sea función, la imagen tiene que ser única.

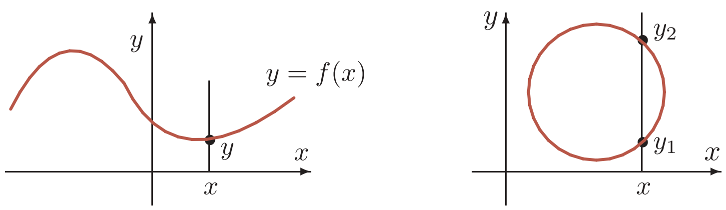


Figura 2.1: Gráfica de una función de una variable. La circunferencia no es la gráfica de una función.

Para poder aplicar las propiedades de las funciones a las correspondencia que no lo son hay que descomponerlas en funciones. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia $x^2+y^2=1$ no representa (globalmente) una función, ya que para cada valor de una de las variables hay dos valores de la otra, con lo cual se viola el concepto de función. En consecuencia, la descomponemos en dos funciones: una que toma el valor positivo (semicircunferencia superior), y otra el valor negativo (semicircunferencia inferior). En efecto, tenemos:

$$x^2+y^2=1 \;\Rightarrow\; y^2=1-x^2 \;\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1=+\sqrt{1-x^2} \\ y_2=-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

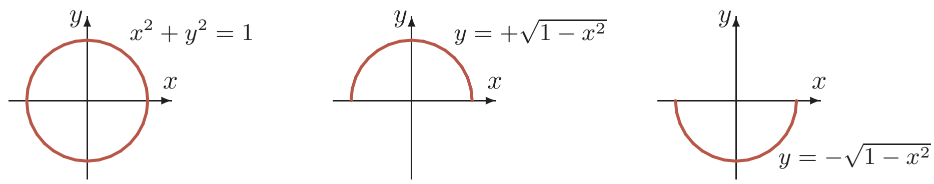
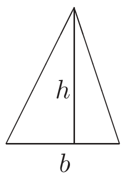


Figura 2.2: La circunferencia no es una función, pero podemos descomponerla en dos funciones.

Función de varias variables. Una función de varias variables es una correspondencia entre más de dos magnitudes. En este caso, las imágenes también serán números reales, pero los originales no serán números individuales, sino parejas o ternas de números reales. Es decir, para poder dar el resultado de la función necesitamos tener varios datos. En consecuencia, los valores de la función (las imágenes), que serán números reales, dependen (son función) de más de una variable.
Ejemplo: Si expresamos el área de un triángulo en función de la base y de la altura, tendremos una función de dos variables.



$$a=\frac{1}{2}bh \quad\Rightarrow\quad a=f(b,h) \quad b>0, \quad h>0$$

Figura 2.3:

En general, será:

$$\begin{aligned} f:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f:\ (x,y) &\longmapsto z \qquad z=f(x,y) \end{aligned}$$

Ejemplo: Si expresamos el volumen de un paralelepípedo rectangular (caja de zapatos) en función de sus aristas, tendremos una función de tres variables.

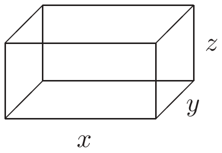


Figura 2.4:

$$v = xyz \Rightarrow v = f(x, y, z), \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0$$

En general será,

$$\begin{gathered} f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f : \ (x, y, z) \longmapsto v \qquad v = f(x, y, z) \end{gathered}$$

Denotamos una función de dos o más variables por una notación similar a la utilizada con las funciones de una sola variable. Así, en los ejemplos anteriores, tenemos:

$$z = \underbrace{f(x, y)}_{\text{2 variables}} = \frac{1}{2}xy \qquad \text{y} \qquad v = \underbrace{f(x, y, z)}_{\text{3 variables}} = xyz$$

Definición 2.1 (Función de dos variables). *Sea $\mathcal{D}$ un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de $\mathcal{D}$ le corresponde un número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es función de x e y. El conjunto $\mathcal{D}$ es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores de $f(x, y)$ es el recorrido de f.*

Para la función dada por $z = f(x, y)$, a x e y se les llaman *variables independientes*, y a z *variable dependiente.*

Nota: Nótese el doble papel que juega la letra z en la notación: En funciones de dos variables se le suele usar para denotar los valores de la función, escribiendo $z = f(x, y)$ (aquí, la z es la "función", la variable dependiente), mientras que en funciones de tres o más variables suele aparecer denotando a una de las variables de la función, por ejemplo, en $v = f(x, y, z)$ (aquí la z es una variable independiente).

El par ordenado (x, y) puede tener una doble interpretación: por un lado, lo podemos considerar como una pareja de números reales (es decir, vemos dos números, dos variables); y por otro, lo podemos considerar como una unidad, como las componentes de un vector, $\mathbf{v} = (x, y)$ (y, en este sentido, sólo veremos una variable, un vector). En consecuencia las funciones de varias variables, también, pueden considerarse como funciones de una sola variable vectorial.

$$\begin{gathered} f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f : \ (x, y) \longmapsto z \qquad z = f(x, y) \\ f : \ \mathbf{v} \longmapsto z \qquad z = f(\mathbf{v}) \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = (x, y) \end{gathered}$$

En general, tendremos funciones del tipo:

$$f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f : \ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto y \qquad y = f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f : \ \mathbf{x} \longmapsto y \qquad y = f(\mathbf{x})$$

que llamaremos *funciones reales de n variables reales*, si consideramos a los puntos de $\mathbb{R}^n$ como n-adas de números reales (es decir, veremos n variable), o bien, *funciones reales de variable vectorial*, si consideramos a los elementos de $\mathbb{R}^n$ como vectores (es decir, sólo veremos una variable: un vector).

Es decir, *una función* $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una regla que asocia a cada* n*-ada ordenada de números reales* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de* $\mathcal{D}$*, o bien, a cada vector* $\mathbf{x}$ *de* $\mathcal{D}$*, un número real (y sólo uno) bien determinado* $f(x_1, \ldots, x_n)$.

En consecuencia, una función de varias variables está constituida por:

a) Su dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$,

b) su codominio $\mathbb{R}$,

c) la regla, $z = f(\mathbf{x})$, que asocia a cada elemento del dominio $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, su imagen $z \in \mathbb{R}$.

A la magnitud que se despeja (la imagen) se le llama variable dependiente y a las otras variables independientes.

A las funciones de varias variables también se les llama *campos escalares*.

Igual que en una variable, para que la correspondencia sea función la imagen tiene que ser única. Para poder aplicar las propiedades de las funciones a las correspondencias que no lo son, hay que descomponerlas en funciones.

Ejemplo. La ecuación de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ no representa (globalmente) una función, ya que si le damos valores a dos de las variables obtenemos dos valores de la tercera, lo que viola el concepto de función.

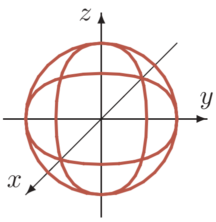


Figura 2.5:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{(no es función)} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ (si es función)} \\ z_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{(si es función)} \end{cases}$$

Funciones vectoriales. Una función se dice que es vectorial cuando el resultado no es un número, sino un vector, es decir, una pareja de números o una terna de números.

Ejemplo. Si las ecuaciones paramétricas de una recta son las siguientes:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

para cada valor del parámetro tiempo, t, obtenemos las tres coordenadas del punto de situación, (x, y, z).

En general, tendremos,

$$f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f: \quad t \longmapsto (x, y, z) \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

También se pueden definir funciones vectoriales que dependan de varias variables. Por ejemplo:

$$f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f: \quad (x, y) \longmapsto (xy, x^2y, lnx)$$

En general, podemos establecer la siguiente clasificación:

$$f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \begin{cases} n = m = 1 & \text{función de una variable} \\ \left.\begin{array}{l} n > 1 \\ m = 1 \end{array}\right\} & \text{función de varias variables} \\ \left.\begin{array}{l} n \text{ cualquiera} \\ m > 1 \end{array}\right\} & \text{función vectorial} \end{cases}$$

Campos vectoriales. Se llaman *campos vectoriales* a las funciones vectoriales de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. Es decir, se llama campo vectorial a las funciones del tipo $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Una práctica para visualizar los campos vectoriales consiste en jugar con la naturaleza "dual"de los elementos de $\mathbb{R}^n$; los elementos del dominio $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ se ven como *puntos* y los de la imagen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ como *vectores*. El vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se representa mediante una flecha que se puede colocar en cualquier punto del espacio, sin embargo, para tener una visualización del campo, la flecha se colocará de manera que su punto inicial sea el punto $\mathbf{x}$.

Ejemplo. El campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ecuación, $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, que asocia al punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se llama *campo radial* en $\mathbb{R}^2$, y se puede representar gráficamente como un conjunto de flechas en dirección radial, cuya longitud crece al alejarnos del origen de coordenadas y disminuye al acercarnos a él.

2.1.2. Dominio de una función de varias variables

El dominio de una función se define como el conjunto de puntos que tienen imagen.

En la práctica el dominio de una función de varias variables, normalmente, viene determinado por el contexto del problema (por ejemplo área de un triángulo). Por eso, para definir las funciones es usual dar simplemente la fórmula $z = f(\mathbf{x})$, sin especificar el dominio $\mathcal{D}$.

Dominio implícito en la fórmula. Cuando no se dispone de un contexto

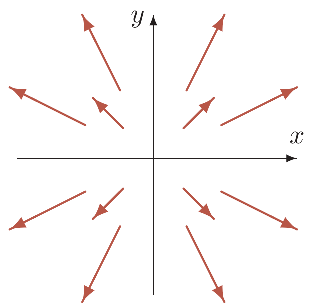


Figura 2.6: Campo radial en $\mathbb{R}^2$

de aplicación, también es usual definir las funciones dando simplemente la regla $z = f(\mathbf{x})$, sin especificar el dominio $\mathcal{D}$. En tal caso se entiende que el dominio viene implícito en la propia fórmula, y queda determinado por todos aquellos valores para los cuales tiene sentido aplicar la fórmula que define la función. O sea, el dominio está formado por todos aquellos valores tales que al sustituirlos en la fórmula y realizadas las operaciones indicadas se obtiene un valor numérico y no una operación imposible. Es decir, se entiende que el dominio de la función f es el mayor subconjunto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ para el cual la regla $f(x)$ tiene sentido (si el dominio es más pequeño hay que indicarlo). Por ejemplo, si definimos la función $a = \frac{1}{2}xy$ el dominio sería cualquier pareja de números reales (x,y). Ahora bien, si queremos que esa función represente el área de un triángulo, los valores x e y tienen que ser positivos. Por lo tanto dicha restricción habrá que indicarla junto con la fórmula $a = \frac{1}{2}xy \quad x > 0,\ y > 0$. Si no se indica ninguna restricción estamos suponiendo que el dominio es el máximo "permitido"por la fórmula. El conocimiento del dominio nos permite saber qué valores pueden sustituirse en la fórmula y cuales no.

El dominio de una función de dos variables $f(x, y)$ será una región del plano, y el dominio de una función de tres variables $f(x, y, z)$ una región del espacio. Y vendrá determinado por la propia fórmula (dominio implícito), o bien, por una restricción arbitraria que nosotros impongamos.

Se llama *Rango* o *Recorrido* de una función al conjunto de elementos que son imagen. En general, nos ocuparemos del Dominio y sólo en casos particulares nos ocuparemos del Recorrido.

Ejemplo 2.1 (Encontrando un dominio). *Encontrar el dominio de definición de función*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Solución. Se trata de encontrar aquellas parejas de números (x, y), para las cuales tiene sentido la fórmula dada para $f(x, y)$. Es decir, ¿qué valores pueden darse a x e y, de manera que al realizar las operaciones indicadas en la fórmula se obtenga un valor numérico y no tropecemos con una operación imposible?

Es evidente que, en este caso, el dominio de la función es todo el espacio $\mathbb{R}^2$ excepto el origen de coordenadas, es decir, $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, pues la fórmula puede ser calculada para cualquier pareja de números reales, salvo para la pareja $(0,0)$. En efecto,

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \frac{1\cdot 1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} \\ f(-2,3) &= \frac{-2\cdot 3}{(-2)^2+(3)^2} = \frac{-6}{13} \\ f(0,3) &= \frac{0\cdot 3}{0^2+(3)^2} = \frac{0}{9} = 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, al sustituir la pareja (x,y) por $(0,0)$ tropezamos con una operación imposible, como es dividir por cero.

$$f(0,0) = \frac{0\cdot 0}{0^2+0^2} = \frac{0}{0}$$

Ejemplo 2.2. *Encontrar el dominio de la función*

$$f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Solución. El mismo razonamiento del ejemplo anterior nos conduce a

$$D_f = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$$

Nota: Recordemos que al calcular el dominio de una función deben tenerse en cuenta, entre otras, las siguientes circunstancias:

1. Que no se puede dividir por cero.
2. Que las raíces de índice par sólo están definidas para los números positivos y el cero.
3. Que los logaritmos sólo están definidos para los números positivos.

Ejemplo 2.3 (Representando un dominio). *Encontrar el dominio de definición de las siguientes funciones, indicando su significado gráfico.*

1. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$
3. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$
4. $f(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{sen}(yz)}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$
5. $f(x,y) = \ln xy$
6. $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$
7. $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen}(x+y)$

Solución.

1. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}}$

   Para que la raíz cuadrada $\sqrt{x-y^2}$ esté definida, el radicando no puede ser negativo, luego $x - y^2 \geq 0$, pero, al estar en el denominador, ha de ser distinto de cero, $x - y^2 \neq 0$. En consecuencia,

$$\left.\begin{array}{l} x-y^2 \geq 0 \\ x-y^2 \neq 0 \end{array}\right\} x - y^2 > 0 \ \Rightarrow\ x > y^2 \ \Rightarrow\ D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y^2\}$$

   Para representar la inecuación $x > y^2$ representamos la ecuación $x = y^2$, y obtenemos una parábola. En los puntos de la parábola se tiene la igualdad $x = y^2$. En consecuencia, a la derecha de la parábola será $x > y^2$. Luego el dominio de la función coincide con el interior de la parábola, excluido el contorno.

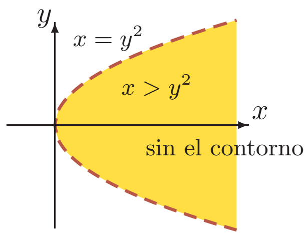
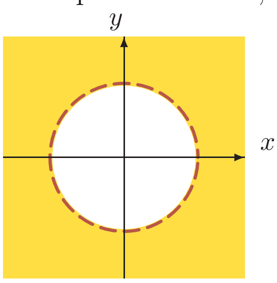


Figura 2.7: Dominio de la función: $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}}$

2. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$

   Para que la raíz cuadrada esté definida, el radicando no puede ser negativo, luego $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$, pero al estar en el denominador, no puede ser cero, $x^2 + y^2 - 9 \neq 0$. En consecuencia



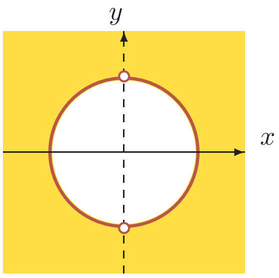
$$x^2 + y^2 - 9 > 0 \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 > 9 \ \Rightarrow$$
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 9\}$$

Exterior del círculo de centro el Origen y radio 3, excluido el contorno

Figura 2.8:

3. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$

   Igual que en el caso anterior, para que la raíz cuadrada esté definida, el radicando no puede ser negativo, luego $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$. Ahora bien, en este caso, al estar en el numerador, no se le exige que sea distinto de cero. No obstante, al estar x en el denominador, no puede ser cero, $x \neq 0$. En consecuencia



$$x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \geq 9$$

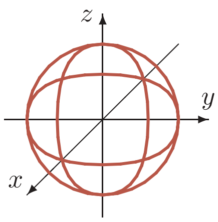
$$x \neq 0 \;\Rightarrow$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 9,\; x \neq 0\}$$

Exterior del círculo de centro el Origen y radio 3, incluido el contorno y excluido el eje OY. Los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$ quedan excluidos.

Figura 2.9:

4. $f(x, y, z) = \dfrac{\operatorname{sen}(yz)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$
En numerador no tiene ningún problema, está definidos para cualquier valor de x e y. Luego,



$$4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 + z^2 < 4 \;\Rightarrow$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

El dominio es el interior de la esfera de centro el Origen y radio 2, excluido el contorno.

Figura 2.10:

5. $f(x, y) = \ln xy$

$$xy > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} x > 0 \\ y > 0 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{c} x < 0 \\ y < 0 \end{array}\right\} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / [x > 0, y > 0] \\ \text{ó } [x < 0, y < 0]\} \end{array}$$

Es decir, el dominio está formado por el primer y el tercer cuadrante, excluidos los ejes de coordenadas.

6. $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$

$$xy \neq 0 \;\Rightarrow x \neq 0 \; e \; y \neq 0 \;\Rightarrow\; D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$$

El dominio comprende todo el plano menos los dos ejes de coordenadas

7. $f(x, y) = \operatorname{arc\,sen}(x + y)$
Que $f(x, y)$ sea el arc sen de $x + y$, significa que $x + y$ es el seno de un ángulo. Para que $x + y$ pueda ser el seno de un ángulo ha de estar comprendido entre 1 y -1, $-1 \leq x + y \leq 1$. En consecuencia

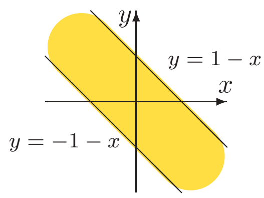


Figura 2.11:

$$-1 \leq x+y \leq 1 \ \Rightarrow \begin{cases} \quad x+y \leq 1 \Rightarrow y \leq 1-x \\ -1 \leq x+y \ \Rightarrow y \geq -1-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x+y \leq 1\}$$

El dominio es la franja comprendida entre las rectas $y = 1-x$ e $y = -1-x$, incluidas ambas rectas.

2.1.3. Operaciones con funciones de varias variables.

Las funciones de varias variables se pueden combinar de la misma forma que las funciones de una sola variable. Por tanto se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

$$f(x,y) \pm g(x,y) \quad , \quad f(x,y) \cdot g(x,y) \quad , \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad , \cdots$$

Así, las operaciones entre funciones de varias variables se definen de manera análoga a como se definen en el caso de una sola variable:

$$\begin{aligned} (f+g)(x,y) &= f(x,y)+g(x,y) \\ (fg)(x,y) &= f(x,y)g(x,y) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) &= \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \end{aligned}$$

No obstante, hay que hacer notar que operar con funciones significa operar con las imágenes de un mismo punto.

$$(x,y) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} f(x,y) \\ \\ g(x,y) \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} f(x,y)+g(x,y)$$

En consecuencia, para que la operación con las imágenes se pueda considerar como una operación de funciones, las dos funciones tienen que estar definidas sobre ese mismo punto. Por tanto, para operar, todas las funciones tienen que ser del mismo número de variables (aunque en la fórmula no tienen por que aparecer todas).

Ejemplo, se pueden sumar las funciones:

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y) = x \\ g(x,y) = x+y \end{array}\right\} 2x+y = f(x,y)+g(x,y) = (f+g)(x,y)$$

Sin embargo, no se puede expresar como suma de funciones la siguiente suma:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x \\ g(x,y) = x+y \end{array}\right\} 2x+y = f(x)+g(x,y) = (f+g)(\,?\,)$$

Considerando los dominios, se tiene,

$$\left.\begin{array}{l} f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \begin{array}{l} f+g : D_f \cap D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \end{array}$$

Es decir, el dominio de la función suma es la *intersección* de los dominios de las funciones sumandos. Igual ocurre con la diferencia y el producto. Sin embargo, en el cociente hay que hacer una restricción adicional y eliminar aquellos puntos que anulan el denominador, ya que no está permitido dividir por cero. Así,

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{\mathbf{x} \in D_g / \, g(\mathbf{x}) = 0\}$$

Ejemplo 2.4 (Hallando el dominio de una suma de funciones). *Encontrar el dominio de la función:*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{y - x^2}} + \frac{x-1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Solución. Hallamos el dominio de cada uno de los sumandos, por separado. Y luego hallamos la intersección de los dominios obtenidos.

$$y - x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2 \Rightarrow \mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y > x^2\}$$

$$1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 < 1\}$$

La intersección de estos dominios está constituida por los puntos interiores al círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ (excluyendo su frontera) que están en el interior de la parábola de ecuación $y = x^2$ (excluyendo su frontera).

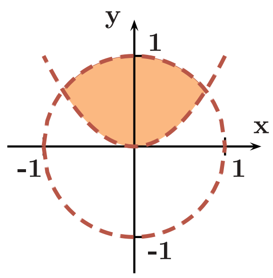


Figura 2.12: Dominio de la función $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{y - x^2}} + \dfrac{x-1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

Funciones polinómicas.

En varias variables se suele utilizar una terminología similar a la utilizada en una variable. Así, una función que se puede expresar como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$ (donde c es un número real y m y n son enteros no negativos) se conoce como *función polinómica* de dos variables. Por ejemplo, son funciones polinómicas de dos variables, las siguientes:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy + x + 2 \quad \text{y} \quad g(x,y) = 2xy^2 - y + 3$$

la primera de segundo grado y la segunda de tercero. Al cociente de dos funciones polinómicas se le llama *función racional*.

2.1.4. Composición de funciones

Composición de funciones, en general. *Componer dos funciones consiste en aplicar la segunda función al resultado de la primera.* Es decir, para «componer» dos funciones se aplica primero f a cada x en $\mathcal{D}_f$ y después se aplica g a $f(x)$, siempre que sea posible (es decir, cuando $f(x)$ pertenezca a $\mathcal{D}_g$).

Hay que advertir que, en general, la composición de funciones no es conmutativa, es decir, en la generalidad de los casos será $f \circ g \neq g \circ f$, incluso, puede suceder que esté definida la composición en un orden y no en el otro. Sin embargo, sí se cumple la propiedad asociativa $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Composición de funciones reales de *una* variable real. Componer dos funciones consiste en aplicar la segunda función al resultado de la primera. Ahora bien, desde el punto de vista analítico, este concepto puede tener una segunda lectura. Analíticamente, la composición de funciones, también significa *sustituir una función en la otra*. Es decir, si tenemos la función $y = f(x)$ que establece la dependencia entre y y x, y la función $x = g(t)$, que establece la dependencia entre x y t, podemos sustituir esta última en la primera y obtener $y = f\big(g(t)\big)$. A la función así obtenida (que envía t a y) se le llama composición de f con g y se denota por $f \circ g$. Obsérvese que el orden en que se escribe la composición $f \circ g$ es el inverso al orden en que actúan las funciones (primero g, después f). Conviene tener siempre presente esta doble visualización de la composición de funciones: como aplicación sucesiva de dos funciones, y como sustitución de la variable por una función de otra variable. En esquema sería lo siguiente:
(a) Como aplicación sucesiva de funciones:

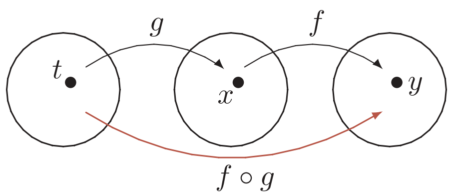


Figura 2.13: Composición de funciones

(b) Como sustitución de la variable:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(t) \end{array}\right\} y = f\big(g(t)\big)$$

Es evidente, como ya se ha dicho, que para poder componer dos funciones, en su totalidad, el *rango* de la primera ha de estar contenido en el *dominio* de la segunda $g(\mathcal{D}_g) \subseteq \mathcal{D}_f$, en caso contrario, después de aplicar g no podríamos aplicar f. Sin embargo, esta restricción no es necesaria para poder realizar, parcialmente, la composición de las funciones, sólo que, en este caso, habrá que reducir el dominio de la composición a los puntos del dominio de la primera que tienen su imagen en el dominio de la segunda.

Desde el punto de vista formal la composición, de funciones reales de una variable real, puede enunciarse de la siguiente forma: *Dadas las funciones $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tales que $g(I) \subseteq J$), se llama composición de f con g y se denota $f \circ g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a la función $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.*

$$\left.\begin{array}{c} g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ f \circ g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

En el caso de que no se cumpla la condición $g(I) \subseteq J$, la composición también es posible, siempre que $g(I) \cap J \neq \varnothing$. En tal caso habrá que restringir las funciones a aquellos puntos en los que la composición sea posible. Es decir, a los puntos del dominio de la primera que tienen su imagen en el dominio de la segunda.

Composición de funciones vectoriales. Para funciones de varias variables la situación es, en principio, algo más complicada. Téngase en cuenta que dos campos escalares $f,\ g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no se pueden componer, pues la operación de composición entre funciones solamente se puede realizar cuando el rango de una de ellas está contenido (o al menos tiene alguna conexión) en el dominio de la otra, y los campos escalares tienen rango en $\mathbb{R}$ y dominio en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, los campos escalares solamente se podrán componer con funciones de una sola variable, por la derecha; o con funciones vectoriales, por la izquierda. Es decir,

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^m \qquad \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Pensando en la composición como la sustitución de las variables (se trataría de la composición por la izquierda), para componer la función $z = f(x, y)$ tendremos que sustituir las dos variables x e y, respectivamente, por dos funciones g_1 y g_2 que las conecten con otras variables, donde g_1 y g_2 pueden ser funciones de una o varias variables (ambas de las mismas). Así, si consideramos las funciones

$$x = g_1(u, v), \quad y = g_2(u, v)$$

podemos sustituir en la función $z = f(x, y)$ y obtener la función compuesta:

$$z = f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$$

que en esquema sería:

$$z = f(x, y) \left\{\begin{array}{c} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{array}\right\} z = f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$$

Ahora bien, la pareja de funciones $x = g_1(u,v)$, $y = g_2(u,v)$ que sustituimos, también puede considerarse como las componentes de *una sola* función *vectorial* $\mathbf{g} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de tal manera que a cada punto $(u,v) \in \mathcal{D}$ la función vectorial $\mathbf{g}$ le asocia el punto $\mathbf{g}(u,v) \in \mathbb{R}^2$, cuyas coordenadas son $(x,y) = \big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)$. O sea, $\mathbf{g}(u,v) = \big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)$. Y esto permite interpretar la sustitución de las variables como la aplicación sucesiva de dos funciones: una vectorial y la otra real. En esquema sería:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto (x,y) \mapsto z \end{array}$$

de donde,

$$f \circ \mathbf{g}(u,v) = f\big(\mathbf{g}(u,v)\big) = f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)$$

Ejemplo 2.5 (Componiendo funciones). *Hallar la función compuesta de la función $f(x,y) = xy^2 + xy$ con las funciones*

$$x = g_1(u,v) = u + v \quad e \quad y = g_2(u,v) = uv$$

Solución. Si queremos interpretar la composición como la aplicación sucesiva de dos funciones, consideramos la función vectorial

$$\mathbf{g}(u,v) = \big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) = (u+v, uv)$$

y, en esquema, resulta

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y) = xy^2 + xy \\ \mathbf{g}(u,v) = (u+v, uv) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto (x,y) \mapsto z \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$h(u,v) = (f \circ \mathbf{g})(u,v) = f\big(\mathbf{g}(u,v)\big) = f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) = f(u+v, uv) =$$
$$= (u+v)(uv)^2 + (u+v)uv = u^3v^2 + u^2v^3 + u^2v + uv^2$$

Nótese que la función resultante de la composición, $h = f \circ g$, es una función distinta de f, $\mathbf{g}$, g_1 y g_2, es decir, se trata de una nueva función h, tal que $f(x,y) = h(u,v) \neq f(u,v)$

En la práctica se pueden simplificar los cálculos, sustituyendo directamente:

$$f(x,y) = f(u+v, uv) = (u+v)(uv)^2 + (u+v)uv = u^3v^2 + u^2v^3 + u^2v + uv^2 = h(u,v)$$

Ejemplo 2.6. *Hallar la función compuesta de la función*

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 - xyz$$

con las funciones $x = g_1(t) = e^t$, $y = g_2(t) = \operatorname{sen} t$ y $z = g_3(t) = t^2$

Solución. Consideramos la función vectorial

$$\mathbf{g}(t) = \big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) = (e^t, \operatorname{sen} t, t^2)$$

y, en esquema, resulta

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z) = xy^2z^3 - xyz \\ \mathbf{g}(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t^2) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ t \mapsto (x,y,z) \mapsto w \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$\begin{aligned} h(t) &= (f \circ \mathbf{g})(t) = f\big(\mathbf{g}(t)\big) = f\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) = f(e^t, \operatorname{sen} t, t^2) = \\ &= e^t \operatorname{sen}^2 t\,(t^2)^3 - e^t \operatorname{sen} t\, t^2 = t^6 e^t \operatorname{sen}^2 t - t^2 e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

En la práctica se pueden simplificar los cálculos, sustituyendo directamente: $f(x,y,z) = f(e^t, \operatorname{sen} t, t^2) = e^t \operatorname{sen}^2 t\,(t^2)^3 - e^t \operatorname{sen} t\, t^2 = t^6 e^t \operatorname{sen}^2 t - t^2 e^t \operatorname{sen} t = h(t)$

En este caso, también es posible la composición en el orden inverso. En efecto, tenemos

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z) = xy^2z^3 - xyz \\ \mathbf{g}(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t^2) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto t \mapsto w \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(x,y,z) &= (\mathbf{g} \circ f)(x,y,z) = \mathbf{g}\big(f(x,y,z)\big) = \mathbf{g}\big(xy^2z^3 - xyz\big) = \\ &= \Big(e^{xy^2z^3 - xyz}, \operatorname{sen}(xy^2z^3 - xyz), (xy^2z^3 - xyz)^2\Big) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7. *Hallar la función compuesta de la función* $f(x,y) = xy^2 - xy$ *con las funciones* $g(t) = \sqrt{t}$

Solución. Este caso es distinto de los dos anteriores, ya que aquí, para poder componer, la función f tiene que actuar primero, y después la g. En efecto, en esquema, resulta

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = xy^2 - xy \\ g(t) = \sqrt{t} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto t \mapsto z \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$h(t) = (g \circ f)(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{xy^2 - xy}$$

Nótese que la función resultante de la composición solamente estará definida para aquellos puntos (x,y) en los cuales se cumpla que $xy^2 - xy \geq 0$, es decir,

$$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; xy^2 - xy \geq 0\}$$

En la práctica, también se pueden simplificar los cálculos sustituyendo directamente, pero en este caso, sustituimos en la función g:

$$g(t) = g\big(f(x,y)\big) = \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{xy^2 - xy} = h(x,y)$$

En estos casos, la sustitución puede hacerse, indistintamente, "de fuera a dentro" o "de dentro a fuera", en efecto,

$$g(t) = g\big(f(x,y)\big) = g(xy^2 - xy) = \sqrt{xy^2 - xy} = h(x,y)$$

Ejemplo 2.8. *Componer las funciones, en el orden en que pueda hacerse:*

1. $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2 \quad y \quad g(z) = \sqrt{z}$

   Solución.

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2 \\ g(z) = \sqrt{z} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$g\big[f(x,y)\big] = h(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

2. $f(x,y,z) = (2x, x+y, x+z)$, $g(x,y,z) = (x+y, y+z)$ y $h(x,y) = x+y$

   Solución.

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y,z) = (2x, x+y, x+z) \\ g(x,y,z) = (x+y, y+z) \\ h(x,y) = x+y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

$$h\Big[g\big[f(x,y)\big]\Big] = h\big[g(2x, x+y, x+z)\big] = h(3x+y, 2x+y+z) = 5x+2y+z$$

   La función g debe interpretarse como: (1^{a} componente $+2^{\text{a}}$, $2^{\text{a}} + 3^{\text{a}}$)

Caso general. En general, interpretando la composición de funciones como sustitución de las variables, para componer la función $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tendremos que sustituir las n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, respectivamente, por las funciones $g_1, g_2, \cdots g_n$ que las conecten con otras variables $u_1, u_2, \cdots, u_m$, donde $g_1, g_2, \cdots g_n$ pueden ser funciones de una o varias variables (todas de las mismas). Así, si consideramos las n funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m) \\ x_2 &= g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m) \end{aligned}$$

podemos sustituirlas en la función $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y obtener la función compuesta:

$$z = f\Big(g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)\Big)$$

Ahora bien, las n funciones

$$x_1 = g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m),\ x_2 = g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m),\ \cdots,\ x_n = g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$

pueden considerarse como las componentes de una sola función *vectorial*

$$\mathbf{g} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

de tal manera que a cada punto $(u_1, u_2, \cdots, u_m) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ la función $\mathbf{g}$ le asocia el punto $\mathbf{g}(u_1, u_2, \cdots, u_m) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, cuyas coordenadas son

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \big(g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)\big)$$

O sea,

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \big(g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)\big)$$

que en esquema sería:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u_1, u_2, \cdots, u_m) & \mapsto & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & z \end{array}$$

De esta manera se ve el proceso de composición de funciones de varias variables como un proceso entre dos funciones, que se puede enunciar formalmente de la siguiente forma:

Definición 2.2 (Composición de funciones). *Dada la función $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto D_f de $\mathbb{R}^n$ y la función $\mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida en el conjunto D_g de $\mathbb{R}^m$, cuyo rango está contenido en D_f (es decir, $\mathbf{g}(D_g) \subseteq D_f$), entonces se puede formar la composición de ambas funciones $f \circ \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida como:*

$$(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{u}) = f\big(\mathbf{g}(\mathbf{u})\big), \quad \mathbf{u} \in D_g$$

Esquemáticamente sería.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} D_g \xrightarrow{\mathbf{g}} D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ f \circ \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \end{array}\right\} (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{u}) = f\big(\mathbf{g}(\mathbf{u})\big)$$

y mediante diagramas,

O bien, teniendo en consideración los dominios,

En el caso de que no se cumpla la condición $g(I) \subseteq J$, la composición también es posible, siempre que $g(I) \cap J \neq \varnothing$. En tal caso habrá que restringir las funciones a aquellos puntos en los que la composición sea posible. Es decir, a los puntos del dominio de la primera que tienen su imagen en el dominio de la segunda.

Igual que en una variable, en general, la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, y sí la asociativa.

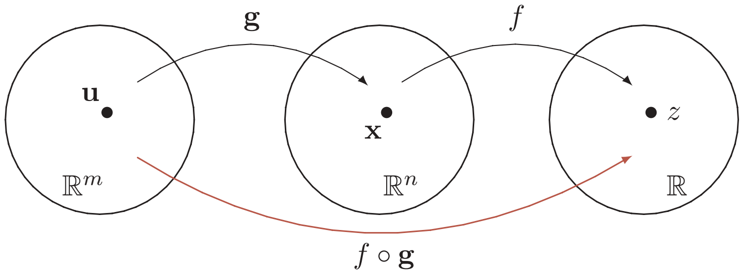


Figura 2.14: Composición de funciones

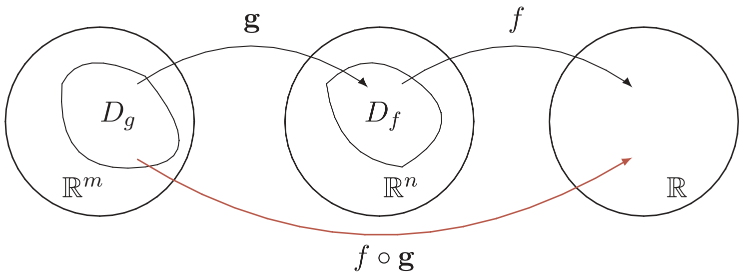


Figura 2.15: Composición de funciones

2.1.5. Gráfica de una función de dos variables

Igual que ocurre con las funciones de una variable, el dibujo de la gráfica de una función de dos variables puede resultar muy esclarecedor para el conocimiento del comportamiento de la función, ya que nos permite *visualizar*, mediante imágenes gráficas, sus propiedades abstractas, con objeto de comprenderlas y recordarlas mejor.

Funciones de *una* variable. La gráfica de una función de una variable, por lo general, es una curva en el plano.

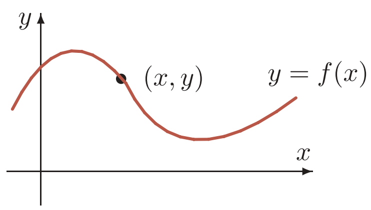


Figura 2.16: Gráfica de una función de una variable.

Un punto (x, y) del plano para estar situado en la gráfica ha de cumplir dos condiciones: en primer lugar, que su primera coordenada, x, esté en el dominio de la función, $x \in \mathcal{D}_f$; y en segundo lugar, que su segunda coordenada, y, sea la imagen, mediante la función de la primera, es decir, $y = f(x)$. En base a esto, los puntos (x, y) de la gráfica se pueden expresar de la forma $\big(x, f(x)\big)$. Es decir,

$$\text{gráf } f = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in \mathcal{D}_f,\, y = f(x) \,\}$$

o bien, de manera esquemática,

$$(x, y) \in \text{gráf } f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x, y) = \big(x, f(x)\big)$$

Funciones de *dos* variable. *La gráfica de una función de dos variables $f(x, y)$ es el conjunto de puntos del espacio (x, y, z) para los cuales se tiene que $z = f(x, y)$ y $(x, y) \in D_f$.*

$$\text{gráf } f = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y) \in D_f,\, z = f(x, y) \,\}$$

Es decir,

$$(x, y, z) \in \text{gráf } f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x, y) \in \mathcal{D}_f \\ z = f(x, y) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x, y, z) = \big(x, y, f(x, y)\big)$$

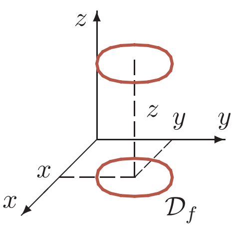


Figura 2.17:

La gráfica de una función de dos variables será una superficie en el espacio. La proyección de la gráfica sobre el plano horizontal coincide con el dominio de la función.
Los puntos de la gráfica se representan por

$$(x, y, f(x, y))$$

En consecuencia, a cada punto (x, y) del dominio $\mathcal{D}$ le corresponde un único punto (x, y, z) en la superficie y, a la inversa, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) del dominio.

Ejemplo 2.9. *Representar la función:* $f(x, y) = 2x + y - 4$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$. Para representar la función ponemos z en lugar de $f(x, y)$, para ver si se trata de una ecuación conocida, con lo que tenemos: $z = 2x + y - 4$, de donde resulta $2x + y - z = 4$ que es la ecuación de un plano en el espacio. Para tener una visualización del plano en el espacio representamos el triángulo formado por los tres puntos en los que el plano corta a los ejes de coordenadas.

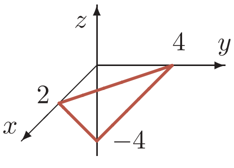


Figura 2.18:

x	y	z
2	0	0
0	4	0
0	0	-4

Para hallar las coordenadas de un punto de un plano se dan valores arbitrarios a dos de las variables y se calcula el tercer valor a partir de la ecuación del plano. En nuestro caso, se da el valor cero a dos de las variables y se calcula el valor correspondiente de la otra variable.

Observación. La ecuación del plano se generaliza al espacio de n dimensiones mediante lo que se denomina *hiperplano*. Así, tenemos las siguientes representaciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b && \text{Recta en el plano} \\ f(x,y) &= ax + by + c && \text{Plano en el espacio} \\ f(x_1,\dots,x_x) &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b && \text{Hiperplano en } \mathbb{R}^{n+1} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.10. *Representa la función:* $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Solución. El dominio de la función viene determinado por $9 - x^2 - y^2 \geq 0$

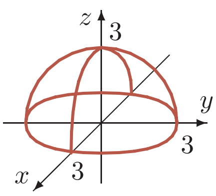


Figura 2.19:

de donde $x^2 + y^2 \leq 9$ que es el círculo con centro el origen de coordenadas y radio 3 (incluido su contorno).
Para representar la función sustituimos $f(x,y)$ por z, con lo que resulta: $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ de donde $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ o bien $x^2 + y^2 + x^2 = 9$ que es la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 3. Y al limitarnos a valores de z positivos, se reduce a la semiesfera superior.

Ejemplo 2.11. *Representa la función:* $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

Solución. El dominio de la función vendrá determinado por $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$

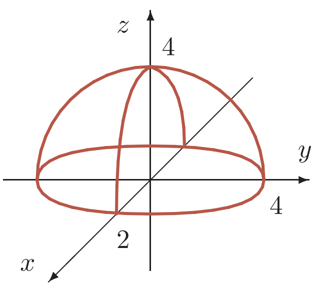
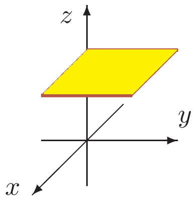


Figura 2.20:

de donde $4x^2 + y^2 \leq 16$, o lo que es lo mismo, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1$ que es la elipse con centro el origen de coordenadas y semiejes 2 y 4 respectivamente (incluido su contorno).
Para representar la función sustituimos $f(x,y)$ por z, con lo que resulta: $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ de donde $z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$ con lo cual $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$ o bien, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$ que es la ecuación del elipsoide de centro el origen de coordenadas y semiejes 2, 4 y 4 respectivamente. Y al limitarnos a valores de z positivos, se reduce al semielipsoide superior.



Para representar le función ponemos z en lugar de $f(x,y)$, con lo que tenemos: $z = 3$ que es la ecuación del plano horizontal de altura 3.

Figura 2.21: $z = 3$

Ejemplo 2.12. *Representa la función:* $f(x,y) = 3$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$.
Cortes con los planos coordenados. Para ayudarnos en la representación gráfica de las superficies, estudiaremos la curva en que la superficie corta a los planos coordenados.

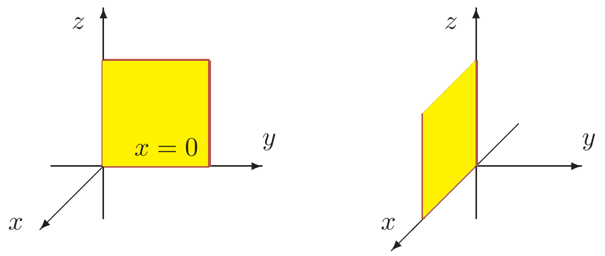


Figura 2.22: Planos coordenados $x = 0$ e $y = 0$.

Ejemplo 2.13. *Representa la función:* $f(x,y) = x^2 + y^2$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$. Para representar la función ponemos z en lugar de $f(x,y)$, con lo que tenemos: $z = x^2 + y^2$

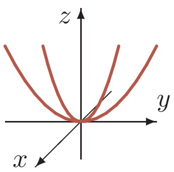


Figura 2.23:

que, en principio, no sabemos de qué superficie se trata. Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:
- corte con el plano $x = 0$ $\quad z = y^2$ que es una parábola
- corte con el plano $y = 0$ $\quad z = x^2$ que es otra parábola.

Si supiéramos los cortes que se producen en la gráfica mediante planos horizontales la tendríamos perfectamente determinada. Estos cortes son las curvas de nivel.

Curvas de nivel. *La intersección del plano horizontal, de altura* k, $z = k$ *con la superficie* $z = f(x,y)$ *se llama curva de contorno de altura* k.

$$\left.\begin{array}{c} f(x,y) = z \\ z = k \end{array}\right\} \textit{curva de contorno de altura } k$$

La proyección de esta curva de contorno sobre el plano horizontal de coordenadas OXY, *se llama curva de nivel de altura* k *de la función* f.

$$f(x,y) = k \quad \textit{curva de nivel } k$$

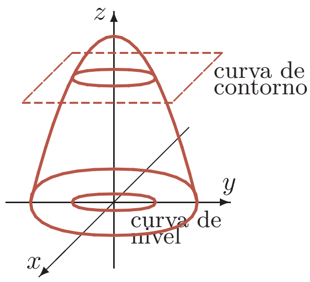


Figura 2.24: Curva de contorno y curva de nivel.

Las curvas de nivel son el conjunto de puntos del dominio donde la función es constante, es decir, los puntos donde la función toma el mismo valor, o sea, las curvas de altura constante sobre la gráfica de la función. Las curvas de nivel permiten representar superficies tridimensionales mediante un mapa plano. Es importante elegir los valores de z adecuadamente para que el mapa traslade una clara visualización de la superficie. El espaciado entre las curvas de nivel nos da una idea del crecimiento de la función. Así, mucho espacio entre dos curvas de nivel significa que la superficie crece lentamente. Dos curvas de nivel muy próximas significa que la superficie crece rápidamente. Dos curvas de nivel diferentes de un mismo campo escalar no se pueden cortar, puesto que la función f asocia un único número $z = f(x, y)$ a un punto cualquiera (x, y)

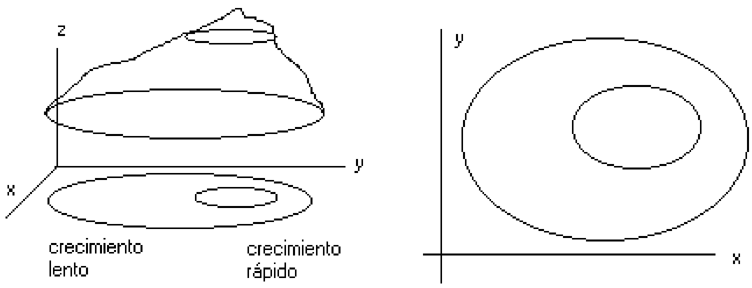


Figura 2.25: La distancia entre las curvas de nivel muestra el crecimiento de la superficie

Ejemplo:*Representar la función:* $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$. Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z, con lo que tenemos: $z = x^2 + y^2$.
Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

- corte con el plano $x = 0$ $\quad z = y^2$ que es una parábola
- corte con el plano $y = 0$ $\quad z = x^2$ que es otra parábola.

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante con lo que resulta la ecuación $x^2 + y^2 = z$, en donde, para cada valor de z tenemos una circunferencia de radio $\sqrt{z}$. Podemos dar varios valores a z para ir viendo las curvas de contorno a distintas alturas:

- nivel $z = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow$ se reduce al punto $(0, 0)$
- nivel $z = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow$ circunferencia de radio 1
- nivel $z = 4 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow$ circunferencia de radio 2
- nivel $z = 9 \longrightarrow x^2 + y^2 = 9 \longrightarrow$ circunferencia de radio 3

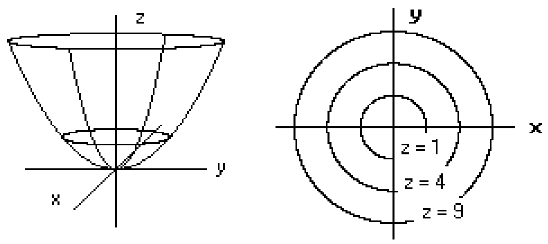


Figura 2.26: Gráfica y curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$

Ejemplo 2.14. *Representa la función:* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$. Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z, con lo que tenemos: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

- corte con el plano $x = 0$ $\quad z = \sqrt{y^2} = | y |$ que es una recta quebrada
- corte con el plano $y = 0$ $\quad z = \sqrt{x^2} = | x |$ que es otra recta quebrada.

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante con lo que resulta la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, en donde, para cada valor de z tenemos una circunferencia de radio z Damos varios valores a z para ver las curvas de contorno a distintas alturas:

- nivel $z = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow$ se reduce al punto$(0, 0)$
- nivel $z = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow$ circunferencia de radio 1
- nivel $z = 2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow$ circunferencia de radio 2
- nivel $z = 3 \longrightarrow x^2 + y^2 = 9 \longrightarrow$ circunferencia de radio 3

Las curvas de nivel son circunferencias como en el caso anterior, pero los cortes con los planos coordenados son rectas y no parábolas. La gráfica resultante es un cono.

Ejemplo 2.15. *Representa la función:* $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

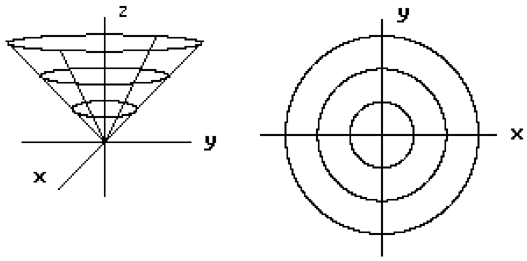


Figura 2.27: Gráfica y curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$. Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z, con lo que tenemos: $z = 25 - x^2 - y^2$.
Hallamos los cortes de la superficie con los planos coordenados:

- corte con el plano $x = 0$ $\quad z = 25 - y^2$ que es una parábola hacia abajo
- corte con el plano $y = 0$ $\quad z = 25 - x^2$ que es una parábola hacia abajo.

Para hallar las curvas de nivel suponemos z constante, con lo que resulta la ecuación $x^2 + y^2 = 25 - z$, en donde, para cada valor de $z < 25$ tenemos una circunferencia de radio $\sqrt{25 - z}$
Damos varios valores a z para ver las curvas de contorno a distintas alturas:

- nivel $z = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 = 25 \longrightarrow$ circunferencia de radio 5
- nivel $z = 9 \longrightarrow x^2 + y^2 = 16 \longrightarrow$ circunferencia de radio 4
- nivel $z = 16 \longrightarrow x^2 + y^2 = 9 \longrightarrow$ circunferencia de radio 3
- nivel $z = 21 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow$ circunferencia de radio 2
- nivel $z = 24 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \longrightarrow$ circunferencia de radio 1
- nivel $z = 25 \longrightarrow x^2 + y^2 = 0 \longrightarrow$ se reduce al punto$(0, 0)$

La gráfica sería un paraboloide invertido.

Ejemplo 2.16. *Representa la función:* $f(x, y) = y^2 - x^2$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$. Para representar la función sustituimos $f(x, y)$ por z, con lo que tenemos: $z = y^2 - x^2$.
Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:

- corte con el plano $x = 0$ $\quad z = y^2$ que es una parábola hacia arriba
- corte con el plano $y = 0$ $\quad z = -x^2$ que es una parábola hacia abajo.

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante con lo que resulta la ecuación $y^2 - x^2 = z$, en donde, para cada valor de z tenemos una hipérbola
Damos varios valores a z para ver las curvas de contorno a distintas alturas:

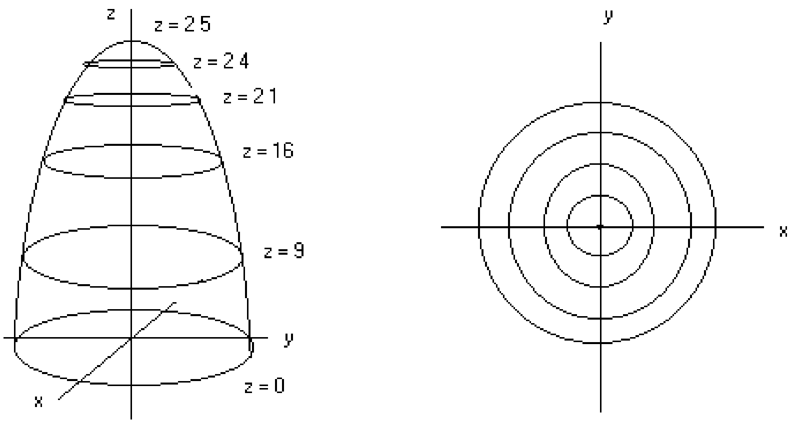


Figura 2.28: Gráfica y curvas de nivel de la función: $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$

para valores positivos de z

- nivel $z = 0 \longrightarrow y^2 = x^2 \longrightarrow \{y = x \ o \ y = -x\}$ dos rectas
- nivel $z = 1 \longrightarrow y^2 - x^2 = 1 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OY
- nivel $z = 4 \longrightarrow y^2 - x^2 = 4 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OY

para valores negativos de z

- nivel $z = -1 \longrightarrow x^2 - y^2 = 1 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OX
- nivel $z = -2 \longrightarrow x^2 - y^2 = 4 \longrightarrow$ hipérbola centrada en eje OX

La gráfica es la *silla de montar*

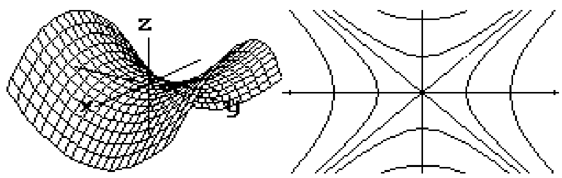


Figura 2.29: Gráfica y curvas de nivel de la función $f(x,y) = y^2 - x^2$

Resumen de algunas gráficas

$f(x,y) = k$ plano horizontal de altura k
$f(x,y) = ax + by + c$ plano
$f(x,y) = x^2 + y^2$ paraboloide
$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ cono
$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ semiesfera superior
$f(x,y) = \sqrt{r^2 - ax^2 - by^2}$ elipsoide superior
$f(x,y) = y^2 - x^2$ silla de montar.

Funciones de *tres o más* variable. La gráfica de funciones de tres o más variables se define de forma análoga al caso de una y dos variables. Así, en general, la gráfica de una función de n variables $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se define como el conjunto

$$\text{gráf}\, f = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \mathcal{R}^{n+1} \,/\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f,\ y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \}$$

Ahora bien, podemos visualizar la gráfica de una función de una y de dos variables, sin embargo, para $n \geq 3$ la gráfica de la función ya no puede ser visualizada, pues se encuentra en el espacio $(n+1)$-dimensional (≥ 4-dimensional)

Superficies de nivel. El concepto de curva de nivel, definido para funciones de dos variables, se puede extender a funciones de tres variables y definir las *superficies de nivel. Si f es una función de tres variables y c es una constante, entonces a la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ se le llama superficie de nivel de la función f*. En cada punto de una superficie de nivel dada, la función f toma un valor constante, $f(x, y, z) = c$. Este concepto se puede generalizar a cualquier dimensión, aunque, para $n \geq 3$ no tenga un significado gráfico.

Ejemplo 2.17. *Describir las superficies de nivel de la función*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Solución. Cada superficie de nivel satisface una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

Luego las superficies de nivel son esferas de centro el origen de coordenadas y radio la raíz cuadrada de c. Si damos varios valores a c obtendremos varias esferas concéntricas.

2.1.6. Otras representaciones de las funciones de varias variables

En Matemáticas a los conceptos teóricos se les buscan *representaciones* que nos permitan *visualizar*, mediante imágenes gráficas, sus propiedades abstractas, con objeto de comprenderlas y recordarlas mejor. Así, para tener una visualización gráfica de las propiedades de las funciones, hemos imaginado que las funciones de una variable representan curvas en el plano y las de dos variables superficies en el espacio. Sin embargo, este sistema no nos permite visualizar las funciones de tres o más variables y tenemos que conformarnos con imaginar una generalización de los conceptos aprehendidos en dos o tres dimensiones.

En realidad una función no es ni una curva ni una superficie, sino una correspondencia entre magnitudes, y según sea el significado físico que le demos a esas magnitudes (espacio, tiempo, temperatura, etc.) la función tendrá un significado físico u otro. Por eso, aunque la representación gráfica haya pasado a formar parte integrante del contenido teórico de las funciones, no debemos olvidar que es simplemente un *instrumento* de ayuda, y, por lo tanto, no nos debemos sentir atrapados por ese instrumento. Para comprender algunos conceptos, como por ejemplo las curvas de nivel, son también apropiadas otras representaciones de las funciones distintas de la representación gráfica.

Así, las funciones de dos variables se pueden interpretar como la temperatura en cada punto de una placa horizontal, siendo esta placa el dominio de la función. Las de tres variables se pueden interpretar como la temperatura en cada punto de una región del espacio. Las curvas de nivel serían las curvas de igual temperatura, es decir, las *isotermas*. En el caso de tres variables las superficies de nivel serían las superficies de igual temperatura (*superficies isotermas*).

A las funciones de varias variables también se les puede dar otras interpretaciones, por ejemplo, en un mapa del tiempo las curvas de nivel de igual presión se llaman *isobaras*. En las representaciones de los campos de potencial electrico, las curvas de nivel se llaman *líneas equipotenciales*.

2.2. Límite y continuidad

2.2.1. Introducción

La gráfica de una función de una variable es una curva en el plano.

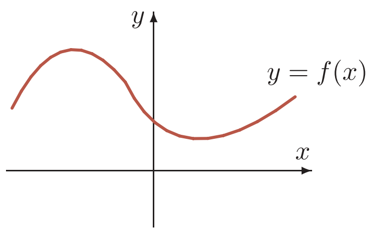


Figura 2.30: Gráfica de una función de una variable.

Esta curva puede presentar las siguientes situaciones de discontinuidad.

En dos variables pueden darse situaciones de discontinuidad de todo tipo.

2.2.2. Entorno de un punto en el plano

De manera análoga a como se definen los entornos en la recta real mediante intervalos, se definen los entornos en el plano mediante *discos*. Así, un δ-entorno alrededor de (x_0, y_0) va a ser un disco centrado en (x_0, y_0) con radio δ. Es decir, se define el δ-entorno alrededor de (x_0, y_0) como el conjunto de puntos (x, y) del plano que distan de (x_0, y_0) menos que δ.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

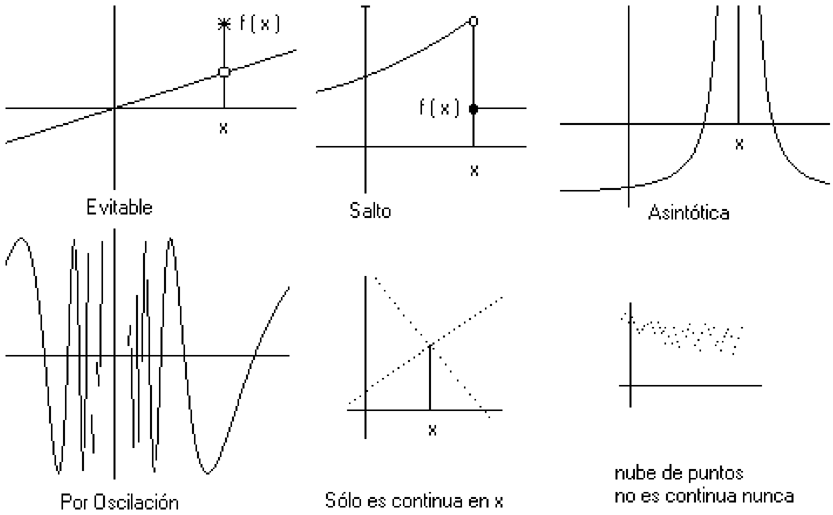


Figura 2.31: Situaciones de discontinuidad en funciones de una variable

que también se puede expresar sin la raíz cuadrada de la siguiente forma:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$$

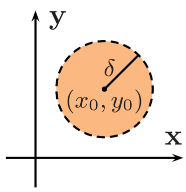


Figura 2.32: Entorno de un punto

Cuando en la definición ponemos el signo $<$ se dice que el disco es abierto y cuando ponemos el signo $\leq$ decimos que el disco es cerrado. En el primer caso no está incluido el contorno y en el segundo sí.

Regiones abiertas y regiones cerradas

Un punto (x_0, y_0) de una región R del plano se dice que es un *punto interior* de R si existe un δ-entorno alrededor de (x_0, y_0) que pertenece totalmente a R. Si todos los puntos de una región R son interiores entonces decimos que R es una *región abierta.*

Un punto (x_0, y_0) se dice que es un *punto frontera* de R si cada disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos del interior de R y puntos del exterior de R. Por definición, una región debe contener todos sus puntos interiores, pero no tiene por qué contener a sus puntos fronteras. Si una región contiene todos sus puntos fronteras, entonces se dice que es una región *cerrada*. Una región que contiene a algunos pero no a todos sus puntos fronteras no es ni abierta ni cerrada.

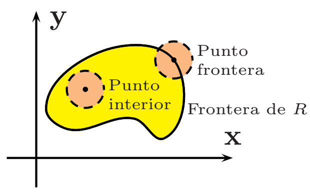


Figura 2.33: Punto interior y punto frontera

2.2.3. Límite y continuidad en dos variables

Al calcular el límite de una función en un punto nos interesamos por los valores que toma la función en los alrededores del punto. El límite de la función en un punto va a ser el valor que *debería* tomar la función en dicho punto, de acuerdo con los valores que toma en los alrededores del mismo. Este valor puede coincidir o no con el valor que realmente toma la función en el punto en cuestión. Es decir, *el límite de una función en un punto P es ℓ si los valores que toma la función en los alrededores de P están tan cerca de ℓ como queramos* (el valor que la función tome en P no interesa a la hora de calcular el límite)

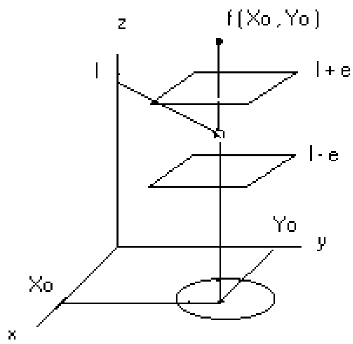


Figura 2.34: Límite de una función de dos variables.

Para poder hablar de límite de una función en un punto, la función tiene que estar definida en los alrededores del punto. Formalmente la definición de límite es la siguiente:

Definición 2.3 (Límite de una función en un punto). *Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto quizás en el punto (x_0, y_0). Entonces,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

Que podemos esquematizar de la siguiente forma

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ 0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2 \Rightarrow | f(x,y) - \ell | < \epsilon \end{array}}$$

Gráficamente, esta definición de límite significa que para un punto cualquiera (x, y) situado en el disco de radio δ, el valor $f(x, y)$ está comprendido entre $\ell - \varepsilon$ y $\ell + \varepsilon$.

Hay que tener en cuenta que para que exista el límite *todos* los puntos del entorno tiene que tener su imagen aproximadamente a la misma altura (entre $\ell - \varepsilon$ y $\ell + \varepsilon$). Si unos puntos del entorno se aproximan a un valor y otros a otros, entonces el límite no existe.

En la definición de límite, el punto en cuestión no cuenta. Es decir, da igual cuál sea el valor de $f(x_0, y_0)$, incluso da igual que no exista dicho valor. Al poner $0 <$ nos estamos ocupando de todos los puntos del δ-entorno, salvo del centro. No obstante, hay que advertir que en el cálculo de límites de funciones *continuas* dicho valor sí que adquiere gran importancia.

Definición 2.4 (Continuidad). *Una función se dice que es continua en un punto, si el valor que toma la función en el punto coincide con el límite en dicho punto.*

$$f(x,y) \text{ continua en } (x_0,y_0) \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Una función se dice que es continua en una región R si es continua en cada punto de R

Ejemplo 2.18. *Dada la función* $f(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & si \quad x^2+y^2 > 1 \end{cases}$ *hallar gráficamente:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \qquad y \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$$

Solución. Para hallar el límite de la función en cada uno de los puntos especificados, hallamos las imágenes de los puntos de un entorno de cada uno de los puntos.

En un entorno del punto $(0,0)$ todos los puntos tienen como imagen $f(x,y)=1$, luego el límite en dicho punto también es 1.

En un entorno del punto $(1,0)$ una parte de los puntos tienen como imagen $f(x,y)=1$, y otra parte de los puntos tiene como imagen $f(x,y)=0$, luego el límite en dicho punto no existe, ya que *todos* los puntos del entorno deberían orientar su imagen hacia el mismo sitio.

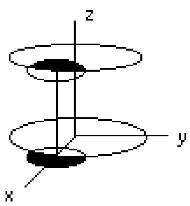


Figura 2.35: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ no definido

2.2.4. Límite de las funciones elementales

De forma análoga a una variable, en varias variables se cumplen las siguientes propiedades:

Teorema 2.1 (Propiedades de las funciones continuas). *Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0,y_0), entonces las funciones siguientes también son continuas en (x_0,y_0):*

1. *Múltiplo escalar: kf*
2. *Suma y diferencia: $f\pm g$*
3. *Producto: fg*
4. *Cociente: f/g, si $g(x_0,y_0)\neq 0$*

Del teorema 2.1 se desprende la continuidad de las funciones *polinómicas* y *racionales* en cada punto de sus dominios.

Teorema 2.2 (Continuidad de una función compuesta). *Si h es continua en (x_0,y_0) y g es continua en $h(x_0,y_0)$, entonces la función compuesta dada por $(g\circ h)(x_0,y_0)=g[h(x,y)]$ es continua en (x_0,y_0). Es decir,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g[h(x,y)] = g[h(x_0,y_0)]$$

Nota. Obsérvese que, en el teorema 2.2, h es una función de dos variables, mientras que g es una función de una sola variable.

De los teoremas 2.1 y 2.2 se desprende la continuidad las funciones

$$f(x,y)=\operatorname{sen} x^2y \quad y \quad g(x,y)=e^{x^2+y^2}$$

y, en general, de todas las funciones elementales en todos los puntos en los que están definidas.

Es decir, todas las funciones elementales son continuas en todos los puntos en los que están definidas, luego para calcular el límite de una función elemental en un punto (x_0, y_0) en el que esté definida bastará sustituir x e y por x_0 e y_0, respectivamente. El problema estará en los puntos en los que la función no esté definida. Por lo tanto, al calcular un límite lo primero que intentaremos es la sustitución directa, y sólo en el caso de que nos encontremos con una indeterminación intentaremos romperla por algún método. En dos variables no tienen sentido las reglas de L´Hopital

Ejemplo 2.19 (Calculando límites por sustitución directa). *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} xy = 6$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{-6}{4+9} = \frac{-6}{13}$

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{y}}{1+xy} = \frac{\operatorname{arc\,sen} 0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$

4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/4,2)} y \operatorname{sen} xy = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} 2 = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2$

Ejemplo 2.20 (Hallando la discontinuidad). *Hallar los puntos de discontinuidad de la función:*

$$f(x,y) = \frac{xy+1}{x^2-y}$$

Solución. Al tratarse de una función racional será continua en todos los puntos en los que está definida. Es decir, la continuidad coincide con el dominio de la función. En consecuencia, al ser un cociente, será discontinua en aquellos puntos que hacen cero el denominador. $x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2$ luego, la función es discontinua a lo largo de la parábola $y = x^2$

Ejemplo 2.21. *Hállense los puntos de discontinuidad de la función:*

$$f(x,y) = \cos \frac{1}{xy}$$

Solución. El único problema que presenta la función es en el cociente, donde el denominador debe ser distinto de 0. Teniendo en cuenta que $xy = 0$ cuando $x = 0$ (eje OY) o cuando $y = 0$ (eje OX). La función será discontinua en los dos ejes de coordenadas.

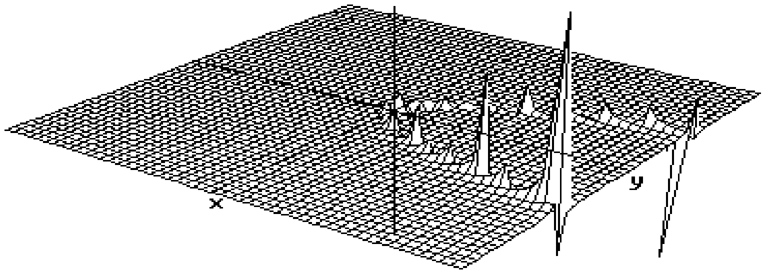


Figura 2.36: $f(x,y) = \frac{xy+1}{x^2-y}$

Ejemplo 2.22 (Extendiendo una función por continuidad). *Calcular el valor de c para que la siguiente función sea continua en todo el plano*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-4y^2} & si\ x^2+4y^2 \leq 1 \\ c & si\ x^2+4y^2 > 1 \end{cases}$$

Solución. La gráfica de la función $\sqrt{1-x^2-4y^2}$ es una especie de semielipsoide superior, con contorno sobre la elipse $x^2+4y^2=1$. En el contorno toma el valor 0, en efecto, $\sqrt{1-x^2-4y^2} = \sqrt{1-(x^2+4y^2)}$ que vale 0 para $x^2+4y^2=1$. Fuera del contorno ha de ser constante $(=c)$. Luego, para que se mantenga continua sobre el contorno, fuera del contorno ha de valer cero, por lo tanto $c=0$.

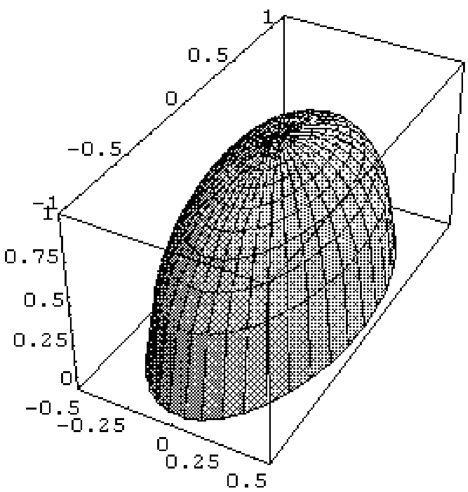


Figura 2.37: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-4y^2}$

Ejemplo 2.23 (Límite infinito). *Calcula los siguientes límites:*

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[1 - \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right] = 1 - \frac{1}{0^+} = 1 - \infty = -\infty$

2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(x^2+y^2) = \ln 0^+ = -\infty$

2.2.5. Comprobando límites aplicando la definición

Mediante la definición de límite se puede comprobar si un límite dado es correcto o no, pero no se pueden calcular límites. La comprobación suele ser complicada y artificial. (Tenemos que imaginar que *alguien* nos va a dar el valor de ε y nosotros tenemos que encontrar el correspondiente valor de δ que hace que sea cierta la implicación. En general, nuestro δ dependerá del ε que nos den: $\delta = \delta(\varepsilon)$).

En cada caso necesitaremos probar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un δ-entorno alrededor de (x_0, y_0) tal que

$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

siempre que $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ esté en el entorno. Es decir, necesitamos probar que cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe, para ese ε, un $\delta > 0$ que hace cierta la implicación:

$$0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2 \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

Sin embargo, en la generalidad de los casos, no es posible la demostración lineal de esta implicación. Es decir, en la generalidad de los casos, no nos va a ser posible partir directamente del primer término de la implicación para llegar al segundo; sino que vamos a necesitar un razonamiento de "ida y vuelta". Es decir, partiremos del segundo término y desde ahí veremos qué valor debe tomar δ, para que del primer término de la implicación se siga el segundo. El valor de δ lo determinaremos expresando $|f(x,y) - \ell|$ en función de δ, relacionándolo, para ello, con $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$. Es decir, obtendremos $|f(x,y) - \ell| < g(\delta)$ de manera que, para el valor de δ que se obtiene de $g(\delta) = \varepsilon$, resulta que de

$$0 < (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2$$

se sigue que

$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

Nota: La dificultad para entender la comprobación de la implicación,

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - \ell| < \varepsilon$$

está, como ya se ha dicho, en que, en la generalidad de los casos, no es posible la demostración lineal de la implicación. Así como, en el hecho de que el valor de δ no está dado, desde un principio, sino que lo debemos encontrar durante el proceso. En consecuencia, el tipo de razonamiento que se hace es el siguiente: Intentamos demostrar que $|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$ ¿bajo qué condiciones se cumple esto? En un momento de la demostración necesitamos utilizar que $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$. Esa necesidad es lo que hace que sea cierta la implicación.

Por otro lado, hay que decir que la única restricción que tenemos que poner a $\delta = \delta(\varepsilon)$ para poder concluir que $|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$ es que δ sea positivo cuando ε también lo sean (δ y ε son distancias).

El hecho de tratarse de desigualdades es lo que complica la demostración, aunque al mismo tiempo la enriquece.

Ejemplo 2.24 (Comprobando un límite mediante la definición). *Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

Solución. Necesitamos probar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un δ-entorno alrededor de $(0, 0)$ tal que

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

siempre que $(x, y) \neq (0, 0)$ esté en el entorno. Es decir, necesitamos encontrar un valor de δ, tal que de

$$0 < \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < \delta$$

se siga que

$$|f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

Es decir, tenemos que demostrar la siguiente implicación.

$$x^2 + y^2 < \delta^2 \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y)| < \varepsilon$$

Para ello, tenemos que encontrar un valor positivo para δ tal que cuando $x^2 + y^2 < \delta^2$, se tenga que $|f(x, y)| < \varepsilon$ (el valor de δ dependerá del que tenga ε).

El proceso es el siguiente: partimos de la expresión $|f(x, y)|$, la relacionamos con $x^2 + y^2$, con objeto de expresarla en función de δ y vemos cuánto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε; teniendo en cuenta que al estar en un entorno del origen es $x^2 + y^2 < \delta^2$, o bien $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$|f(x,y)| = |\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}| \leq |\sqrt{x^2+y^2}| = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} < \overbrace{\delta = \varepsilon}^{\text{Para poder concluir que } |f(x,y)|<\varepsilon, \text{ ha de ser } \delta=\varepsilon}}_{\text{Por estar } (x,y) \text{ en el entorno de } (0,0)}$$

luego hemos encontrado un valor para δ, el propio ε, que es positivo cuando ε también lo es, y con el que se concluye que $|f(x,y)| < \varepsilon$, cuando $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$. En consecuencia el límite es correcto.

Nota: Para conseguir relacionar la expresión $|f(x,y)|$, con x^2+y^2 y obtener una desigualdad del tipo

$$|f(x,y)| \leq g(x^2+y^2)$$

utilizamos las acotaciones que sean necesarias. En este ejemplo se ha utilizado el hecho de que $|\,\mathrm{sen}\,\alpha| \leq 1$

Observación. La función f, del ejemplo anterior, definida por

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}$$

es discontinua en $(0,0)$, ya que no está definida en dicho punto. Sin embargo, el límite es ese punto existe. En consecuencia podemos evitar la discontinuidad redefiniendo la función f en $(0,0)$, de manera que su valor sea igual a su límite en ese punto. Es decir,

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En consecuencia a este tipo de discontinuidades se les conoce como *evitables.*

Ejemplo 2.25. *Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{xy} = 0$$

Solución. Igual que antes, tenemos que demostrar la siguiente implicación.

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 < \delta^2 \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

Es decir, tenemos que encontrar un valor positivo para δ tal que cuando $x^2+y^2 < \delta^2$, se tenga que $|f(x,y)| < \varepsilon$. Para ello partimos de la expresión $|f(x,y)|$, la relacionamos con x^2+y^2, con objeto de expresarla en función de δ y vemos cuanto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε; teniendo en cuenta que al estar en un entorno del origen será $x^2+y^2 < \delta^2$, o bien $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$$|f(x,y)| = |(x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{xy}| \leq |x^2+y^2| = \underbrace{x^2+y^2 < \delta^2}_{\text{Por estar } (x,y) \text{ en el entorno de } (0,0)} = \varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, que es positivo cuando ε los es, y con el que se concluye que $|f(x,y)| < \varepsilon$, cuando $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$. En consecuencia el límite es correcto.

Ejemplo 2.26. *Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

Solución. Necesitamos probar que, para cada $\varepsilon > 0$, existe un δ-entorno alrededor de (a,b) tal que

$$|f(x,y) - b| < \varepsilon$$

siempre que $(x,y) \neq (a,b)$ esté en el entorno. Es decir, necesitamos encontrar un valor de δ, tal que de

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

se siga que

$$|f(x,y) - b| < \varepsilon$$

Para ello partimos de la expresión $|f(x,y) - b|$ y tratamos de relacionarla con $(x-a)^2 + (y-b)^2$, con objeto de expresarla en función de δ y vemos cuanto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε

$$|f(x,y) - b| = |y-b| = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ, $\delta = \varepsilon$, que hace cierta la relación; y en consecuencia el límite es correcto. (En la demostración hemos tenido en cuenta que: $\mid y - b \mid = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Este tipo de recursos son muy usuales en las comprobaciones de límites).

Acotaciones usuales en el cálculo de límites: En el cálculo de límites, además de las acotaciones $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$, se utilizan las siguientes:

$$0 \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \boxed{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1} \Rightarrow \boxed{-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1}$$

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1}$$

Ejemplo 2.27. *Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Solución. Igual que antes, tenemos que demostrar la siguiente implicación.

$$(x-0)^2+(y-0)^2<\delta^2 \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y)-0|<\varepsilon$$

Es decir, tenemos que encontrar un valor para δ tal que cuando $x^2+y^2<\delta^2$, se tenga que $|f(x,y)|<\varepsilon$. Para ello partimos de la expresión $|f(x,y)|$, la relacionamos con x^2+y^2, con objeto de expresarla en función de δ y vemos cuanto tiene que valer δ para que esa expresión sea menor que ε; teniendo en cuenta que al estar en un entorno del origen será $x^2+y^2<\delta^2$, o bien $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right| = 5|y| \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 5|y| \leq 5\sqrt{x^2+y^2}<5\delta=\varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ, $\delta=\varepsilon/5$
(En la demostración hemos utilizado la acotación $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1$, y por otro lado hemos tenido en cuenta que: $|y|=\sqrt{y^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}$).

Ejemplo 2.28. *Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

Solución.

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = |x|\cdot\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ, $\delta=\varepsilon$

Ejemplo 2.29. *Comprobar aplicando la definición que el siguiente límite es correcto.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^4+y^4}=0$$

Solución.

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^4y}{x^4+y^4}\right| = \left|\frac{x^4}{x^4+y^4}\right||y| \leq |y| \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

luego hemos encontrado un valor para δ, $\delta=\varepsilon$

2.2.6. Cálculo de límites mediante operaciones algebraicas

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto de las operaciones (suma, diferencia, producto, cociente, potencia, etc.) que las funciones de una sola variable. No obstante hay que advertir que con las funciones de varias variables no se pueden aplicar las Reglas de L´Höpital.

Ejemplo 2.30. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \dfrac{6x-2y}{9x^2-y^2}$ 2. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\dfrac{x^2-1}{x-1}+\dfrac{y-1}{y^2-1}\right]$

3. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x^3-1)(y^4-1)}{(x-1)(y^2-1)}$ 4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

5. $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \left(1+x^2y\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Solución.

1. $$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{6x-2y}{9x^2-y^2} = [\frac{0}{0}] = \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{2(3x-y)}{(3x)^2-y^2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{2(3x-y)}{(3x+y)(3x-y)} = \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{2}{(3x+y)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{y-1}{y^2-1}\right] = [\frac{0}{0}+\frac{0}{0}] =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}+\frac{y-1}{(y+1)(y-1)}\right] = [\frac{0}{0}+\frac{0}{0}] =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[x+1+\frac{1}{y+1}\right] = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^3-1)(y^4-1)}{(x-1)(y^2-1)} = [\frac{0}{0}] =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(y^2+1)(y^2-1)}{(x-1)(y^2-1)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+x+1)(y^2+1) = 3\cdot 2 = 6$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = [\frac{0}{0}] =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \left(1+x^2y\right)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = \lim_{(x,y)\to(0,3)} \left[(1+x^2y)^{\frac{1}{x^2y}}\right]^{\frac{x^2y}{x^2}} = e^3$$

Aquí se ha tenido en cuenta la definición del número e,
$$\lim_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

2.2.7. Teorema del encaje y de la acotación

Si una función está comprendida, en los alrededores de un punto, entre dos que tienen el mismo límite, en dicho punto, entonces dicha función también tiene el mismo límite en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Si una función tiene límite cero, en un punto, y otra está acotada en los alrededores del punto, entonces su producto también tiene límite cero en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{c} g(x)\text{acotada} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -k \le g(x) \le k \Rightarrow -kf(x) \le f(x)g(x) \le kf(x) \Rightarrow$$

$$0 \le \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

Nota: Si $f(x) < 0$, cambiaría el sentido de la desigualdad, pero el resultado final sería el mismo.

Ejemplo 2.31 (Calculando límites por acotación). *Calcula los siguientes límites.*

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{xy}$ 2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

3. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x\operatorname{sen}\frac{1}{y} + y\operatorname{sen}\frac{1}{x})$ 4. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2}$

Solución.

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{xy} = 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x\operatorname{sen}\frac{1}{y} + y\operatorname{sen}\frac{1}{x}) = 0 \cdot \text{Acot} + 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,-2)} (x-1)y\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+2)^2} = 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

   Este límite también puede hacerse mediante el cambio de variables $u = x-1$, $v = y+2$, en efecto,

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{y(x-1)^3}{(x-1)^2+(y+2)^2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{(v-2)u^3}{u^2+v^2} =$$
$$= \lim_{(u,v)\to(0,0)} (v-2)u\frac{u^2}{u^2+v^2} = (-2) \cdot 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

2.2.8. Infinitésimos equivalentes.

Igual que en una variable, los infinitésimos se aplican en los límites de funciones de varias variables.

Definición 2.5 (Infinitésimo en un punto). *Se llama infinitésimo en un punto X_0 a una función cuyo límite en dicho punto sea cero.*

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = 0$$

Definición 2.6 (Infinitésimos equivalentes). *Dos infinitésimos en un mismo punto se dice que son equivalentes, cuando el límite de su cociente es* 1.

$$\lim_{X \to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(X) \approx g(X) \qquad (en\ X = X_0)$$

Sustitución de infinitésimos. Si un infinitésimo está multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente para simplificar los cálculos. Supongamos que $f(X) \approx g(X)$, entonces será $\displaystyle\lim_{X \to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = 1$. Y supongamos que $f(X)$ aparece multiplicando dentro de un límite.

$$\lim_{X \to X_0} f(X) \cdot h(X) = \lim_{X \to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} g(X) h(X) = \lim_{X \to X_0} g(X) \cdot h(X)$$

Con lo cual hemos sustituido $f(X)$ por $g(X)$ y el límite puede resultar más fácil.

Sumas de infinitésimos. Cuando un infinitésimo está sumando o restando, en general, no se puede sustituir por otro equivalente.

$$\lim_{X \to X_0} \big[f(X) + h(X)\big] \quad \neq \quad \lim_{X \to X_0} \big[g(X) + h(X)\big]$$

No obstante, existen casos muy concretos en los que se pueden aplicar infinitésimos al caso de sumas. Sin embargo, hay que advertir que en varias variables esta sustitución es mucho más restrictiva que en una variable. En una variable dijimos que *la suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menor orden.* Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 3x^3 - 5x^4) f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2) f(x)}{g(x)}$$

Sin embargo, en varias variables esto no es cierto de manera general. En una variable la regla se basa en el hecho de que al aplicar las reglas de L´Hôpital el primer término que dejará de ser cero es el de menor grado, y, en consecuencia, se puede establecer la equivalencia. Sin embargo, en dos variables no son aplicables las reglas de L´Hôpital. En consecuencia, resulta que no podemos hacer el cambio

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x - y^2) f(x,y)}{g(x,y)} \neq \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x) f(x,y)}{g(x,y)}$$

puesto que si hacemos límites direccionales a través de la curva $x = y^3$, el término que, en principio, es de menor grado, se transforma en un término de mayor grado.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y^2)f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^3}} \frac{(y^3-y^2)f(x,y)}{g(x,y)} \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x)f(x,y)}{g(x,y)}$$

En consecuencia, en varias variables la suma de infinitésimos solamente se puede reducir al de menor grado cuando los infinitésimos sean homogéneos. Es decir, que contengan las mismas variables. Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+3x^3-5x^4)f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)f(x)}{g(x)}$$

o bien,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2+3y^3-5y^4)f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2)f(x,y)}{g(x,y)}$$

e incluso,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left[(x^2y)^2+3(x^2y)^3-5(x^2y)^4\right]f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left[(x^2y)^2\right]f(x,y)}{g(x,y)}$$

Sin embargo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2y+x^3y^2+x^6)f(x,y)}{g(x,y)} \neq \lim_{x\to 0} \frac{(x^2y)f(x,y)}{g(x,y)}$$

Evidentemente la suma que se sustituye no puede ser una suma parcial, sino que la suma que se sustituye ha de ser total, es decir, considerada como una unidad, ha de estar multiplicando o dividiendo.

Algunos infinitésimos en el Origen ($z \to 0$).
Los infinitésimos más usuales, en el origen son:
Trigonométricos:

$$\operatorname{sen} z \approx z \qquad \operatorname{arc\,sen} z \approx z$$

$$\operatorname{tg} z \approx z \qquad \arctan z \approx z$$

$$1-\cos z \approx \frac{z^2}{2}$$

Logarítmicos:

$$\ln(1+z) \approx z \Rightarrow \begin{cases} z \approx \ln(1+z) \\ e^z - 1 \approx z \\ a^z - 1 \approx z \ln a \\ (1+z)^n \approx 1+nz \\ \sqrt[n]{1+z} \approx 1+\frac{z}{n} \end{cases}$$

La z puede ser cualquier función. Lo importante es que toda la función tienda a cero, aunque (x, y) tienda a un valor distinto de $(0, 0)$. Así, por ejemplo,

$$\text{si} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\operatorname{sen}\big(f(x,y)\big)g(x,y)}{h(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)g(x,y)}{h(x,y)}$$

Ejemplo 2.32 (Calculando límites mediante infinitésimos). *Calcula los siguientes límites.*

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} y = 2$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\operatorname{tg}(x^2y)}-1}{2\operatorname{sen}(x^2y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^2y)}{2x^2y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^2y} = \frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1-\cos(x^2-y)}{(x-\sqrt{y})^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^2-y)^2}{2(x-\sqrt{y})^2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^2-y)^2(x+\sqrt{y})^2}{2(x^2-y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+\sqrt{y})^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\operatorname{sen} x \ln(1+y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(3y)}{2xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x3y}{2xy} = \frac{3}{2}$$

6. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y^2+2y-3)(1-\cos x)}{x^2(y-1)} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)(y+3)x^2/2}{x^2(y-1)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

7. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-\cos 2x)(\cos 3y-1)}{5x^2y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{4x^2}{2}(-\frac{9y^2}{2})}{5x^2y} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-9y}{5} = 0$$

8. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x-1)(e^{2y}-1)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x2y}{xy} = 2$$

Ejemplo 2.33. *Calcular el siguiente límite:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\ln x \ \operatorname{tg}(y-1)}{xy-x-y+1}$

Solución. Aplicando infinitésimos en el numerador,

$$\ln x = \ln(1 + x - 1) \sim x - 1\ , \quad \operatorname{tg}(y - 1) \sim y - 1$$

y agrupando términos en el denominador, resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\ln x \ \operatorname{tg}(y-1)}{xy - x - y + 1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{x(y-1) - (y-1)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)} = 1$$

2.2.9. Inexistencia de límites

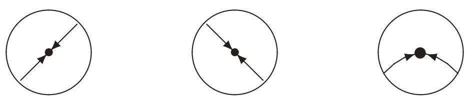
Cuando no sepamos calcular un límite, intentaremos demostrar que dicho límite no existe. Esto lo podemos hacer por dos métodos:

-Mediante los límites direccionales.
-Mediante los límites reiterados.

Límites direccionales

Aunque la definición de límite de funciones de dos variables va en total paralelismo con la definición de límite de funciones de una sola variable, existe una diferencia fundamental a la hora de determinar la existencia de un límite. En una variable, la existencia del límite, es equivalente a la coincidencia de los límites laterales. Es decir, para determinar si una función de una variable tiene límite en un punto determinado, solamente necesitamos comprobar qué ocurre al aproximarnos por dos direcciones –por la izquierda y por la derecha–. Si la función tiene el mismo límite por la izquierda y por la derecha podemos concluir que el límite existe. Si embargo, en dos variables esto no es así.

$$\longrightarrow\!\longleftarrow$$



En dos variables, en principio, no tiene sentido hablar de límites laterales ¿qué significan derecha e izquierda en el plano?, por eso hablamos de *límites direccionales*, ya que, en dos variables existen infinitos caminos para acercarnos al punto, es más, podemos acercarnos siguiendo un camino recto o un camino curvo. Es decir, al escribir

$$(x, y) \to (x_0, y_0)$$

entendemos que el punto (x, y) se aproxima al punto (x_0, y_0) en cualquier dirección. Y, para que exista el límite, los límites siguiendo todas las direcciones o trayectorias tienen que coincidir. La exigencia de la definición a todos los puntos del entorno significa todas las posibles formas de aproximarse. En consecuencia, para ver que una función no tiene límite en un punto se siguen varios caminos de aproximación al punto y si la función tiene un límite distinto por cada camino, entonces el límite «doble» no existe. El problema será determinar si existe un camino que conduce a otra parte. En la práctica los caminos que se suelen seguir son rectas y parábolas. (El camino por rectas se sigue cuando las potencias del denominador son del mismo grado, y el camino por parábolas cuando son de distinto grado, intentando igualar los grados). No debe olvidarse que la recta ha de pasar por el punto en cuestión, es decir su ecuación ha de ser $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Hay que advertir que este método sólo es refutativo, es decir, nos permite negar la existencia del límite pero no afirmarla. Así, si encontramos dos límites direccionales diferentes, entonces podemos afirmar que el límite «doble» no existe. Pero si todos los límites direccionales que tomamos nos dan el mismo límite, no por eso podemos afirmar la existencia del límite. Lo más que podemos decir es que, de existir el límite doble, su valor será el de los direccionales, pero nadie asegura que siguiendo otra dirección, diferente a las tomadas hasta ese momento, obtengamos un resultado diferente.

Ejemplo 2.34 (Calculando límites direccionales). *Probar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Solución. Si nos acercamos al origen a través de la recta $y = x$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x\\ x\to 0}} \frac{x\,x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

luego, de existir el límite, debería ser $1/2$. Mientras que si nos acercamos al origen a través de la recta $y = -x$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x\\ x\to 0}} \frac{x(-x)}{x^2+(-x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = \frac{-1}{2}$$

luego, de existir el límite, debería ser $-1/2$. Lo que contradice el resultado anterior, y en consecuencia el límite doble no puede existir.

En general, los límites direccionales los haremos contemplando todas las rectas a la vez, y no una a una, como se ha hecho aquí. Así, si nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$ se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx\\ x\to 0}} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2} = f(m)$$

El límite no existe ya que depende del valor de m. Es decir, según la recta por la que nos aproximemos al punto tendríamos un valor del límite u otro. Así, si consideramos dos trayectorias diferentes de acercamiento, tenemos: Para $m = 1$, nos estaríamos moviendo por la recta $y = x$, y sería $l = 1/2$, mientras que para $m = -1$, estaríamos moviéndonos por la recta $y = -x$, y sería $l = -1/2$. y al haber encontrado dos caminos que conducen a límites diferentes podemos afirmar que el límite no existe. En efecto, esto quiere decir que en cualquier disco abierto centrado en $(0, 0)$ hay puntos (x, y) en los cuales f toma los valores $1/2$ y $-1/2$. Luego f no puede tener límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

En este ejemplo podemos visualizar lo que ocurre en el origen de una manera muy gráfica. Imaginemos una alfombra de goma, con un agujero en el centro, y la atravesamos con dos listones, uno por debajo y el otro por encima, de manera que se crucen en el agujero (el de abajo de la alfombra pasaría por encima del otro). El que está por encima de la alfombra lo fijamos al suelo y el que está por debajo lo levantamos hasta una altura de un metro, sin que se rompa la alfombra. Es evidente que el agujero se estira todo el metro.

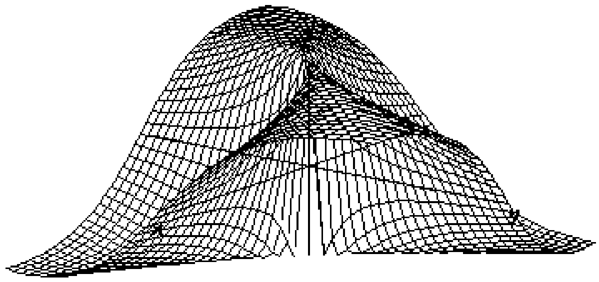


Figura 2.38: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

Observación. Podemos observar que aunque la función f, del ejemplo anterior, definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

sólo es discontinua en el punto $(0, 0)$, sin embargo, dicha discontinuidad es *inevitable*, ya que no es posible redefinir la función en $(0, 0)$, de manera que sea continua en dicho punto, puesto que el límite en $(0, 0)$ no existe.

Ejemplo 2.35. *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x + y^2}$$

Solución. Nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x + y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{y^2}{x + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{x + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1 + m^2x} = 0$$

para todo camino recto de la forma $y = mx$ el límite vale 0, sin embargo, no podemos afirmar que el límite valga cero, ya que en otras direcciones puede tener otro valor. En efecto, si nos acercamos al origen por el camino curvo $x = y^2$, resulta:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{y^2}{x+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2\\ y\to 0}} \frac{y^2}{y^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

Luego el límite no existe ya que al movernos por una parábola obtenemos distinto valor que al movernos por una recta.

Observación. Cuando nos acercamos al origen a través de las rectas $y = mx$, estamos contemplando todas las trayectorias rectilíneas menos una. En efecto, la recta $x = 0$ no está contemplada en la ecuación $y = mx$. En determinadas ocasiones esta recta conduce a otro límite y no es necesario acudir a otro tipo de trayectorias. Así, en el ejemplo anterior no hubiera sido necesario acudir a las trayectorias parabólicas. En efecto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{y^2}{x+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0\\ y\to 0}} \frac{y^2}{0+y^2} = 1$$

Ejemplo 2.36. *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

Solución. Nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2x^2mx}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx}{x^2+m^2} = 0$$

para todo camino recto de la forma $y = mx$ el límite vale 0, sin embargo, no podemos afirmar que el límite valga cero, ya que en otras direcciones puede tener otro valor. En efecto, si nos acercamos al origen por el camino curvo $y = x^2$, resulta:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2\\ x\to 0}} \frac{2x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{2}{1+1} = 1$$

Luego el límite no existe ya que al movernos por una parábola obtenemos distinto valor que al movernos por una recta.

También podíamos haber acudido directamente a las trayectorias parabólicas sin pasar previamente por las rectilíneas. Así,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=ax^2}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(ax)^2}{x^4+(ax^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2a^2x^2}{x^4+a^2x^4} = \frac{2a^2}{1+a^2} = f(a)$$

luego el límite no existe, por depender de a.

Ejemplo 2.37. *Calcular el siguiente límite:* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,-2)} \frac{7x(x-5)}{y+2}$

Solución. Nos aproximamos al punto $(5,-2)$ mediante rectas que pasen por dicho punto $y+2=m(x-5)$, de donde,

$$\lim_{(x,y)\to(5,-2)} \frac{7x(x-5)}{y+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 5} \frac{7x(x-5)}{m(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{7x}{m} = \frac{35}{m} = f(m)$$

luego el límite dado no existe, por depender de m.

Ejemplo 2.38. *Calcular, si existe,* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$

Solución. Agrupando términos en el numerador y denominador y haciendo el límite resultante por rectas $y-1=m(x-1)$, resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(y-1)-(y-1)}{(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+2} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y-1=m(x-1)}} \frac{(x-1)m(x-1)}{(x-1)^2+m^2(x-1)^2} =$$
$$= \frac{m}{1+m^2} = f(m)$$

Luego, al depender de m, el límite no existe.

Determinación de la trayectoria díscola

Cuando tengamos la sospecha de que un límite no existe, y sin embargo, las trayectorias habituales (rectas y parábolas) conducen al mismo resultado, podemos intentar buscar una trayectoria díscola por dos procedimientos:

1. Mediante la sustitución implícita
2. Mediante la aplicación sucesiva de la regla de L´Höpital

a) Mediante la sustitución implícita

En lugar de trayectorias del tipo $y=f(x)$, se pueden utilizar trayectorias definidas implícitamente $F(x,y)=0$. Así, en el caso de fracciones, sustituiremos todo el numerador o el denominador por lo que nos interese para conseguir el límite deseado, siempre que la sustitución que hacemos se corresponda realmente con una trayectoria que pasa por el punto objeto de límite.

Nota. Para ver si una ecuación del tipo $F(x,y)=0$ se corresponde con una trayectoria válida de aproximación al punto en cuestión, hay que comprobar que se cumplen las condiciones exigidas en el teorema 4.14 de la función implícita (pág. 298).

Mientras el alumno no conozca dicho teorema, además de comprobar que la trayectoria pasa por el punto en cuestión, debe que comprobar que alguna de las variables es función de la otra en un entorno de dicho punto, para ello puede limitarse a ecuaciones en las que es posible despejar una de las incógnitas en función de la otra y obtener una función, o bien a ecuaciones de curvas conocidas.

Ejemplo 2.39. *Demostrar que el siguiente límite no existe*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

Solución. Si nos acercamos al origen a través de la familia de curvas definidas por la ecuación

$$x^2+y^2=\lambda x$$

resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x^2+y^2=\lambda x\\ x\to 0}} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

luego el límite no existe, por depender de λ

Nos queda comprobar que las trayectorias utilizadas son válidas. En efecto, la ecuación que hemos utilizado en la sustitución se puede expresar de la siguiente forma,

$$x^2-\lambda x+y^2=0 \quad\to\quad (x-\frac{\lambda}{2})^2-\frac{\lambda^2}{4}+y^2=0 \quad\to\quad (x-\frac{\lambda}{2})^2+y^2=\frac{\lambda^2}{4}$$

luego se trata de circunferencias con centro en el punto $(\lambda/2,0)$ y radio $r=\lambda/2$ que pasan por el origen de coordenadas.

Nota: Hay que hacer notar la importancia de comprobar que la trayectoria utilizada es una trayectoria idónea. Es decir, una trayectoria que no sólo contenga al punto en cuestión, sino que lo *atraviese*. Veamos un ejemplo en el que se obtiene un resultado incorrecto por seguir una trayectoria no idónea.

Ejemplo 2.40 (Trayectorias no idóneas conducen a resultados incorrectos). *Explicar porqué no es posible utilizar la trayectoria $x^2+y^2=x^3$ para probar que el siguiente límite no existe*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

Solución. Es evidente que el límite dado existe y vale cero. En efecto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0\cdot \text{Acot.} = 0$$

Ahora bien, si siguiéramos la trayectoria $x^2+y^2=x^3$ resultaría lo siguiente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

Lo que contradice el resultado anterior.

Este hecho se debe a que la trayectoria utilizada no es una trayectoria idónea. En efecto, trayectoria $x^2 + y^2 = x^3$ contiene al $(0, 0)$ –ya que dicho punto cumple la ecuación–. Sin embargo la trayectoria no pasa por el origen. Se trata de una curva que no *pasa* por el origen de coordenadas, pero que tiene un punto exterior aislado –precisamente el origen de coordenadas– y da la apariencia de *pasar* por él, cuando no es cierto. En efecto, la gráfica de la curva $x^2 + y^2 = x^3$ viene representada en la Figura 2.39

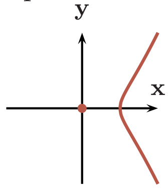


Figura 2.39: Gráfica de $x^2 + y^2 = x^3$

La determinación del dominio de las funciones implícitas en la trayectoria nos dice que la función sólo está definida para $x \geq 1$ y para el $(0, 0)$. En efecto, despejando y resulta,

$$x^2 + y^2 = x^3 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^3 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^3 - x^2}$$

y para que la raíz cuadrada esté definida, ha de ser

$$x^3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq x^2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

b) Mediante la aplicación sucesiva de la regla de L´Hôpital
Hacemos el límite mediante trayectorias rectilíneas (o límites reiterados) y obtenemos un valor concreto. Suponemos, entonces, que la trayectoria díscola viene definida mediante una función polinómica $y = p(x)$. Sustituimos en el límite y aplicamos sucesivamente la regla de L´Hôpital hasta obtener un valor distinto al obtenido anteriormente. Posteriormente calculamos el polinomio que cumple las condiciones exigidas a $p(x)$.

Nota: La determinación del polinomio $p(x)$ que cumple las condiciones dadas, es inmediata a partir del polinomio de Taylor –o de Mac Laurin– (Teorema 3.7 de la pág 186)

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 \cdots$$

Ejemplo 2.41. *¿Es cierto que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y + e^x - 1}{y + x} = 1$ *?. Responde justificando la respuesta*

Solución. Si nos aproximamos al punto $(0, 0)$ mediante rectas $y = mx$ obtenemos que el límite, de existir, debería de valer 1. Pero esto no nos permite afirmar que dicho límite exista.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+e^x-1}{y+x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{mx+e^x-1}{mx+x} = [\frac{0}{0}] =$$

y al ser de una variable podemos aplicar L'Hôpital, con lo cual

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m+e^x}{m+1} = \frac{m+1}{m+1} = 1 \quad \text{para} \quad m \neq -1$$

Sin embargo, si nos aproximamos al punto $(0,0)$ mediante la parábola $y = x^2 - x$ resulta que el límite, de existir, debería de valer $3/2$, en efecto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+e^x-1}{y+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+e^x-1}{x^2-x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+e^x-1}{x^2} = [\frac{0}{0}] =$$

y al ser de una variable podemos aplicar L'Hôpital, de donde

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x-1+e^x}{2x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{2+e^x}{2} = \frac{3}{2}$$

Con lo cual podemos afirmar que el límite propuesto no existe.

Hemos utilizado la parábola $y = x^2 - x$ y no otra, por la siguiente razón. Supongamos que nos acercamos al punto $(0,0)$ mediante la curva $y = g(x)$, y que aplicamos sucesivamente L'Hôpital, y queremos que resulte

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g(x)+e^x-1}{g(x)+x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)+e^x}{g'(x)+1} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x)+e^x}{g''(x)} \neq 1$$

Para ello tendrá que ser

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = -1, \quad g''(0) \neq 0$$

que se consigue con

$$g''(x) = 2 \to g'(x) = 2x - 1 \to g(x) = x^2 - x$$

Nota: La determinación del polinomio $p(x)$ que cumple las condiciones dadas, es inmediata a partir del polinomio de Taylor en el origen (Teorema 3.6 de la pág 185)

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2}x^2$$

de donde, para $p''(0) = 2$ resulta

$$p(x) = 0 - x + x^2 = x^2 - x$$

Ejemplo 2.42. *Calcular, si existe, el valor del siguiente límite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+\operatorname{sen} x}{y+x}$$

Solución. Si nos aproximamos al punto $(0,0)$ mediante rectas $y = mx$ obtenemos que el límite, de existir, debería de valer 1. Pero esto no nos permite afirmar que dicho límite exista.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+\operatorname{sen} x}{y+x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{mx+\operatorname{sen} x}{mx+x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

y al ser de una variable podemos aplicar L'Hôpital, con lo cual

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m+\cos x}{m+1} = \frac{m+1}{m+1} = 1 \quad \text{para} \quad m \neq -1$$

sin embargo, si nos aproximamos al punto $(0,0)$ mediante la cúbica $y = x^3 - x$ resulta que el límite, de existir, debería de valer $5/6$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+\operatorname{sen} x}{y+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x+\operatorname{sen} x}{x^3-x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x+\operatorname{sen} x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

y al ser de una variable podemos aplicar L'Hôpital, con lo cual

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-1+\cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{6x-\operatorname{sen} x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{6-\cos x}{6} = \frac{5}{6} \neq 1$$

Con lo cual podemos afirmar que el límite propuesto no existe.

Hemos utilizado la cúbica $y = x^3 - x$ y no otra función, por la siguiente razón. Supongamos que nos acercamos al punto $(0,0)$ mediante la curva $y = p(x)$, y que aplicamos sucesivamente L'Hôpital, y queremos que resulte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+\operatorname{sen} x}{y+x} = \lim_{x\to 0} \frac{p(x)+\operatorname{sen} x}{p(x)+x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{p'(x)+\cos x}{p'(x)+1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{p''(x)-\operatorname{sen} x}{p''(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{p'''(x)-\cos x}{p'''(x)} \neq 1$$

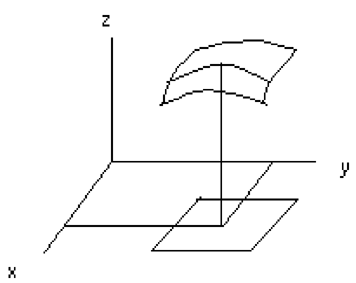
Para ello tendrá que ser

$$p'''(0) \neq 0, \quad p''(0) = 0, \quad p'(0) = -1, \quad p(0) = 0$$

que se consigue con

$$p'''(x) = a \to p''(x) = ax \to p'(x) = \frac{a}{2}x^2 - 1 \to p(x) = \frac{a}{6}x^3 - x$$

Límites parciales iterados (o reiterados).



Se pueden calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to x_0} \Big[\lim_{\substack{y\to y_0 \\ x\neq x_0}} f(x,y) \Big]$$

$$\lim_{y\to y_0} \Big[\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\neq y_0}} f(x,y) \Big]$$

Figura 2.40: Límites iterados

Si estos dos límites son distintos, entonces la función no tiene límite, pero si son iguales o alguno de ellos no existe, entonces no se puede asegurar nada sobre el límite doble.

Ejemplo 2.43. *Demostrar que el siguiente límite no existe.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Solución.

$$\lim_{x\to x_0}\Big[\lim_{\substack{y\to y_0\\ x\neq x_0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big] = \lim_{x\to x_0}\Big[\frac{x^2-0}{x^2+0}\Big] = \lim_{x\to x_0}\Big[1\Big] = 1$$

$$\lim_{y\to y_0}\Big[\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\neq y_0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big] = \lim_{y\to y_0}\Big[\frac{0-y^2}{0+y^2}\Big] = \lim_{x\to x_0}\Big[-1\Big] = -1$$

Luego el límite doble no existe.

Ejemplo 2.44. *Demostrar que el siguiente límite existe, y sin embargo no existen ninguno de los iterados.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x})$$

Solución. El límite doble existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x}) = 0\cdot \mathrm{Ac} + 0\cdot \mathrm{Ac} = 0+0=0$$

Mientras que los iterados no existen, en efeco

$$\lim_{x\to x_0}\Big[\lim_{\substack{y\to y_0\\ x\neq x_0}} (x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x})\Big] = \lim_{x\to x_0}\Big[\text{No definido } +0\Big] = \text{No definido}$$

$$\lim_{y\to y_0}\Big[\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\neq y_0}} (x \operatorname{sen}\frac{1}{y} + y \operatorname{sen}\frac{1}{x})\Big] = \lim_{x\to x_0}\Big[0+\text{No definido }\Big] = \text{No definido}$$

2.2.10. Límites en el infinito

Se trata de ver el comportamiento de la función en el contorno de una circunferencia de radio infinito.

Ejemplo 2.45. *Calcular los siguientes límites.*

1. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{x^2+y^2}$ 2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} e^{-(x^2+y^2)}$

Solución.

1. $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

2. $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} e^{-(x^2+y^2)} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{e^{(x^2+y^2)}} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejemplo 2.46. *Representa la función:* $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Solución. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$.
Para representar le función sustituimos $f(x,y)$ por z, con lo que tenemos:

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

Veamos los cortes de dicha superficie con los planos coordenados:
- corte con el plano $x = 0$ $\quad z = e^{-y^2}$
- corte con el plano $y = 0$ $\quad z = e^{-x^2}$

Para hallar las curvas de nivel suponemos que z es una constante

$$e^{-(x^2+y^2)} = z \quad \text{ de donde } \quad -(x^2+y^2) = \ln z \Rightarrow x^2+y^2 = -\ln z$$

Damos varios valores a z para ir viendo las curvas de contorno a distintas alturas:
para el nivel $z = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 0 \Rightarrow$ el punto (0,0)
para niveles $0 < z < 1 \Rightarrow -\ln z$ es positivo, luego se trata de circunferencias de radio $\sqrt{-\ln z}$
Y teniendo en cuenta que el límite en el infinito es cero, resulta la siguiente gráfica:

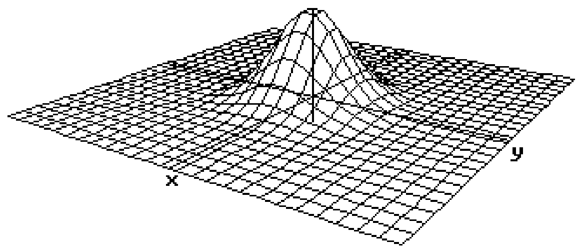


Figura 2.41: $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Las definiciones de límite y continuidad pueden extenderse a funciones de tres variables considerando puntos (x,y,z) dentro de la *esfera abierta*

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < \delta^2$$

de radio δ y centro (x_0,y_0,z_0).

De la misma forma, pueden extenderse, de manera natural, a funciones de más de tres variables.

2.3. Problemas propuestos del Capítulo 2

Ejercicios propuestos del Capítulo 2

Soluciones en la página ??

2.1. Descríbase el dominio de los siguientes campos escalares:

a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

c) $f(x,y) = \arccos \dfrac{y}{x}$ d) $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$

e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$ f) $f(x,y) = \ln(4 - x - y)$

g) $f(x,y) = x^2 + y^2$ h) $f(x,y) = e^{x/y}$

i) $f(x,y) = \ln(4 - xy)$

2.2. Consideremos las siguientes funciones:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z \qquad \psi(x) = \cos x$$
$$g(x,y,z) = x^2 - y^2 + z \qquad \varphi(x) = \operatorname{sen} x$$

Expresa, en la forma más simplificada posible:

a) $(f+g)(x,y,z)$ b) $f(\psi(x), \varphi(x), 1)$

c) $g(f(x,y,z), g(x,y,z), 4x^2z)$ d) $\psi(f(x,y,z))$

e) $g(\psi(x), \varphi(x), 0)$ f) $\sqrt{\dfrac{f(x,y,z) + g(x,y,z)}{2}}$

2.3. Descríbase la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = k$ b) $g(x,y) = ax + by + c$

c) $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $l(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

e) $m(x,y) = \sqrt{r^2 - ax^2 - by^2}$ f) $n(x,y) = y^2 - x^2$

2.4. Describir las curvas $f(x,y) = k$ o superficies de nivel $f(x,y,z) = k$, para los siguientes campos f y los valores de k que se indican:

a) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad k = 0, 2, 4, 6, 8$

c) $f(x,y) = xy$ $\quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 6$

d) $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$ $\quad k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

e) $f(x,y,z) = 4x + y + 2z$ $\quad k = 4$

f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad k = 9$

g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ $\quad k = 1$

h) $f(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2$ $\quad k = 0$

2.5. Hállense, si existen, los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln|1+x^2y^2|$ b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,2,6)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$ d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \sec x \operatorname{tg} y$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{x^2+y^2}{x+y+1}$ f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{xy+y-2x-2}{x+1}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \operatorname{sen} y}{x^2+1}$ h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)\left(\frac{y-2}{y^2-4}\right)$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3y^3-1}{xy-1}$ j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

q) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \operatorname{sen}(y^2-4)}{(y+2)\operatorname{sen} x}$ r) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\operatorname{sen} x \ln(1+y)}$

s) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \operatorname{sen}(xy)}{1-e^{x^2+y^2}}$ t) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+yx^2)}{\operatorname{tg} y\cdot\sqrt{1-\cos(x^2+y^2)}}$

2.6. Estúdiese la continuidad de las siguientes funciones, prolongándolas por continuidad, si es posible, a puntos que no sean de su dominio.

a) $\displaystyle x \operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$ b) $\displaystyle\frac{2x+y^2}{x^2+y^2}$ c) $\displaystyle\frac{x^3+\ln y}{(y-1)^3+x^6}$

d) $\displaystyle\frac{1}{x}\operatorname{sen} xy$ e) $\displaystyle\frac{x^2+y^2}{\ln(1-x^2-y^2)}$ f) $\displaystyle\frac{x^3+\ln(y+1)}{y^3+x^6}$

2.7. Estudiese la continuidad de las siguientes funciones:

a) $\begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } (x,y)\neq(1,-3) \\ 10 & \text{si } (x,y)=(1,-3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 28 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x^3-4y^3}{x^2-4y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{xy}{4x^2+5y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x^3\operatorname{sen}(y^2-4)}{(y+2)\operatorname{sen} x} & \text{si } (x,y)\neq(0,-2) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,-2) \end{cases}$

Problemas resueltos del Capítulo 2

2.1.

Solución.

Problemas propuestos del Capítulo 2

Soluciones en la página 390

2.1.

Capítulo 3

Derivada de Funciones de una variable

3.1. Derivada y continuidad. Recta tangente y recta normal

3.1.1. Idea intuitiva de recta tangente.

Todo el mundo tiene una idea clara de lo que es la recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos, pero si tratamos de generalizar esa idea a otras curvas nos encontramos con cuestiones que esa idea no resuelve.
- ¿Puede la recta tangente cortar a la curva en más de un punto?.
- ¿Puede atravesar la recta tangente a la curva por el punto de tangencia?.

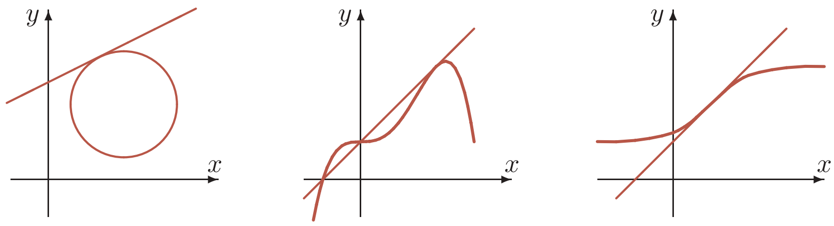


Figura 3.1: Idea intuitiva de recta tangente

Una primera aproximación al concepto nos permite enunciar la siguiente definición:

Definición 3.1. *Se llama tangente a una curva en un punto P a la recta que pasa por P con la misma dirección que la curva.*

Podemos insistir un poco más en el concepto señalando que la recta tangente es una recta que *toca* a la curva en un punto, pero que, además, la curva se *aplana* en las proximidades del punto de tangencia, tratando de confundirse, por un instante, con la propia recta. Este *aplanamiento* en los alrededores del punto de tangencia es lo que hace que la curva sea *suave* y que *se aproxime* a la recta tangente en los alrededores del punto de tangencia, y esto es lo que realmente caracteriza la recta tangente.

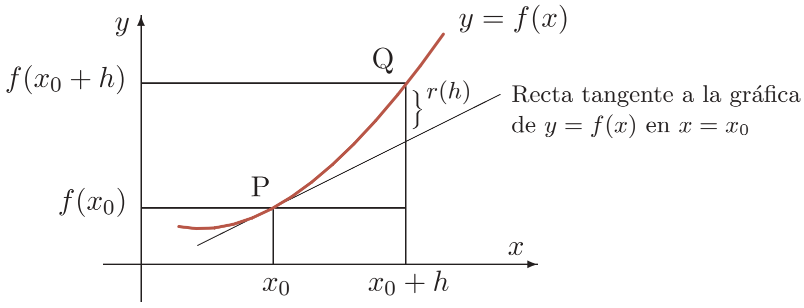


Figura 3.2: Recta tangente a una función.

El residuo $r(h)$ es la distancia (vertical) entre la curva y la recta tangente, y es lo que nos va a permitir determinar si una curva tiene o no recta tangente en uno de sus puntos. En efecto, una primera observación nos hace ver que el residuo $r(h)$ tiende a cero a medida que h tiende a cero. Sin embargo, este hecho no es importante para la existencia de la recta tangente, pues el que $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ lo único que nos dice es que la función es continua en P, y seguiría siendo cero cualquiera que fuera la recta que pase por P, aunque no fuera la recta tangente, e incluso, aunque la función no tuviera tangente. Lo importante, cuando se estudia la recta tangente, es que el residuo $r(h)$ tiende a cero *más rápido* de lo que lo hace h. Esto significa que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Gráficamente, este límite viene a significar el hecho de que la curva se *"embarra"* con la recta tangente en los alrededores del punto P. En otras palabras, la curva tiene que ser "suave" en P, para que "se pueda ver localmente como una recta" (su recta tangente).

3.1.2. Rectas tangentes no intuitivas

La tangente a una recta es la propia recta.

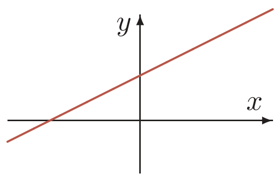


Figura 3.3: La tangente a una recta es la propia recta

En un punto de inflexión la tangente atraviesa la curva. Pudiéndose distinguir tres tipos de puntos de inflexión: de tangente vertical, de tangente horizontal y de tangente oblicua.

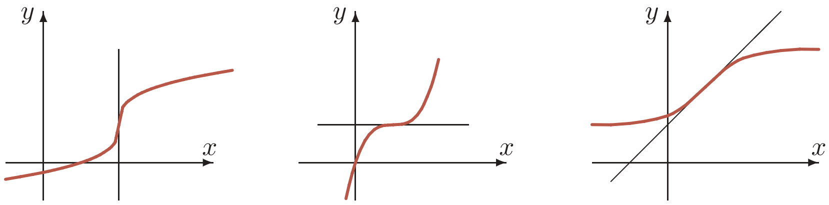
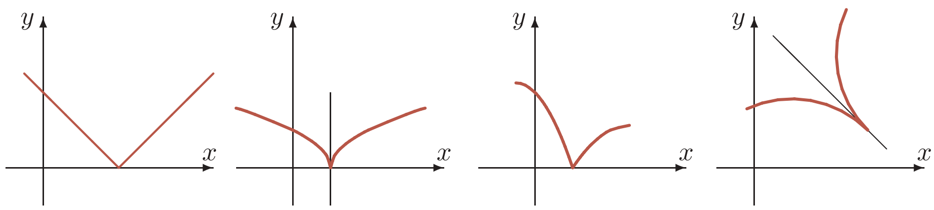


Figura 3.4: La tangente en un punto de inflexión.

En un punto anguloso, de desvío brusco o de retroceso, la curva o bien no tiene tangente o la tangente es vertical. La tangente no puede ser oblicua, ya que este caso la correspondencia no sería función.



No hay tangente Tangente vertical No hay tangente No es función

Figura 3.5: En los puntos de retroceso o no hay tangente o la tangente es vertical.

En los puntos de discontinuidad no se define la recta tangente

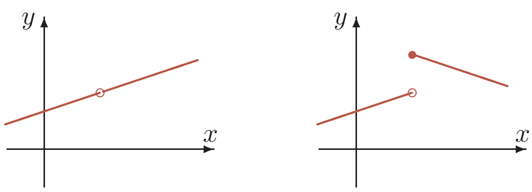


Figura 3.6: En los puntos de discontinuidad no se define la recta tangente.

3.1.3. La pendiente de la recta tangente

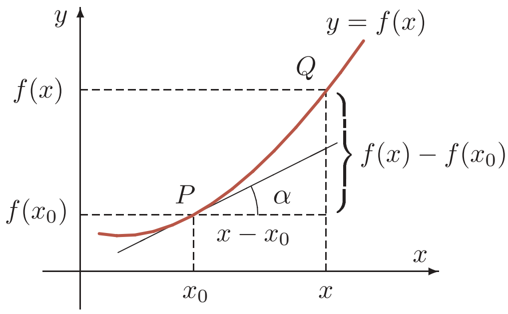


Figura 3.7: Pendiente de la recta tangente.

El valor aproximado de la pendiente de la recta tangente sería:

$$\tan\alpha \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Y su valor exacto:

$$\tan\alpha = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3.1.4. Definición de derivada

Definición 3.2 (Derivada en un punto). *Sea x_0 un punto interior de $\mathcal{D}_f$. Se llama derivada de la función f en el punto x_0 al siguiente límite si existe y es finito.*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observaciones:

- Cuando dicho límite sea infinito se dice que la función no es derivable, aunque tiene derivada infinita. (gráficamente significa que la recta tangente en ese punto es vertical).
- Para que la derivada exista el punto x_0 tiene que ser un punto interior del dominio, es decir, la función tiene que estar definida en un entorno del punto, con objeto de que cuando $x \to 0$ el valor $f(x)$ que aparece en el numerador esté definido.
- No olvidar que la derivada es un límite, aunque buscaremos reglas para calcular derivadas sin tener que hacer dicho límite.
- A la expresión $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, se le llama cociente incremental y se expresa de la forma:
$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
Con lo cual la derivada no es más que el límite del cociente incremental cuando el incremento de x tiende a cero.
$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x}$$

3.1.5. Otra forma de la derivada

Tenemos que:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Llamando h al incremento, será:

$$x - x_0 = h \ \rightarrow \ x = x_0 + h$$

con lo cual resulta:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

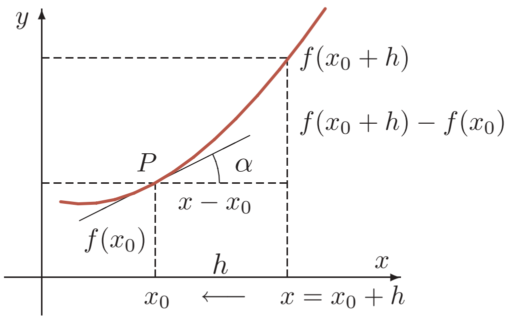


Figura 3.8: Derivada de una función.

Ejemplo 3.1. *Calcular, aplicando la definición en las dos formas, la derivada de la función $f(x) = 3x^2$, en el punto $x = 2$.*

Solución.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x^2 - 4)}{x - 2} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{3(x+2)(x-2)}{x - 2} = 12$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2 - 12}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) - 12}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12 + 12h + 3h^2 - 12}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (12 + 12h) = 12 + 0 = 12$$

3.1.6. Derivadas laterales

Si el límite que define la derivada lo tomamos solamente por la derecha o por la izquierda, obtenemos las derivadas laterales.

Definición 3.3. *Se llaman derivada por la derecha y derivada por la izquierda, respectivamente, a los siguientes límites, si existen y son finitos:*

$$f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para que se pueda definir la derivada por la derecha en el punto x_0, la función tiene que estar definida, al menos, en un intervalos del tipo $[x_0, b)$, y para que exista la derivada por la izquierda, la función tiene que estar definida, al menos, en un intervalo del tipo $(a, x_0]$.

Para que la función sea derivable las dos derivadas laterales tienen que coincidir.

Teorema 3.1 (Coincidencia de las derivadas laterales). *Una función es derivable en un punto sii las derivadas laterales coinciden en dicho punto.*

Ejemplo 3.2. *Calcular las derivadas laterales de la función valor absoluto, en el origen de coordenadas.*

Solución. La función es $f(x) = |x|$. Luego resulta,

$$\begin{aligned} f'(x_0+) &= \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1 \\ f'(x_0-) &= \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

Luego la función no es derivable en el origen.

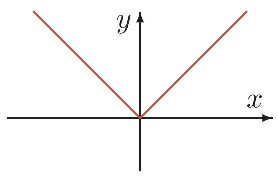


Figura 3.9: $f(x) = |x|$

3.1.7. Derivada y continuidad

Teorema 3.2 (Derivabilidad implica continuidad). *Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.*

Demostración. En efecto, tenemos que:

f es derivable en $x_0 \iff \exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ y es finito.

f es continua en $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

Con lo cual, resulta:
f derivable en $x_0 \Longrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\Longrightarrow f \text{ es continua en } x_0$$

□

Sin embargo, existen funciones que son continuas pero que no son derivables.

Ejemplo 3.3. *Comprobar que la función $f(x) = |x^2 - 4|$ es continua en el punto $x = 2$, pero no es derivable en dicho punto. Comprobar el resultado gráficamente. ¿En qué otro punto tampoco será derivable?.*

Solución.

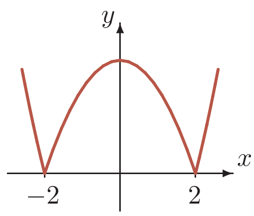


Figura 3.10: $f(x) = |x^2 - 4|$

a) f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} |x^2 - 4| = |0| = 0 = f(0)$$

b) f no es derivable en $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{|x^2 - 4|}{x - 2} = \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{-(x+2)(x-2)}{x - 2} = -4 \end{cases}$$

Luego la función no es derivable en $x = 2$.

Ejemplo 3.4. *Comprobar que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en el punto $x = 0$, pero no es derivable en ese punto. Comprueba el resultado gráficamente.*

Solución.

a) f es continua en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0)$$

b) f no es derivable en $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Luego la función no es derivable en $x = 0$.

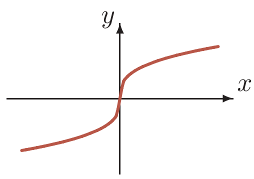


Figura 3.11: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. No es derivable en el origen

3.1.8. Significado gráfico de la derivada: Suavidad.

Una función es continua en un punto , si su gráfica *atraviesa* dicho punto.

Una función es derivable en un punto si su gráfica lo *atraviesa* con *suavidad*.

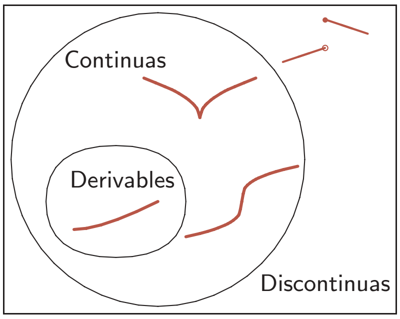


Figura 3.12: Funciones

Una función no es derivable:

- En los puntos angulosos.
- En los puntos de tangente vertical.
- En los puntos de discontinuidad.

Ejemplo 3.5. *Estúdiese cuál de las tres funciones siguientes atraviesa el origen con más suavidad.*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$$

Solución. La función f no es continua en 0, por lo tanto no lo atraviesa.
La función g es continua en 0, pero no es derivable 0, luego lo atraviesa, pero sin suavidad.
La función h es continua y derivable en el origen, luego lo atraviesa con suavidad.

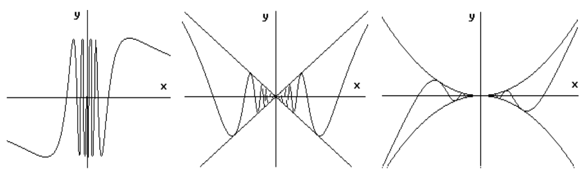


Figura 3.13: La derivabilidad de la función muestra la suavidad de la curva

3.1.9. La ecuación de la recta tangente

La pendiente de la recta tangente coincide con la derivada de la función, con lo cual:

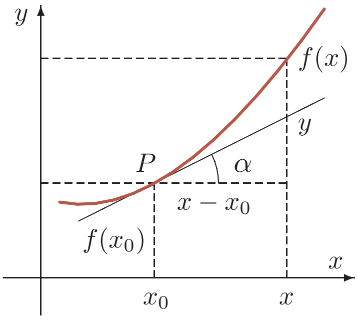


Figura 3.14: Recta tangente.

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = f'(x_0) \\ \tan\alpha = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}\right\} \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

de donde resulta la siguiente ecuación:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.6. *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = \sqrt{x}$ *en el punto* $x = 1$*. Comprobar el resultado gráficamente.*

Solución.

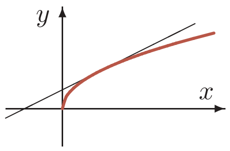


Figura 3.15: $y = \sqrt{x}$

Tenemos que: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(1) = 1$, y

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

de donde, la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ o bien, } y = \frac{x+1}{2}$$

Ejemplo 3.7. *Demostrar que la recta* $y = -x$ *es tangente a la curva dada por la ecuación:*

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x$$

Hallar el punto de tangencia.

Solución. La pendiente de la recta tangente ha de ser $y' = -1$. Como $y' = 3x^2 - 12x + 8$, resulta, $3x^2 - 12x + 8 = -1$, de donde, $3x^2 - 12x + 9 = 0$, con lo que, simplificando, resulta:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P(3,3) \\ 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow Q(1,3) \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones:

$$\begin{cases} P(3,3) \Rightarrow y + 3 = -(x - 3) \Rightarrow y + 3 = -x + 3 \Rightarrow y = -x \\ Q(1,3) \Rightarrow y - 3 = -(x - 1) \Rightarrow y - 3 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 4 \text{ No} \end{cases}$$

Las dos soluciones de la ecuación obedecen a que la curva tiene dos rectas tangentes con la misma pendiente $y' = -1$, una en el punto $P(3,3)$ y otra en el punto $Q(1,3)$.

3.1.10. La ecuación de la recta normal

Ejemplo 3.8. *Hallar, gráficamente, un vector perpendicular al vector* $\vec{v} = (2,3)$ *e indicar la relación que existe entre sus componentes y sus pendientes.*

Solución.

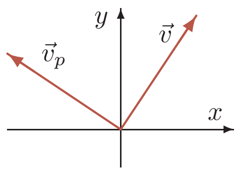


Figura 3.16:

Tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= (2,3) \\ \vec{v}_p &= (-3,2) \end{aligned}\right\} \text{Las componentes se cambian de orden y una de ellas de signo.}$$

y para las pendientes:

$$\left.\begin{aligned} m &= 3/2 \\ m' &= -2/3 \end{aligned}\right\} m' = \frac{-1}{m} \quad \text{La inversa cambiada de signo.}$$

Proposición 3.1. *Dos rectas perpendiculares tienen pendientes inversas y cambiadas de signo.*

Definición 3.4 (Recta normal). *Se llama recta normal a una curva, en un punto de la misma, a la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.*

La pendiente de la recta tangente coincide con la derivada de la función, y la de la recta normal con su inversa cambiada de signo, con lo cual resulta lo siguiente:

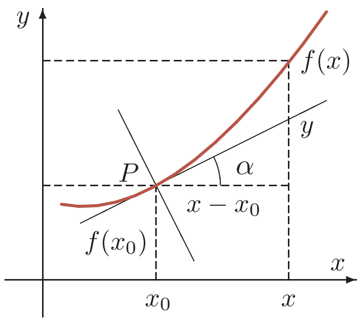


Figura 3.17: Recta normal.

Ecuación de la recta tangente:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Ecuación de la recta normal:

$$\boxed{y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

3.1.11. Curvas de tangente horizontal y curvas de tangente vertical

Cuando la derivada se hace cero en un punto, entonces la tangente es una recta horizontal $y = y_0$, y la recta normal es la recta vertical que pasa por el punto $x = x_0$.

Cuando la derivada se hace infinita en un punto, entonces la tangente es la recta vertical que pasa por el punto $x = x_0$, y la recta normal es la recta horizontal que pasa por el punto $y = y_0$.

Ejemplo 3.9. *Hallar las rectas tangente y normal a la curva* $y = \sqrt[3]{x}$ *en el origen de coordenadas*

Solución. Tenemos $y = x^{1/3}$, y su derivada $y' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, de donde,

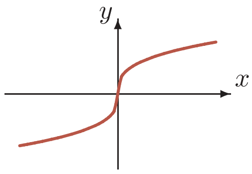


Figura 3.18: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$f'(0) = +\infty$, con lo cual:

- Ecuación de la recta tangente: $x = 0$
- Ecuación de la recta normal: $y = 0$

3.2. Función derivada. reglas de derivación.

3.2.1. Función derivada

Dada una función $y = f(x)$, si hallamos su derivada en cada uno de los puntos en los que sea derivable se obtiene una nueva función llamada función derivada de la anterior.

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ \hline x_0 & f(x_0) \\ x_1 & f(x_1) \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x & f'(x) \\ \hline x_0 & f'(x_0) \\ x_1 & f'(x_1) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$y = f(x) \qquad\qquad y = f'(x)$$

Para hallar la fórmula de la función derivada basta con aplicar la definición de derivada en un punto genérico:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} \qquad y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$$

Ejemplo 3.10. *Hallar, aplicando la definición, la derivada de la función:* $f(x) = x^2$

Solución. Podemos aplicar la definición de derivada en cualquiera de sus dos formas:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x+c)(x-c)}{x - c} = 2c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(c) = 2c \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

Ejemplo 3.11. *Hallar, aplicando la definición, la derivada de la función:*

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Solución. Podemos aplicar la definición de derivada en cualquiera de sus dos formas:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{(x - c)(\sqrt{x} + \sqrt{c})} =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{x - c}{(x - c)(\sqrt{x} + \sqrt{c})} = \lim_{x \to c} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x + h} - \sqrt{x})(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3.2.2. Reglas de derivación.

Derivada y operaciones:

función	derivada
rf	rf'
$f + g$	$f' + g'$
$f \cdot g$	$f'g + fg'$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena:

$$h(x) = g\big[f(x)\big] \implies h'(x) = g'\big[f(x)\big] \cdot f'(x)$$

que se puede expresar de la forma:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} \implies \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Derivada de la función recíproca o inversa:

$$y = f(x) \quad \implies \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \quad \implies \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Derivada de las funciones elementales:

función	derivada	función	derivada
k	0	k	0
x	1	u	u'
x^r	rx^{r-1}	u^r	$ru^{r-1}u'$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\lg_b x$	$\dfrac{1}{x\ln b} = \dfrac{1}{x}\lg_b e$	$\lg_b u$	$\dfrac{u'}{u\ln b} = \dfrac{u'}{u}\lg_b e$
e^x	e^x	e^u	$e^u u'$
a^x	$a^x \ln a$	a^u	$a^u u' \ln a$
x^x	$x^x(\ln x + 1)$	f^g	$f^g\Big(g'\ln f + g\dfrac{f'}{f}\Big)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{sen} u$	$u'\cos u$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\cos u$	$-u'\operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'\sec^2 u$
$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$	$u'\sec u \operatorname{tg} u$
$\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$-\csc x \cot x$	$\csc u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$	$-u'\csc u \cot u$
$\cot x$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$	$\cot u$	$\dfrac{-u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u'\csc^2 u$
$\operatorname{arc\,sen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen} u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arc\,cos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,cos} u$	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{arc\,sec} x$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arc\,sec} u$	$\dfrac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$
$\operatorname{arc\,csc} x$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arc\,csc} u$	$\dfrac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$
$\operatorname{arc\,cotg} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,cotg} u$	$\dfrac{-u'}{1+u^2}$
$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} u$	$u'\cosh u$
$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh u$	$u'\operatorname{senh} u$
$\operatorname{tgh} x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} u$	$\dfrac{u'}{\cosh^2 u}$

Ejemplo 3.12. *Derivar las siguientes funciones:*

$$(a)\ \ y = x^{\sqrt{2}} \quad (b)\ \ y = \left(\sqrt{2}\right)^x \quad (c)\ \ y = e^{3x} \quad (d)\ \ y = 2^{3x+1} \quad (e)\ \ y = x^2 3^{-x}$$

Solución.

(a) $y' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$

(b) $y' = \left(\sqrt{2}\right)^x \ln\sqrt{2}$

(c) $y' = 3e^{3x}$

(d) $y' = 3 \cdot 2^{3x+1} \ln 2$

(e) $y' = 2x3^{-x} - x^2 3^{-x} \ln 3 = (2x - x^2 \ln 3)3^{-x}$

Ejemplo 3.13. *Derivar las siguientes funciones:*

$$(a)\ \ y = (4x + 7x^2)^{10} \qquad (b)\ \ y = \operatorname{sen}^3 2x\ \cos 3x \qquad (c)\ \ y = \operatorname{sen}^2(x + \operatorname{sen} x)^2$$

Solución.

(a) $y' = 10(4x^3 + 7x^2)^9(12x^2 + 14x)$

(b) $y' = 3\operatorname{sen}^2 2x \cdot 2\cos 2x\ \cos 3x - 3\operatorname{sen}^3 2x\ \operatorname{sen} 3x$

(c) $y' = 2\operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)^2 \cos(x + \operatorname{sen} x)^2 \cdot 2(x + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$

Ejemplo 3.14. *Derivar* $f(x) = \ln \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^3}$

Solución. Aplicamos las propiedades de los logaritmos, antes de derivar, con lo cual,

$$f(x) = 2\ln(sen3x) - 3\ln x$$

de donde,

$$f'(x) = 2\frac{3\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} - \frac{3}{x} = 6\cot 3x - \frac{3}{x}$$

3.2.3. Derivadas de funciones con un punto aparte

Supongamos una función definida con un *punto aparte*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ k & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

se nos presenta la duda de cuál será el valor de $f'(a)$, es decir,

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ ? & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

Si la función tiene, en la fórmula, un punto aparte, la derivada en ese punto no tiene porqué ser cero, ya que la derivada depende de los valores que tome la función en los alrededores del punto. Además, a cualquier función le podemos separar un punto de su fórmula, sin que por ello se haga su derivada cero en dicho punto. Por ejemplo,

$$f(x) = x^2 = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 9 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 2x = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \neq 3 \\ 6 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

o bien,

$$f(x) = x = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 1 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

Si la función tiene un punto aparte, para derivarla, podemos seguir dos caminos:

1. Aplicar la definición de derivada.

2. Comprobar si es continua, si no es continua no es derivable, y si es continua podemos calcular la derivada en ese punto mediante el límite, en ese punto, de la derivada en los demás, en el cado de que exista. Si el límite no existe habrá que aplicar la definición.

$$f'(x) = \lim_{x \to a} g'(x)$$

Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ k & \text{si} \quad x = a \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} g'(x) & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

Bien entendido que si dicho límite no existe entonces hay que aplicar la definición.

Ejemplo 3.15. *Hallar la derivada de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución. La derivada para $x \neq 0$ no tiene ningún problema,

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

Para hallar la derivada en el origen procedemos de la siguiente forma:
(a) Estudiamos la continuidad en el origen:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow \text{ f es continua en x=0}$$

(b) Calculamos la derivada en $x=0$, aplicando la definición:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

aplicando L'Hôpital, dos veces, resulta,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{2}=0$$

con lo cual la función derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

En este caso, la derivada en el punto $x=0$ también se podía haber calculado a partir de la derivada en los puntos $x\neq 0$, en efecto,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\operatorname{sen}x-\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen}x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{2}=0$$

El hecho de que $f'(0)=0$, significa que la gráfica tiene tangente horizontal en el punto $x=0$, si hubiéramos inclinado la curva habríamos obtenido otro resultado.

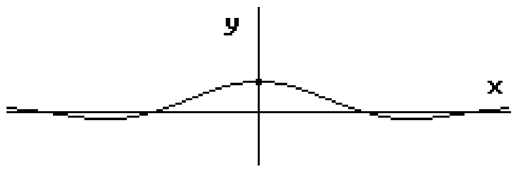


Figura 3.19: gráfica de $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}$

3.2.4. Derivada de funciones definidas a trozos

Para derivar una función definida a trozos

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si} \quad x\leq c\\ g(x) & \text{si} \quad x>c\end{cases}$$

1. Se deriva la función en cada uno de los intervalos abiertos en los que esté definida.
2. Se estudia la derivabilidad de la función en los puntos de separación y en los extremos de los intervalos cerrados, si los hubiera.

Para hallar la derivabilidad en los puntos de separación se estudia primero si es continua, si no es continua no es derivable, y si es continua se calcula la derivada, bien aplicando la definición de derivada, o lo que es más fácil, por sustitución directa por la derecha y por la izquierda (si obtenemos dos valores iguales, esa es la derivada, y si obtenemos valores diferentes, entonces la función no es diferenciable).

$$h'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si} \quad x < c \quad \big[\text{o bien } x \leq c\big] \\ g'(x) & \text{si} \quad x > c \end{cases}$$

Observación 1: Si la función es derivable ponemos $x \leq c$ y si no es derivable $x < c$.

Observación 2: No debe olvidarse comprobar previamente la continuidad, ya que el hecho de que los valores laterales de la derivada sean iguales, por sí solo, no significa que la función sea derivable, sino que la función *entra* y *sale* con la misma pendiente en $x = c$, pero pudiera ser en puntos diferentes.

Ejemplo 3.16. *Derivar la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - 2x & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución. Primero hallamos la derivada en los intervalos abiertos

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

para ver si es derivable en $x = 2$, estudiamos previamente la continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} f(2^-) = 7 \\ f(2^+) = 0 \end{array}\right\} \text{no es continua} \ \Rightarrow \ \text{no es derivable}$$

Al no ser derivable en $x = 2$ no podemos poner $x \leq 2$, sino $x < 2$.
En este caso, el hecho de que $f'(2^-) = f'(2^+)$ no tiene ningún valor.

Ejemplo 3.17. *Derivar* $f(x) = x|x - 2|$

Solución. Eliminamos el valor absoluto de la fórmula expresándola a trozos.

$$f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Con lo cual la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \\ -2x + 2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Comprobamos la derivabilidad en el punto $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(2^+) = 0 \\ f(2^-) = 0 \end{array}\right\} \text{es continua} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(2^+) = 2 \\ f'(2^-) = -2 \end{array}\right\} \text{no es derivable}$$

Ejemplo 3.18. *Determinar los coeficientes a y b para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x \geq 1 \\ ax+b & si \quad x < 1 \end{cases}$$

sea derivable en el punto $x = 1$. Comprobar el resultado gráficamente.

Solución. La función derivada ha de ser $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ a & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$
para lo cual ha de cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} f(1^-) = f(1^+) \Rightarrow a+b=2 \\ f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow a=2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=0 \end{array}\right\}$$

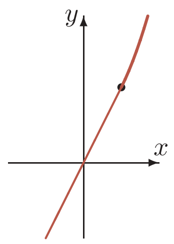


Figura 3.20: f

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

La continuidad significa que los dos tramos de la curva están empalmados. La derivabilidad significa que el empalme se ha hecho con *suavidad*, es decir, con una tangente común.

3.2.5. Derivación de funciones implícitas

Una función es una relación entre dos magnitudes. Cuando en la fórmula que las relaciona, una de las magnitudes viene despejada en función de la otra, entonces se dice que la función viene definida de manera explícita

$$y = f(x)$$

Cuando ninguna de las dos magnitudes está despejada en función de la otra, sino que las magnitudes están relacionadas mediante una ecuación, se dice que la función está definida de manera implícita.

$$F(x, y) = 0$$

Las funciones definidas de manera implícita se pueden derivar directamente, sin necesidad de despejar una de las variables. Para ello basta con tener en cuenta que la variable y es función de la x y que, por tanto, cada vez que la derivemos hay que multiplicarla por su derivada (se trata de derivar una función compuesta).

Pueden derivarse ecuaciones que no son funciones, pero que podrían descomponerse en varias funciones, sin necesidad de descomponerlas, la derivada obtenida vale para todas las funciones.

Ejemplo 3.19. *Derivar la ecuación:*

$$x^2 + y^2 = 4$$

Solución. Una manera de hacerlo sería descomponiendola en dos funciones:

$$x^2 + y^2 = 4 \to \begin{cases} y_1 = +\sqrt{4-x^2} \to y_1' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{y_1} \\ y_2 = -\sqrt{4-x^2} \to y_2' = -\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{y_2} \end{cases}$$

Sin embargo, no es necesario despejar la función, sino que podemos derivar directamente en la ecuación,

$$x^2 + y^2 = 4 \ \to \ 2x + 2yy' = 0 \ \to \ y' = \frac{-x}{y}$$

Observación: Hay que evitar derivar funciones que no existen. Por ejemplo la ecuación $x^2 + y^2 = -2$ no representa ningún punto del plano y por tanto no tiene ningún significado analítico. No obstante, al ser una expresión algebraica podríamos aplicarle las reglas de derivación y derivarla $2x+2yy' = 0$, y podríamos pensar que $y' = -x/y$, sin embargo, estas operaciones no tienen ningún sentido.

Ejemplo 3.20. *Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia:*

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

en los puntos en que $x = 3$. Comprobar el resultado gráficamente.

Solución. Derivamos de manera implícita,

$$2(x-2) + 2(y-2)y' = 0 \quad \to \quad y' = -\frac{x-2}{y-2}$$

hallamos los puntos correspondientes a $x = 3$

$$x = 3 \ \to \ 1+(y-2)^2 = 2 \ \to \ (y-2)^2 = 1 \ \to \ y-2 = \pm 1 \ \to \ y = 2\pm 1 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Con lo cual, para $x = 3$ tenemos dos puntos de la circunferencia $P(3,1)$ y $Q(3,3)$.
Hallamos la tangente en cada uno de ellos.

$$P(3,1) \to y - 1 = \frac{-1}{-1}(x-3) \to y - 1 = x - 3 \to y = x - 2$$
$$Q(3,3) \to y - 3 = \frac{-1}{1}(x-3) \to y - 3 = -x + 3 \to y = -x + 6$$

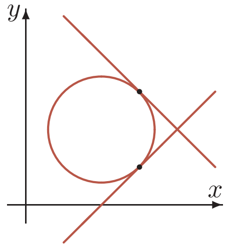


Figura 3.21: Tangentes a $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

3.2.6. Derivación logarítmica

Dada una función $y = f(x)$, la derivación logarítmica consiste en tomar ln en los dos miembros de la igualdad y derivar, después de simplificar.

La derivación logarítmica se aplica:

1. Para derivar funciones exponenciales
2. Para simplificar la derivación de productos y cocientes.

Observación: La derivación logarítmica se puede aplicar incluso si la función toma valores negativos.

Ejemplo 3.21. *Derivar* $y = x^{\operatorname{tg} x}$

Solución. Tomando ln y derivando en ambos miembros resulta:

$$\ln y = \ln x^{\operatorname{tg} x} \to \ln y = \operatorname{tg} x \ln x \to \frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x}\ln x + \operatorname{tg} x\,\frac{1}{x} \to$$

$$y' = y\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$$

Observación: La derivación logarítmica también se puede hacer aplicando la identidad logarítmica $y = e^{\ln y}$.
Así, en el ejemplo anterior tendríamos:

$$y = x^{\operatorname{tg} x} = e^{\ln x^{\operatorname{tg} x}} = e^{\operatorname{tg} x \ln x} \to$$

$$y' = e^{\operatorname{tg} x \ln x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$$

Ejemplo 3.22. *Derivar* $y = \dfrac{x^3 \operatorname{sen}^2 x}{(x+1)(x-2)^2}$

Solución. Tomando ln en los dos miembros de la igualdad

$$\ln y = \ln \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 x}{(x+1)(x-2)^2}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos resulta,

$$\ln y = 3\ln x + 2\ln(\operatorname{sen} x) - \ln(x+1) - 2\ln(x-2)$$

Derivando

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2}$$

de donde, despejando y' resulta:

$$y' = \frac{x^3 \operatorname{sen}^2 x}{(x+1)(x-2)^2}\left(\frac{3}{x} + \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2}\right)$$

3.2.7. Derivadas de orden superior

A la derivada de una función se le llama derivada primera; a la derivada de la derivada primera, derivada segunda; y así sucesivamente.

$$y'' = (y')' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Ejemplo 3.23. *Hallar la derivada tercera de la función:*

$$f(x) = x\cos x$$

Solución.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x - x\operatorname{sen} x \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x\cos x = -x\cos x - 2\operatorname{sen} x \\
f'''(x) &= -\cos x + x\operatorname{sen} x - 2\cos x = x\operatorname{sen} x - 3\cos x
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.24. *Hallar, por inducción, una fórmula para la derivada n-sima de la función:*

$$f(x) = \ln x$$

Solución.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
f''(x) &= -x^{-2} \\
f'''(x) &= +2x^{-3} \\
f^{iv}(x) &= -3\cdot 2x^{-4}
\end{aligned}$$

Luego, podemos suponer que,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

Para que quede demostrado tenemos que probar que $f^{(n+1)}(x)$ sigue la misma regla. En efecto,

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)x^{-n-1} = (-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$$

con lo que queda demostrada la proposición.

3.2.8. Aproximación lineal y notación diferencial

Aproximación lineal: Consiste en aproximar una función, en los alrededores de un punto, mediante la recta tangente a la función en ese punto. Es decir, para calcular los valores de la función en los puntos próximos a uno conocido, en vez de sustituir las coordenadas de dichos puntos en la fórmula de la función las sustituimos en la ecuación de la recta tangente, y tomamos el valor obtenido como una aproximación del buscado.

Equivale a aproximar el incremento por el diferencial.

$$\triangle f \approx df$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) \\ \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \dfrac{df}{\triangle x} \quad \to \quad df = f'(x_0)\triangle x \end{array} \right.$$

Resulta:

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\triangle x$$

O bien:

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\triangle x}$$

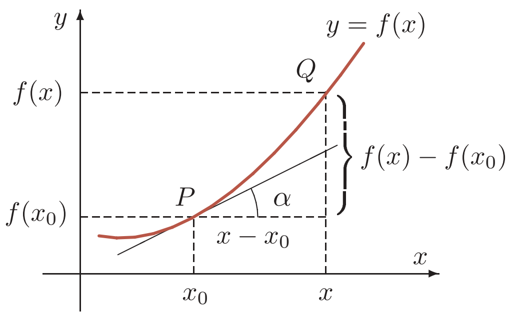


Figura 3.22: $\triangle f \approx df$

Teorema 3.3 (Teorema de aproximación lineal). *Si la función es derivable en el punto x, entonces la diferencial es una buena aproximación del incremento.*

Es decir, la curva y la recta tangente están muy pegadas en los alrededores del punto, y por lo tanto, el error en la función es mucho menor que el error en la x.

En efecto:

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f-df}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f-f'(x)\triangle x}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\Big(\frac{\triangle f}{\triangle x}-f'(x)\Big)=f'(x)-f'(x)=0$$

Notación diferencial. Cuando hablemos del diferencial de una función, en vez de $\triangle x$ usaremos dx, con lo cual resulta

$$\left.\begin{array}{l}\triangle x=dx\\ dy=f'(x)\triangle x=f'(x)dx\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

Ejemplo 3.25. *Calcular el valor aproximado de* $\operatorname{arc\,tg} 1'1$

Solución. Consideramos la función

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg} x,\ \text{cuya derivada es } f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Y teniendo en cuenta que:

$$\triangle f\approx df\Rightarrow f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\triangle x\Rightarrow f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\triangle x$$

Tomando $x=1'1$, $x_0=1$ y $\triangle x=0'1$, resulta:

$$\operatorname{arc\,tg} x\approx\operatorname{arc\,tg} x_0+\frac{1}{1+x_0^2}\triangle x$$

de donde,

$$\operatorname{arc\,tg} 1'1\approx\operatorname{arc\,tg} 1+\frac{1}{1+1^2}(0'1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}0'1=0'78+0'05=0'83$$

Ejemplo 3.26. *Dada la función* $y=\sqrt[3]{x}$

1. *Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto* $x=1$
2. *Utilizar la recta tangente para calcular el valor aproximado de* $\sqrt[3]{1'03}$

Solución. La ecuación de la recta tangente en el punto $x=1$ viene dada por.

$$y-f(1)=f'(1)\big(x-1\big)$$

Teniendo en cuenta que

$$\left\{\begin{array}{l}f(1)=\sqrt[3]{1}=1\\ f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\end{array}\right.$$

Resulta la ecuación de la recta tangente,

$$y=1+\frac{1}{3}(x-1)$$

Con lo cual el valor aproximado pedido es:

$$\sqrt[3]{1'03}\approx 1+\frac{1}{3}(1'03-1)=1+\frac{0'03}{3}=1+0'01=1'01$$

3.3. Límite de funciones

3.3.1. Infinitésimos equivalentes

Definición 3.5 (Infinitésimos). *Una función, f, se dice que es un infinitésimo en un punto x_0, si su límite en dicho punto es cero.*

$$f \text{ infinitésimo en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Definición 3.6 (Infinitésimos equivalentes). *Dos infinitésimos, en un mismo punto, se dice que son equivalentes, cuando el límite de su cociente es la unidad.*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1 \Leftrightarrow f(x) \sim g(x)$$

Teorema 3.4 (Sustitución de infinitésimos). *Cuando, en un límite, un infinitésimo esté multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente.*

Demostración. Supongamos que, en x_0, es $f(x) \sim g(x)$, será $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Y supongamos que nos encontramos con un límite en el que aparece $f(x)$ multiplicando o dividiendo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} 1 \cdot g(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)h(x)$$

Es decir, hemos sustituido $f(x)$ por $g(x)$ y el nuevo límite puede resultar más fácil que el anterior.

Proposición 3.2. *Si un infinitésimo está sumando o restando, en general, no se le puede sustituir por otro equivalente.*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm h(x)\big) \neq \lim_{x \to x_0} \big(g(x) \pm h(x)\big)$$

Existen casos muy concretos en los que se pueden aplicar infinitésimos al caso de sumas, como es el siguiente

Proposición 3.3. *La suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menor orden.*

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + x^3 + x^6) = \lim_{x \to 0} x^2$$

3.3.2. Infinitésimos más frecuentes en $z \to 0$

Trigonométricos

$$\begin{array}{rl} \operatorname{sen} z \sim z & \quad \operatorname{arc\,sen} z \sim z \\ \operatorname{tg} z \sim z & \quad \operatorname{arc\,tg} z \sim z \end{array}$$
$$1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2}$$

Exponenciales, logarítmicos, potencias y raíces

$$\ln(1+z) \sim \begin{cases} z \sim \ln(1+z) \\ e^z - 1 \sim z \\ a^z - 1 \sim z \cdot \ln a \\ (1+z)^r - 1 \sim r\, z \\ \sqrt[n]{1+z} - 1 \sim \dfrac{z}{n} \end{cases}$$

Ejemplo 3.27. *Calcular los siguientes límites:*

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} \qquad 2.\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} 2x} \qquad 3.\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty} x\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right] \qquad 5.\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \qquad 6.\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x}$$

Solución.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos x} = \frac{2}{2} = 1$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\operatorname{sen} 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+x-1)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{1-x} = \lim_{x\to 1} -\frac{1-x}{1-x} = -1$

4. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}\right] = \left[\infty\cdot 0\right] = \lim_{x\to\infty} -x\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right] =$

$$= \lim_{x\to\infty} -x\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{5}\right) = -\ln\frac{1}{5} = -(\ln 1 - \ln 5) = -(0-\ln 5) = \ln 5$$

5. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left[1+(\sqrt[n]{x}-1)\right]}{\ln\left[1+(\sqrt[m]{x}-1)\right]} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\sqrt[n]{x}}{\ln\sqrt[m]{x}} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{n}\ln x}{\frac{1}{m}\ln x} = \frac{m}{n}$$

6. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + x^3}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2$

3.3.3. Formas indeterminadas. Reglas de L'Hôpital.

Formas indeterminadas

Las reglas de L'Hôpital pretenden resolver los siete casos de indeterminación del límite:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$$

Hay que hacer notar que las Reglas de L'Hôpital sólo se pueden aplicar directamente a los dos casos $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolver los cinco casos restantes habrá que transformarlos en uno de los dos tipos anteriores.
No son indeterminaciones las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{Ac}{\infty} = 0 & 0 \cdot \text{Ac} = 0 \\
0^{+\infty} = 0 & 0^{-\infty} = \dfrac{1}{0^{+\infty}} = \infty \\
\left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0 & \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = \infty \\
(0'd)^{+\infty} = 0 & (1'd)^{+\infty} = \infty \\
\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\infty} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = \infty & \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\infty} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0 \\
(0'd)^{-\infty} = +\infty & (1'd)^{-\infty} = 0 \\
3^{+\infty} = \infty & 3^{-\infty} = 0 \\
1^0 = 1 & 7^0 = 1
\end{array}$$

Los siguientes límites no están definidos (por oscilación):

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x & \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x & \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x \\
\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \lim\limits_{x\to 0^+} \cos \dfrac{1}{x} & \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} \dfrac{1}{x} \\
\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{43} & &
\end{array}$$

Reglas de L'Hôpital

Las reglas de L'Hôpital se pueden resumir en el siguiente esquema:

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Observaciones:

1. La Regla sólo es aplicable mientras se mantiene la indeterminación $\frac{0}{0}$, o $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que antes de derivar siempre hay que comprobar.

2. Si la indeterminación se mantiene indefinidamente, entonces la regla no es aplicable.

3. En cualquier momento se pueden hacer transformaciones algebraicas o aplicar infinitésimos con objeto de simplificar las derivadas.

Formalmente una Regla de L'Hôpital puede enunciarse de la siguiente manera.

Teorema 3.5 (Regla de L'Hôpital). *Si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a, b)$ y derivables en el intervalo (a, b), con límite cero por la derecha del punto a, y además la derivada de la función g no se anula en* *ningún punto del intervalo* (a,b)*, entonces, si existe el* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *también existe el* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y además ambos coinciden*

Ejemplo 3.28. *Calcula los siguientes límites*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen} 2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2\cos 2x} = \dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1 + \frac{1}{x}}{-\pi \operatorname{sen} \pi x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x + 1}{-\pi x \operatorname{sen} \pi x} =$
$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{-\pi \operatorname{sen} \pi x - \pi^2 x \cos \pi x} = \frac{-1}{\pi^2}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1 + 2x} = \dfrac{1}{1} = 1$

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^2 + x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{2x + 1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\ln x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{3x^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{3} = +\infty$

Simplificación del límite. Siempre que sea posible, antes de abordar la Regla de L'Hôpital, es conveniente intentar simplificar el límite con objeto de que no se complique con la derivación. Para ello se sacan fuera del límite los factores que tengan un valor numérico.

Ejemplo 3.29. *Calcular el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + \cos x)(x^3 - 3) \operatorname{sen} x}{(x^2 - x) \cos x}$$

Solución.
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + \cos x)(x^3 - 3) \operatorname{sen} x}{(x^2 - x) \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \cos x)(x^3 - 3)}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 - x} =$$

$$= \frac{2(-3)}{1} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x - 1} = (-6)\left(\frac{1}{-1}\right) = 6$$

El primer límite lo hemos resuelto directamente por sustitución, y sólo hemos aplicado L'Hôpital en el segundo limite, lo que ha simplificado notablemente los cálculos.

Indeterminaciones del tipo $0 \cdot \infty$

Se transforman en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, o $\frac{\infty}{\infty}$, mediante operaciones algebraicas,o bien, mediante las siguientes transformaciones

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \qquad f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

Ejemplo 3.30. *Calcular:* $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln \dfrac{x-1}{x+1}$

Solución.

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln \frac{x-1}{x+1} = \left[\infty \cdot 0\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \dfrac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x+1}{x-1} \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{2x} = \frac{-4}{2} = -2$$

Indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$

Se transforman en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, o $\frac{\infty}{\infty}$, mediante operaciones algebraicas, como puede ser: buscando un común denominador, multiplicando y dividiendo por el conjugado; o bien, mediante las siguientes transformaciones:

$$A - B = A\left(1 - \frac{B}{A}\right) = \frac{1 - \frac{B}{A}}{\frac{1}{A}}$$

$$A - B = AB\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) = \frac{\frac{1}{B} - \frac{1}{A}}{\frac{1}{AB}}$$

Ejemplo 3.31. *Calcular los siguientes límites:*

$$1.\ \lim_{x \to +0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) \qquad 2.\ \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$$

Solución.

1. $$\lim_{x \to +0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \left[\infty - \infty\right] = \lim_{x \to +0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x \to +0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to +0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to +0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

2. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}-1\right)=$$
$$=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-3}{x^2\cdot 2\sqrt{1+\frac{3}{x}}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{2x^2\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=\frac{3}{2}$$

Este límite también podía haberse resuelto multiplicando por el conjugado, o bien, aplicando infinitésimos.

Indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞

Se transforman en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, o $\frac{\infty}{\infty}$, tomando logaritmos neperianos.
En efecto, llamando y al límite en cuestión:

$$y=\lim f(x)^{g(x)}$$

tomando ln en ambos miembros y operando, resulta,

$$\ln y=\ln\lim f(x)^{g(x)}=\lim\ln f(x)^{g(x)}=\lim g(x)\ln f(x)$$

Que es un límite del tipo $0\cdot\infty$, y una vez resuelto, resulta:

$$y=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

El límite también puede resolverse aplicando directamente la identidad logarítmica $y=e^{\ln y}$.

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\ln\lim f(x)^{g(x)}}=e^{\lim\ln f(x)^{g(x)}}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

El tercer caso 1^∞ admite una forma simplificada de resolución que elimina el ln y puede facilitar la derivación, en efecto, aplicando infinitésimos, resulta,

$$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln(1+f(x)-1)}=e^{\lim g(x)(f(x)-1)}$$

o bien, teniendo en cuenta la definición del número e

$$e=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

resulta,

$$\lim f(x)^{g(x)}=\left[1^\infty\right]=\lim(1+f(x)-1)^{g(x)}=$$
$$=\lim(1+f(x)-1)^{\frac{1}{f(x)-1}g(x)[f(x)-1]}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$$

Ejemplo 3.32. *Calcular, por los dos métodos, el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

Solución.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1^\infty\right]$

   Llamamos y al límite: $y = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, tomamos ln y operamos, con lo que resulta,

$$\ln y = \ln \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x\cos x} = $$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x\cos x} = \frac{-1}{2}$$

   de donde, el límite pedido es:

$$y = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

2. Por el otro método sería:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x - 1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

Ejemplo 3.33. *Calcular:* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x}$

Solución. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x} = \left[0^0\right]$

Llamando y al límite: $y = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x}$, tomando ln y operando, resulta,

$$\ln y = \ln \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} == \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

de donde,

$$y = e^0 = 1$$

Ejemplo 3.34. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$ 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$ 3. $\lim\limits_{x\to -\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$

Solución.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}} = (1+2^0+3^0)^{\frac{1}{0}} = 3^{\frac{1}{0}} = \begin{cases} 3^{\frac{1}{0^+}} = 3^{+\infty} = +\infty \\ 3^{\frac{1}{0^-}} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0 \end{cases}$

   luego el límite no existe.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}} = (1+2^{+\infty}+3^{+\infty})^0 = \left[\infty^0\right] \to$

$$y = \lim_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2^x+3^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1+2^x+3^x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1+2^x+3^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2^x}{3^x}\ln 2+\dfrac{3^x}{3^x}\ln 3}{\dfrac{1}{3^x}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\left(\dfrac{3}{3}\right)^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{0+\ln 3}{0+0+1} = \ln 3$$

   luego,

$$\ln y = \ln 3 \ \to\ y = 3$$

   En este ejemplo no ha sido posible aplicar L'Hôpital por segunda vez, ya que con dicha regla no es posible "romper"la indeterminación.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}} = (1+0+0)^0 = 1^0 = 1$

Ejemplo 3.35. *Calcular:*

$$\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$$

Solución.

$$\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\left(1-\frac{x}{a}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)}{\cot\frac{\pi x}{2a}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{-1}{a}}{\frac{\pi}{2a}\frac{-1}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2a}}}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2a\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{2a}}{\pi a}} = e^{\frac{2}{\pi}}$$

Ejemplo 3.36. *Estudiar el dominio y continuidad de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\cos\frac{1}{x}}{3+e^{\frac{1}{x}}} & si \quad x \neq 0 \\ \dfrac{2}{3} & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución.

1. Dominio. La función está definida en todo $\mathbb{R}$, ya que si $3 + e^{\frac{1}{x}} = 0$, resulta $e^{\frac{1}{x}} = -3$ que no es posible.

2. Continuidad. La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{3+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2+Ac}{\infty} = \frac{Ac}{\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2+\cos\frac{1}{x}}{3+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2+Ac}{3+0} = \frac{\text{Sin límite}}{3} = \text{Sin límite}$$

Luego la función no es continua en $x = 0$.

Ejemplo 3.37. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & si \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{6} & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Hallar $f'(0)$ y $f''(0)$

Solución.
Continuidad: La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo quizás en $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\cdot 3x^2} = \frac{1}{6}$$

luego la función es continua en todo $\mathbb{R}$.
Derivada en $x = 0$: Aplicamos la definición.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} - \dfrac{1}{6}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x - 6\operatorname{sen} x - x^3}{6x^4} =$$
$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{6 - 6\cos x - 3x^2}{24x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{sen} x - 6x}{72x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{6\cos x - 6}{144x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-6\operatorname{sen} x}{144} = 0$$

Derivada segunda en $x = 0$: Hallamos $f'(x)$, para $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{(1-\cos x)x^3 - (x - \operatorname{sen} x)3x^2}{x^6} = \frac{x - x\cos x - 3x + 3\operatorname{sen} x}{x^4} =$$
$$= \frac{-2x - x\cos x + 3\operatorname{sen} x}{x^4}$$

Para calcular $f''(0)$, aplicamos la definición de derivada:

$$f''(0) = \text{lím}_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \text{lím}_{x\to 0} \frac{\dfrac{-2x - x\cos x + 3\,\text{sen}\, x}{x^4} - 0}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x - x\cos x + 3\,\text{sen}\, x}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-2 - \cos x + x\,\text{sen}\, x + 3\cos x}{5x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2 + 2\cos x + x\,\text{sen}\, x}{5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{sen}\, x + \text{sen}\, x + x\cos x}{20x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\,\text{sen}\, x + x\cos x}{20x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + \cos x - x\,\text{sen}\, x}{60x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\,\text{sen}\, x}{60x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{60x^2} = \frac{-1}{60}$$

Ejemplo 3.38. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Hallar $f'(0)$ y $f''(0)$.

Solución.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\text{sen}\, x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{-\,\text{sen}\, x}{2} = 0$$

luego,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \text{sen}\, x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

de donde,

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x\cos x - \text{sen}\, x}{x^2} - 0}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \text{sen}\, x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\,\text{sen}\, x - \cos x}{3x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\,\text{sen}\, x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3x^2} = \frac{-1}{3}$$

3.4. Límite de sucesiones

Una sucesión es un conjunto de infinitos números ordenados según algún criterio. ejemplo,

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\} \to 0$$

$$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\} \to 1$$

$$\{1, 0, -1, 0, 1, \cdots, \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}, \cdots\} \to \text{Sin límite}$$

Las sucesiones se pueden considerar como funciones, donde el primer conjunto es el de los números naturales.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots & & \mathbb{N} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & & \downarrow \\ \{ & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \cdots & \} & \mathbb{R} \end{array}$$

La gráfica de una sucesión es un conjunto de infinitos puntos separados (aislados) unos de otros.

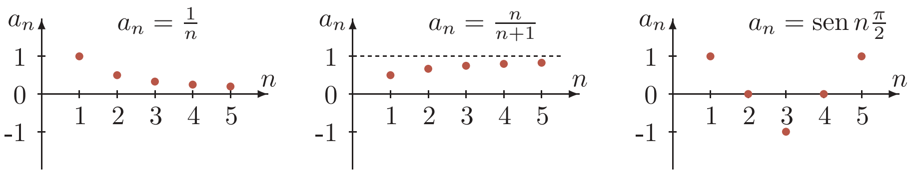


Figura 3.23:

Límite de sucesiones considerándolas como funciones

Si unimos los puntos que representan una sucesión obtenemos la gráfica de una función. Sin embargo, podemos obtener infinitas funciones que contienen los puntos de una misma sucesión. Lo normal es coger la función que tiene la misma fórmula que la sucesión, es decir considerar que la variable n es continua y no discreta.

Si la función que representa a la sucesión tiene límite, ese es el límite de la sucesión, pero si la función no tiene límite, entonces la sucesión si puede tenerlo.

Por tanto, se pueden aplicar los infinitésimos y las reglas de L'Hôpital a las sucesiones, el límite que encontremos será el límite de la sucesión y si la sucesión considerada como función no tiene límite entonces habrá que aplicar otro criterio.

Ejemplo 3.39. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$

2. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{3n}\right)^{\frac{3n}{-1}}\right]^{\frac{-1}{3n}2n} = e^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$

3. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln 5n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{5/5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{5n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$

4. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+3)}{\ln n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+3)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+3} = 1$

5. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n \cdot \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln n}{n} = 0$

3.5. Estudio local de una función. Polinomio de Taylor.

3.5.1. Introducción.

El valor de un polinomio se puede calcular en cualquier punto, sin más que operar.
Por ejemplo, si el polinomio es $p(x) = 3+2x+x^2$, podemos calcular su valor en el punto $0'1$, sin más que realizar una serie de operaciones elementales, en efecto:

$$p(0'1) = 3 + 2 \cdot 0'1 + 0'1^2 = 3 + 0'2 + 0'01 = 3'21$$

Sin embargo, el valor de las funciones no polinómicas lo conocemos en unos puntos, pero no en otros. Por ejemplo, si la función es $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, sabemos sus valores en algunos puntos, pero en los demás necesitaremos una calculadora. En efecto, $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$, pero $\operatorname{arc\,tg} 1'1 =?$ no sabemos cuánto puede valer.

Esto hace que las funciones polinómicas sean más cómodas de manejar que las demás funciones.

Planteamiento del problema: Con la aproximación local pretendemos calcular el valor aproximado de una función en un punto, conocido el valor exacto de la función en un punto cercano.

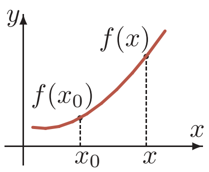


Figura 3.24:

Conocemos $f(x_0)$
Queremos calcular el valor, aunque sea aproximado, de $f(x)$, siendo x un punto cercano a x_0.

La aproximación mediante la recta tangente y mediante el teorema del valor medio, suelen ser malas aproximaciones, en cuanto nos alejamos un poco del punto.

Con el polinomio de Taylor lo que buscamos es una función polinómica que coincida, lo más posible, con la función dada, al menos en los alrededores del punto. Buscamos una función polinómica que se acerque a la curva más que la recta tangente.

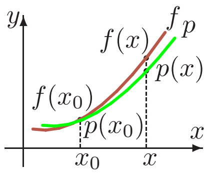


Figura 3.25:

p va a ser un polinomio que en el punto x_0 va a coincidir con f y en los alrededor de x_0 va a ser muy cercano a f

$$f(x_0) = p(x_0) \to f(x) \approx p(x)$$

Como valor aproximado de la función en el punto x tomaremos el valor del polinomio en dicho punto.

3.5.2. Algunas propiedades de los polinomios

Desarrollo de un polinomio en potencias de $(x - x_0)$

El polinomio $p(x) = 4 - x - 2x^2 + x^3$ se dice que está centrado en el origen.
El polinomio $p(x) = 2 + 3(x+1) - 2(x+1)^2 - 4(x+1)^3$ que está centrado en $x_0 = -1$
El polinomio $p(x) = 3 + 2(x-2) + 4(x-2)^2 - 5(x-2)^3$ que está centrado en $x_0 = 2$

Para centrar un polinomio en el origen basta con desarrollar los paréntesis y simplificar la expresión. Centrar un polinomio en un punto x_0 es un poco más laborioso. No obstante, toda función polinómica se puede expresar mediante un polinomio centrado en cualquier punto mediante la sustitución:

$$x = (x - x_0) + x_0$$

Ejemplo 3.40. *Expresar $p(x) = 4 - x + 2x^2 + x^3$ mediante un polinomio centrado en $x_0 = 2$*

Solución. Hacemos el cambio $x = (x-2) + 2$ y resulta:
$p(x) = 4 - (x-2) - 2 + 2\big[(x-2)+2\big]^2 + \big[(x-2)+2\big]^3 =$

$$= 4-2-(x-2)+2\big[(x-2)^2+4(x-2)+4\big]+\big[(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8\big]$$

De donde resulta:

$$p(x) = 18 + 19(x-2) + 8(x-2)^2 + (x-2)^3$$

El desarrollo de las potencias de estos paréntesis puede resultar muy laborioso, de ahí que se haya buscado otro método mucho más simple para centrar un polinomio en cualquier punto. Este método se llama desarrollo de Taylor y se basa en el conocimiento del significado de los coeficientes de los polinomios.

Relación entre los coeficientes de un polinomio y los valores de sus derivadas. Fórmula de Mac Laurin.

Ejemplo 3.41. *Hallar la relación que existe entre los coeficientes de la función polinómica $p(x) = 2 + 3x + 5x^2$ y los valores de dicha función y de sus derivadas el el origen.*

Solución. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{ll} p(x) = 2 + 3x + 5x^2 & p(0) = 2 \\ p'(x) = 3 + 10x & p'(0) = 3 \\ p''(x) = 10 & p''(0) = 10 \end{array}$$

Resulta que la función polinómica se puede expresar de la siguiente forma:

$$p(x) = 2 + 3x + 5x^2 = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2}x^2$$

A esta expresión se le llama Fórmula de Taylor en el origen o fórmula de Mac Laurin, y se puede generalizar para cualquier polinomio.

Teorema 3.6. *Toda función polinómica*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

se puede expresar de la siguiente forma:

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Demostración. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{ll} p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n & p(0) = a_0 \\ p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} & p'(0) = a_1 \\ p''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} & p''(0) = 2a_2 \\ \cdots & \cdots \\ p^{(n)}(x) = n!a_n & p^{(n)}(0) = n!a_n \end{array}$$

Resulta,

$$a_0 = p(0),\ a_1 = p'(0),\ a_2 = \frac{p''(0)}{2},\ a_3 = \frac{p'''(0)}{3!},\ a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$$

Con lo cual la función polinómica se puede expresar de la siguiente forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Es decir,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

□

Ejemplo 3.42. *Halla un polinomio de* 4^o *grado que cumpla:*

$$p(0) = 1, \quad p'(0) = 0, \quad p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 6, \quad p^{iv}(0) = 48$$

Solución. Teniendo en cuenta que:

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2}x^2 + \frac{p'''(0)}{6}x^3 + \frac{p^{iv}(0)}{24}x^4$$

resulta:

$$p(x) = 1 + x^3 + 2x^4$$

Relación entre los coeficientes de un polinomio, centrado en el punto x_0 y los valores de sus derivadas en dicho punto. Fórmula de Taylor

Ejemplo 3.43. *Dado la función polinómica* $p(x) = 2 + 3x + 5x^2$

1. *Expresarla en potencias de* $x - 1$.
2. *Hallar la relación que existe entre los nuevos coeficiente y los valores de la función y de sus derivadas en el punto* $x = 1$.

Solución. Haciendo el cambio $x = (x-1) + 1$ resulta:

$$p(x) = 2 + 3x + 5x^2 = 2 + 3(x-1) + 3 + 5\Big[(x-1)+1\Big]^2 =$$
$$= 2 + 3(x-1) + 3 + 5\Big[(x-1)^2 + 2(x-1) + 1\Big] = 10 + 13(x-1) + 5(x-1)^2$$

Y por otro lado tenemos:

$$\begin{array}{ll} p(x) = 2 + 3x + 5x^2 & p(1) = 10 \\ p'(x) = 3 + 10x & p'(1) = 13 \\ p''(x) = 10 & p''(1) = 10 \end{array}$$

De donde resulta que la función polinómica se puede expresar de la siguiente forma:

$$p(x) = 2+3x+5x^2 = 10+13(x-1)+5(x-1)^2 = p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2}(x-1)^2$$

A esta expresión se le llama Fórmula de Taylor en el punto $x = 1$, y se puede generalizar para cualquier polinomio y cualquier punto.

Teorema 3.7. *Toda función polinómica*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

se puede expresar de la siguiente forma:

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x-x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Demostración. Haciendo el cambio $x = (x - x_0) + x_0$ podemos expresar el polinomio en potencias de $x - x_0$ y resulta:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n =$$
$$= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n$$

Con lo cual,

$$\begin{array}{ll} p(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n & p(x_0) = b_0 \\ p'(x) = b_1 + 2b_2(x-x_0) + 3b_3(x-x_0)^2 + \cdots + nb_n(x-x_0)^{n-1} & p'(x_0) = b_1 \\ p''(x) = 2b_2 + 3\cdot 2b_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2} & p''(x_0) = 2b_2 \\ \cdots & \cdots \\ p^{(n)}(x) = n!b_n & p^{(n)}(x_0) = n!b_n \end{array}$$

de donde resulta,

$$b_0 = p(x_0),\ b_1 = p'(x_0),\ b_2 = \frac{p''(x_0)}{2},\ b_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!},\ b_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Con lo cual la función polinómica se puede expresar de la siguiente forma:

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Es decir,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \square$$

Ejemplo 3.44. *Utilizar la fórmula de Taylor para expresar en potencias de $x - 2$ el polinomio:*

$$p(x) = 5 - x + 2x^2 - x^3 + x^4$$

Solución. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{ll}
p(x) = 5 - x + 2x^2 - x^3 + x^4 & p(2) = 19 \\
p'(x) = -1 + 4x - 3x^2 + 4x^3 & p'(2) = 27 \\
p''(x) = 4 - 6x + 12x^2 & p''(2) = 40 \\
p'''(x) = -6 + 24x & p'''(2) = 42 \\
p^{iv}(x) = 24 & p^{iv}(2) = 24
\end{array}$$

Resulta el siguiente polinomio de Taylor,

$$\begin{aligned}
p(x) &= p(2) + p'(2)(x-2) + \frac{p''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{p'''(2)}{6}(x-2)^3 + \frac{p^{iv}(2)}{24}(x-2)^4 = \\
&= 19 + 27(x-2) + \frac{40}{2}(x-2)^2 + \frac{42}{6}(x-2)^3 + \frac{24}{24}(x-2)^4 = \\
&= 19 + 27(x-2) + 20(x-2)^2 + 7(x-2)^3 + (x-2)^4
\end{aligned}$$

3.5.3. Polinomio de Taylor de una función no polinómica

Dada una función f se trata de encontrar un polinomio de grado n que tome aproximadamente los mismos valores que f en los alrededores de un punto x_0.

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ p_n(x) \end{array}\right\} f(x) \approx p_n(x) \quad x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$$

Suponemos conocido el valor de la función y el de sus derivadas en el punto x_0 y queremos calcular el valor aproximado de la función en un punto cercano x, utilizando para ello una función polinómica de aproximación. Como función polinómica de aproximación, lo lógico es buscar una función polinómica que

pase por el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$, que pase con la misma pendiente que la función f, que pase con la misma concavidad, etc... Es evidente que en cuanto en más condiciones coincidan la función f y la función polinómica p_n a su paso por el punto (x_0, y_0), en más se aproximarán al alejarnos del punto.
Por eso, la función polinómica de aproximación deberá cumplir:

$$p_n(x) \approx f(x) \iff$$
$$\begin{cases} p_n(x_0) = f(x_0) \text{ Las dos pasan por el punto } (x_0, y_0) \\ p_n'(x_0) = f'(x_0) \text{ Las dos pasan por } (x_0, y_0) \text{ con la misma pendiente} \\ p_n''(x_0) = f''(x_0) \text{ Las dos pasan por } (x_0, y_0) \text{ con la misma concavidad} \\ \cdots \\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \text{ Las dos pasan por } (x_0, y_0) \text{ con otras coincidencias} \end{cases}$$

Un polinomio que cumpla estas condiciones es fácil encontrar mediante la fórmula de Taylor, en efecto:

$$p_n(x) = p_n(x_0) + p_n'(x_0)(x - x_0) + \frac{p_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{p_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Y teniendo en cuenta los valores asignados al polinomio resulta:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Un polinomio, así construido, es de esperar que se aproxime suficientemente a la función f, al menos en los alrededores del punto x_0, y también cabe esperar que cuanto mayor sea el grado n del polinomio mayor será la aproximación. Por lo que podemos asegurar que:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Que se puede expresar de la forma:

$$\boxed{f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

y es el polinomio de Taylor para una función no polinómica.

Observaciones:

1. El n-simo polinomio será de grado $\leq n$, ya que el último coeficiente puede ser cero, al haberlo definido como $f^{(n)}(x_0)$, y la función f no es polinómica, por lo que su derivada puede tomar cualquier valor.

2. El primer polinomio de Taylor siempre coincide con la recta tangente a la curva dada en el punto x_0. En efecto, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la ecuación de la recta tangente.

3.5.4. Polinomio de Taylor de las funciones elementales

Ejemplo 3.45. *Hallar el* 5^o *polinomio de MacLaurin de las siguientes funciones y generalizarlo para el n-simo polinomio.*

$$1.\quad f(x)=e^x \qquad 2.\quad f(x)=\operatorname{sen} x \qquad 3.\quad f(x)=\cos x$$

Solución. El 5^o polinomio de Taylor en el origen para una función f viene definido por:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\frac{f^{iv}(0)}{24}x^4+\frac{f^{v}(0)}{120}x^5$$

Por consiguiente:

1. $f(x)=e^x$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=e^x & f(0)=1 \\ f'(x)=e^x & f'(0)=1 \\ f''(x)=e^x & f''(0)=1 \\ f'''(x)=e^x & f'''(0)=1 \\ f^{iv}(x)=e^x & f^{iv}(0)=1 \\ f^{v}(x)=e^x & f^{v}(0)=1 \end{array}\right\}$$

Resulta el siguiente polinomio de Taylor,
$$e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}$$
y de manera general
$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

2. $f(x)=\operatorname{sen} x$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=\operatorname{sen} x & f(0)=0 \\ f'(x)=\cos x & f'(0)=1 \\ f''(x)=-\operatorname{sen} x & f''(0)=0 \\ f'''(x)=-\cos x & f'''(0)=-1 \\ f^{iv}(x)=\operatorname{sen} x & f^{iv}(0)=0 \\ f^{v}(x)=\cos x & f^{v}(0)=1 \end{array}\right\}$$

Resulta el siguiente polinomio,
$$\operatorname{sen} x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$
y de manera general
$$\operatorname{sen} x \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

3. $f(x)=\cos x$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x)=\cos x & f(0)=1 \\ f'(x)=-\operatorname{sen} x & f'(0)=0 \\ f''(x)=-\cos x & f''(0)=-1 \\ f'''(x)=\operatorname{sen} x & f'''(0)=0 \\ f^{iv}(x)=\cos x & f^{iv}(0)=1 \\ f^{v}(x)=-\operatorname{sen} x & f^{v}(0)=0 \end{array}\right\}$$

Resulta el siguiente polinomio,
$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$
y de manera general
$$\cos x \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Ejemplo 3.46. *Hallar el* 4^o *polinomio de MacLaurin de la función:*

$$f(x)=(1+x)^r$$

Generalizarlo para el n-simo polinomio, y aplicarlo para calcular:

$$(1+x)^{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{1+x},\quad \sqrt{1+x},\quad (1+x)^3$$

Solución.

$$\begin{array}{ll} f(x)=(1+x)^r & f(0)=1 \\ f'(x)=r(1+x)^{r-1} & f'(0)=r \\ f''(x)=r(r-1)(1+x)^{r-2} & f''(0)=r(r-1) \\ f'''(x)=r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3} & f'''(0)=r(r-1)(r-2) \\ f^{iv}(x)=r(r-1)(r-2)(r-3)(1+x)^{r-4} & f^{iv}(0)=r(r-1)(r-2)(r-3) \end{array}$$

Resulta el siguiente polinomio de Taylor,

$$(1+x)^r \approx 1+r\,x+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}x^4$$

y de manera general el n-simo polinomio será:

$$(1+x)^r \approx 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k$$

de donde resulta:

$$(1+x)^{\sqrt{2}} \approx 1+\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!}x^3+ \\ +\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-3)}{4!}x^4$$

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}\approx 1+\frac{-1(-2)}{2!}x^2+\frac{-1(-2)(-3)}{3!}x^3+\frac{-1(-2)(-3)(-4)}{4!}x^4= \\ =1-x+x^2-x^3+x^4$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}\approx 1+\frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}}{3!}x^3+\frac{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}}{4!}x^4= \\ =1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4$$

$$(1+x)^3=1+3x+\frac{3\cdot 2}{2!}x^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!}x^3-\frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{4!}x^4=1+3x+3x^2+x^3+0$$

Si n es un entero y positivo el desarrollo se interrumpe, ya que siempre llegará un momento en que $n-k+1=0$, precisamente para $k=n+1$. Es decir, el desarrollo de $(1+x)^n$ sólo llegará hasta el término x_n, ya que los restantes se anulan. Se obtiene así, el Binomio de Newton.

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

El polinomio de Taylor del cociente de dos polinomios

Existen funciones para las que el polinomio de Taylor se puede obtener de una manera artificial, sin necesidad de tener que hacer las derivadas de la función, es el caso del cociente de dos polinomios, cuyo polinomio de Taylor se puede obtener haciendo la división de los polinomios, pero ordenados de menor a mayor.

Ejemplo 3.47. *Hallar el 3º polinomio de Taylor de la función:*

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Solución. Hacemos la división ordenando los polinomios de menor a mayor grado.

$$\begin{array}{lll}
3+2x & & \left| \; -1+x \right. \\
\underline{-3+3x} & & \left| \; \overline{-3-5x-5x^2-5x^3} \right. \\
\quad 5x & & \\
\quad \underline{-5x+5x^2} & & \\
\qquad 5x^2 & & \\
\qquad \underline{-5x^2+5x^3} & & \\
\qquad\quad 5x^3 & & \\
\qquad\quad \underline{-5x^3+5x^4} & & \\
\qquad\qquad 5x^4 & &
\end{array}$$

Con lo cual resulta el siguiente polinomio de Taylor:

$$\frac{2x+3}{x-1} \approx -3-5x-5x^2-5x^3$$

Polinomio de Taylor de funciones compuestas

Para calcular el polinomio de Taylor de las funciones compuestas, en vez de derivar directamente dichas funciones, en la generalidad de los casos, resulta mucho más fácil de calcular dicho polinomio transformando el polinomio de Taylor de las funciones elementales que la componen

Ejemplo 3.48. *Hallar el 4º polinomio de Taylor de la función:*

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Solución. En vez de derivar directamente la función $f(x)$, resulta más conveniente transformar el polinomio de Taylor de las función $y = e^x$. En efecto, tenemos que,

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

de donde, sustituyendo x por $-x^2$, resulta

$$f(x) = e^{-x^2} \approx 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2} + \cdots 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots$$

Ejemplo 3.49. *Hallar el 3º polinomio de Taylor de la función:*

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$$

Solución. En vez de derivar directamente la función $f(x)$, resulta más conveniente transformar el polinomio de Taylor de las función $y = \operatorname{sen} x$. En efecto, tenemos que,

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

de donde, sustituyendo x por el propio desarrollo de $\operatorname{sen} x$, es decir, por $x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$, resulta

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) \approx [x - \frac{x^3}{3!} + \cdots] - \frac{[x - \frac{x^3}{3!} + \cdots]^3}{3!} + \cdots \approx$$
$$\approx x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \approx x - \frac{2x^3}{3!} + \cdots = x - \frac{x^3}{3} + \cdots$$

3.5.5. Resto de Taylor

Con el término *Resto de Taylor* nos referimos al error que se comete al aproximar una función no polinómica mediante su polinomio de Taylor. Si aproximamos la función f mediante el n-simo polinomio de Taylor, el error vendrá dado por la diferencia de los valores que toman la función y el polinomio.

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) \\ p_n(x) \end{array}\right\} f(x) \approx p_n(x) \Rightarrow |R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)|$$

Teorema 3.8 (Teorema del Resto). *Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f^{(n)}$ es continua en $[a, b]$ y $f^{(n+1)}$ existe en (a, b). Sean x y x_0 puntos de $[a, b]$, siendo $x \neq x_0$. Y sea*

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Entonces existe un punto c entre x y x_0 tal que el error que se comete al aproximar la función f mediante el n-simo polinomio de Taylor en un entorno del punto x_0 viene definido por la fórmula:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}} \tag{3.2}$$

A esta expresión del Resto de Taylor se le llama expresión de Lagrange. Existen otras expresiones para calcular el error, sin embargo, ésta es la más fácil de recordar puesto que se trata del término siguiente del desarrollo, salvo que la derivada se toma en un punto intermedio c.

3.5.6. Aplicaciones de la fórmula de Taylor a cálculos aproximados

Para hallar el valor de una función en un punto x_1 se desarrolla la función en un punto cercano x_0 y se toma, como valor aproximado de la función, el que tome el polinomio.

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) \\ p_n(x) \text{ en } x_0 \text{ cercano a } x_1 \end{array}\right\} f(x_1) \approx p_n(x_1)$$

El error cometido en la aproximación, según (3.2), vendrá dado por:

$$R_n(x_1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}$$

Como el punto c no está determinado, el error no se conoce con exactitud, pero sí se puede conocer una acotación del error teniendo en cuenta que c está entre x_0 y x_1.

Ejemplo 3.50. *Utilizar el* 2^o *polinomio de Taylor para calcular aproximadamente* $\mathrm{e}^{0'2}$*. Indicar el error cometido.*

Solución.

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\ ---- & \\ f'''(x) = e^x & f'''(c) = e^c \end{array}\right\} \begin{array}{l} e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \\ \\ e^{0'2} \approx 1 + 0'2 + \dfrac{0'04}{2} = 1'22 \end{array}$$

Para calcular el error cometido tenemos en cuenta que:

$$0 < c < 0'2 \to 0 < c < 1 \Rightarrow e^0 < e^c < e < 3 \to e^c < 3$$

con lo cual,

$$|R_n(0'2)| = |\frac{e^c}{6} 0'2^3| < \frac{3 \cdot 0'008}{6} = 0'004$$

Ejemplo 3.51. *Aproximar* $\sqrt[3]{e}$ *con un error menor que* $0'01$

Solución. Necesitamos una función para hacer su desarrollo de Taylor, y un punto donde hacerlo. De las distintas opciones que podemos pensar para calcular la raíz dada, elegimos la más fácil.

$$\sqrt[3]{e} = e^{1/3} \quad \to \quad f(x) = e^x \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1 \\ ---- & \\ f^{(n+1)}(x) = e^x & f^{(n+1)}(c) = e^c \end{array}\right\} \begin{array}{l} e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} \\ \\ R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

Teniendo en cuenta que c está situado entre x_0 y x_1, resulta,

$$0 < c < \frac{1}{3} < 1 \to e^0 < e^c < e < 3 \Rightarrow e^c < 3$$

Luego, tendrá que ser:

$$\left|R_n(\frac{1}{3})\right| = \left|\frac{e^c(\frac{1}{3})^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{3(\frac{1}{3})^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{3^n(n+1)!} < 0'01 = \frac{1}{100}$$

Es decir hay que encontrar el valor de n que cumple,

$$3^n(n+1)! > 100$$

Esto se hace probando, es decir dando valores a n.

$$\begin{aligned}
&n = 1 \to 3 \cdot 2 = 6 < 100\\
&n = 2 \to 3^2 \cdot 3! = 9 \cdot 6 = 54 < 100\\
&n = 3 \to 3^3 \cdot 4! = 27 \cdot 24 = 648 > 100 \Rightarrow n = 3
\end{aligned}$$

Luego el polinomio de Taylor buscado es el tercero,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Con lo cual resulta

$$\sqrt[3]{e} = e^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{(\frac{1}{3})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{3})^3}{3!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} = 1'39$$

Ejemplo 3.52. *Estimar* $\operatorname{sen} 10^o$ *usando el tercer polinomio de Taylor en* $x_0 = 0$*. Hallar una cota del error cometido.*

Solución.

$$\left.\begin{array}{ll}
f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0\\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1\\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0\\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1\\
- - -- & \\
f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x & f^{iv}(c) = \operatorname{sen} c
\end{array}\right\} \begin{array}{l}
\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6}\\[2ex]
R_3(x) = \dfrac{\operatorname{sen} c}{24} x^4
\end{array}$$

Ahora bien, el valor de x que aparece en las operaciones no puede venir medido en grados, sino que, para operar, el ángulo ha de expresarse en radianes.
Teniendo en cuenta que $10^{\text{o}} = \frac{\pi}{18} rad.$ resulta:

$$\operatorname{sen} 10^{\text{o}} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{18} rad. \approx \frac{\pi}{18} - \frac{\pi^3}{18^3 \cdot 6} = 0'1736468$$

Y el error cometido en la aproximación viene acotado de la siguiente forma:

$$\left|R_3(\frac{\pi}{18})\right| = \left|\frac{\operatorname{sen} c}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4\right| \leq \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 = 0'00004$$

3.5.7. Aplicaciones de la Fórmula de Taylor al cálculo de límites

Consiste en sustituir las funciones que intervienen en el límite por sus desarrollos de Taylor. En la práctica, para simplificar los cálculos, solamente se sustituyen por la parte del desarrollo de Taylor que realmente influye en el límite. El problema será determinar cuántos términos del desarrollo se deben utilizar.

Ejemplo 3.53. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

Solución.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \cdots) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3}{6x^3} = \frac{-1}{6}$$

Ejemplo 3.54. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

Solución. Teniendo en cuenta los desarrollos de las funciones que intervienen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \qquad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$$

resulta,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) - 2x}{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{6}} = 2$$

Ejemplo 3.55. *Calcular, si existe, el valor de* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x^2)}{x \cdot \operatorname{sen} x + 2 \cdot \cos x - 2}$ *utilizando polinomios de Taylor.*

Solución. Teniendo en cuenta el desarrollo en series de potencias de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$$

tenemos.

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \cdots$$

de donde, sustituyendo las funciones por sus desarrollos en series, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x\cdot \operatorname{sen} x + 2\cdot\cos x - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{x^4}{2}+\cdots\right)}{x\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots\right)-2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{\frac{-x^4}{6}+\frac{x^4}{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{\frac{-2x^4}{12}+\frac{x^4}{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{2}}{\frac{-x^4}{12}} = -6$$

3.6. Extremos de funciones de una sola variable

3.6.1. Máximos y mínimos absolutos

a) En Intervalos cerrados

Supongamos que la función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.

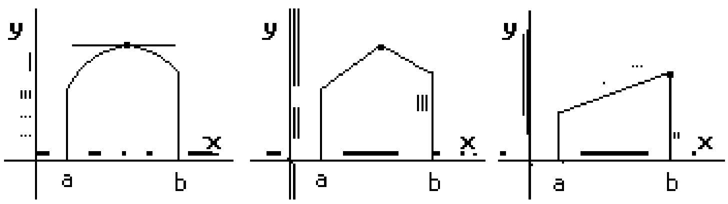


Figura 3.26: Puntos críticos

El máximo y el mínimo absoluto solamente pueden estar situados:

1. En puntos donde $f'(x) = 0$
2. En puntos donde $f'(x)$ no está definida
3. En los extremos del intervalo.

Puntos críticos de una función: Se llaman puntos críticos de una función a los puntos en los que la derivada sea nula o no esté definida.

Cálculo del máximo y del mínimo absoluto. Para hallar el máximo y el mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado,

1. Se hallan los puntos críticos,

2. Se hallan los valores de la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo. El mayor valor obtenido es el máximo absoluto y el menor el mínimo.

Observación: Si la función no es continua el método anterior no es válido, ya que los valores de la función en los puntos críticos no determinan nada.

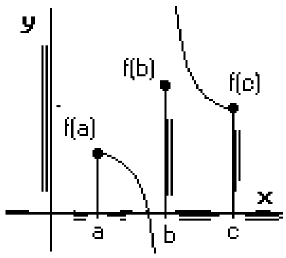


Figura 3.27: Función no continua

Ejemplo 3.56. *Hallar los extremos absolutos de la función:*

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$$

en el intervalo $[0, 3]$.

Solución.

1. Hallamos los puntos críticos:

   a) Puntos en los que la derivada no está definida: No existen ya que $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ está definida en todo $\mathbb{R}$

   b) Puntos en los que la derivada vale cero:

   $$6x^2 - 6x - 12 = 0 \to x^2 - x - 2 = 0$$

   de donde,

   $$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1+3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

2. Comparamos los valores de la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 15 & \text{Máximo} \\ f(2) = 16 - 12 - 24 + 15 = -5 & \text{mínimo} \\ f(3) = 54 - 27 - 36 + 15 = 6 & \end{array}$$

Ejemplo 3.57. *Hallar los extremos absolutos de la función:*

$$f(x) = x^5 - x$$

en el intervalo $[2, 4]$.

Solución.

1. Hallamos los puntos críticos:

   a) Puntos en los que la derivada no está definida: No existen ya que $f'(x) = 5x^4 - 1$ está definida en todo $\mathbb{R}$

   b) Puntos en los que la derivada vale cero:
   $5x^4 - 1 = 0 \to x^4 = \dfrac{1}{5} \to x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{5}} \notin [2,4]$

   Luego no existe ningún punto crítico dentro del intervalo, por tanto:

2. Comparamos los valores de la función en los extremos del intervalo:
   $f(2) = 30$ mínimo
   $f(4) = 1020$ Máximo

Ejemplo 3.58. *Hallar los extremos absolutos de la función:*

$$f(x) = 3 - |x-2|$$

en el intervalo $[1,4]$.

Solución. Para hallar la derivada de la función eliminamos el valor absoluto,

$$f(x) = 3 - |x-2| = \begin{cases} 3-(x-2) & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 3-(-x+2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 5-x & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 1+x & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Con lo cual, la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x > 2 \\ 1 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

1. Hallamos los puntos críticos:

   a) Puntos en los que la derivada no está definida: $x = 2$

   b) Puntos en los que la derivada vale cero: No existen.

2. Comparamos los valores de la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo:

$$\begin{array}{ll} f(1) = 2 & \\ f(2) = 3 & \text{Máximo} \\ f(4) = 1 & \text{mínimo} \end{array}$$

b) Máximos y mínimos absolutos en intervalos abiertos

Para hallar el máximo y el mínimo de una función continua en un intervalo abierto se "cierra" el intervalo hallando los límites de la función en los extremos del mismo.

Ejemplo 3.59. *Hallar los extremos absolutos de la función:* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ *en todo* $\mathbb{R}$.

Solución. Hallamos la derivada de la función,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

1. Hallamos los puntos críticos:

   a) Puntos en los que la derivada no está definida: No existen.

   b) Puntos en los que la derivada vale cero: $2x = 0 \to x = 0$

2. Comparamos los valores de la función en los puntos críticos y en los "extremos" del intervalo:

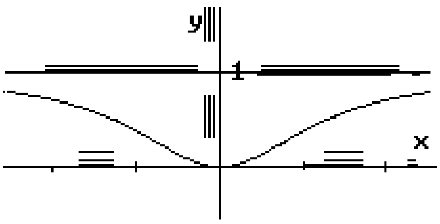


Figura 3.28: $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$
$$f(0) = 0 \quad \to \quad \text{mínimo}$$
$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

Luego la función no tiene máximo.

3.6.2. Máximos y mínimos relativos o locales

Crecimiento y decrecimiento. Una función es creciente allí donde su derivada es positiva y decreciente donde es negativa.

$$\forall x \in (a,b)\ f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en } (a,b)$$
$$\forall x \in (a,b)\ f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ es decreciente en } (a,b)$$

Estudios de los máximos y mínimos locales a partir del signo de la primera derivada.

Si la función es continua, los máximos locales se presentan donde la función cambia de creciente a decreciente, y los mínimos locales donde cambia de decreciente a creciente. Si la función es continua, los máximos y mínimos relativos solamente se pueden presentar en los puntos críticos.

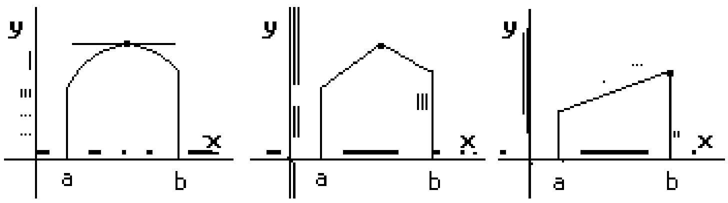


Figura 3.29: En un máximo la función cambia de creciente a decreciente

Ejemplo 3.60. *Estudiar los extremos relativos y absolutos de la función* $f(x) = \dfrac{-x}{1+x^2}$ *en todo* $\mathbb{R}$

Solución. f es continua en todo $\mathbb{R}$, ya que $1+x^2$ no se anula nunca.
Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{-(1+x^2)+x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$$

de donde:

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \quad \to \quad x = \pm 1$$

a) Extremos relativos: Estudiamos el signo de la derivada.

$$f'(-2) = \frac{4-1}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = +$$
$$f'(0) = \frac{-1}{1} = -1 = -$$
$$f'(2) = \frac{4-1}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = +$$

Con lo cual hay un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$

b) Extremos absolutos: Hallamos los valores de la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo.

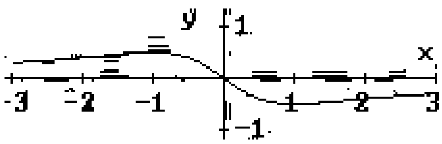


Figura 3.30: $y = \dfrac{-x}{1+x^2}$

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{1+x^2} = 0$$
$f(-1) = 1/2 \quad \leftarrow \quad$ Máximo absoluto

$f(1) = -1/2 \quad \leftarrow \quad$ mínimo absoluto
$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{1+x^2} = 0$$

Ejemplo 3.61. *Encontrar los extremos relativos de la función* $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ *en* $\mathbb{R}$

Solución. La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Puntos críticos. Hallamos la derivada de la función:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

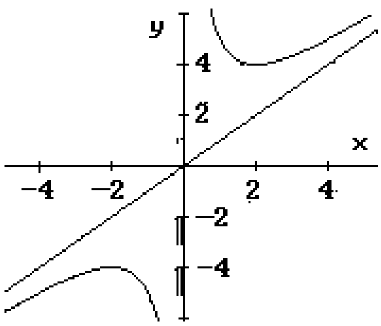


Figura 3.31: $y = x + \dfrac{4}{x}$

a) Puntos donde la derivada no esta definida. $x = 0$

b) Puntos donde la derivada vale cero:

$$f'(x) = 0 \to x = \pm 2$$

Intervalos de crecimiento:

$f'(-3) = 1 - 4/9 = + \to$ creciente

$f'(-1) = 1 - 4 = - \to$ decreciente

$f'(1) = 1 - 4 = - \to$ decreciente

$f'(3) = 1 - 4/9 = + \to$ creciente

Concavidad. Puntos de inflexión.

Una función, derivable en un intervalo, se dice que es cóncava hacia arriba sobre dicho intervalo si su derivada es creciente y cóncava hacia abajo si su derivada es decreciente.
Los puntos en los que la concavidad cambia de sentido se llaman puntos de inflexión.

$$f' \uparrow \Rightarrow \ f \bigcup$$

$$f' \downarrow \Rightarrow \ f \bigcap$$

Criterio de la derivada segunda.

$$\begin{array}{l} f'' = + \ \Rightarrow f' \uparrow \Rightarrow f\bigcup \\ f'' = - \ \Rightarrow f' \downarrow \Rightarrow f\bigcap \\ f'' = 0 \ \Rightarrow \ ¿? \\ \big(x_0, f(x_0)\big) \ \text{punto de inflexión} \ \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \text{ó} \\ f''(x_0) \ \text{no definido} \end{cases} \end{array}$$

Aplicaciones de la fórmula de Taylor para el estudio de máximos y mínimos.

Desarrollemos, mediante el n-simo polinomio de Taylor, la función f en el punto x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

supongamos que la primera derivada de la función f que no se anula en el punto x_0 es de orden n. Será:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right\} f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

de donde,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Como c está entre x_0 y x, tomando x suficientemente próximo a x_0 podemos suponer que el signo de $f^{(n)}(c)$ coincide con el signo de $f^{(n)}(x_0)$, de donde:

$$\begin{cases} \begin{array}{l} n \text{ par} \\ (x-x_0)^n = + \end{array} & \begin{cases} f^{(n)}(x_0) = + \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \rightarrow \ \text{mínimo} \\ f^{(n)}(x_0) = - \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \rightarrow \ \text{Máximo} \end{cases} \\ \begin{array}{l} n \text{ impar} \\ (x-x_0)^n = \pm \end{array} & \left.\begin{cases} f^{(n)}(x_0) = + \\ f^{(n)}(x_0) = - \end{cases}\right\} \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \pm \rightarrow \text{inflexión} \end{cases}$$

Con lo cual podemos afirmar lo siguiente: *Si la primera derivada que no se anula en un punto crítico es par, entonces hay un máximo si dicha derivada es negativa y un mínimo si es positiva. Si la primera derivada que no se anule es de orden impar, entonces existe un punto de inflexión.*

Ejemplo 3.62. *Estudiar la naturaleza del origen en las siguientes funciones:*

$$\text{(a)} \quad f(x) = x^4 \qquad \text{(b)} \quad f(x) = x^3 \qquad \text{(c)} \quad f(x) = -x^4$$

Solución.

1. $f(x) = x^4$
   $f'(x) = 4x^3 \quad \to \quad f'(0) = 0$
   $f''(x) = 12x^2 \quad \to \quad f''(0) = 0$
   $f'''(x) = 24x \quad \to \quad f'''(0) = 0$
   $f^{(IV)}(x) = 24 \quad \to \quad f^{(IV)}(0) = 24 > 0$ par y positivo $\to$ mínimo

2. $f(x) = x^3$
   $f'(x) = 3x^2 \quad \to \quad f'(0) = 0$
   $f''(x) = 6x \quad \to \quad f''(0) = 0$
   $f'''(x) = 6 \quad \to \quad f'''(0) = 6 \neq 0$ impar $\to$ punto de inflexión

3. $f(x) = -x^4$
   $f'(x) = -4x^3 \quad \to \quad f'(0) = 0$
   $f''(x) = -12x^2 \quad \to \quad f''(0) = 0$
   $f'''(x) = -24x \quad \to \quad f'''(0) = 0$
   $f^{(IV)}(x) = -24 \quad \to \quad f^{(IV)}(0) = 24 < 0$ par y negativo $\to$ Máximo.

Ejemplo 3.63. *Estudiar la naturaleza de los puntos críticos de la función:*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Solución. Hallamos la derivada para buscar los puntos críticos.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \to \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0$$

luego los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$.
Calculamos el valor de la derivada segunda en cada uno de los puntos críticos.

$$f''(x) = 6x - 6 \begin{cases} f''(0) = -6 \ \to \ f(0) \ \text{máximo relativo} \\ f''(2) = 6 > 0 \ \to \ f(2) \ \text{mínimo relativo} \end{cases}$$

3.6.3. Determinación de funciones conocidos sus puntos críticos

La dificultad de este tipo de ejercicios está en saber aprovechar toda la información que nos da el enunciado.

Ejemplo 3.64. *Hallar a, b, c y d para que la función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *tenga un mínimo relativo de valor* -3 *en* $x = 0$ *y un máximo relativo de valor* 4 *en* $x = 1$.

Solución.

$$\text{Mínimo relativo de valor } -3 \text{ en } x = 0 \ \rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} f(0) = -3 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Máximo relativo de valor 4 en } x = 1 \ \rightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{array} \right.$$

Hallando la derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, y sustituyendo, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} d = -3 \\ c = 0 \\ a + b + c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} d = -3 \\ c = 0 \\ a + b = 7 \\ 3a + 2b = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} d = -3 \\ c = 0 \\ a + b = 7 \\ a = -14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} d = -3 \\ c = 0 \\ b = 21 \\ a = -14 \end{array} \right\}$$

luego la función buscada es: $f(x) = -14x^3 + 21x^2 - 3$.

Ejemplo 3.65. *Hallar a, b y c tales que la gráfica de la función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ *tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión* $(1, 1)$.

Solución.

Pasa por el punto $(1, 1) \ \rightarrow \ f(1) = 1$

Tangente horizontal en $(1, 1) \ \rightarrow \ f'(1) = 0$

Punto de inflexión en $(1, 1) \ \rightarrow \ f''(1) = 0$

Hallando la primera y segunda derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$ y sustituyendo, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c = 1 - a - b \\ 2a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c = 1 - a - b \\ b = -1 - 2a \\ a = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c = 3 \\ b = -3 \\ a = 1 \end{array} \right\}$$

luego la función buscada es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

3.6.4. Problemas de aplicación de máximos y mínimos

Para resolver problemas de máximos y mínimos con enunciado es conveniente seguir los siguientes pasos:

1. Asignar letras a todas las magnitudes que intervienen e intentar relacionarlas entre sí. (Según se asignen las letras, la resolución del problema puede resultar más fácil o más difícil. A veces conviene contar con los ángulos).

2. Preguntarse ¿qué es lo que hay que hacer máximo o mínimo?. Esa magnitud es la que hay que derivar.

3. Encontrar una fórmula para la magnitud que hay que derivar y expresarla en función de una sola variable y entonces derivar.

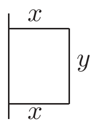
Naturaleza de los puntos críticos. La naturaleza de los puntos críticos puede determinarse por cualquiera de los siguientes criterios.

1. Por la propia naturaleza del problema.
2. Comparando el valor de la función en los puntos críticos y en los extremos del dominio.
3. Estudiando el signo de la primera derivada a ambos lados de cada punto crítico.
4. Estudiando el signo de la segunda derivada en los puntos críticos.

Observación: Si el problema pide un máximo y encontramos un mínimo, el máximo habrá que buscarlo en los extremos del dominio.

Ejemplo 3.66. *Un granjero tiene* $200\,m$ *de tela metálica que va a utilizar para construir tres lados de un corral rectangular; se va a usar un muro recto que ya existe como cuarto lado del corral. ¿Qué dimensiones maximizarán el área del corral?.*

Solución. La magnitud a maximizar es el área.



$$\left.\begin{array}{l} a = x \cdot y \\ 2x + y = 200 \to y = 200 - 2x \end{array}\right\} a = x(200-2x) = 200x - 2x^2$$

de donde,

$$a'(x) = 200 - 4x \to 200 - 4x = 0 \to x = 50$$

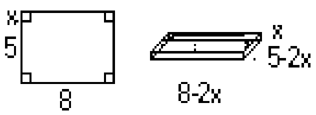
Comprobamos que realmente se trata de un máximo, a partir de la segunda derivada:

$$a''(x) = -4 \ \Rightarrow\ a''(50) = -4 \ \to\ \text{máximo}$$

Luego la solución es $x = 50$ e $y = 100$.

Ejemplo 3.67. *Una lámina metálica rectangular mide* $5\,m$*. de ancho y* $8\,m$*. de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. ¿Cómo debe hacerse para obtener una caja del máximo volumen posible?*

Solución. la magnitud a maximizar es el volumen.



$$v = x(8-2x)(5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

de donde

$$v'(x) = 12x^2 - 52x + 40 \;\Rightarrow\; 12x^2 - 52x + 40 = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 13x + 10 = 0$$

luego:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{13 \pm 7}{6} = \begin{cases} x = 3'3 & \text{no válida} \\ x = 1 \end{cases}$$

Comprobamos que realmente se trata de un máximo, a partir de la segunda derivada:

$$v''(x) = 24x - 52 \;\Rightarrow\; a''(1) = -28 \;\rightarrow\; \text{ máximo}$$

Ejemplo 3.68. *Deseamos construir una lata cilíndrica con* $40\,cm^3$ *de capacidad. El material del fondo y de la tapa es dos veces más caro que el del lateral. Hallar el radio y la altura de la lata más económica.*

Solución. La magnitud a minimizar es el coste. Suponiendo que el precio por unidad de superficie del lateral es p el de las bases será $2p$, con lo que resulta:

$$\left.\begin{array}{l} S_b = \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi r^2 \\ S_l = 2\pi r h \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} 2p \\ p \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \text{coste } \; S_b = 4\pi r^2 p \\ \text{coste } \; S_l = 2\pi r h p \end{array}\right\} c = 4\pi r^2 p + 2\pi r h p$$

y teniendo en cuenta que $v = 40$ resulta $\pi r^2 h = 40 \rightarrow h = \dfrac{40}{\pi r^2}$ de donde,

$$c = 4\pi r^2 p + 2\pi r h p = 4\pi r^2 p + 2\pi r \frac{40}{\pi r^2} p = 4\pi r^2 p + \frac{80}{r} p$$

luego, $c'(r) = 8\pi r p - \dfrac{80}{r^2} p$, con lo que resulta,

$$8\pi r p - \frac{80}{r^2} p = 0 \rightarrow 8\pi r - \frac{80}{r^2} = 0 \rightarrow 8\pi r = \frac{80}{r^2} \rightarrow r^3 = \frac{80}{8\pi} = \frac{10}{\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

Comprobamos que realmente se trata de un mínimo, a partir de la segunda derivada:

$$c''(r) = 8\pi + \frac{160}{r^3} \Rightarrow c''(r) > 0 \rightarrow \text{ mínimo}$$

la altura correspondiente a este radio será:

$$h = \frac{40}{\pi \sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi^2}}} = \frac{40}{\sqrt[3]{\dfrac{100\pi^3}{\pi^2}}} = \frac{40}{\sqrt[3]{100\pi}} = 4\sqrt[3]{\frac{1000}{100\pi}} = 4\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} = 4r$$

Ejemplo 3.69. *Hallar el punto más cercano y más alejado de la parábola* $y = 4 - x^2$ *al punto* $(0, 1)$

Solución. Consideremos un punto genérico $X(x,y)$ de la parábola $y = 4-x^2$. Su distancia al punto $P(0,1)$ vendrá definida por la expresión:

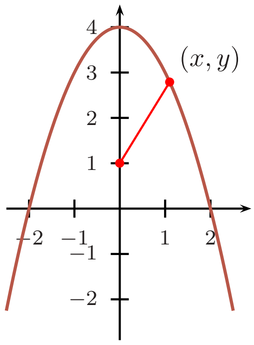


Figura 3.32: $y = 4 - x^2$

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

cuyo valor ha de ser máximo o mínimo. Ahora bien, para facilitar la resolución del problema, eliminamos la raíz cuadrada elevando al cuadrado.

$$d^2 = x^2 + (y-1)^2$$

y teniendo en cuenta el valor de $y = 4 - x^2$ resulta:

$$d^2 = x^2 + (4-x^2-1)^2 = x^2 + (3-x^2)^2 = x^2 + 9 - 6x^2 + x^4 = x^4 - 5x^2 + 9$$

Y dado que, al ser d positivo, el valor máximo o mínimo de d se corresponde con el de d^2, podemos optimizar la expresión:

$$g(x) = d^2 = x^4 - 5x^2 + 9$$

Hallamos los puntos críticos

$$g'(x) = 4x^3 - 10x \quad \to \quad x(4x^2-10) = 0 \quad \to \quad x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Para estudiar la naturaleza de los puntos críticos podemos acudir al signo de la segunda derivada:

$$g''(x) = 12x^2 - 10$$

$$\begin{aligned}
&g''(0) = -10 \quad \to \quad \text{Máximo relativo}\\
&g''(+\sqrt{\tfrac{5}{2}}) = 12\tfrac{5}{2} - 10 = 30 - 10 = 20 \quad \to \quad \text{mínimo relativo}\\
&g''(-\sqrt{\tfrac{5}{2}}) = 12\tfrac{5}{2} - 10 = 30 - 10 = 20 \quad \to \quad \text{mínimo relativo}
\end{aligned}$$

El máximo relativo no es el máximo absoluto, ya que la función no tiene máximo absoluto por alejarse hacia el infinito.
El mínimo absoluto estará en uno de los dos mínimos relativos, para determinarlo hallamos el valor de la función g en cada uno de ellos.

$$g(+\sqrt{\frac{5}{2}}) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 9 = \frac{25-50+36}{4} = \frac{11}{4} = g(-\sqrt{\frac{5}{2}})$$

Luego los puntos de la parábola $y = 4 - x^2$ que se encuentran más cercano al punto $(0,1)$ son:

$$f(+\sqrt{\frac{5}{2}}) = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \quad \to \quad P_1(+\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{3}{2})$$

$$f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \quad \to \quad P_2(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{3}{2})$$

mientras que el punto más alejado no existe.

3.7. Problemas propuestos del Capítulo 3

Ejercicios propuestos del Capítulo 3

Soluciones en la página **??**

3.1.

Problemas resueltos del Capítulo 3

3.1 (Hallando la función recíproca). *Hallar, si existe, la función recíproca de:*

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

estudiar la continuidad de ambas funciones y esbozar sus gráficas.

Solución. –Continuidad de la función f. Al no anularse el denominador para ningún valor de x, el domino es todo $\mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

La función es continua en todo el dominio por tratarse de un cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.
–La función es inyectiva. En efecto, eliminando el valor absoluto y expresando la función por casos, se tiene,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(la función es continua y derivable en $x = 0$).
Al ser $f'(x) > 0$ para todo valor de x, la función es estrictamente creciente en todo su dominio, y por tanto inyectiva. Al ser inyectiva tiene función recíproca.
–Ecuación de la recíproca. De la ecuación que define la función

$$y = \frac{x}{1+|x|}$$

se desprende que $\operatorname{sig} x = \operatorname{sig} y$. En consecuencia:

$$\text{Si } y \geq 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow y = x - yx = x(1-y) \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

de donde, intercambiando la variables, se tiene

$$y = \frac{x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{para } x \geq 0$$

$$\text{Si } y < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow y = x - yx = x(1+y) \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

de donde, intercambiando la variables, se tiene

$$y = \frac{x}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{para } x < 0$$

Uniendo ambos resultados, resulta:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{para } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{para } x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

–*Dominio y recorrido de la recíproca.* Se tiene:

$$\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$$

Para determinar $\mathcal{R}_f$, tenemos en cuenta que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ y que f es estrictamente creciente. Y al ser,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+|x|} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+|x|} = -1$$

resulta que

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = (-1, 1)$$

Es decir, se tiene:

$$f: \mathbb{R} \to (-1, 1), \qquad f^{-1}: (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

–*Continuidad de la función recíproca.* Tenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} \qquad \mathcal{D}_{f^{-1}} = (-1, 1)$$

luego se trata del cociente de funciones continuas y no se anula el denominador –dentro del dominio–. Luego la recíproca es continua en todo su dominio.
Gráfica.

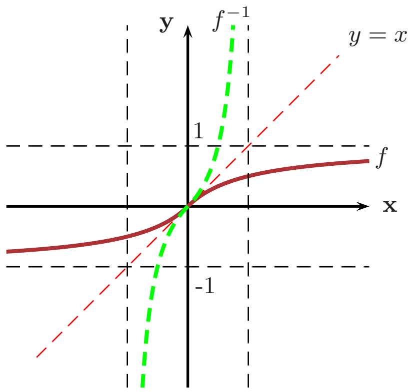


Figura 3.33: Simetría de las correspondencias inversas

3.2 (Cálculo de límites mediante polinomios de Taylor). *Utilizando el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el origen de la función* $\ln(1 + \ln(1 + x))$*, y el de orden cuatro centrado en el origen de* $1 - \cos(1 - \cos x)$*, calcula*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen}(x^3) + 1 - \cos(1 - \cos x)}{2\ln\big(1 + \ln(1 + x)\big) + e^{-2x} - 1}$$

Solución. Los desarrollos de Taylor de las funciones que intervienen en el límite los obtenemos a partir de los desarrollos de Taylor de las funciones elementales. En efecto,

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x^3 \approx x^3 - \frac{\left(x^3\right)^3}{3!} + \cdots = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x^3 \approx x^3 - \cdots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots \Rightarrow 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

de donde,

$$1 - \cos(1 - \cos x) \approx \frac{\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^4}{4!} + \cdots \approx \frac{x^4}{8} + \cdots$$

Por otro lado,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \frac{1}{1-(-t)}\,dt = \int_0^x [1 - t + t^2 - \cdots]\,dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

de donde,

$$\begin{aligned}\ln\big(1+\ln(1+x)\big) &\approx (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots) - \frac{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots)^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots)^3}{3}\cdots \\ &\approx (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots) - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \cdots) + (\frac{x^3}{3} - \cdots) \\ &\approx x - x^2 + \frac{7x^3}{6} - \cdots\end{aligned}$$

Y, finalmente, tenemos

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \Rightarrow \quad e^x - 1 \approx x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

de donde,

$$e^{-2x} - 1 \approx -2x + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + \cdots \approx -2x + 2x^2 - \frac{8x^3}{6} + \cdots$$

de donde, sustituyendo, resulta:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}(x^3) + 1 - \cos(1-\cos x)}{2\ln\big(1+\ln(1+x)\big) + e^{-2x} - 1} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3[x^3 - \cdots] + [\frac{x^4}{8} - \cdots]}{2[x - x^2 + \frac{7x^3}{6} - \cdots] + [-2x + 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + \cdots]} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3[x^3 - \cdots]}{[2x - 2x^2 + \frac{14x^3}{6} - \cdots] + [-2x + 2x^2 - \frac{8x^3}{6} + \cdots]} = \lim_{x\to 0} \frac{3[x^3 - \cdots]}{\frac{6x^3}{6}} = 3\end{aligned}$$

Problemas propuestos del Capítulo 3

Soluciones en la página 391

3.1.

Capítulo 4

Derivación de funciones de varias variables

4.1. Derivadas parciales

4.1.1. Introducción

Funciones de una variable. Recordemos que para una función de una variable $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en el intervalo abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, se define la derivada de f en $x_0 \in \mathcal{D}$, denotada por $f'(x_0)$, como el valor del siguiente límite, si existe y es finito.

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si $f'(x_0)$ existe, su valor nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$. El valor de $f'(x_0)$ también representa la *razón de cambio instantáneo* de y respecto de x.

Nota: La razón de definir la derivada en un punto perteneciente a un conjunto *abierto* $\mathcal{D}$ (dominio de la función), es para poder asegurar que para $h \in \mathbb{R}$ pequeño, se tenga $(x_0 + h) \in \mathcal{D}$ y que así tenga sentido la expresión $f(x_0 + h)$ que aparece en la definición de derivada.

La importancia de estudiar el concepto de derivada radica en que a partir de la derivada de una función en un punto se puede obtener información sobre el comportamiento de la propia función, aunque esta información es sólo *local*, es decir, a partir de $f'(x_0)$ obtenemos información sobre el comportamiento de f, pero sólo alrededor de x_0. Así, por ejemplo, el simple hecho de la existencia de $f'(x_0)$ señala un comportamiento suave de la gráfica de la función en los alrededores del punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$; el signo de $f'(x_0)$ señala el crecimiento o decrecimiento de la función alrededor del punto, etc. Esta información, aunque sólo es local, es muy importante. No obstante, a partir de la función derivada $f'(x)$ podemos obtener una información más *global* del comportamiento de la función.

Funciones de dos variables. El concepto de derivada se puede generalizar a funciones de dos variables $z = f(x, y)$. La idea intuitiva responde a la siguiente cuestión: ¿Cómo se va a ver afectada una función de dos variables por una variación de una de sus variables, mientras que la otra variable permanece fija? Podemos responder a esta cuestión considerando cada vez sólo una de las variables. Esto es, hacemos la derivada de la función cada vez con respecto a una variable, manteniendo constante la otra. Este proceso se conoce como derivación parcial, y su resultado se llama derivada parcial de la función respecto a la variable independiente elegida. Para ello partimos de la idea del concepto de derivada de funciones de una variable *"el límite, cuando el incremento de la variable tiende a cero, del cociente del incremento de la función dividido entre el incremento de la variable"*. Suponemos que una de las variables es constante e incrementamos sólo la otra, es decir, hacemos la derivada suponiendo que la función depende sólo de una de las variables. Con ello se reduce la discusión al caso uni-dimensional considerando una función de varias variables como una función de una sola variable (cada variable separadamente), manteniendo fijas las demás.

4.1.2. Definición

Supongamos que en cierto entorno del punto (x_0, y_0) está dada la función $z = f(x, y)$. Si fijamos la variable y: $y = y_0$, obtenemos una función de una sola variable x: $z = f(x, y_0)$. La derivada "habitual"de esta función en el punto $x = x_0$ se llama derivada parcial de la función f en el punto (x_0, y_0), respecto de x, y se denota por

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De esta forma,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \overset{\text{def}}{=} \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right]_{x=x_0}$$

Nota: Señalemos que la designación de la derivada parcial de la función f, respecto de la variable x, por $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ es tradicional. Aunque es más correcto escribir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, ya que la expresión $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es un símbolo único, que designa la nueva función, cuyo valor se analiza en el punto (x_0, y_0).

Teniendo en cuenta la definición de derivada de una función de una sola variable, resulta la siguiente definición de derivada parcial para funciones de dos variable.

Definición 4.1. *Dada una función de dos variables $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, se define la derivada parcial de f con respecto* *a x en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ de $\mathcal{D}$ como el valor del siguiente límite, si existe y es finito.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Del mismo modo, se define la derivada parcial de f con respecto a y en $\mathbf{p}$, como el siguiente límite, si existe y es finito.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Nótese que en cada caso aplicamos la definición de derivada incrementando solamente una de las variables, mientras que la otra permanece fija. Más explícitamente podemos escribir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Cálculo de derivadas parciales aplicando la definición.

Ejemplo 4.1. *Calcular, aplicando la definición, las dos derivadas parciales de la función $f(x, y) = xy + x - y$, en el punto $\mathbf{p}(0, 0)$.*

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot 0 + h - 0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{0 \cdot k + 0 - k - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = \lim_{k \to 0} -1 = -1$$

Ejemplo 4.2. *Calcular las dos derivadas parciales en el punto $\mathbf{p}(0, 0)$ de la función:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & si \;\; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \;\; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h \cdot 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot k^2}{0^2+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

Ejemplo 4.3. *Calcular, aplicando la definición, las dos derivadas parciales de la función* $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$, *en el punto* $\mathbf{p}(1,0)$.

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \text{lím}_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2 - (1+h)\cdot 0 + 0^2 - (2-0+0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+2h+h^2)-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2+4h+2h^2-2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h+2h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+2h) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \text{lím}_{k\to 0} \frac{f(1,0+k)-f(1,0)}{k} = \text{lím}_{k\to 0} \frac{f(1,k)-f(1,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{2\cdot 1^2 - 1\cdot k + k^2 - (2)}{k} = \lim_{0\to 0} \frac{2-k+k^2-2}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{-k+k^2}{k} = \lim_{k\to 0}(-1+k) = -1$$

4.1.3. La función derivada parcial

Si hallamos las derivadas parciales de una función de dos variables $z = f(x,y)$ en un punto genérico (x,y) de su dominio, obtenemos, a su vez, funciones de dos variables, llamadas funciones derivadas parciales. Así:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

Ejemplo 4.4. *Hallar, aplicando la definición, las derivadas parciales de la función:*

$$f(x,y) = x^2y^3 + 5$$

Solución.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2y^3+5-(x^2y^3+5)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2y^3+2hxy^3+h^2y^3+5-x^2y^3-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hxy^3+h^2y^3}{h} =$$

$$= 2x\,y^3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{x^2(y+k)^3+5-(x^2y^3+5)}{k} = \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{x^2y^3+3x^2y^2k+3x^2yk^2+x^2k^3+5-x^2y^3-5}{k} = \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{3x^2y^2k+3x^2yk^2+x^2k^3}{k} = \lim_{k\to 0}\left(3x^2y^2+3x^2yk+x^2k^2\right) = \\ &= 3x^2y^2\end{aligned}$$

Cálculo de derivadas parciales mediante las reglas de derivación.

Si observamos los resultados del ejemplo anterior, podemos concluir que no es necesario aplicar la definición para calcular las derivadas parciales, sino que se pueden calcular aplicando las reglas ordinarias de derivación. Esto se deduce de la propia definición, ya que de la definición de las derivadas parciales, como derivadas ordinarias con la condición de que se han fijado todas las variables excepto una, respecto de la cual se toma la derivada, se deduce que al calcular las derivadas parciales se pueden utilizar las reglas del cálculo de las derivadas ordinarias. Es decir,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ Se puede calcular mediante las reglas de derivación, es decir, como una derivada ordinaria, de la función f respecto de la variable x, suponiendo y constante (es decir, como si la función f dependiera sólo de x, porque y es un número). En consecuencia, *consideramos que y es constante y derivamos con respecto a x.*

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ Se puede calcular mediante las reglas de derivación, es decir, como una derivada ordinaria, de la función f respecto de la variable y, suponiendo x constante (es decir, como si la función f dependiera sólo de y, porque x es un número). En consecuencia, *consideramos que x es constante y derivamos con respecto a y.*

Ejemplo 4.5. *Calcular las dos derivadas parciales de las siguientes funciones:*

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 - y^3$

   a) Fijemos en la fórmula la variable y, es decir, supongamos que y es un número, con lo cual obtenemos una función de una sola variable x; y calculando su derivada tendremos:

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y^2$$

   b) De la misma forma, fijemos ahora la variable x es decir, supongamos que x es un número, con lo cual obtenemos una función de una sola variable y; y calculando su derivada tendremos:

   $$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 3y^2$$

2. $z = (x^2 + y^2)e^{-xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-xy} + (x^2 + y^2)(-ye^{-xy}) = (2x - x^2y - y^3)e^{-xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{-xy} + (x^2 + y^2)(-xe^{-xy}) = (2y - x^3 - xy^2)e^{-xy}$$

3. $z = xye^{x/y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{x/y} + xy(\frac{1}{y}e^{x/y}) = (y + x)e^{x/y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x/y} + xy(\frac{-x}{y^2}e^{x/y}) = (x - \frac{x^2}{y})e^{x/y} = \frac{x(y - x)e^{x/y}}{y}$$

Ejemplo 4.6. *Dada la función:* $f(x, y) = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$. *Hallar las dos derivadas parciales en el punto* $(1, 1)$

Solución. Calculamos las derivadas parciales mediante las reglas de derivación y luego sustituimos las coordenadas del punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 12x^2y^2 - 8x \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 12 - 8 = 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8x^3y + 6y^5 \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 8 + 6 = 14$$

Notación: Se utilizan las siguientes notaciones:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x = f'_x = f_x(x, y) = D_x f(x, y) = D_1 f(x, y)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y = f'_y = f_y(x, y) = D_y f(x, y) = D_2 f(x, y)$$

Cuando se trate de un punto genérico (x, y), normalmente no indicaremos las coordenadas, simplemente pondremos f_x. Sin embargo, cuando se trate de un punto concreto (x_0, y_0), siempre las indicaremos, para saber de qué punto se trata. En este caso, en algunas ocasiones utilizaremos la siguiente notación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(x_0,y_0)}$$

4.1.4. Funciones de más de dos variables

El concepto de derivada parcial se puede generalizar a funciones de cualquier número de variables. Bastará con derivar la función suponiendo que depende, en cada caso, de una sola variable, con las demás fijas. Así, si $w = f(x, y, z)$, entonces hay tres derivadas parciales, las cuales se obtienen considerando cada vez dos de las variables constantes y derivando respecto de la otra. Es decir, para definir la derivada parcial de w con respecto a x, consideramos que y y z son constantes y escribimos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Para definir la derivada parcial w con respecto a y, consideramos que x y z son constante y escribimos

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

Para definir la derivada parcial w con respecto a z, consideramos que x y y son constante y escribimos

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Ejemplo 4.7. *Hallar las derivadas parciales de la función:*

$$f(x, y, z) = e^{-5z} \cos \pi x \, \operatorname{sen} 4y$$

Solución. En cada caso, suponemos constante dos de las variables, con lo cual se obtiene una función de una sola variable, respecto de la cual se deriva.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\pi e^{-5z} \operatorname{sen} \pi x \, \operatorname{sen} 4y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4e^{-5z} \cos \pi x \, \cos 4y \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -5e^{-5z} \cos \pi x \, \operatorname{sen} 4y \end{aligned}$$

Notación vectorial para definir las derivadas parciales. Como acabamos de ver, el concepto de derivada parcial se extiende a funciones de tres variables $f(x, y, z)$ de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t, z) - f(x, y, z)}{t}$$

Análogamente se calculan las demás derivadas parciales.

Para los incremento, Δx, Δy, etc., en vez de usar las letras h, k, etc., se pueden usar h_1, h_2, etc., o bien, podemos usar siempre la letra t.

Del mismo modo se extiende a funciones de cuatro variables $f(x, y, z, u)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t, z, u) - f(x, y, z, u)}{t}$$

Desde el punto de vista teórico, para definir las derivadas parciales en el caso general de funciones de n variables $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, conviene usar notación vectorial. Para ello consideramos los vectores $\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \cdots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, cuyas componentes son:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

con lo cual, para cualquier número $t \in \mathbb{R}$, resulta:

$$t\mathbf{e}_1 = (t, 0, \cdots, 0),\ t\mathbf{e}_2 = (0, t, \cdots, 0), \cdots, t\mathbf{e}_n = (0, 0, \cdots, t)$$

de donde, para cualquier punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, de coordenadas $\mathbf{p} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, se tiene:

$$\mathbf{p} + t\mathbf{e}_i = (x_1, x_2, \cdots, x_n) + (0, \cdots, t, \cdots, 0) = (x_1, x_2, \cdots, x_i + t, \cdots, x_n)$$

Es decir, $\mathbf{p} + t\mathbf{e}_i$ tiene las mismas coordenadas que $\mathbf{p}$, salvo la i-ésima coordenada que se ha incrementado en t. En consecuencia, podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 4.2 (Derivadas parciales). *Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto*[1] *$\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, y sea $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$. Se define la derivada parcial de f con respecto a su i-ésima variable en el punto $\mathbf{p}$, como el siguiente límite, si existe y es finito:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Del mismo modo puede definirse la derivada parcial en un punto genérico $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}$$

4.1.5. Razón de cambio

Las derivadas parciales también pueden interpretarse como la razón de cambio instantáneo de la función respecto de una variable, mientras la otra permanece fija. Así,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ Se puede interpretar como la *razón de cambio instantáneo* de la función f cuando se conserva *fija* la variable y y *varía* la x.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ Se puede interpretar como la *razón de cambio instantáneo* de la función f cuando se conserva *fija* la variable x y *varía* la y.

Es decir, las derivadas parciales miden la velocidad de variación *parcial* de la función con respecto a cada variable, cuando las demás se mantienen fijas.

Ejemplo 4.8. *Un cilindro recto tiene* 4 *cm. de radio y* 20 *cm. de altura. Hallar la razón de cambio del volumen del cilindro respecto del radio y respecto de la altura.*

Solución. Tenemos que $V = \pi r^2 h$, luego:
Para hallar la razón de cambio del volumen respecto del radio, r, fijamos

[1] La razón de definir las derivadas parciales en un punto perteneciente a un conjunto *abierto* $\mathcal{D}$ (dominio de la función), es para poder asegurar que para $t \in \mathbb{R}$ pequeño, se tenga $\mathbf{p} + t\mathbf{e}_i \in \mathcal{D}$ y que así tenga sentido la expresión $f(\mathbf{p} + t\mathbf{e}_i)$ que aparece en la definición de derivada parcial. No obstante, este requisito puede reemplazarse por la exigencia de que $\mathbf{p}$ sea un punto *interior* del dominio. Es decir, para poder hablar de la derivada de una función en un punto, la función tiene que estar definida en cierto entorno del punto.

la altura, h, y derivamos con respecto a r. A continuación evaluamos la derivada parcial para $r = 4$ y $h = 20$.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h \quad \to \quad \frac{\partial V}{\partial r}(r=4, h=20) = 2\pi \cdot 4 \cdot 20 = 160\pi \; cm^3/cm \;\; de \;\; r$$

Para hallar la razón de cambio del volumen respecto de la altura, h, fijamos el radio, r, y derivamos con respecto a h. A continuación evaluamos la derivada parcial para $r = 4$ y $h = 20$.

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2 \quad \to \quad \frac{\partial V}{\partial h}(r=4, h=20) = 16\pi \; cm^3/cm \;\; de \;\; h$$

En el primer caso, si mantenemos fija la altura e incrementamos el radio, se produce un incremento del volumen de $160\pi \; cm^3/cm \;\; de \;\; r$. Mientras que en el segundo caso, si mantenemos fijo el radio e incrementamos la altura, se produce un incremento del volumen de $16\pi \; cm^3/cm \;\; de \;\; h$

4.1.6. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

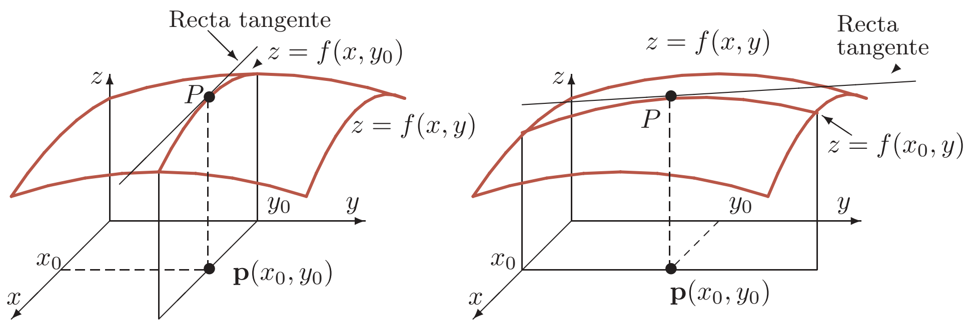


Figura 4.1: Curvas $z = f(x, y_0)$ y $z = f(x_0, y)$.

Si en la ecuación $z = f(x, y)$ fijamos la variable y, $y = y_0$, resulta una función de una sola variable, $z = f(x, y_0) = g(x)$. Desde el punto de vista geométrico, la función $g(x) = f(x, y_0)$ representa la curva que se obtiene de la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{array}\right\} z = f(x, y_0) = g(x)$$

En consecuencia, la derivada parcial de la función f, respecto de la variable x, en el punto $\mathbf{p}$ representa la pendiente de la tangente a la curva $g(x) = f(x, y_0)$ en el punto P correspondiente de la gráfica, es decir, la inclinación de la superficie en la dirección del eje x.

Análogamente, la función $g(y) = f(x_0, y)$ representa la curva que se obtiene de la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{array}\right\} z = f(x_0, y) = g(y)$$

La derivada parcial de la función f, respecto de la variable y, en el punto $\mathbf{p}$ representa la pendiente de la tangente a la curva $g(y) = f(x_0, y)$ en el punto P correspondiente de la gráfica, es decir, la inclinación de la superficie en la dirección del eje y.

En un lenguaje más informal, diremos que los valores de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en el punto (x_0, y_0) representan la pendiente de la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) en las direcciones de los ejes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente.

Ejemplo 4.9. *Hallar la pendiente a la superficie $f(x, y) = 16 - x^2 - 4y^2$ en el punto $P(3, -1, 3)$, en las direcciones de los ejes x e y.*

Solución. En la dirección del eje Ox, la pendiente viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3, -1) = -6 \quad \to \quad \tan\alpha = -6$$

En la dirección del eje Oy, la pendiente viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -8y \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3, -1) = 8 \quad \to \quad \tan\beta = 8$$

El que la derivada parcial en una dirección sea positiva y en otra negativa significa que, desde el punto $\mathbf{p}$, en la dirección del eje Ox la función decrece, mientras que en la dirección del eje Oy crece.

4.1.7. Continuidad y derivadas parciales

Recordemos que para $n = 1$, es decir, para las funciones de una variable, de la existencia de la derivada en un punto se deriva también que la función es continua en ese punto. Sin embargo, *para funciones de varias variables, la existencia de las derivadas parciales no garantiza la continuidad de una función.*

En efecto, la existencia de f_x depende del comportamiento de la función sólo en la dirección del eje x, y la existencia de f_y del comportamiento de la función sólo en la dirección del eje y, mientras que la continuidad depende del comportamiento de la función en todos los puntos del entorno. Esto significa que una función puede tener derivadas parciales en un punto aunque no sea continua en dicho punto.

Tenemos pues, que cuando $n \geq 2$, incluso de la existencia de todas las derivadas parciales en cierto punto, no se deduce la continuidad en ese punto.

Por otro lado, igual que ocurre para funciones de una variable, resulta evidente que de la continuidad de las funciones de n variables en un punto dado, no se deriva la existencia de sus derivadas parciales en ese punto.

En consecuencia, para funciones de n variables, $n \geq 2$, ni de la continuidad de esa función en un punto se deduce la existencia de las derivadas parciales, ni de la existencia de las derivadas parciales se deduce la continuidad en el punto.

Ejemplo 4.10. *Estudiar la continuidad y calcular las dos derivadas parciales en el punto* $\mathbf{p}(0,0)$ *de la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

1. Continuidad: La función no es continua en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, ya que no existe el límite en dicho punto. En efecto, si nos acercamos al punto mediante las rectas $y = mx$ resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx \\ x\to 0}} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

luego el límite no existe ya que depende del valor de m. Es decir, según la recta por la que nos aproximemos al punto tendríamos un valor del límite u otro.

2. Existencia de las derivadas parciales. A pesar de que la función no es continua en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, las derivadas parciales en dicho punto existen. En efecto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} =$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot k^2}{0^2+k^2} - 0}{k} = 0$$

Ejemplo 4.11. *Estudiar la continuidad y calcular las dos derivadas parciales en el punto* $\mathbf{p}(0,0)$ *de la función* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ \ xy \neq 0 \\ 0 & si\ \ xy = 0 \end{cases}$$

Solución. Entendamos primero el significado de la expresión que define la función. Tenemos que la imagen de un punto (x,y) es 1 si las dos componentes son distintas de cero, y 0 si alguna de las componentes es cero. Es decir, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, se tiene:

$$f(x,y) = 1, \quad f(x,0) = 0, \quad f(0,y) = 0, \quad f(0,0) = 0.$$

En consecuencia,

1. Continuidad: La función no es continua en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, ya que no existe el límite en dicho punto. En efecto, si nos acercamos al punto mediante la recta $y = x$ resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \Big[1\Big] = 1 \neq f(0,0) = 0$$

mientras que si nos acercamos al punto mediante la recta $x = 0$ resulta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \Big[0\Big] = 0 \neq 1$$

2. Existencia de las derivadas parciales. A pesar de que la función no es continua en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, las derivadas parciales en dicho punto existen. En efecto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}\Big[f(x,0)\Big]_{x=0} = \frac{d}{dx}\Big[0\Big]_{x=0} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}\Big[f(0,y)\Big]_{y=0} = \frac{d}{dy}\Big[0\Big]_{y=0} = 0$$

4.2. Derivadas parciales de órdenes superiores

Derivadas parciales de segundo orden

Las derivadas parciales de una función de dos variables $f(x,y)$, son, a su vez, funciones de dos variables, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ y, por lo tanto, podemos obtener de ellas, nuevamente, sus derivadas parciales. Llamadas derivadas parciales de segundo orden. Así, resultan las siguientes cuatro derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Notación: Para simplificar los paréntesis usaremos la siguiente notación:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_1\left(D_1 f\right) = D_{11} f$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_2\left(D_1 f\right) = D_{21} f$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_1\left(D_2 f\right) = D_{12} f$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = D_2\left(D_2 f\right) = D_{22} f$$

Para evitar confusión con el orden de derivación ($f_{xy} = D_{21}f$), utilizaremos el siguiente criterio: se empieza derivando por la variable *"más cercana"* a la función. Así, derivar primero con respecto a x y a continuación con respecto a y, se escribirá con cualquiera de las expresiones:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = D_{yx} f$$

mientras que derivar primero con respecto a y y a continuación con respecto a x, se escribirá con cualquiera de las expresiones:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = D_{xy} f$$

Nota. El criterio utilizado aquí, unas veces va de izquierda a derecha f_{xy} y otras de derecha a izquierda $D_{yx}f$, por eso algunos autores utilizan criterios diferentes. Sin embargo el utilizado aquí es el más aceptado.

Ejemplo 4.12. *Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función*

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 y)$$

Solución.

$f_x = 2xy\cos(x^2y)$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \big(f_x\big)_x = 2y\cos(x^2y) + 2xy\big(-2xy\operatorname{sen}(x^2y)\big) = \\ &\qquad = 2y\cos(x^2y) - 4x^2y^2\operatorname{sen}(x^2y) \\ f_{xy} &= \big(f_x\big)_y = 2x\cos(x^2y) + 2xy\big(-x^2\operatorname{sen}(x^2y)\big) = \\ &\qquad = 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\operatorname{sen}(x^2y) \end{aligned}$$

$f_y = x^2\cos(x^2y)$

$$\begin{aligned} f_{yx} &= \big(f_y\big)_x = 2x\cos(x^2y) + x^2\big(-2xy\operatorname{sen}(x^2y)\big) = \\ &\qquad = 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\operatorname{sen}(x^2y) \\ f_{yy} &= \big(f_y\big)_y = x^2\big(-x^2\operatorname{sen}(x^2y)\big) = -x^4\operatorname{sen}(x^2y) \end{aligned}$$

Derivadas parciales cruzadas. Las derivadas parciales f_{xy} y f_{yx}, se llaman derivadas parciales *cruzadas* y cuando son continuas coinciden.

Teorema 4.1 (Igualdad de las derivadas parciales cruzadas). *Si f es una función de dos variables x e y y tal que f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en una región abierta R, entonces se tiene que las derivadas parciales cruzadas coinciden para cada (x,y) de R,*

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

Este teorema se llama *Teorema de Schwartz*, y puede enunciarse en términos más restrictivo de la siguiente forma

Teorema 4.2 (Teorema de Schwartz). *Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Si las derivadas parciales $f_{xy} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f_{yx} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existen y son funciones continuas en D, entonces*

$$f_{xy} = f_{yx}$$

El teorema de Schwartz también puede enunciarse en los siguientes términos: *Si f_x, f_y, y f_{xy} son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0), entonces existe $f_{yx}(x_0, y_0)$ y se verifica $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.*

Ejemplo 4.13. *Hallar las derivadas parciales de segundo orden de la función*

$$f(x,y) = x^2 y e^{x^2+y^2}$$

Solución.

$$f_x = 2xye^{x^2+y^2} + x^2y\big(2xe^{x^2+y^2}\big) = (2x^3y + 2xy)e^{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (6x^2y + 2y)e^{x^2+y^2} + (2x^3y + 2xy)\big(2xe^{x^2+y^2}\big) = \\ &= (4x^4y + 10x^2y + 2y)e^{x^2+y^2} \\ f_{xy} &= (2x^3 + 2x)e^{x^2+y^2} + (2x^3y + 2xy)\big(2ye^{x^2+y^2}\big) = \\ &= (4x^3y^2 + 2x^3 + 4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$f_y = x^2e^{x^2+y^2} + x^2y\big(2ye^{x^2+y^2}\big) = (2x^2y^2 + x^2)e^{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} f_{yx} &= (4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2} + (2x^2y^2 + x^2)\big(2xe^{x^2+y^2}\big) = \\ &= (4x^3y^2 + 2x^3 + 4xy^2 + 2x)e^{x^2+y^2} \\ f_{yy} &= 4x^2ye^{x^2+y^2} + (2x^2y^2 + x^2)\big(2ye^{x^2+y^2}\big) = (4x^2y^3 + 6x^2y)e^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.14. *Comprobar que las derivadas parciales cruzadas de la siguiente función, en el punto $(0,0)$ no coinciden.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$
$$= \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} =$$
$$= \frac{x^5 + x^3y^2 - 3x^3y^2 - 3xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

En el punto $(0, 0)$, las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3\cdot 0 - h\cdot 0^3}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0^3\cdot k - 0\cdot k^3}{0^2+k^2} - 0}{k} = 0$$

De donde, aplicando directamente la definición de derivada parcial, resulta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} =$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0^4\cdot k + 4\cdot 0^2k^3 - k^5}{(0^2+k^2)^2} - 0}{k} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5 - 4h^3\cdot O - h\cdot 0^4}{(h^2+0^2)^2} - 0}{h} = +1$$

El teorema 4.2, de igualdad de las derivadas parciales cruzadas, también se aplica a funciones de tres o más variables siempre y cuando f y todas sus derivadas parciales primeras y segundas sean continuas. Por ejemplo, si f es una función de tres variables, $w = f(x, y, z)$, y f y todas sus derivadas parciales primeras y segundas son continuas en una región abierta R, entonces en cada punto de R el orden en la derivación de las derivadas parciales segundas cruzadas es irrelevante. Esto es,

$$\begin{aligned} f_{xy}(x,y,z) &= f_{yx}(x,y,z) \\ f_{xz}(x,y,z) &= f_{zx}(x,y,z) \\ f_{yz}(x,y,z) &= f_{zy}(x,y,z) \end{aligned}$$

Derivadas parciales de tercer orden

Si además, las derivadas parciales de tercer orden son continuas, entonces no importa el orden de derivación de las derivadas parciales cruzadas de tercer orden. En consecuencia, si hacemos las derivadas parciales de tercer orden, resultan $2^3 = 8$ derivadas, pero si son continuas se reducen a $3 + 1 = 4$ derivadas distintas:

$$f\begin{cases} f_x\begin{cases} f_{xx}\begin{cases} f_{xxx}\\ f_{xxy}\end{cases}\\ f_{xy}\begin{cases} f_{xyx}\\ f_{xyy}\end{cases}\end{cases}\\ f_y\begin{cases} f_{yx}\begin{cases} f_{yxx}\\ f_{yxy}\end{cases}\\ f_{yy}\begin{cases} f_{yyx}\\ f_{yyy}\end{cases}\end{cases}\end{cases} \qquad \text{Si son continuas} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & f_{xxx}\\ & & & & f_{xx} & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & \\ & & f_x & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{xxy}\\ f & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{xy} & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & \\ & & f_y & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{xyy}\\ & & & & f_{yy} & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & \\ & & & & & & f_{yyy}\end{array}$$

Es decir, si las derivadas parciales son continuas no importa el orden de derivación, sino el número de veces que se ha derivado respecto de cada variable.

Ejemplo 4.15. *Hallar las derivadas parciales de tercer orden de la función:*

$$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y^3$$

Solución.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & f_{xxx} = 0\\ & & & & f_{xx} = 2 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & \\ & & f_x = 2x + 2y^2 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{xxy} = 0\\ f(x, y) = x^2 + 2xy^2 - y^3 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{xy} = 4y & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & \\ & & f_y = 4xy - 3y^2 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & f_{xyy} = 4\\ & & & & f_{yy} = 4x - 6y & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & \\ & & & & & & f_{yyy} = -6\end{array}$$

Derivadas parciales de orden n

Si hacemos las derivadas parciales de orden n, resultan 2^n derivadas, pero si son continuas se reducen a $n+1$ derivadas distintas. Es decir, si las derivadas parciales son continuas no importa el orden de derivación, sino el número de veces que se ha derivado respecto de cada variable. Ahora bien, aunque el resultado final de las derivadas parciales no depende del orden de derivación, el proceso de derivación puede resultar mucho más complicado en un orden que en otro.

Ejemplo 4.16. *Dada la función* $f(x, y) = \dfrac{xy}{y^2 + z^2}$. *Hallar* $D_{2311}f$ *y* $D_{1132}f$

Solución.

$$D_{2311}f = D_{231}\big(D_1 f\big) = D_{231}\left(\frac{y}{y^2+z^2}\right) = 0$$

$$D_{1132}f = D_{113}\big(D_2 f\big) = D_{113}\left(\frac{x(y^2+z^2)-xy2y}{(y^2+z^2)^2}\right) = D_{113}\left(\frac{xz^2-xy^2}{(y^2+z^2)^2}\right) =$$

$$= D_{11}\left(\frac{2xz(y^2+z^2)^2-(xz^2-xy^2)2(y^2+z^2)2z}{(y^2+z^2)^4}\right) =$$

$$= D_{11}\left(\frac{2xz(3y^2-z^2)}{(y^2+z^2)^3}\right) = D_1\left(\frac{2z(3y^2-z^2)}{(y^2+z^2)^3}\right) = 0$$

4.3. Derivadas direccionales.

4.3.1. Derivadas direccionales

Las derivadas parciales $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$, representan, respectivamente, la pendiente de la superficie $z = f(x,y)$ en las direcciones del eje OX y del eje OY. Para hallar la pendiente en cualquier otra dirección se utilizan las derivadas direccionales. Es decir, las derivadas parciales nos dan una medida de la variación de una función solamente en la dirección de cada eje coordenado. Es natural buscar un concepto más general de derivada a fin de que nuestras consideraciones no queden restringidas a las direcciones particulares de los ejes coordenados y nos permita estudiar la razón de incrementos en una dirección cualquiera. La derivada direccional responde a este propósito.

Queremos estudiar la variación de la función f en el punto $\mathbf{p}$ cuando el argumento varía en la dirección marcada por el vector $\vec{v}$. Para ello partimos de la idea del concepto de derivada de funciones de una variable *"el límite, cuando el incremento de la variable tiende a cero, del cociente del incremento de la función dividido entre el incremento de la variable"*.

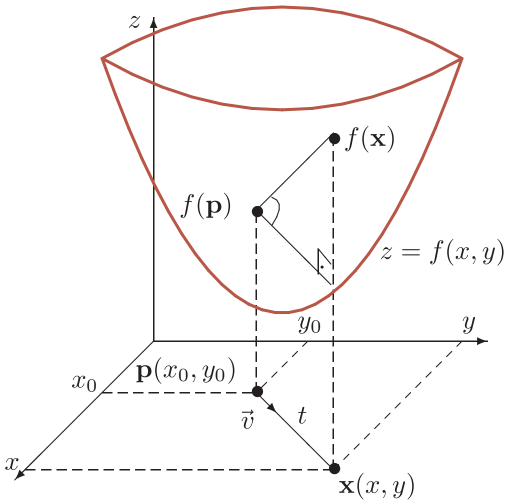


Figura 4.2: Derivada direccional.

Es decir, la derivada direccional de la función f, en el punto $\mathbf{p}$, en la dirección del vector $\vec{v}$, viene definida por el límite:

$$D_{\vec{v}} f(\mathbf{p}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

donde $\mathbf{x}$ es un punto próximo a $\mathbf{p}$ y además situado en la dirección marcada por el vector $\vec{v}$, y t es la *longitud orientada* del segmento $\overline{\mathbf{px}}$, es decir, la longitud de este segmento con signo positivo, si el vector $\overrightarrow{\mathbf{px}}$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{v}$, y con signo negativo en caso contrario.

Para la derivada direccional usaremos cualquiera de las notaciones:

$$D_{\vec{v}} f(\mathbf{p}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{p})$$

Desde el punto de vista gráfico, el problema se ha reducido a dos dimensiones mediante la intersección de la superficie con el plano vertical que pasa por el punto $\mathbf{p}$ y es paralelo al vector $\vec{\mathbf{v}}$. Este plano corta a la superficie mediante una curva $\mathcal{C}$, y definimos la pendiente de la superficie en (x_0, y_0, z_0) como la pendiente de la curva $\mathcal{C}$ en ese punto.

Cálculo de la derivada direccional conocido el vector director:

1. **Vector director unitario $\vec{u}$:** Si el vector director es unitario resulta:

$$\left.\begin{array}{r} \|\overrightarrow{\mathbf{px}}\| = |t| \\ \|\vec{u}\| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{px}} = t\,\vec{u} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{p} = t\,\vec{u} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{p} + t\,\vec{u}$$

de donde,

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\,\vec{u}) - f(\mathbf{p})}{t}} \tag{4.1}$$

2. **Vector director no unitario $\vec{v}$:** Si el vector no es unitario, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} \|\overrightarrow{\mathbf{px}}\| = |t| \\ \|\vec{v}\| \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{px}} \neq t\,\vec{v}$$

luego no podemos hacer la sustitución anterior. Por lo tanto, si el vector no es unitario, hallamos el vector unitario de la misma dirección y sentido que el dado, y a ese nuevo vector hallado le aplicamos el resultado anterior.

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

El concepto de derivada direccional generaliza el concepto de derivada parcial, de manera que las derivadas parciales pueden obtenerse como casos particulares de las derivadas direccionales. Así, f_x es la derivada direccional en la dirección del vector $(1,0)$ y f_y en la dirección del vector $(0,1)$, es decir:

$$f_x(\mathbf{p}) = D_{\vec{u}} f(\mathbf{p}) \text{ para } \vec{u} = (1,0) \qquad f_y(\mathbf{p}) = D_{\vec{u}} f(\mathbf{p}) \text{ para } \vec{u} = (0,1)$$

Se debe observar que puede existir la derivada direccional de una función, en un punto, con respecto a un vector, y sin embargo, puede suceder que no exista la derivada direccional con respecto a otro vector.

Ejemplo 4.17. *Hallar la derivada direccional de* $f(x,y) = x^2 + 3xy^2$ *en el punto* $\mathbf{p}(1,2)$*, en la dirección que apunta hacia el origen.*

Solución. Hallamos el vector director y comprobamos su módulo.

$$\vec{v} = \overrightarrow{\mathbf{po}} = \mathbf{o} - \mathbf{p} = (0,0) - (1,2) = (-1,-2) \to |\vec{v}\,| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \neq 1$$

luego,

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|} = \Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\Big) \to \mathbf{p} + t\,\vec{u} = (1,2) + t\Big(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\Big) = \Big(1 - \frac{t}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\Big)$$

de donde,

$$f(\mathbf{p}) = f(1,2) = 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 1 + 12 = 13$$

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{p} + t\vec{u}) &= f\Big(1 - \frac{t}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\Big) = \Big(1 - \frac{t}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 3\Big(1 - \frac{t}{\sqrt{5}}\Big)\Big(2 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\Big)^2 = \\
&= 1 - \frac{2t}{\sqrt{5}} + \frac{t^2}{5} + \Big(3 - \frac{3t}{\sqrt{5}}\Big)\Big(4 - \frac{8t}{\sqrt{5}} + \frac{4t^2}{5}\Big) = \\
&= 1 - \frac{2t}{\sqrt{5}} + \frac{t^2}{5} + 12 - \frac{24t}{\sqrt{5}} + \frac{12t^2}{5} - \frac{12t}{\sqrt{5}} + \frac{24t^2}{5} - \frac{12t^3}{5\sqrt{5}} = \\
&= 13 - \frac{38t}{\sqrt{5}} + \frac{37t^2}{5} - \frac{12t^3}{5\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

con lo que resulta,

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(1,2) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\,\vec{u}) - f(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{13 - \frac{38t}{\sqrt{5}} + \frac{37t^2}{5} - \frac{12t^3}{5\sqrt{5}} - 13}{t} = \\
&= \lim_{t\to 0} \Big(\frac{-38}{\sqrt{5}} + \frac{37t}{5} - \frac{12t^2}{5\sqrt{5}}\Big) = \frac{-38}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

El que la derivada direccional sea negativa significa que la función decrece en esa dirección.

Cálculo de la derivada direccional conocido el ángulo director.

Conocido el ángulo θ que forma el vector director con la dirección positiva del eje OX, se tienen inmediatamente las coordenadas del vector director unitario. En efecto,

$$\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

El concepto de derivada direccional se puede generalizar para cualquier número de variables. Así, para el caso general podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 4.3 (Derivada direccional). *Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ un punto dado de $\mathcal{D}$. Sea $\vec{u}$ un vector unitario dado. Se define la derivada de la función f en $\mathbf{p}$, en la dirección del vector $\vec{u}$, denotada $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p})$, o bien $D_{\vec{u}} f(\mathbf{p})$, como el siguiente límite, si existe y es finito.*

$$D_{\vec{u}} f(\mathbf{p}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\,\vec{u}\,) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Ejemplo 4.18. *Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = xyz$ en el punto $\mathbf{p}(1,0,-1)$, según la dirección del vector $\vec{v} = (1,1,1)$.*

Solución. Hallamos el vector unitario $\vec{u}$ con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$, para ello lo dividimos por su módulo.

$$|\vec{v}\,| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \neq 1 \quad \to \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

luego,

$$\mathbf{p} + t\,\vec{u} = (1,0,-1) + t\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \Big(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}, -1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\Big)$$

de donde,

$$f(\mathbf{p}) = f(1,1,1) = 1 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

$$f(\mathbf{p} + t\vec{u}) = f\Big(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}, -1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\Big) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\left(-1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \left(\frac{t^2}{3} - 1\right)\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{t^3}{3\sqrt{3}} - \frac{t}{\sqrt{3}}$$

con lo que resulta,

$$D_{\vec{v}} f(1,1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\,\vec{u}\,) - f(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^3}{3\sqrt{3}} - \dfrac{t}{\sqrt{3}} - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

4.3.2. Relación entre la derivada direccional y las derivadas parciales

Veamos a partir de un ejemplo un resultado que justificaremos más adelante.

Ejemplo 4.19. *Hallar la derivada direccional de* $f(x,y) = x^2 + y^3$ *en un punto genérico* $\mathbf{p}(x,y)$*, según la dirección de un vector genérico unitario* $\vec{u} = (u_1, u_2)$*.*

Solución. Tenemos,

$$\mathbf{p} + t\,\vec{u} = (x,y) + t(u_1,u_2) = (x + tu_1, x + tu_2)$$

de donde,

$$f(\mathbf{p}) = f(x,y) = x^2 + y^3$$

$$f(\mathbf{p} + t\,\vec{u}) = f(x + tu_1, x + tu_2) = (x + tu_1)^2 + (x + tu_2)^3 =$$

$$= x^2 + 2xtu_1 + t^2(u_1)^2 + x^3 + 3x^2tu_2 + 3xt^2(u_2)^2 + t^3(u_2)^3$$

con lo que resulta,

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\,\vec{u}) - f(\mathbf{p})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{x^2 + 2xtu_1 + t^2(u_1)^2 + y^3 + 3y^2tu_2 + 3yt^2(u_2)^2 + t^3(u_2)^3 - (x^2 + y^3)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(2xu_1 + t(u_1)^2 + 3y^2u_2 + 3yt(u_2)^2 + t^2(u_2)^3\right) = 2xu_1 + 3y^2u_2$$

El cálculo de la derivada direccional aplicando la definición resulta bastante engorroso, no obstante, el resultado de este ejemplo nos puede hacer intuir una propiedad que demostraremos más adelante (ver teorema 4.5 en la página 248) $D_{\vec{u}}\, f = f_x \cdot u_1 + f_y \cdot u_2$. Es decir, *la derivada direccional se puede obtener como la suma de los productos de las derivadas parciales por las componentes del vector unitario de dirección.* Esto nos permite obtener las derivadas direccionales de una manera mucho más fácil que aplicando directamente la definición. Sin embargo, esta fórmula no es válida para todo tipo de funciones, sino solamente para las «*diferenciables*», de ahí que, en ocasiones, tengamos que acudir al incómodo límite de la definición.

Ejemplo 4.20. *Comprobar que las derivadas direccionales calculadas en los ejemplo 4.17 y 4.18 cumplen la relación anterior.*

Solución.

1. En el ejemplo 4.17 tenemos los siguientes datos:

$$f(x,y) = x^2 + 3xy^2, \quad \mathbf{p}(1,2) \quad \text{y} \quad \vec{u} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

luego:
$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x + 3y^2 \\ f_y = 6xy \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f_x(1,2) = 2 + 12 = 14 \\ f_y(1,2) = 12 \end{array}\right\}$$

de donde,
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p}) = f_x(\mathbf{p}) \cdot u_1 + f_y(\mathbf{p}) \cdot u_2 = \frac{-14}{\sqrt{5}} + \frac{-24}{\sqrt{5}} = \frac{-38}{\sqrt{5}}$$

2. En el ejemplo 4.18 tenemos los siguientes datos:
$$f(x,y) = xyz, \ \mathbf{p}(1,0,-1) \ \text{ y } \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

luego:
$$\left.\begin{array}{l} f_x = yz \\ f_y = xz \\ f_z = xy \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f_x(1,0,-1) = 0 \\ f_y(1,0,-1) = -1 \\ f_z(1,0,-1) = 0 \end{array}\right\}$$

de donde,
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p}) = f_x(\mathbf{p}) \cdot u_1 + f_y(\mathbf{p}) \cdot u_2 + f_z(\mathbf{p}) \cdot u_3 = 0 + \frac{-1}{\sqrt{3}} + 0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Derivada direccional y continuidad. La existencia de todas las derivadas direccionales de una función en un punto no garantiza la continuidad de la función en dicho punto, ya que el cálculo de las derivadas direccionales equivale a *acercarse* al punto sólo mediante rectas.

Ejemplo 4.21. *Estudiar la continuidad y calcular todas las derivadas direccionales en el punto* $\mathbf{p}(0,0)$ *de la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & si \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

1. Continuidad: La función no es continua en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, ya que no existe el límite en dicho punto. En efecto, si nos acercamos al punto mediante las parábolas $y = ax^2$ resulta:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=ax^2 \\ x\to 0}} \frac{x^2ax^2}{x^4 + a^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1 + a^2} = \frac{a}{1 + a^2}$$
luego el límite no existe ya que depende del valor de a. Es decir, según la parábola por la que nos aproximemos al punto tendríamos un valor del límite u otro.

2. Existencia de las derivadas direccionales. A pesar de que la función no es continua en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, las derivadas direccionales en dicho punto existen en todas direcciones. En efecto, sea $\vec{u} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario dado, será:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0)+t(a,b)\big)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(ta)^2(tb)}{(ta)^4+(tb)^2}}{t} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad b=0 \\ \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{t^3a^2b}{t^3(t^2a^4+b^2)} = \frac{a^2}{b} \quad \text{si} \quad b\neq 0 \end{cases}$$

4.4. Diferenciabilidad

En esta sección vamos a generalizar los conceptos de *incremento* y *diferencial*, así como el concepto de *diferenciabilidad* a funciones de dos o más variables. Recuérdese que para una función de una variable, dada por $y = f(x)$, se define el incremento como $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, y la diferencial como $dy = f'(x)\,dx$. Para funciones de dos variables, $z = f(x,y)$, el incremento de la función se generaliza de manera natural. En efecto, llamando Δx y Δy a los incrementos de x e y respectivamente, el incremento de la función se define por

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Sin embargo, la generalización del diferencial no resulta tan natural. Así, si $z = f(x,y)$ y Δx y Δy son los incrementos de x y de y, entonces, las diferenciales de las variables independientes x e y se van a definir como

$$dx = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = \Delta y$$

mientras que la diferencial total de la variabla z se va a definir mediante la expresión:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

El porqué de esta definición merece una extensa explicación. Por otro lado distinguiremos entre función derivable y función diferenciable. Así, diremos que una función de varias variables es *derivable* si existen sus derivadas parciales (en tal caso no queda asegurada la continuidad). Y diremos que es *diferenciable* cuando además de existir las derivadas parciales, ocurre algo más, y ese algo más tiene que garantizar la continuidad.

4.4.1. Generalización del concepto de diferenciabilidad

Al generalizar un concepto de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$, tratamos de conservar las propiedades importantes que consideremos en el caso uni-dimensional. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ la existencia de la derivada en un punto x implica la continuidad en el mismo. Sin embargo, para funciones de dos variable, hemos visto que la existencia de las derivadas parciales en un punto no implica la continuidad en ese punto, ni siquiera la existencia de todas las derivadas direccionales implica la continuidad. Por esta razón las derivadas parciales, al igual que las derivadas direccionales, son una extensión en cierto modo poco satisfactoria del concepto de derivada uni-dimensional. Por tanto, parece natural el deseo de tener una noción de derivada para funciones de varias variables que implique la continuidad. Introducimos ahora una generalización más conveniente que implica la continuidad y, al propio tiempo, nos permite extender los principales teoremas de la teoría de la derivada uni-dimensional a las funciones de varias variables. El concepto que mejor sirve a tal propósito es la noción de *diferencial*.

Generalización del concepto unidimensional. Para funciones de una sola variable $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el concepto de diferenciabilidad se confunde con el concepto de derivabilidad, así, *una función $y = f(x)$ es diferenciable en un punto $x_0 \in \mathcal{D}$ sii posee derivada en ese punto.* Sin embargo, para varias variables estos dos conceptos no son equivalentes. Así, para funciones de dos variable, hemos visto que la existencia de las derivadas parciales en un punto no implica la continuidad en ese punto, ni siquiera la existencia de todas las derivadas direccionales implica la continuidad. Esto nos obliga a buscar el verdadero significado del concepto de diferenciabilidad, separándolo del concepto de derivabilidad, de manera que represente la *"suavidad"* de la función y de él se deduzca la continuidad, como ocurre en una variable.

Recordemos que una función de una variable $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es diferenciable en $x_0 \in \mathcal{D}$ si el siguiente límite existe y es finito:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En tal caso el valor del límite se llama "derivada de f en x_0" y se denota por $f'(x_0)$. Recordemos también que dicho límite admitía una segunda expresión que era equivalente a la anterior:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Un primer intento para conseguir un concepto equivalente para funciones de varias variables sería copiar la definición anterior extendiéndola a la nueva situación. Esto, sin embargo, conduce a una expresión que carece de sentido. En efecto, para n variables tendríamos:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}$$

donde aparece una división por un vector $\vec{v} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, operación que carece de sentido con vectores de $\mathbb{R}^n, n > 1$.

Un segundo intento sería sustituir el vector del denominador por su norma o por su longitud orientada. Pero en este caso la expresión carece de interés, ya que dicho límite sólo existe en puntos muy concretos del dominio, con lo cual se trata de una propiedad muy restrictiva de difícil verificación, y, por lo tanto, deja de representar el concepto de *función diferenciable*. En efecto, para que exista el límite,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

su valor ha de ser 0, ya que, por ejemplo, todas las derivadas direccionales en el punto $\mathbf{x}_0$ tienen que coincidir.

Esto hace que tengamos que replantearnos el concepto de *función diferenciable* de manera que la nueva visión del concepto sea extendible a n variables.

Replanteamiento del concepto. Partamos de la interpretación geométrica del concepto. *Una función de una variable $y = f(x)$ es diferenciable en un punto x_0 de su dominio, si su gráfica tiene recta tangente en dicho punto.* Pero, ¿qué entendemos por recta tangente a una curva en uno de sus puntos?. De todas las rectas que pasan por el punto ¿cuál es la recta tangente?. La recta tangente es una recta que *toca* a la curva en un punto, pero que, además, la curva se *aplana* en las proximidades del punto de tangencia, tratando de confundirse, "por un instante", con la propia recta. Este *aplanamiento* en los alrededores del punto de tangencia, este "*tratar de confundirse*" con la recta tangente, es lo que hace que la curva sea *suave* y que se pueda aproximar mediante la recta tangente en los alrededores del punto de tangencia, y esto es lo que realmente caracteriza el concepto de *función diferenciable*.

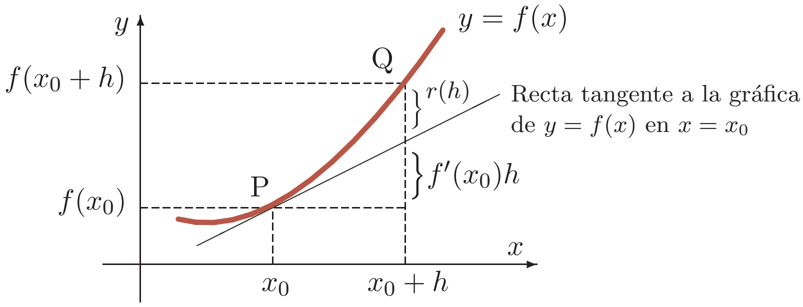


Figura 4.3: Diferencial de una función.

La recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $P = \big(x_0, f(x_0)\big)$ viene definida por la ecuación

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Y en las proximidades del punto tenemos,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(h)$$

donde $r(h)$ es la distancia (vertical) entre la curva y la recta tangente. Este residuo $r(h)$ es lo que nos va a permitir caracterizar el concepto de diferenciabilidad. En efecto, una primera observación nos hace ver que el residuo $r(h)$ tiende a cero a medida que h tiende a cero. Sin embargo, este hecho no es importante en la definición de diferenciabilidad, pues el que $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ lo único que nos dice es que la función es continua en x_0, y seguiría valiendo cero cualquiera que fuera la recta que pase por P, aunque no fuera la recta tangente, e incluso, aunque la función no tuviera tangente. Lo importante, cuando se estudia la diferenciabilidad de funciones, es que el residuo $r(h)$ tiende a cero *más rápido* de lo que lo hace h. Esto significa que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Gráficamente, este límite viene a significar el hecho de que la curva se *"embarra"* ("*se confunde*") con la recta tangente en los alrededores del punto P. En otras palabras, la curva tiene que ser "suave"en P, para que "se pueda ver localmente como una recta"(su recta tangente).

Tratemos de expresar estos conceptos de manera algebraica, desprendiéndolos de sus significados geométricos, con objeto de poderlos generalizar a varias variables. Una recta cualquiera que pase por el punto $P = \big(x_0, f(x_0)\big)$ vendrá definida por la ecuación: $y = f(x_0) + A(x - x_0)$, o lo que es lo mismo $y = f(x_0) + Ah$ donde A es la pendiente de la recta y $h = x - x_0$. Si queremos que, de todas las rectas que pasan por P, nuestra recta sea la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P, tendrá que cumplirse:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h) \quad \text{donde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Por lo tanto, podemos establecer la siguiente definición de diferenciabilidad para funciones de una variable:

Definición 4.4. *Una función $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in D$ si existe una constante A tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h) \quad \textit{con} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Esta definición es equivalente a la anterior, en efecto, despejando A de la expresión anterior resulta:

$$A = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{r(h)}{h}$$

de donde, al tomar límite cuando $h \to 0$ se ve la equivalencia entre la definición de diferenciabilidad y la existencia de la derivada, resultando $A = f'(x_0)$.

Generalización para dos variables.

Desde un punto de vista gráfico, *una función de dos variable $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{p}(x_0, y_0)$ de su dominio, si su gráfica tiene plano tangente en dicho punto.* Pero, ¿qué entendemos por plano tangente a una superficie en uno de sus puntos?. De todos los planos que pasan por el punto, ¿cuál es el plano tangente?. El plano tangente es un plano que *toca* a la superficie en un punto, pero que, además, la superficie se *aplana* en las proximidades del punto de tangencia, tratando de confundirse, "por un instante", con el propio plano. Este *aplanamiento* en los alrededores del punto de tangencia, este "*tratar de confundirse*" con el plano tangente, es lo que hace que la superficie sea *suave* y que se pueda aproximar mediante el plano tangente en los alrededores del punto de tangencia, y esto es lo que realmente caracteriza el concepto de *función diferenciable*.

Un plano cualquiera que pase por el punto $P = \big(x_0, y_0; f(x_0, y_0)\big)$ vendrá definida por la ecuación: $z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$. Si queremos que este plano sea tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto P, tendrá que cumplirse:

$$f\big((x_0, y_0)+(h, k)\big) = f(x_0, y_0)+Ah+Bk+r(h, k) \text{ con } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

Por lo tanto, podemos establecer la siguiente definición de diferenciabilidad para funciones de dos variables:

Definición 4.5 (Función diferenciable). *Una función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{p}(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ si existen dos constantes A y B tales que*

$$\boxed{f\big((x_0, y_0) + (h, k)\big) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + r(h, k) \ \textit{con} \ \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0}$$

f es diferenciable en la región $\mathcal{D}$ si es diferenciable en todo punto de $\mathcal{D}$

4.4.2. Diferenciabilidad y derivadas parciales

Proposición 4.1 (Diferenciabilidad implica existencia de las derivadas parciales). *Si una función* $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en el punto* $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$*, entonces existen sus derivadas parciales en dicho punto.*

Demostración. Supongamos que la función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{p}(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, entonces existen las constantes A y B tales que:

$$f\big((x_0, y_0)+(h, k)\big) = f(x_0, y_0)+Ah+Bk+r(h, k) \text{ con } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

Ahora bien, poniendo $\mathbf{h} = (h, 0)$ en la expresión anterior resulta:

$$\frac{r(h, 0)}{h} = \frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A$$

de donde, al tomar límite cuando $h \to 0$ resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A\right)$$

de donde obtenemos

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De manera análoga, poniendo $\mathbf{h} = (0, k)$ obtenemos:

$$B = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$ □

Se tiene, entonces, que una condición *necesaria* para que una función $f(x, y)$ sea diferenciable en un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ es que existan sus derivadas parciales en ese punto. Sin embargo, esta condición no es suficiente, ya que la existencia de todas las derivadas parciales no garantiza la diferenciabilidad. No obstante, lo interesante de esta propiedad es su negación lógica, o sea: *Si una función no tiene todas sus derivadas parciales, entonces no es diferenciable.*

Como consecuencia de este resultado, podemos establecer la siguiente

Proposición 4.2. *La función* $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida en un conjunto abierto* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^2$*, es diferenciable en el punto* $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$*, si:*

1. *Existen las derivadas parciales de* f *en* $\mathbf{p}$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

2. *El residuo $r(h,k)$ definido en la expresión:*

$$f\big((x_0,y_0)+(h,k)\big)=f(x_0,y_0)+Ah+Bk+r(h,k)$$

tiene la propiedad

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$$

Esta definición de diferenciabilidad sí que garantiza la continuidad de la función en aquellos puntos en los que es diferenciable, como sucede con las funciones de una variable.

Nota: Con objeto de recorda mejor la expresión, el límite que caracteriza la diferenciabilidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f\big((x_0,y_0)+(h,k)\big)-f(x_0,y_0)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Y llamando $\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ y $\lambda(h,k)=Ah+Bk$ resulta

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta f-\lambda(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0} \qquad (4.2)$$

Con lo cual la proposición 4.2 se puede enunciar de la siguiente forma:

Corolario 4.1 (Caracterización de la diferenciabilidad). *La función $f:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el punto $\mathbf{p}=(x_0,y_0)\in\mathcal{D}$, si:*

1. *Existen las derivadas parciales de f en $\mathbf{p}$*

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\qquad B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

2. *El siguiente límite vale cero:*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta f-\lambda(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

donde, $\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ y $\lambda(h,k)=Ah+Bk$

Proposición 4.3 (Segunda forma de la diferenciabilidad). *Una función f dada por $z=f(x,y)$ es diferenciable en (x,y) si Δz puede expresarse en la forma*

$$\Delta z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

donde ambos ε_1 y ε_2 $\to 0$ cuando $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

4.4.3. La diferencial

Si la función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, entonces a la parte lineal en h y k ($\lambda(h, k) = Ah + Bk$) de la expresión del residuo

$$f\big((x_0, y_0)+(h, k)\big) = f(x_0, y_0) + \boxed{Ah + Bk} + r(h, k) \text{ con } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

se le llama *diferencial* de la función f en (x_0, y_0) y se denota por $df(x_0, y_0)$. Así,

$$df(x_0, y_0) = Ah + Bk$$

Y dado que, como se vio en la proposición 4.1, A y B representan las derivadas parciales de la función f en el punto (x_0, y_0), resulta:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

Y teniendo en cuenta que si $f(x, y) = x$, se tiene $h = dx$ y si $f(x, y) = y$, se tiene $k = dy$, podemos escribir:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

O de manera más general:

Definición 4.6 (La diferencial). *Si la función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, entonces, para cada $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{D}$, se llama diferencial de la función f en $\mathbf{x}$ y se denota por df, a la expresión:*

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy} \tag{4.3}$$

4.4.4. Diferenciabilidad y continuidad

Teorema 4.3 (Diferenciabilidad implica continuidad). *Si la función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, entonces es continua en ese punto.*

Demostración. Si f es diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ se tiene

$$f\big((x_0, y_0)+(h, k)\big) = f(x_0, y_0)+Ah+Bk+r(h, k) \text{ con } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

Tomando límite cuando $(h, k) \to (0, 0)$ y teniendo en cuenta que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h, k) = 0$$

tenemos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\Big((x_0,y_0)+(h,k)\Big) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \Big(f(x_0,y_0)+Ah+Bk+r(h,k)\Big) = f(x_0,y_0)$$

luego la función es continua en $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$. □

El recíproco no es cierto, ya que existen funciones continuas que no son diferenciables.

Ejemplo 4.22. *Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de la siguiente función y, en su caso, hallar su diferencial en ese punto.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

(a) Continuidad en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \cdot Acot = 0 = f(0,0)$$

luego la función es continua en $(0,0)$

(b) Diferenciabilidad en $(0,0)$: Calculamos las derivadas parciales aplicando la definición.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot k}{\sqrt{0^2+k^2}}}{k} = 0$$

luego, el candidato a diferencial es:

$$\lambda(h,k) = 0h + 0k = 0$$

Por otro lado, el incremento de la función es:

$$\Delta f(0,0) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = f(h,k) - 0 = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

luego, resulta el siguiente límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - \lambda(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = \lim_{\substack{k=mh \\ h\to 0}} \frac{hmh}{h^2+m^2h^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Luego el límite no existe, por depender de m, y en consecuencia la función no es diferenciable en $(0,0)$. Al no ser diferenciable resulta que $df(0,0)$ no existe, con lo cual $\lambda(h,k) = 0h + 0k = 0$ no tiene ninguna significación.

Ejemplo 4.23. *Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de la siguiente función y, en su caso, hallar su diferencial en ese punto.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

(a) Continuidad: Nos acercamos al origen a través de la recta $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{y=mx \\ x\to 0}} \frac{xmx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} = f(m)$$

luego la función no es continua en $(0,0)$

(b) Diferenciabilidad: Al no ser continua la función en el punto $(0,0)$ no puede ser diferenciable en dicho punto, en consecuencia resulta que $df(0,0)$ no existe.

Ejemplo 4.24. *Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de la siguiente función y, en su caso, hallar su diferencial en ese punto.*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Solución.

(a) Continuidad: La función es continua en $(0,0)$, en efecto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+0^2} = \sqrt{0^+} = 0 = f(0,0)$$

(b) Diferenciabilidad: Las derivadas parciales en el origen no existen, en efecto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

y dicho límite no existe, puesto que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Luego, la función no es diferenciable en el origen por no existir las derivadas parciales en dicho punto y ser la existencia de las derivadas parciales en un punto **p** una condición necesaria para la diferenciabilidad de la función en dicho punto. En consecuencia resulta que $df(0,0)$ no existe.

Ejemplo 4.25. *Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función* $f(x,y) = xy^2$ *en el origen y hallar su diferencial en ese punto.*

Solución. Estudiemos primero la diferenciabilidad en el origen

$$f(xy) = xy^2 \left\{ \begin{array}{l} f_x(x,y) = y^2 \\ f_y(x,y) = 2xy \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_x(0,0) = 0 \\ f_y(0,0) = 0 \end{array} \Bigg\} \lambda(h,k) = 0h + 0k = 0$$

$$\Delta f(0,0) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) = f(h,k) - 0 = hk^2$$

luego,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - \lambda(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} k^2 \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \cdot \text{Acot} = 0$$

Luego la función es diferenciable en $(0,0)$ y en consecuencia es continua en dicho punto.
Al ser diferenciable resulta, $df(0,0) = \lambda(h,k) = 0h + 0k = 0$

Ejemplo 4.26. *Dada la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} & si \quad x \cdot y \neq 0 \\ x + y & si \quad x \cdot y = 0 \end{cases}$$

Calcula sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$. *Estudia su continuidad y diferenciabilidad en dicho punto.*

Solución. Entendamos primero el significado de la expresión que define la función. Para hallar la imagen de un punto (x,y) tenemos que determinar, primero, si las dos componentes son distintas de cero, o si alguna de las componentes es cero; y según el caso se le aplica una fórmula o la otra. Es decir, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, se tiene:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}, \quad f(x,0) = x, \quad f(0,y) = y, \quad f(0,0) = 0.$$

En consecuencia,
Derivadas parciales en el punto $(0,0)$. Para calcular las derivadas parciales de la función en el punto $(0,0)$ utilizamos la definición de derivada parcial.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+0) - (0+0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} =$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{(0+k) - (0+0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{k} = 1$$

Continuidad en $(0,0)$. La función no es continua en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, ya que no existe el límite en dicho punto.En efecto, si nos acercamos al punto mediante la recta $y=x$ resulta:

$$\begin{aligned}
&f(0,0)=0+0=0\\
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2+y^2}{xy}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2\neq 0=f(0,0)
\end{aligned}$$

(el límite no existe en el punto $\mathbf{p}(0,0)$, ya que si nos acercamos al mismo a través de la recta $x=0$ se obtendría 0 como límite).
Diferenciabilidad en $(0,0)$. Al no ser continua en el punto $(0,0)$, la función no puede ser diferenciable en dicho punto.

En consecuencia, la función no es ni continua ni diferenciable en el punto $(0,0)$ y, sin embargo, posee derivadas parciales en dicho punto.

4.4.5. Diferenciabilidad de funciones de n variables

El concepto de diferenciabilidad se puede extender a funciones de cualquier número de variables, de manera análoga a como se ha hecho al caso de dos variable.

Definición 4.7. *Se dice que la función $f:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida en un conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, es diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0=(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{D}$, si existen las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$*

$$A_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0),\quad i=1,2,\dots,n$$

y si el residuo $r(\mathbf{h})$ definido en la expresión:

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})=f(\mathbf{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}A_ih_i+r(\mathbf{h})$$

(donde $\mathbf{h}=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ es tal que $\mathbf{x}_0+\mathbf{h}\in\mathcal{D}$) tiene la propiedad

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0$$

Esta definición de diferenciabilidad también garantiza la continuidad de la función en aquellos puntos en los que es diferenciable, como sucede con las funciones de una y dos variable.

Nota: Con objeto de recorda mejor la expresión, el límite que caracteriza la diferenciabilidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-\sum_{i=1}^{n}A_ih_i}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}}$$

Y llamando $\Delta f=f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)$ y $\lambda(\mathbf{h})=\sum_{i=1}^{n}A_ih_i$ resulta

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\Delta f-\lambda(\mathbf{h})}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}}=0$$

La Diferencial

Si la función $f:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0=(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{D}$, entonces a la parte lineal en h_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($\lambda(\mathbf{h}) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n$) de la expresión del residuo

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n + r(\mathbf{h}) \quad \text{con} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{o}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

se le llama *diferencial* de la función f en $\mathbf{x}_0$ y se denota por $df(\mathbf{x}_0)$.

$$df(\mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{h}) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n$$

Y dado que los coeficientes A_i $i = 1, \ldots, n$ representan las derivadas parciales de la función f en el punto $\mathbf{x}_0$, resulta

$$df(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)h_n$$

Y teniendo en cuenta que si $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, se tiene $h_1 = dx_1$ y si $f(x_1, \ldots, x_n) = x_n$, se tiene $h_n = dx_n$, podemos escribir:

$$df(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)dx_n$$

Y, en general, podemos enunciar la siguiente

Definición 4.8 (La diferencial). *Si la función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el conjunto abierto $\mathcal{D}$, entonces para cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$, se llama diferencial de la función f en $\mathbf{x}$, y se denota por df, a la expresión*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y}dx_n$$

4.4.6. Condición suficiente para la diferenciabilidad

Hemos visto que ni la existencia de todas las derivadas parciales, ni, si quiera, la de todas las derivadas direccionales es suficiente para establecer la existencia de la diferencial (puesto que ni una ni otra implican la continuidad). Sin embargo, demostraremos que la existencia de las derivadas parciales «*continuas*» implica la existencia de la diferencial.

Teorema 4.4 (Derivadas parciales continuas implican diferenciabilidad). *Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$. Si las funciones (derivadas parciales)*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad \tilde{D} \subseteq \mathcal{D}$$

son continuas en el punto $\mathbf{x}_0 \in \tilde{D}$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$

Demostración. (Opcional, caso $n = 2$) Sea la función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que las funciones derivadas parciales sean continuas en un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$. Sea $\mathbf{x} = (x, y)$ un punto próximo a $\mathbf{p}$ y sea $\mathbf{q} = (x_0, y_0 + k)$. Tenemos:

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \big[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{q})\big] + \big[f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p})\big]$$

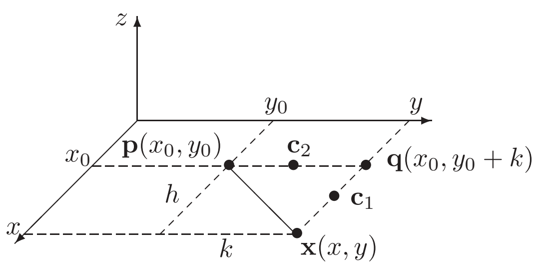


Figura 4.4: valor medio.

Aplicando el teorema del valor medio en cada corchete, resulta

$$\Delta f = f_x(\mathbf{c_1})h + f_y(\mathbf{c_2})k$$

Y al ser las parciales continuas en el punto $\mathbf{p}$ será:

$$\Delta f = \big(f_x(\mathbf{p}) + \epsilon_1\big)h + \big(f_y(\mathbf{p}) + \epsilon_2\big)k = f_x(\mathbf{p})h + f_y(\mathbf{c_2})k + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

Luego f es diferenciable en $\mathbf{p}$ $\square$

El recíproco de este teorema no es cierto, ya que existen funciones diferenciables en un punto $\mathbf{p}$ y sin embargo sus derivadas parciales en dicho punto no son continuas. Por lo tanto, si las derivadas parciales no son continuas, entonces no podemos asegurar nada. No obstante, este teorema permite comprobar la diferenciabilidad de una función de una manera fácil, y se puede extender a un dominio $\mathcal{D}$ de la siguiente forma: *Si las derivadas parciales son continuas en un dominio $\mathcal{D}$ entonces la función es diferenciable en ese dominio.*

Ejemplo 4.27. *Estudiar la diferenciabilidad de las funciones*

(a) $f(x, y) = xy^2$ (b) $g(x, y) = e^{x^2+y^2}$ (c) $h(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + y^2 - z^2)$

Solución.

(a) Las derivadas parciales de la función $f(x, y) = xy^2$ son:

$$f_x(x, y) = y^2 \qquad f_y(x, y) = 2xy$$

que, al ser polinómicas, son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, luego la función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

(b) Las derivadas parciales de la función $g(x, y) = e^{x^2+y^2}$ son:

$$g_x(x, y) = 2xe^{x^2+y^2} \qquad g_y(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}$$

que, al ser producto de polinómica con exponencial compuesta con polinómica, son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, luego la función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

(c) Las derivadas parciales de la función $h(x,y,z) = \operatorname{sen}(x+y^2-z^2)$ son:

$$\begin{aligned} h_x(x,y,z) &= \cos(x+y^2-z^2) \\ h_y(x,y,z) &= 2y\cos(x+y^2-z^2) \\ h_z(x,y,z) &= -2z\cos(x+y^2-z^2) \end{aligned}$$

que, al ser producto y composición de funciones elementales, son funciones continuas en $\mathbb{R}^3$, luego la función es diferenciable en $\mathbb{R}^3$.

4.4.7. Caracterización de las funciones diferenciables

Condiciones para la diferenciabilidad

Recapitulando, podemos resumir las condiciones de diferenciabilidad de la siguiente forma:

Condiciones necesarias de diferenciabilidad:

- *Si la función es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto.*
- *Si la función es diferenciable en un punto, entonces existen las derivadas parciales en ese punto.*

Condición suficiente de diferenciabilidad: *Si las derivadas parciales son continuas en un punto, entonces la función es diferenciable en ese punto.*

Los recíprocos de los teoremas anteriores no son ciertos. Aunque lo que sí podemos utilizar son sus negaciones lógicas.

Condiciones necesarias de diferenciabilidad:

- *Si la función no es continua en un punto, entonces no es diferenciable en ese punto.*
- *Si no existen las derivadas parciales en un punto, entonces la función no es diferenciable en ese punto.*

Condición suficiente de diferenciabilidad: *Si la función no es diferenciable en un punto, entonces las derivadas parciales no son continuas en ese punto.*

Para recordarlas podemos realizar el siguientes esquema gráfico

Diferenciabilidad de las funciones elementales

Con objeto de desarrollar una intuición que permita detectar a priori la diferenciabilidad de las funciones de varias variables deben tenerse en cuenta las siguientes proposiciones

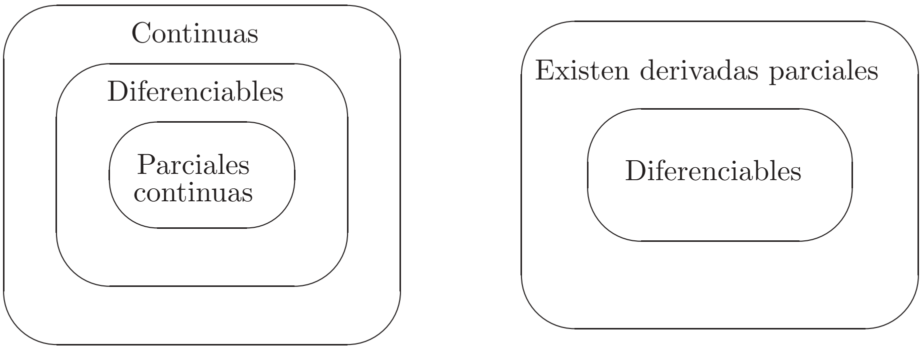


Figura 4.5: Parciales cont⇒diferenciable⇒continua Diferenciable⇒existen parciales

Proposición 4.4. *Toda función polinómica*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j$$

es diferenciable en todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Proposición 4.5.

(a) *La suma y el producto de funciones diferenciables es otra función diferenciable.*

(b) *El cociente de dos funciones diferenciables es otra función diferenciable en todos aquellos puntos que no anulen el denominador.*

Proposición 4.6. *La composición de dos funciones diferenciables es otra función diferenciable.*

Ejemplo 4.28. *Estudiar la diferenciabilidad de las funciones*

$$\text{(a)}\ \ f(x,y) = \frac{x^2 - xy + 1}{x^2 + y^2} \qquad \text{(b)}\ \ g(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

$$\text{(c)}\ \ h(x,y) = x^2 e^{x^2+y^2} + \operatorname{sen} \frac{1-y^2}{1+x^2}$$

Solución.

(a) La función es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por tratarse del cociente de dos funciones polinómicas y el único punto que anula el denominador es el $(0,0)$.

(b) La función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ por tratarse de la composición de dos funciones diferenciables.

(c) La función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ por tratarse de suma de funciones diferenciables.

4.4.8. Diferenciabilidad y derivadas direccionales

El cálculo de la derivada direccional aplicando el límite (4.1) que aparece en la definición (pág. 228) resulta un poco engorroso. No obstante, para las funciones diferenciables existe la posibilidad de calcular las derivadas direccionales de una manera mucho más fácil. Como *la suma de los productos de las derivadas parciales por las componentes del vector unitario de dirección.* En efecto,

Teorema 4.5 (Derivada direccional y derivadas parciales). *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0 \in D$, y sea $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ un vector unitario. Entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) u_i$$

Demostración. Al ser f diferenciable en $\mathbf{x}_0$ se tiene que:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + r(\mathbf{h}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Limitemos el incremento de la función f sólo a la dirección marcada por el vector $\mathbf{u}$. Para ello, escribamos el vector $\mathbf{h}$ como $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, luego será: $h_i = tu_i$, con lo cual nos queda

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) t u_i + r(t\mathbf{u})$$

de donde, dividiendo po t, resulta

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) u_i + \frac{r(t\mathbf{u})}{t}$$

Y teniendo en cuenta que $\|\mathbf{h}\| = \|t\mathbf{u}\| = |t|\|\mathbf{u}\| = |t|$, pues el vector $\mathbf{u}$ es unitario. Es decir, t es la *longitud orientada por* $\mathbf{u}$ del vector $\mathbf{h}$, es decir, la longitud de este vector con signo positivo, si el vector $\mathbf{h}$ tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{u}$, y con signo negativo en caso contrario. Es decir, $t = \pm\|\mathbf{h}\|$. Con lo cual decir que $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ equivale a decir que $t \to 0$. En consecuencia tomando límite en la expresión anterior cuando $t \to 0$, (y teniendo en cuenta que los primeros sumandos del 2º miembro no dependen de $\mathbf{h}$ ni de t) resulta

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) u_i \pm \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}$$

El límite que aparece en el primer miembro es la derivada direccional de la función f en el punto $\mathbf{x}_0$ según la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ (ver (4.1)), y el límite que aparece en el segundo miembro es cero por ser la función diferenciable. En consecuencia resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) u_i \qquad \square$$

Ejemplo 4.29. *Calcular, usando las derivadas parciales, la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $\mathbf{p}(1, 1)$ en el sentido del vector que parte de $\mathbf{p}$ y forma un ángulo de 60^o con el sentido positivo del eje OX.*

Solución. Hallamos el vector unitario de dirección,

$$\vec{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Hallamos las derivadas parciales en el punto $\mathbf{p}(1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{array}\right\} \begin{array}{l} f_x(1,1) = 2 \\ f_y(1,1) = 2 \end{array}$$

de donde,

$$D_{\vec{u}} f(1,1) = f_x(1,1)u_1 + f_y(1,1)u_2 = 2\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

4.4.9. La derivada según una dirección curva

La derivada direccional también se puede aplicar para direcciones curvas. En este caso se entiende que el vector director es el vector tangente a la curva.

Vector tangente a una curva plana

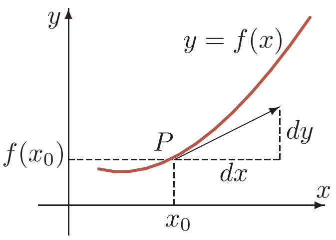


Figura 4.6: Vector tangente.

Como vector tangente podemos elegir cualquiera de los vectores siguientes, todos ellos paralelos entre sí:

$$\vec{v}_T = (dx, dy) \parallel (1, \frac{dy}{dx}) = \big(1, y'(x)\big) \parallel \big(x'(t), y'(t)\big)$$

Ejemplo 4.30. *Calcular la derivada del campo escalar* $z = \arctan(xy)$ *en el punto* $\mathbf{p}(1,1)$, *según la dirección de la parábola* $y = x^2$, *en el sentido del crecimiento de la abscisa.*

Solución. Hallamos el vector tangente unitario a la parábola $y = x^2$, en el punto $\mathbf{p}(1,1)$, con la primera componente positiva.

$$\vec{v}_T = \big(1, y'(x)\big) = (1, 2x) \quad \to \quad \vec{v}_T(1,1) = (1,2)$$

$$|\vec{v}_T(1,1)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad \to \quad \vec{u}_T(1,1) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

Hallamos las derivadas parciales de la función en el punto $\mathbf{p}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1+x^2y^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1+x^2y^2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \dfrac{x}{1+1} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

de donde,

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}_T} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

4.5. Gradiente

4.5.1. Definición

Si la función es diferenciable, entonces la derivada direccional y el diferencial recuerdan un producto escalar

$$D_{\vec{u}} f = f_x u_1 + f_y u_2 = (f_x, f_y) \cdot (u_1, u_2) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u}$$

$$df = f_x dx + f_y dy = (f_x, f_y) \cdot (dx, dy) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{v}_T$$

Este resultado nos hace tener en consideración el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de una función en un punto. Así, *Dada una función diferenciable de dos variables, se llama vector gradiente de dicha función en un punto* $\mathbf{p}$*, al vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función en dicho punto.* Y se denota por cualquiera de los símbolos $\mathbf{grad}f(\mathbf{p})$, $\nabla f(\mathbf{p})$ o $\overrightarrow{\nabla f}(\mathbf{p})$.

$$\mathbf{grad}f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f}(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})\right)$$

(El símbolo ∇ se denomina «*nabla*»).

De manera análoga se define el vector gradiente para tres o más variables

$$\mathbf{grad}f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f}(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p})\right)$$

Formalmente la definición es la siguiente:

Definición 4.9. *Sea* $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable definida en el conjunto abierto* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^n$*. Se define el (vector)* gradiente *de la función* f *en el punto* $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$*, como el vector de* $\mathbb{R}^n$ *dado por*

$$\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right)$$

Ejemplo 4.31. *Hallar el vector gradiente de la función* $f(x, y) = x^2y + xy^3$ *en el punto* $(-1, 2)$

Solución. Hallamos las derivadas parciales y las evaluamos en el punto $(-1, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2xy + y^3 \\ f_y = x^2 + 3xy^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f_x(-1, 2) = -4 + 8 = 4 \\ f_y(-1, 2) = 1 - 12 = -11 \end{array}$$

de donde,

$$\overrightarrow{\nabla f}(-1, 2) = (4, -11)$$

Ejemplo 4.32. *Hallar el vector gradiente de la función* $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{z}$ *en un punto genérico.*

Solución. Hallamos las derivadas parciales

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \dfrac{1}{z} \\ f_y = \dfrac{1}{z} \\ f_z = -\dfrac{x + y}{z^2} \end{array}\right\} \overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z}, \frac{-x - y}{z}\right)$$

Nota. Para funciones de una variable $y = f(x)$ teníamos que:

$$df = f'(x)dx = f'(x) \cdot h$$

Para funciones de varias variables tenemos que:

$$df = f_x dx + f_y dy = (f_x, f_y) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \nabla f \cdot \mathbf{h}$$

Si se comparan ambas expresiones, se observa que el gradiente, ∇f, puede pensarse como la generalización del concepto de derivada para funciones de varias variables. Si bien, hay que advertir que mientras que la derivada de una función de una variable en un punto es un *número*, la derivada de una función de varias variables es un *vector*.

4.5.2. Vector gradiente y derivada direccional

A partir del vector gradiente, la derivada direccional de una función diferenciable f en un punto $\mathbf{p}$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$, se puede expresar como un producto escalar

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u}$$

Es decir, *la derivada direccional de la función f en el punto $\mathbf{p}$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ es el producto escalar del vector gradiente de f en el punto $\mathbf{p}$ por el vector $\vec{u}$.* Este hecho permite obtener las siguientes propiedades

Propiedades: Si la función f es diferenciable, se tiene:

(a) *Si en un punto $\mathbf{p}$ el gradiente es cero, entonces todas las derivadas direccionales en ese punto valen cero.*

$$\nabla f(\mathbf{p}) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{\vec{v}} f(\mathbf{p}) = 0, \quad \text{cualquiera que sea} \quad \vec{v}$$

Es decir, si todas las derivadas parciales son nulas, entonces todas las derivadas direccionales también lo son.

(b) *La derivada direccional es máxima en la dirección y sentido del gradiente, mínima en sentido contrario, y nula en la dirección perpendicular al gradiente, además, el valor máximo de esta derivada es el módulo del gradiente.*

En efecto, teniendo en cuenta que el producto escalar de dos vectores es el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman, y llamando θ al ángulo que forman el gradiente $\overrightarrow{\nabla f}$ y el vector de dirección $\vec{u}$, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u} = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot cos\,\theta = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot 1 \cdot cos\,\theta = \|\overrightarrow{\nabla f}\| cos\,\theta$$

Ahora bien, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, luego el valor máximo del producto $\|\overrightarrow{\nabla f}\| cos\,\theta$ se obtiene cuando $\cos\theta = 1$ y el valor mínimo cuando $\cos\theta = -1$, es decir,

Cuando $\overrightarrow{\nabla f}$ y $\vec{u}$ son vectores de la misma dirección y sentido, se tiene $\theta = 0$, y por lo tanto cos $\theta = 1$, de donde,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u} = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot cos\,0 = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot 1 \cdot 1 = \|\overrightarrow{\nabla f}\|$$

Cuando $\overrightarrow{\nabla f}$ y $\vec{u}$ son vectores de la misma dirección pero de sentidos opuestos, se tiene $\theta = \pi$, y por lo tanto cos $\theta = -1$, de donde,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u} = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot cos\,\pi = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot 1 \cdot (-1) = -\|\overrightarrow{\nabla f}\|$$

Y cuando $\overrightarrow{\nabla f}$ y $\vec{u}$ son vectores perpendiculares, se tiene $\theta = \pi/2$, y por lo tanto cos $\theta = 0$, de donde,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u} = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot cos\,\pi/2 = \|\overrightarrow{\nabla f}\| \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Esquemáticamente:

$$\begin{array}{ccl} \overrightarrow{\nabla f} \nearrow\!\!\nearrow \vec{u} & \Rightarrow & D_{\vec{u}}f(\mathbf{p}) = \|\overrightarrow{\nabla f}(\mathbf{p})\| \quad \text{Máxima} \\ \overrightarrow{\nabla f} \nearrow\!\!\swarrow \vec{u} & \Rightarrow & D_{\vec{u}}f(\mathbf{p}) = -\|\overrightarrow{\nabla f}(\mathbf{p})\| \quad \text{mínima} \\ \overrightarrow{\nabla f} \perp \vec{u} & \Rightarrow & D_{\vec{u}}f(\mathbf{p}) = 0 \end{array}$$

Ejemplo 4.33. *La temperatura en grados Celsius, sobre la superficie de una placa metálica, viene dada por $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$, midiéndose x e y en centímetros. Desde el punto $(2,3)$ ¿En qué dirección crece la temperatura más rápidamente? ¿A qué razón se produce ese crecimiento?.*

Solución: La dirección de máximo crecimiento es la dirección del gradiente, y la razón de ese crecimiento su módulo, en consecuencia hallamos el gradiente y lo evaluamos en el punto $(2,3)$

$$\overrightarrow{\nabla f} = (T_x, T_y) = (-8x, -2y) \qquad \rightarrow \qquad \overrightarrow{\nabla f}(2,3) = (-16, -6)$$

luego la dirección de máximo crecimiento es la del vector

$$\vec{v} = \overrightarrow{\nabla f}(2,3) = (-16, -6)$$

y la razón de máximo crecimiento es el módulo de gradiente, luego,

$$D_{\vec{v}}T(2,3) = \|\overrightarrow{\nabla f}(2,3)\| = \|(-16,-6)\| = \sqrt{16^2 + 6^2} = \sqrt{292} = 17'09^{\circ}/\text{cm}.$$

Hay que hacer notar que aunque el gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de la temperatura, no por eso apunta al lugar más caliente de la placa. Es decir, el gradiente proporciona una solución local al problema. Una vez abandonada ese posición, la dirección de máximo crecimiento puede cambiar, ya que la trayectoria de máximo crecimiento no tiene por qué ser lineal.

4.5.3. Gradiente y curvas de nivel

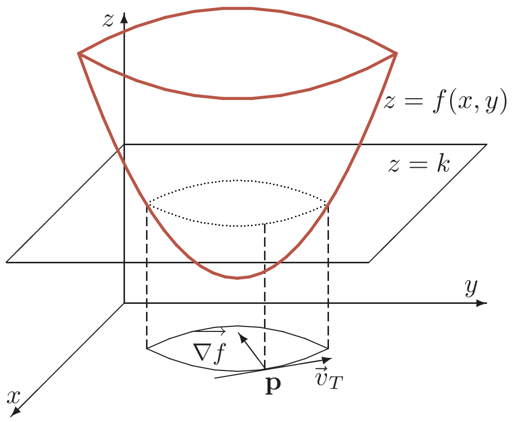


Figura 4.7: Gradiente-curva de nivel.

Las curvas de nivel de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ se obtienen dándole a z un valor numérico concreto. En consecuencia, caminando sobre la curva de nivel, los valores de la función no cambian durante el recorrido. Es decir, al movernos por la superficie siguiendo una curva de nivel, los valores de la función se mantienen constante, y, por lo tanto, es de esperar que la derivada de la función en esa dirección sea cero. Es decir,

$$D_{\vec{u}_T} f(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u}_T = 0$$

Esto significa que en cada punto de una curva de nivel el vector gradiente es perpendicular al vector tangente a la curva de nivel y, en consecuencia, *en cada punto de una superficie, el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel que pasa por ese punto.*

Otra manera de verlo es la siguiente: En cada punto (x, y) de la curva de nivel se tiene $f(x, y) = k$, de donde, $df(x, y) = 0$, y por lo tanto, en ese punto, $f_x dx + f_y dy = 0$, de donde, expresándolo en forma vectorial resulta

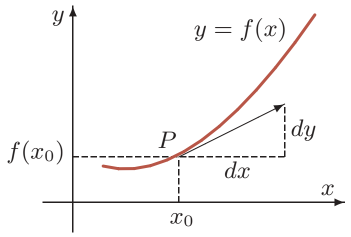
$$(f_x, f_y) \cdot (dx, dy) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{v}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla f} \perp \vec{v}_T$$

4.6. Plano tangente

4.6.1. Vectores normales

Vector tangente

(a) A una curva plana.



Como vector tangente podemos elegir cualquiera de los vectores siguientes, todos ellos paralelos entre sí:

$$\vec{v}_T = (dx, dy) \parallel (1, \frac{dy}{dx}) = \big(1, y'(x)\big)$$

(b) A una superficie. De manera análoga, a lo anterior

$$\vec{v}_T = (dx, dy, dz) \begin{array}{l} \nearrow \quad y = cte. \to \vec{v}_T = (dx, 0, dz) \parallel (1, 0, \dfrac{\partial z}{\partial x}) \\ \searrow \quad x = cte. \to \vec{v}_T = (0, dy, dz) \parallel (0, 1, \dfrac{\partial z}{\partial y}) \end{array}$$

Vector normal a una curva plana

Se llama vector *normal* a una curva, en un punto de la misma, al vector *perpendicular* a su recta tangente en dicho punto. Análogamente, se llama vector *normal* a una superficie, en un punto de la misma, al vector *perpendicular* a su plano tangente en dicho punto. Es evidente que si existe un vector normal entonces existen infinitos, ya que si $\vec{v}_p$ es un vector normal, entonces también lo es $\lambda\vec{v}_p$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) Curvas dadas de forma explícitas $y = f(x)$
Dada una función de una variable $y = f(x)$ y un punto (x_0, y_0) de la misma, el vector tangente a su gráfica en dicho punto vendrá definido por (dx, dy), o bien, $\big(h, f'(x_0)h\big)$, o más simplificado, $\vec{v}_T = \big(1, f'(x_0)\big)$, y en consecuencia, el vector normal a la curva en el punto (x_0, y_0) vendrá definido por

$$\vec{v}_p = \big(-f'(x_0), 1\big)$$

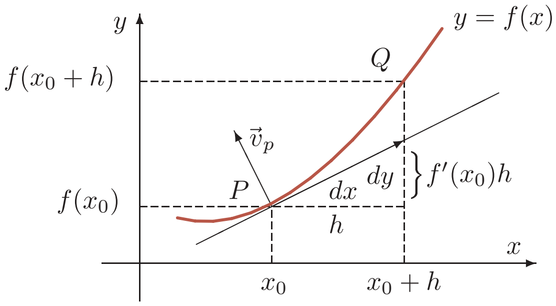


Figura 4.8: Vector normal a una curva.

Donde se ha tenido en cuenta que para calcular un vector perpendicular a otro conocido del plano basta con cambiar las coordenadas de orden y una de ellas de signo.

(b) Curvas dadas en forma implícita $F(x, y) = 0$

Dada una curva plana de ecuación $y = f(x)$, igualando a cero (o a una constante) la ecuación, podemos considerar la curva $y - f(x) = 0$ como una curva de nivel de una función de dos variables $F(x, y) = 0$, siendo $F(x, y) = y - f(x)$, con lo cual el vector gradiente de esta función será un vector normal a la curva dada.

$$\boxed{\vec{v}_p = \nabla F}$$

Ejemplo 4.34. *Hallar el vector normal a la parábola de ecuación* $y = x^2$ *en el punto* $(1,1)$

Solución. Igualando la ecuación a cero, resulta

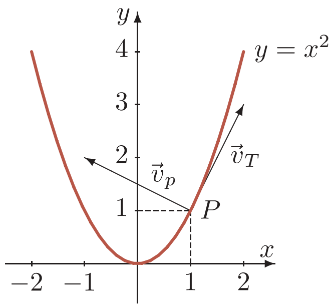


Figura 4.9: $y = x^2$

$$y = x^2 \;\to\; y - x^2 = 0 \;\to\; F(x,y) = y - x^2$$

de donde,

$$\left.\begin{array}{l} F_x(x,y) = -2x \\ F_x(x,y) = 1 \end{array}\right\} \nabla F(x,y) = (-2x, 1)$$

luego,

$$\vec{v}_p = \nabla F(1,1) = (-2,1)$$

Vector normal a una superficie

(a) Superficies dadas de forma explícitas $z = f(x,y)$

El vector normal $\vec{v}_p$ a una superficie $\mathcal{S}$ en un punto P de la misma, será un vector perpendicular al plano tangente a la superficie en dicho punto. Ahora bien, el vector perpendicular al plano tangente en el punto P será perpendicular a cualquier recta tangente a la superficie en dicho punto. Un vector, genérico, tangente a la superficie viene dado por las componentes (dx, dy, dz). En particular, los vectores tangentes a la superficie, en el punto P, en las direcciones de los ejes OX y OY vienen dados respectivamente por:

$$\vec{v}_{Tx} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \quad \vec{v}_{Ty} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

El vector normal a la superficie ha de ser perpendicular a los dos vectores $\vec{v}_{Tx}$ y $\vec{v}_{Ty}$, luego se puede obtener a partir del producto vectorial de los mismos, así

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{Tx} \times \vec{v}_{Ty} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \big(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\big)$$

nota: Para que la existencia del plano tangente en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ esté garantizada, la función ha de ser diferenciable en el punto $\mathbf{p}(x_0, y_0)$

(b) Superficies dadas de forma implícita $F(x,y,z) = 0$

Dada una superficie de ecuación $z = f(x,y)$, igualando a cero (o a una constante) la ecuación, podemos considerar la superficie $z - f(x, y) = 0$ como una "superficie de nivel" de una función de tres variables $F(x, y, z) = 0$ siendo $F(x, y, z) = y - f(x, y)$, con lo cual el vector gradiente de esta función será un vector normal a la superficie dada.

$$\vec{v}_p = \nabla F$$

Es evidente que si la función viene definida de manera explícita $z = f(x, y)$, entonces ambos procedimientos coinciden. En efecto, haciendo $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, resulta

$$\vec{v}_p = \nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (-f_x, -f_y, 1)$$

Ejemplo 4.35. *Hallar un vector perpendicular al plano* $3x - y + 2z = 3$

Solución. Consideramos la función: $F(x, y, z) = 3x - y + 2z$, de donde

$$F_x = 3, \quad F_y = -1 \quad F_z = 2$$

luego,

$$\vec{v}_p = \nabla F = (3, -1, 2)$$

Ejemplo 4.36. *Hallar un vector perpendicular a la superficie* $x^2 + yz = 5$ *en el punto* $(1, 2, 2)$

Solución. Consideramos la función: $F(x, y, z) = x^2 + yz$, de donde

$$F_x = 2x, \quad F_y = z \quad F_z = y \quad \to \quad \nabla f = (2x, z, y)$$

luego,

$$\vec{v}_p = \nabla F(1, 2, 2) = (2, 2, 2)$$

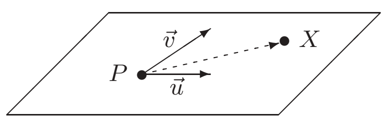
4.6.2. Plano tangente

Consideraciones geométricas

Ecuación de un plano

Para hallar la ecuación de una recta, de una curva, de un plano, o de cualquier lugar geométrico, el procedimiento habitual es el denominado del *"punto genérico"*, que consiste en suponer un punto genérico X de la figura geométrica correspondiente y relacionarlo con los datos que disponemos. Buscaremos una relación que vincule al punto X con los datos del problema y que cumplan los puntos de la figura geométrica y sólo ellos. La relación puede ser vectorial, trigonométrica o de cualquier tipo.

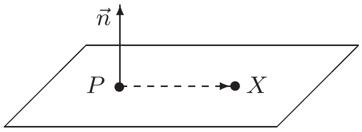
(a) Ecuación de un plano conocido un punto del mismo y dos vectores paralelos al plano, pero no paralelos entre sí.



Si unimos el punto P con el punto X mediante el vector $\overrightarrow{PX}$, resultará que los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PX}$ son coplanarios y por lo tanto serán linealmente dependientes y, en consecuencia, el determinante de la matriz de sus componentes será cero.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PX} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}\right\} \text{Linealmente dependientes} \iff \begin{vmatrix} \overrightarrow{PX} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = 0$$

(b) Ecuación de un plano conocido un punto del mismo y un vector normal al plano.



Si unimos el punto P con el punto X mediante el vector $\overrightarrow{PX}$, resultará que los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares y por lo tanto su producto escalar será cero.

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{PX} \Longleftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$$

Plano tangente

Desde el punto de vista geométrico se llama plano tangente a una superficie en un punto al plano que contiene a todas las rectas tangentes a la superficie en dicho punto, o mejor dicho, a las rectas tangentes de todas las curvas trazadas sobre la superficie que pasan por el punto. Si todas las tangentes no están sobre el mismo plano, entonces se dice que el plano tangente no existe.

Desde el punto de vista analítico para que exista el plano tangente a una superficie en un punto de la misma, la función que define la superficie ha de ser *diferenciable* en el punto correspondiente.

(a) Superficies dadas de forma explícita $z = f(x, y)$

El plano tangente ha de contener todas las rectas tangentes a la superficie en el punto correspondiente, luego, en particular, ha de contener las rectas tangentes en las direcciones de los ejes OX y OY, por lo tanto, los vectores

$$\vec{v}_{Tx} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \quad \vec{v}_{Ty} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

serán paralelos al plano buscado.

Por tanto el plano tangente buscado contiene al punto $\big(x_0, y_0; f(x_0, y_0)\big)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v}_{Tx} = \big(1, 0, f_x(x_0, y_0)\big)$ y $\vec{v}_{Ty} = \big(0, 1, f_y(x_0, y_0)\big)$, por lo que su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

de donde resulta $z - z_0 - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ que se puede expresar de la forma:

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

o bien, despejando z, y poniendo $z_0 = f(x_0, y_0)$ resulta

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)} \tag{4.4}$$

NOTA: Si la función no es diferenciable, entonces la ecuación anterior no representa el plano tangente, ya que en este caso el plano tangente no existe. Es decir, si la función no es diferenciable, pero tiene derivadas parciales, podemos construir la ecuación anterior, pero en este caso dicha ecuación no representa el plano tangente, sino simplemente un plano que pasa por el punto (x_0, y_0).

Al mismo resultado llegamos sabiendo que el vector $\vec{v}_p = (-f_x, -f_y, 1)$ es perpendicular al plano buscado. En este caso será $\vec{v}_p \cdot \overrightarrow{\mathbf{px}} = 0$, y en consecuencia obtenemos el mismo resultado.

$$-f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + z - z_0 = 0$$

de donde,

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

que es el mismo resultado anterior.

Ejemplo 4.37. *Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *en el punto* $P(2, -1; 5)$

Solución. Hallamos el gradiente en el punto $\mathbf{p}(2, -1)$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = 2x \\ z_y = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z_x(2, -1) = 4 \\ z_y(2, -1) = -2 \end{array}\right\} \nabla z(2, -1) = (4, -2)$$

de donde: $z - 5 = 4(x - 2) - 2(y + 1)$ o bien, simplificando, $4x - 2y - z = 5$

(b) Superficies dadas de forma implícita $F(x, y, z) = 0$

Supongamos que la superficie viene definida de manera implícita, mediante la ecuación $F(x, y, z) = 0$. Si la función viene definida de manera explícita $z = f(x, y)$, fácilmente puede convertirse a la forma implícita. En efecto, dada una superficie de ecuación $z = f(x, y)$, igualando a cero (o a una constante) obtenemos la ecuación, $z - f(x, y) = 0$, y la podemos considerar definida de manera implícita. Por tanto tenemos la ecuación $z - f(x, y) = 0$ que puede considerarse como una "*superficie de nivel*" de una función de tres variables $F(x, y, z) = 0$, siendo $F(x, y, z) = y - f(x, y)$, con lo cual en cada punto (x, y, z) el vector gradiente de esta función será un vector normal a la superficie dada.

$$\vec{v}_p = \nabla F$$

En consecuencia, el plano tangente a la superficie en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ será el plano que contiene a P y tiene por vector normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Para hallar su ecuación, tomamos un punto genérico $X(x, y, z)$ del plano, y tendrá que ser $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp \overrightarrow{PX}$, y en consecuencia su producto escalar ha de ser cero $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{PX} = 0$, luego su ecuación será:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0 \quad (4.5)$$

Recta normal

Se llama recta normal a una superficie $\mathcal{S}$ en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la misma, a la recta que pasa por P y tiene por vector director al vector normal a la superficie en dicho punto. Es decir, la recta perpendicular al plano tangente a la superficie en P. Teniendo en cuenta que el vector normal a la superficie en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, podemos concluir que la ecuación de la recta normal a la superficie en el punto P viene definida por las ecuaciones:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.38. *Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal al paraboloide de ecuación* $z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0$, *en el punto* $(1, -1, 4)$

Solución: Consideramos la función $F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$ y hallamos su gradiente en el punto $(1, -1, 4)$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = -4x \\ F_y = -4y \\ F_z = 2z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} F_x(1, -1, 4) = -4 \\ F_y(1, -1, 4) = 4 \\ F_z(1, -1, 4) = 8 \end{array}\right\} \nabla F(1, -1, 4) = (-4, 4, 8) \parallel (-1, 1, 2)$$

Luego el plano tangente es: $-1(x-1)+1(y+1)+2(z-4) = 0$ y simplificando resulta

$$x - y - 2z + 6 = 0$$

y la recta normal

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 4}{2}$$

Existencia del plano tangente

Para construir la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto lo único que necesitamos son las derivadas parciales de la función en dicho punto, sin embargo, no siempre dicha ecuación representa al plano tangente. Para que la ecuación (4.4) represente, realmente, el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es necesario que la función f sea diferenciable en el punto $\mathbf{p}(x_0, y_0)$. No debe olvidarse que las derivadas parciales pueden existir, incluso, en puntos donde la función no es ni siquiera continua, y no tiene sentido hablar de plano tangente en dichos puntos. El concepto geométrico de tangencia es el mismo que el concepto analítico de diferenciabilidad. Así, si la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{p}(x_0, y_0)$ entonces diremos que la ecuación (4.4) define al plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P\big(x_0, y_0; f(x_0, y_0)\big)$. Si la función no es diferenciable en el punto $\mathbf{p}(x_0, y_0)$, entonces el plano tangente a la superficie en el punto correspondiente no existe, con lo cual el plano obtenido con la ecuación (4.4) no representa al plano tangente en el sentido preciso que se entiende en matemáticas.

Formalmente podemos enunciar la siguiente

Definición 4.10 (Plano tangente y recta normal). *Si F es diferenciable en el punto $P(x_0, y_0, x_0)$ de la superficie $\mathcal{S}$ dada por $F(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$.*

1. *El plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se conoce como el plano tangente a $\mathcal{S}$ en P.*

2. *La recta que pasa por P y que tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se conoce como la recta normal a $\mathcal{S}$ en P.*

Significado geométrico de la *tangencia*

Si la función f es diferenciable en el punto $\mathbf{p}(x_0, y_0)$, será:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)k+r(h, k) \text{ con } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

con lo cual, poniendo $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, la expresión anterior se convierte en:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0)$$

donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$

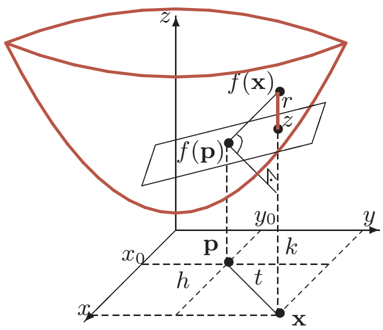


Figura 4.10: Plano tangente.

Ahora bien, teniendo en cuenta la ecuación del plano tangente

$$z = f(x_0, y_0)+f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

donde z representa la altura en el punto $\mathbf{x} = (x, y)$ hasta el plano tangente.

Resulta que el residuo $r(x - x_0, y - y_0)$ se puede expresar como

$$r(x - x_0, y - y_0) = f(x, y) - z$$

Es decir, el residuo es la diferencia entre la z de la función $z = f(x, y)$ en el punto $\mathbf{x} = (x, y)$ y la z en el mismo punto del plano tangente a la gráfica en $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$

El hecho de que f sea diferenciable en $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ no sólo nos dice que r es muy pequeño en torno al punto $\mathbf{p}$, sino, además, que es mucho más pequeño que la distancia de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{x}$, es decir $r << \|\overrightarrow{\mathbf{px}}\|$. El hecho de que el residuo $r \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{p}$ sólo nos dice que la función es continua en $\mathbf{p}$. Lo que realmente da el carácter de tangencia es el hecho de que $\dfrac{r}{\|\overrightarrow{\mathbf{px}}\|} \to 0$ cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{p}$. Este hecho geométricamente viene a significar que la superficie se *aplana* en los alrededores del punto $\mathbf{p}$ tratando de confundirse, *por un instante* con el plano tangente.

4.6.3. Recta tangente y plano normal a una curva en el espacio

(a) Curvas dadas en forma paramétrica

Ejemplo 4.39. *Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva*

$$x = t \quad y = t^2 \quad z = t^3$$

en el punto $t = 1$

Solución. Hallamos las coordenadas del punto P y del vector tangente $\vec{v}_T$ correspondientes al valor del parámetro $t = 1$

$$t = 1 \to P(1, 1, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2t \\ z'(t) = 3t^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x'(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \\ z'(1) = 3 \end{array}\right\} \vec{v}_T = (1, 2, 3)$$

de donde,

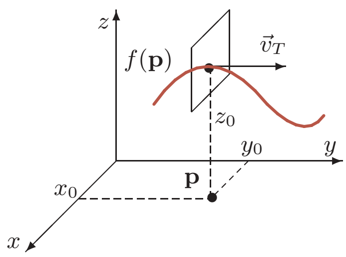


Figura 4.11: curva en el espacio

Las coordenadas de un punto genérico $X(x, y, z)$ de la curva vendrán dadas en función del parámetro t, resultando $X\big(x(t), y(t), z(t)\big)$. En consecuencia, el vector tangente en dicho punto genérico será

$$\vec{v}_T = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big),$$

de donde resultan

(a) Recta tangente en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

(b) Plano normal en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0) = 0$$

(a) Recta tangente en el punto $P(1, 1, 1)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

(b) Plano normal en el punto $P(1, 1, 1)$

$$1(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

Ejemplo 4.40. *Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva*

$$x = t - 2 \quad y = 3t^2 + 1 \quad z = 2t^3$$

en el punto donde corta al plano yz

Solución. En el punto donde la curva corta al plano yz será $x = 0$, luego $t - 2 = 0$, de donde $t = 2$. En consecuencia.

$$t = 2 \to P(0, 13, 16)$$

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 6t \\ z'(t) = 6t^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x'(2) = 1 \\ y'(2) = 12 \\ z'(2) = 24 \end{array}\right\} \vec{v}_T = (1, 12, 24)$$

de donde,

(a) Recta tangente en el punto $P(0, 13, 16)$

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 13}{12} = \frac{z - 16}{24}$$

(b) Plano normal en el punto $P(0, 13, 16)$

$$x + 12(y - 13) + 24(z - 16) = 0 \quad \to \quad x + 12y + 24z - 540 = 0$$

Curvas dadas como intersección de dos superficies

Sean las superficies definidas por las ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. Dichas superficies se cortarán en la curva definida por el sistema de ecuaciones:

(a) Recta tangente en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ $\quad \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}$

(b) Plano normal en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ $\quad v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$

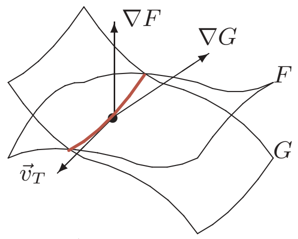


Figura 4.12: curva en el espacio

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{array}\right\}$$

Los vectores gradientes ∇F y ∇G en cualquier punto de la curva de corte serán normales a sus respectivas superficies y por tanto serán normales a la curva de corte, en consecuencia el vector perpendicular a ambos definido por su producto vectorial $\vec{v}_T = \nabla F \times \nabla G$ será tangente a la curva de corte, de donde, si sus componentes son $\vec{v}_T = (v_1, v_2, v_3)$ resultan

Ejemplo 4.41. *Hallar la ecuación de la recta tangente y del plano normal a la curva definida por la intersección del elipsoide $x^2+4y^2+2z^2 = 27$ y el hiperboloide $x^2+y^2-2z^2 = 11$ en el punto $P(3,-2,1)$*

Solución. Hallamos los vectores gradientes en el punto $P(3,-2,1)$

$$F(x,y,z) = x^2+4y^2+2z^2 \left\{\begin{array}{l} F_x = 2x \\ F_y = 8y \\ F_z = 4z \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_x = 6 \\ F_y = -16 \\ F_z = 4 \end{array}\right\} \nabla F(3,-2,1) = (6,-16,4)$$

$$G(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2 \left\{\begin{array}{l} F_x = 2x \\ F_y = 2y \\ F_z = -4z \end{array}\right\} \begin{array}{l} F_x = 6 \\ F_y = -4 \\ F_z = -4 \end{array}\right\} \nabla G(3,-2,1) = (6,-4,-4)$$

luego, el vector tangente será:

$$\vec{v}_T = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -16 & 4 \\ 6 & -4 & -4 \end{vmatrix} = (80, 48, 72) = 8(10, 6, 9)$$

y en consecuencia

(a) Recta tangente en el punto $P(3,-2,1)$

$$\frac{x-3}{10} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{9}$$

(b) Plano normal en el punto $P(3,-2,1)$

$$10(x-3)+6(y+2)+9(z-1) = 0$$

4.6.4. La diferencial como aproximación del incremento

Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Entonces, para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ tendremos

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}h_2 + r(\mathbf{h}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Vimos en la definición (4.3) que a la parte lineal en h_1 y h_2 de esta expresión, $\lambda(h_1,h_2) = f_x h_1 + f_y h_2$, se le llama diferencial de la función f en el punto $\mathbf{x} = (x,y)$ y se denota por $df(x,y)$, o simplemente por df. Es decir,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2$$

Y teniendo en cuenta que si $f(x,y)=x$, se tiene $h_1=dx$ y si $f(x,y)=y$, se tiene $h_2=dy$, podemos escribir:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

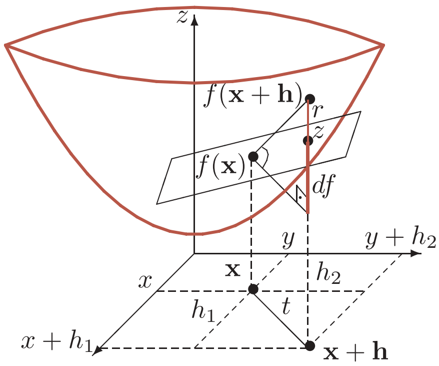


Figura 4.13: $\Delta f\approx df$

Con lo cual resulta

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})=f(\mathbf{x})+df(\mathbf{x})+r(\mathbf{h})$$

Ahora bien, dado que $\lim_{\mathbf{h}\to 0} r(\mathbf{h})=0$ se tiene que, para $\|h\|$ pequeño, será $r(\mathbf{h})\approx 0$ y en consecuencia

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})\approx f(\mathbf{x})+df(\mathbf{x})$$

Si observamos la gráfica 4.13, vemos que se tiene,

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})\approx z$$

Es decir, la z de la función $z=f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ en el punto $\mathbf{x}+\mathbf{h}=(x+h_1,y+h_2)$, coincide, de manera aproximada, con la z, en el mismo punto, del plano tangente a la gráfica en un punto cercano $\mathbf{x}=(x,y)$
Lo anterior también se puede expresar de la forma

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})\approx df(\mathbf{x})$$

Es decir,

$$\Delta f\approx df$$

Geométricamente se pueden dar las siguientes interpretaciones:

(a) El valor aproximado de una función $f(\mathbf{x})$, en un punto $\mathbf{x}$, se puede obtener sustituyendo el valor de $\mathbf{x}$ en la ecuación del plano tangente, en un punto cercano $\mathbf{x}_0$, próximo a $\mathbf{x}$. Es decir, para hallar el valor aproximado de una función en un punto, calculamos la ecuación del plano tangente, en un punto cercano, y sustituimos las coordenadas del punto sobre la ecuación de dicho plano.

(b) Al pasar del punto $\mathbf{x}$ al punto cercano $\mathbf{x}+\mathbf{h}$, el incremento que sufre la función
$$\Delta f = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$$
coincide, de manera aproximada, con el diferencial df. Es decir, *la diferencial de una función es una buena aproximación del incremento*

Puesto que el plano tangente, y en general cualquier plano en el espacio, se representa por una ecuación lineal en las variables x, y y z, llamamos a esta aproximación de la función mediante su plano tangente, o lo que es lo mismo a la aproximación del incremento por el diferencial, *aproximación lineal*.

Cálculo de valores aproximados

Los resultados anteriores nos sirven para calcular valores aproximados. En efecto, supongamos que queremos calcular, aunque sea de manera aproximada, el valor de una función en un punto (x,y), pero no sabemos calcular el valor de la función en dicho punto, $f(x,y)$, o dicho cálculo resulta extremadamente complicado; y sin embargo, supongamos que sabemos calcular el valor de la función y el de sus derivadas parciales en un punto cercano (x_0,y_0). Pues bien, podemos utilizar el valor de la función y el de su derivadas parciales en este punto (x_0,y_0) para calcular el valor aproximado de la función en el punto desconocido (x,y).

Para hacer cálculos aproximados de operaciones podemos utilizar cualquiera de las dos opciones:

(a) Para hallar el valor aproximado de una función en un punto, calculamos la ecuación del plano tangente, en un punto cercano, y sustituimos las coordenadas del punto sobre la ecuación de dicho plano.
$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_x(x_0,y_0)(y-y_0)$$

(b) Aproximar el incremento mediante la diferencial
$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$$

Hay que advertir que estas aproximaciones sólo serán validas para valores muy cercanos al punto conocido y para funciones diferenciables.

Ejemplo 4.42. *Comparar el incremento con el diferencial del área de un rectángulo.*

Solución. Incrementemos los lados de un rectángulo x e y, en dx y dy, respectivamente. El área del rectángulo viene definida por $a = x \cdot y$, de donde:
El incremento del área será: $\Delta a = ydx + xdy + dxdy$

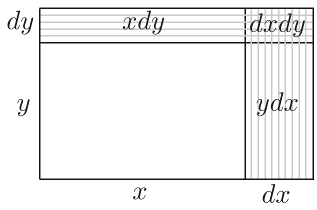


Figura 4.14: $\Delta a \approx da$

Y el diferencial

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial a}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} = x \end{array}\right\} da = ydx + xdy$$

En consecuencia, $\Delta a = da + dxdy$
Es decir $\Delta a = da + r(h, k)$

Ejemplo 4.43. *Dada la superficie de ecuación* $z = xe^{xy-2}$ *se pide:*

(a) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto $P(2, 1, 2)$.

(b) Usar el plano tangente para obtener una aproximación del valor de la función en el punto $\mathbf{q}(1'9, 1'02)$.

Solución. (a) El plano tangente viene definido por la ecuación:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

para lo cual

$$\left.\begin{array}{l} f_x = e^{xy-2} + xye^{xy-2} \\ f_y = x^2 e^{xy-2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} f_x(2,1) = e^0 + 2 \cdot 1 \cdot e^0 = 1 + 2 = 3 \\ f_y(2,1) = 4e^0 = 4 \end{array}$$

de donde, la ecuación del plano tangente es

$$z - 2 = 3(x - 2) + 4(y - 1)$$

que se simplifica en $z = 3x + 4y - 8$
(b) El valor aproximado de la función se calcula sustituyendo los valores de x e y en la ecuación del plano tangente, así,

$$z(1'9, 1, 02) = 1'9e^{1'9 \cdot 1'02 - 2} \approx 3 \cdot 1'9 + 4 \cdot 1'02 - 8 = 5'7 + 4'08 - 8 = 1'78$$

(los cálculos suelen resultan más fáciles si se sustituye directamente sobre la ecuación del plano tangente, antes de eliminar los paréntesis, despejando previamente z, en efecto $z = 3 + 3(-0'1) + 4(0'02) = 3 - 0'3 + 0'08 = 1'78$)

Ejemplo 4.44. *Usar la diferencial, dz, para aproximar la variación que experimenta la función* $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ *cuando* (x, y) *se desplaza desde el punto* $(1, 1)$ *al punto* $(1{,}02, 0{,}95)$.

Solución. Tenemos que la variación de z puede aproximarse por

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{-x}{\sqrt{6-x^2-y^2}}\,dx + \frac{-y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}\,dy$$

Ahora bien, llamando $(x,y)=(1,1)$ y $(x+\Delta x, y+\Delta y)=(1{,}02, 0{,}94)$ tenemos

$$dx = \Delta x = 0{,}02 \quad \text{y} \quad dy = \Delta y = -0{,}06$$

con lo cual, resulta

$$\Delta z \approx \frac{-1}{2}(0{,}02) + \frac{-1}{2}(-0{,}06) = \frac{0{,}04}{2} = 0{,}02$$

Los resultados anteriores pueden extenderse a funciones de tres o más variables, como se hace en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.45. *Estimar* $\sqrt{2'01^2+1'98^2+1'05^2}$

Solución. Necesitamos una función y un punto próximo, al dado, sobre el que sepamos hacer los cálculos con facilidad. En este caso, la función es $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y el punto $\mathbf{p}(2,2,1)$. En consecuencia,

$$f(2,2,1)=\sqrt{2^2+2^2+1^1}=\sqrt{9}=3$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2,2,1) &= \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,2,1) &= \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(2,2,1) &= \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

de donde, sustituyendo en la ecuación del "plano"tangente (en este caso «hiperplano»):

$$z = f(x_0,y_0,z_0)+f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$$

resulta,

$$\sqrt{2'01^2+1'98^2+1'05^2} \approx 3+\frac{2}{3}(0'01)+\frac{2}{3}(-0'02)+\frac{1}{3}(0'05)=3'01$$

Propagación de errores.
Cuando se realizan mediciones físicas de una magnitud, se cometen lo que se llaman *errores de medición*. Si posteriormente realizamos operaciones con esos valores medidos, los errores de medición se propagan, a través de los cálculos realizados, a los nuevos resultados obtenidos. Lo que se llama *error propagado*.

Así, si x representa el valor medido de una variable y $x + \Delta x$ su valor exacto, entonces Δx es el *error de la medida*. Finalmente, si el valor x medido se usa para calcular otro valor $f(x)$, la diferencia entre $f(x+\Delta x)$ y $f(x)$ se llama el *error propagado*.

$$\underbrace{f(x + \overbrace{\Delta x}^{\substack{\text{error de} \\ \text{medida}}})}_{\substack{\text{valor} \\ \text{exacto}}} - \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{valor} \\ \text{medido}}} = \underbrace{\Delta y}_{\substack{\text{error} \\ \text{propagado}}}$$

Pueden utilizarse las diferenciales para aproximar la propagación del error introducido por los errores de medición.

Ejemplo 4.46. *El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con un error posible del $4\,\%$ y del $2\,\%$, respectivamente. Aproximar el error porcentual máximo al medir el volumen.*

Solución. El volumen del cilindro viene definido por $V = \pi r^2 h$
de donde,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = 2\pi rh\,dr + \pi r^2 dh$$

Para los errores dados, tenemos

$$dr = \frac{4r}{100}, \quad dh = \frac{2h}{100}$$

luego el error propagado es

$$dV = 2\pi rh\frac{4r}{100} + \pi r^2\frac{2h}{100} = \frac{8\pi hr^2}{100} + \frac{2\pi r^2 h}{100} = \frac{10\pi r^2 h}{100} = \frac{10\,V}{100}$$

Luego el error propagado es del $10\,\%$.

4.7. Funciones vectoriales y matriz Jacobiana

4.7.1. Funciones vectoriales de variable vectorial

Definición 4.11. *Se llama función vectorial de variable vectorial a las funciones del tipo:*

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) &\mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_m) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \text{ donde } \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

Tenemos pues que una función $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una regla que asocia a cada n-ada ordenada de números reales $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathcal{D}$, una m-ada ordenada de números reales

bien determinada $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ de $\mathbb{R}^m$. O bien, en términos vectoriales, una regla que asocia a cada vector $\mathbf{x}$ de $\mathcal{D}$, un vector bien determinado $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^m$.
En otras palabras, una función vectorial es un vector cuyas componentes son funciones escalares.

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

Es decir,

$$\begin{gathered} \mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \big(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)\big) \end{gathered}$$

Por ejemplo, las curvas paramétricas pueden considerarse como funciones vectoriales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Así, si las ecuaciones paramétricas de una curva vienen definidas por:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2t + 3 \\ y(t) = t - 5 \end{array}\right\}$$

las podemos interpretar como una función vectorial de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (2t + 3, t - 5) \end{array}\right\} \mathbf{f}(t) = (2t + 3, t - 5) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Por ejemplo, la función vectorial $\mathbf{f}(x, y) = (x + 2, x - y, y + 4)$ viene definida por:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + 2, x - y, y + 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{f}(x, y) = (x + 2, x - y, y + 4) = \\ \qquad\quad = \big(f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)\big) \end{array}$$

Campos vectoriales. Se llaman campos vectoriales a las funciones vectoriales de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. Es decir, se llama campo vectorial (en $\mathbb{R}^n$) a las funciones del tipo $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Una práctica para visualizar los campos vectoriales consiste en jugar con la naturaleza "dual"de los elementos de $\mathbb{R}^n$; los elementos del dominio $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ se ven como *puntos* y los de la imagen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ como *vectores*. El vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se representa mediante una flecha que se puede colocar en cualquier punto del espacio, sin embargo, para tener una visualización del campo, la flecha se colocará de manera que su punto inicial sea el punto $\mathbf{x}$.

4.7.2. Continuidad de las funciones vectoriales

Los conceptos de límite, continuidad y diferenciabilidad pueden extenderse a funciones vectoriales. Estos conceptos siempre tienen dos visiones; una general que es más bien teórica y consiste en la traslación de los conceptos unidimensionales a niveles vectoriales, y otra por componentes que es más bien práctica y que consiste en trasladar los conceptos a las funciones coordenadas.

Límite de una función vectorial

Definición 4.12. *Sean $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ (siendo $\mathcal{D}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$); Se dice que $\mathbf{f}$ tiene por límite ℓ, cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, si* $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\| = 0$

Se escribe entonces $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell$.

Merece destacar que el límite vectorial se ha definido en términos numéricos. En efecto, para cada $\mathbf{x}$ se tiene que $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\|$ es un número, más preciso, la aplicación $\mathbf{x} \to \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\|$ es una función numérica de $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^+$, y es ya familiar el límite para estas funciones.

Bola. Cabe interpretar la definición de límite por medio de la noción de *bola*.

Definición 4.13. *En $\mathbb{R}^n$, se llama bola abierta, de centro $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r \in \mathbb{R}^*_+$, al conjunto de puntos $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$.*

Se designa por $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r)$, o simplemente por $\mathcal{B}$, cuando no haya temor de confusión:

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

Así, por ejemplo, en la recta real $\mathbb{R}$, la bola se llama *entorno* y está formado por los puntos del intervalo $(\mathbf{x}_0 - r, \mathbf{x}_0 + r)$; en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$, la bola se denomina *disco* y está formada por los puntos interiores al círculo de centro $\mathbf{x}_0$ y radio r; en el espacio de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$ la bola $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0, r)$ está formada por los puntos interiores a la esfera de centro $\mathbf{x}_0$ y radio r.

La noción de límite de una función puede interpretarse entonces de la siguiente manera:

Definición 4.14. *Se dice que* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell$ *si, para toda bola* $\mathcal{B}'$ *de centro* ℓ *y radio* $\epsilon > 0$*, existe una bola* $\mathcal{B}$ *de centro* $\mathbf{x}_0$ *y radio* r*, incluido en* $\mathcal{D}$*, tal que* $F(\mathcal{B}) \subseteqq \mathcal{B}'$.

Coordenadas y límite. Teniendo en cuenta que una función vectorial $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un vector cuyas coordenadas son funciones escalares $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$.
Es decir,

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \big(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)\big)$$

Se tiene que:

1. Si $\mathbf{f}$, con $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, tiene por límite ℓ, con $\ell = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m)$, entonces cada una de las funciones coordenadas de $\mathbf{f}$ tienen por límite, respectivamente, $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m$.
2. Si las coordenadas de $\mathbf{f}$ tienen por límite, respectivamente, $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m$, entonces $\mathbf{f}$ tiene por límite $\ell = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_m)$.

En consecuencia, se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 4.6. *Para que* $\mathbf{f}$ *tienda a un límite* ℓ*, es necesario y suficiente que las coordenadas de* $\mathbf{f}$ *tengan por límites respectivamente las coordenadas de* ℓ.

Continuidad

Definición 4.15. *Sean* $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ *(siendo* $\mathcal{D}$ *un abierto de* $\mathbb{R}^n$*); Se dice que* $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*, si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

En otros términos, $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *si* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| = 0$, o bien, $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon.$$

Sirviéndonos de la noción geométrica de *bola* podemos dar la siguiente definición: $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *si, para toda bola* $\mathcal{B}$ *de centro* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ *existe una bola* $\mathcal{B}'$ *de centro en* $\mathbf{x}_0$*, incluida en* $\mathcal{D}$*, tal que* $\mathbf{f}(\mathcal{B}') \subseteqq \mathcal{B}$.
Se dice que $\mathbf{f}$ es continua sobre un dominio $\mathcal{D}$, si $\mathbf{f}$ es continua en todo punto $\mathbf{x}_0$ de $\mathcal{D}$.

Coordenadas de una función continua. El concepto de continuidad se puede establecer en términos de las funciones coordenadas. Así,

Teorema 4.7. *Para que* $\mathbf{f}$ *sea continua, en un dominio* $\mathcal{D}$*, es necesario y suficiente que todas las coordenadas de* $\mathbf{f}$ *lo sean.*

Composición de funciones continuas

Aunque la composición de funciones se tratará más detalladamente en el epígrafe siguiente dedicado a la Regla de la cadena, la vemos aquí con objeto de demostrar que *la composición de dos funciones continuas es a su vez otra función continua.*

Definición 4.16 (Composición de funciones). *Dadas la función* $\mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *definida en el conjunto* D_g *de* $\mathbb{R}^n$ *y la función* $\mathbf{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *definida en el conjunto* D_f *de* $\mathbb{R}^m$*, cuyo rango está contenido en* D_g *(es decir,* $\mathbf{f}(D_f) \subseteq D_g$*), entonces se puede formar la composición de ambas funciones* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$*, definida como:*

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{u}) = \mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{u})\big), \quad \mathbf{u} \in D_f$$

Esquemáticamente sería.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} D_f \xrightarrow{\mathbf{f}} D_g \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^p \\ \mathbf{g} \circ \mathbf{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \end{array}\right\} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{u}) = \mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{u})\big)$$

y mediante diagramas, teniendo en consideración los dominios,

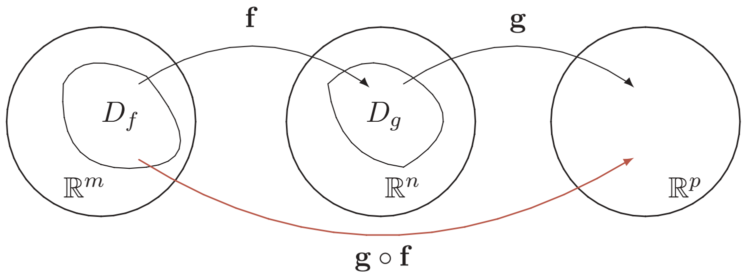


Figura 4.15: Composición de funciones

Igual que en una variable, en general, la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, y sí la asociativa.

Teorema 4.8 (Composición de funciones continuas). *Dadas la función* $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *definida en el conjunto* D_g *de* $\mathbb{R}^n$ *y la función* $\mathbf{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *definida en el conjunto* D_f *de* $\mathbb{R}^m$*, cuyo rango está contenido en* D_g *(es decir,* $\mathbf{f}(D_f) \subseteq D_g$*), Si la función* $\mathbf{f}$ *es continua en el punto* $\mathbf{x}_0$ *y la función* $\mathbf{g}$ *es continua en el punto* $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ *entonces la función compuesta* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *también es continua en* $\mathbf{x}_0$*.*

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_f$ e $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{D}_g$. Puesto que $\mathbf{g}$ es continua en $\mathbf{y}_0$, para toda bola $\mathcal{B}$ de centro $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ existe una bola $\mathcal{B}'$, de centro $\mathbf{y}_0$, tal que $\mathbf{g}(\mathcal{B}') \subseteqq \mathcal{B}$.
Puesto que $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$, para toda bola $\mathcal{B}'$ de centro $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$, existe una bola $\mathcal{B}''$ de centro $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{f}(\mathcal{B}'') \subseteqq \mathcal{B}'$.
Aplicando $\mathbf{g}$ a los dos miembros de esta relación; se obtiene:

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\mathcal{B}'') \subseteqq \mathbf{g}(\mathcal{B}') \subseteqq \mathbf{B}$$

y, por consiguiente, $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es continua en el punto $\mathbf{x}_0$. □

4.7.3. Derivadas parciales de funciones vectoriales

Aunque a nivel teórico las derivadas parciales de funciones vectoriales pueden definirse en términos vectoriales, en la práctica, se establecen en términos de las funciones componentes. Teniendo en cuenta que una función vectorial $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es un vector cuyas coordenadas son funciones escalares $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$. Es decir,

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \big(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)\big)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\Big)$$
$$\cdots$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\Big)$$

Ejemplo 4.47. *Hallar las derivadas parciales de la función*

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (xe^y \cos z, xe^y \operatorname{sen} z, \tan z)$$

Solución. Derivando componente a componente, se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x &= (e^y \cos z, e^y \operatorname{sen} z, 0) \\ \mathbf{f}_y &= (xe^y \cos z, xe^y \operatorname{sen} z, 0) \\ \mathbf{f}_z &= (-xe^y \operatorname{sen} z, xe^y \cos z, 1 + \tan^2 z) \end{aligned}$$

4.7.4. Funciones vectoriales diferenciables

En la definición 4.4 de la página 236 se estableció, para funciones numéricas de una sola variable, que: *Una función $f : D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in D$ si existe una constante A tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h) \quad \textit{con} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

En tal caso, a la expresión lineal $\lambda(h) = Ah$ se le llama diferencial de f, y se tiene:

$$df(x_0) = \lambda(h) = Ah = f'(x_0)\, dx$$

En la definición 4.7 de la página 243 se estableció, para funciones numéricas de n variables, que: *Una función $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}$, si existen n constantes A_i, $\quad i = 1, 2, \cdots, n$ tales que*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + r(\mathbf{h}) \quad \textit{con} \quad \lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

En tal caso, a la expresión lineal $\lambda(h_1, \cdots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i$ se le llama diferencial de f, y se tiene:

$$df(\mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) dx_n$$

En cada uno de los casos, la diferencial de una función en un punto aparece como una *aplicación lineal* que se aproxima a la función f en ese punto. Se trata de generalizar esta importante noción a las funciones de varias variables, ya tengan imágenes reales o vectoriales.
La generalización se va a hacer por la vía de definir la diferencial como una *aplicación lineal/*. Recuérdese que una aplicación $\lambda(h, k)$ es lineal si cumple la propiedad $\lambda(ah, bk) = a\lambda(h, k) + b\lambda(h, k)$, siendo a y b números. Recuérdese también la relación de las aplicaciones lineales con las matrices. Así, se establece la siguiente definición:

Definición 4.17 (Funciones diferenciables). *Una función $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}$, si existen una aplicación lineal $\lambda(\mathbf{h})$ tal que*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \lambda(\mathbf{h}) + r(\mathbf{h}) \quad \textit{con} \quad \lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

En tal caso, a la expresión lineal $\lambda(\mathbf{h})$ se le llama diferencial de $\mathbf{f}$, y se designa por $\mathbf{df}(\mathbf{x}_0)$
Nota: Es evidente que esta definición generaliza las dos anteriores, ya que para $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenemos la primera definición, y para $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la segunda.

Con objeto de eludir el *cociente* en el límite que aparece en la definición, se puede modificar la definición de función diferenciable en los siguientes términos. *Una función* $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *se dice diferenciable en el punto* $\mathbf{x}_0 = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}$*, si existen una aplicación lineal* $\lambda(\mathbf{h})$ *tal que*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \lambda(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}) \tag{4.7}$$

con:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

Nota: Muchos autores prefieren dar la definición de función diferenciable unificando los dos apartados 4.7 y 4.8 en un solo límite. Así, se tiene:

Definición 4.18. *Sea* $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y sea* $\mathbf{x}_0$ *un punto interior de* $\mathcal{D}$*. Se dice que* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{x}_0$ *si existe una aplicación lineal* $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, dependiente, en general, de* $\mathbf{x}_0$ *tal que*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \lambda(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

Proposición 4.7. *Si la función* $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es diferenciable en el punto* $\mathbf{x}_0 = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}$ *entonces existen sus derivadas parciales en dicho punto.*

Demostración. Supongamos, para simplificar la escritura, que $n = 3$. Supongamos, por tanto, que la función $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{D}$, entonces existen una aplicación lineal $\lambda(\mathbf{h})$ tal que, para todo $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in \mathcal{D}$, se tiene:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}) \quad \text{con} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$$

Designemos por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Elijamos en primer lugar $\mathbf{h}$ del modo siguiente:

$$\mathbf{h} = (t, 0, 0) = t\mathbf{e}_1 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Puesto que la diferencial es lineal, se tiene $\lambda(\mathbf{h}) = \lambda(t\mathbf{e}_1) = t\lambda(\mathbf{e}_1)$, en consecuencia la relación (4.7) se escribe:

$$\mathbf{f}(x_0 + t, y_0, z_0) - \mathbf{f}(x_0, y_0, z_0) = t\lambda(\mathbf{e}_1) + |t|\,\|\mathbf{e}_1\|\epsilon(t\mathbf{e}_1)$$

y, como $\lim_{t\to 0} \epsilon(t\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$, se obtiene:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(x_0 + t, y_0, z_0) - \mathbf{f}(x_0, y_0, z_0)}{t} = \lambda(\mathbf{e}_1).$$

Resulta así que la función $\mathbf{f}$ admite, en (x_0, y_0, z_0), derivada parcial respecto de x, que vale:

$$\lambda(\mathbf{e}_1) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(x_0, y_0, z_0).$$

Análogamente, tomando $\mathbf{h}(0, t, 0)$ y después $\mathbf{h}(0, 0, t)$ se probaría que $\mathbf{f}$ admite, en el punto (x_0, y_0, z_0), derivadas parciales con relación a y y z, respectivamente iguales a:

$$\lambda(\mathbf{e}_2) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \quad \text{y} \quad \lambda(\mathbf{e}_3) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0). \qquad \square$$

La diferencial. Tomando $\mathbf{h} = (dx, dy, dz)$, y teniendo en cuenta que la diferencial es lineal, resulta:

$$\lambda(\mathbf{h}) = \lambda(\mathbf{e}_1)dx + \lambda(\mathbf{e}_2)dy + \lambda(\mathbf{e}_3)dz.$$

Es decir,

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{h}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}dz$$

Y para el caso de n variables, resulta:

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{h}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}dx_n$$

Coordenadas y diferenciabilidad de las funciones vectoriales. Los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de funciones vectoriales se establecen en términos de las funciones componentes. Es decir, se dice que la función $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ es continua (respectivamente, diferenciable) en el punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$, si y sólo si todas y cada una de las funciones componentes $f_i : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$, lo son.
Ahora bien, teniendo en cuenta que las coordenadas de la función $\mathbf{f}$ son $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, será:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = \big(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\big) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

de donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{df}(\mathbf{x}_0) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}dx_n = \\ &= \big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\big)dx_1 + \cdots + \big(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}, \frac{\partial f_2}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\big)dx_n = \\ &= \big(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n\big) = (df_1, df_2, \cdots, df_m) \end{aligned}$$

Luego el diferencial de una función vectorial se puede calcular por componentes:

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}_0) = (df_1, df_2, \cdots, df_m) \tag{4.9}$$

Ejemplo 4.48. *Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por*

$$f(x, y) = (x + y, |y|)$$

Solución. (a) La función es continua en todo $\mathbb{R}^2$, pues las funciones componentes

$$f_1,\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_1(x, y) = x + y, \quad f_2(x, y) = |y| \quad \text{lo son.}$$

(b) La función no es diferenciable en el origen, pues la función $f_2(x, y) = |y|$ no lo es.

El jacobiano

Si la función $\mathbf{f} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{D}$ entonces, su diferencial será:

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}_0) = \lambda(\mathbf{h}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}dx_n$$

Que se puede expresar de manera matricial, de la forma:

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}_0) = \big(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}\big) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{dx}$$

A la matriz $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ se le llama «matriz Jacobiana» de la función $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{x}_0$. Ahora bien, teniendo en cuenta que la función $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, será:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Con lo cual resulta que la matriz jacobiana es,

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & & \cdots & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Observaciones:

(a) Abreviadamente, una matriz A se escribe $A = [a_{ij}]$, siendo el elemento a_{ij} el elemento perteneciente a la fila i y la columna j. Así, la matriz jacobiana se puede expresar como:

$$J\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big[D_j f_i(\mathbf{x})\big] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]$$

(b) Los elementos de la fila i de la matriz jacobiana coinciden con las componentes del vector gradiente $\nabla f_i(\mathbf{x})$

(c) Para $m = 1$ se tiene $Jf(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.

(d) Para $n = m$, el determinante de la matriz $Jf(\mathbf{x}_0)$ se llama *jacobiano*. Para el jacobiano también se utiliza la siguiente notación:

$$\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n) = \det\big[D_j f_i(\mathbf{x})\big] = \big|Jf(\mathbf{x})\big|$$

(e) Si comparamos la expresión de la diferencial de una función de una variable, de una función de varias variables y de una función vectorial tenemos:

1.- Para funciones de una variable tenemos: $df = f'(x) \cdot h$
2.- Para funciones de varias variables: $df = \nabla f \cdot \mathbf{h}$
3.- Para funciones vectoriales: $d\mathbf{f} = J\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}$

donde se ha usado, respectivamente, el producto numérico, el producto escalar y el producto matricial.

(f) Si se comparan las tres expresiones, se observa que el gradiente, ∇f, puede pensarse como la generalización del concepto de derivada para funciones de varias variables, y la matriz jacobiana, $J\mathbf{f}$, para funciones vectoriales. Si bien, hay que advertir que mientras que la derivada de una función de una variable en un punto es un *número*, la derivada de una función de varias variables es un *vector*, y la derivada de una función vectorial una matriz.

Ejemplo 4.49. *Hallar el diferencial de la función vectorial* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2, 5x^3 + 2y^6)$$

Solución. El Jacobiano de la función viene definido por:

$$J\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 6y \\ 15x^2 & 12y^5 \end{pmatrix}$$

de donde,

$$\mathbf{df} = \begin{pmatrix} 2x & 6y \\ 15x^2 & 12y^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \big(2xdx + 6ydx, 15x^2dx + 12y^5dy\big)$$

Al mismo resultado hubiéramos llegado operando por componentes, en efecto,

$$\mathbf{df} = (df_1, df_2) = \big(2xdx + 6ydx, 15x^2dx + 12y^5dy\big)$$

4.8. Regla de la cadena

4.8.1. Funciones compuestas, inversas e implícitas de una variable

Composición de funciones. Componer dos funciones consiste en aplicar la segunda función al resultado de la primera. Analíticamente también significa *sustituir una función en la otra*. Es decir, si tenemos la función $y = f(x)$ que establece la dependencia entre y y x, y la función $x = g(t)$, que establece la dependencia entre x y t, podemos sustituir esta última en la primera y obtener $y = f\big(g(t)\big)$. A la función así obtenida (que envía t a y) se le llama composición de f con g y se denota por $f \circ g$. Obsérvese que el orden en que se escribe la composición $f \circ g$ es el inverso al orden en que actúan las funciones (primero g, después f). Conviene tener siempre presente esta doble visualización de la composición de funciones: Como aplicación sucesiva de dos funciones, y como sustitución de la variable por una función de otra variable. En esquema sería lo siguiente:
(a) Como aplicación sucesiva de funciones:

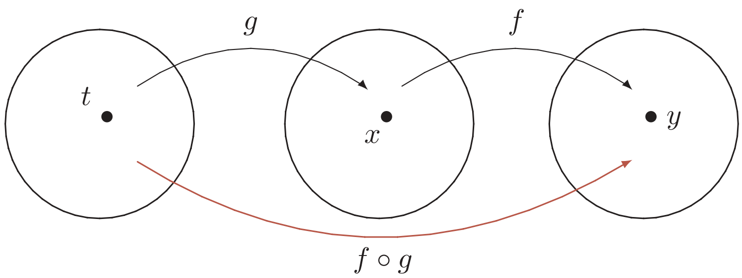


Figura 4.16: Composición de funciones

(b) Como sustitución de la variable:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(t) \end{array}\right\} y = f\big(g(t)\big)$$

Es evidente que para poder componer dos funciones el *rango* de la primera tiene que estar contenido en el *dominio* de la segunda $g(\mathcal{D}_g) \subseteq \mathcal{D}_f$, en caso contrario, después de aplicar g no podríamos aplicar f. Hay que advertir que, en general, la composición de funciones no es conmutativa, es decir, en la generalidad de los casos será $f \circ g \neq g \circ f$, incluso, puede suceder que esté definida la composición en un orden y no en el otro. Sin embargo, sí se cumple la propiedad asociativa $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Desde el punto de vista formal la composición puede enunciarse de la siguiente forma: *Dadas las funciones $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tales que $g(I) \subseteq J$), se llama composición de f con g y se denota $f \circ g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a la función $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.*

$$\left.\begin{array}{l} g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ f \circ g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Regla de la cadena. La regla de la cadena nos dice que "*la composición de dos funciones diferenciables es diferenciable y su derivada es el producto de las derivadas de cada una de las funciones que se están componiendo*". Es decir, la derivada de la composición de dos funciones es el producto de las derivadas de dichas funciones, cada una de ellas aplicada en el punto correspondiente. Formalmente la regla de la cadena se puede enunciar de la siguiente forma: *Si g es diferenciable en un punto $x_0 \in I$ y f es diferenciable en $g(x_0) \in J$, entonces la composición $f \circ g$ es diferenciable en x_0, y su derivada es*

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

que se puede expresar con la notación de Leibniz, haciendo $u = g(x)$ e $y = f(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Función inversa. La función recíproca o inversa asigna a las imágenes los correspondientes originales (consiste en invertir las flechas). Sin embargo, la recíproca de una función no siempre es otra función, basta que dos elementos distintos tengan la misma imagen para que la recíproca no sea función, ya que asignaría a un elemento dos imágenes distintas, lo que no está permitido para las funciones, aunque sí para las correspondencias en general. Por lo tanto, para que la recíproca de una función sea otra función, dicha función ha de ser inyectiva.

$$I \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} J \qquad y = f(x) \quad \leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Desde el punto de vista analítico para obtener la inversa bastará con despejar la variable independiente y expresarla en función de la variable dependiente.
Formalmente podemos decir que *si la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva, con rango $J \subseteq \mathbb{R}$, entonces existe la función $f^{-1} : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada "inversa"de f, tal que*

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \quad x \in I \qquad \text{y} \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y, \quad y \in J$$

Derivada de la función inversa La derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función. Formalmente se puede enunciar diciendo que *si la función f es diferenciable y tal que $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in I$, entonces existe la función inversa f^{-1}, al menos en un entorno de $f(x_0)$, dicha función también es diferenciable, y su derivada es:*

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}$$

o con la notación de Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \text{o bien,} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

Funciones implícitas Si consideramos una expresión del tipo $F(x, y) = 0$ nos preguntamos ¿en que condiciones es posible despejar y en términos de x y establecer una función del tipo $y = f(x)$?. Evidentemente no siempre es posible obtener dicha función. Por ejemplo de $x^2 + y^2 = 1$ no se obtiene una función $y = f(x)$. Cuando de $F(x, y) = 0$ se puede despejar la variable y, y escribir $y = f(x)$, se dice que esta última función está dada implícitamente en $F(x, y) = 0$.

4.8.2. Composición de funciones vectoriales

Para funciones de varias variables la situación es, en principio, algo más complicada. Téngase en cuenta que dos campos escalares $f,\ g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no se pueden componer, pues la operación de composición entre funciones solamente se puede realizar cuando el rango de una de ellas está contenido en el dominio de la otra, y los campos escalares tienen rango en $\mathbb{R}$ y dominio en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, los campos escalares solamente se podrán componer con funciones de una sola variable, por la derecha; o con funciones vectoriales, por la izquierda. Es decir,

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Pensando en la sustitución de las variables, para componer la función $z = f(x, y)$ tendremos que sustituir las dos variables x e y, respectivamente, por dos funciones g_1 y g_2 que las conecten con otras variables, donde g_1 y g_2 pueden ser funciones de una o varias variables (ambas de las mismas). Así, si consideramos las funciones

$$x = g_1(u, v), \quad y = g_2(u, v)$$

podemos sustituir en la función $z = f(x, y)$ y obtener la función compuesta:

$$z = f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$$

que en esquema sería:

$$z = f(x, y) \left\{ \begin{array}{l} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{array} \right\} z = f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$$

Ahora bien, la pareja de funciones $x = g_1(u, v)$, $y = g_2(u, v)$ puede considerarse como las componentes de *una sola* función *vectorial* $\mathbf{g} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de tal manera que a cada punto $(u, v) \in \mathcal{D}$ la función $\mathbf{g}$ le asocia el punto $\mathbf{g}(u, v) \in \mathbb{R}^2$, cuyas coordenadas son $(x, y) = \big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$. O sea, $\mathbf{g}(u, v) = \big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$. Y esto permite interpretar la sustitución de las variables como la aplicación sucesiva de dos funciones.
En esquema sería:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto (x, y) \mapsto z \end{array}$$

de donde,

$$f \circ \mathbf{g}(u, v) = f\big(\mathbf{g}(u, v)\big) = f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big)$$

Ejemplo 4.50. *Hallar la función compuesta de la función $f(x, y) = xy^2 + xy$ con las funciones*

$$x = g_1(u, v) = u + v \quad e \quad y = g_2(u, v) = uv$$

Solución. Si queremos interpretar la composición como la aplicación sucesiva de dos funciones, consideramos la función vectorial

$$\mathbf{g}(u, v) = \big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) = (u + v, uv)$$

luego, en esquema, resulta

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = xy^2 + xy \\ \mathbf{g}(u, v) = (u + v, uv) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto (x, y) \mapsto z \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$h(u, v) = (f \circ \mathbf{g})(u, v) = f\big(\mathbf{g}(u, v)\big) = f\big(g_1(u, v), g_2(u, v)\big) = f(u + v, uv) =$$

$$= (u + v)(uv)^2 + (u + v)uv = u^3v^2 + u^2v^3 + u^2v + uv^2$$

Nótese que la función resultante de la composición es una función distinta de f, $\mathbf{g}$, g_1 y g_2, es decir, es una nueva función h, tal que $f(x, y) = h(u, v) \neq f(u, v)$

En la práctica se pueden simplificar los cálculos, sustituyendo directamente:

$$f(x, y) = f(u + v, uv) = (u + v)(uv)^2 + (u + v)uv = u^3v^2 + u^2v^3 + u^2v + uv^2 = h(u, v)$$

Ejemplo 4.51. *Hallar la función compuesta de la función* $f(x,y,z) = xy^2z^3 - xyz$ *con las funciones* $x = g_1(t) = e^t$, $y = g_2(t) = \operatorname{sen} t$ *y* $z = g_3(t) = t^2$

Solución. Consideramos la función vectorial

$$\mathbf{g}(t) = \big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) = (e^t, \operatorname{sen} t, t^2)$$

luego, en esquema, resulta

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z) = xy^2z^3 - xyz \\ \mathbf{g}(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t^2) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ t \mapsto (x,y,z) \mapsto w \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$\begin{aligned} h(t) &= (f \circ \mathbf{g})(t) = f\big(\mathbf{g}(t)\big) = f\big(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\big) = f(e^t, \operatorname{sen} t, t^2) = \\ &= e^t \operatorname{sen}^2 t\,(t^2)^3 - e^t \operatorname{sen} t\, t^2 = t^6 e^t \operatorname{sen}^2 t - t^2 e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

En la práctica se pueden simplificar los cálculos, sustituyendo directamente:

$$f(x,y,z) = f(e^t, \operatorname{sen} t, t^2) = e^t \operatorname{sen}^2 t\,(t^2)^3 - e^t \operatorname{sen} t\, t^2 = t^6 e^t \operatorname{sen}^2 t - t^2 e^t \operatorname{sen} t = h(t)$$

Ejemplo 4.52. *Hallar la función compuesta de la función* $f(x,y) = xy^2 - xy$ *con las funciones* $g(t) = \sqrt{t}$

Solución. Este caso es distinto de los dos anteriores, ya que aquí, para poder componer, la función f tiene que actuar primero, y después la g. En efecto, en esquema, resulta

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = xy^2 - xy \\ g(t) = \sqrt{t} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto t \mapsto z \end{array}$$

de donde, la composición buscada, será:

$$h(t) = (g \circ f)(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{xy^2 - xy}$$

Nótese que la función resultante de la composición solamente estará definida para aquellos puntos (x,y) en los cuales se cumpla que $xy^2 - xy \geq 0$, es decir,

$$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ xy^2 - xy \geq 0\}$$

En la práctica, también se pueden simplificar los cálculos sustituyendo directamente, pero en este caso, sustituimos en la función g:

$$g(t) = g\big(f(x,y)\big) = \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{xy^2 - xy} = h(x,y)$$

Caso general. En general, para componer la función $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tendremos que sustituir las n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, respectivamente, por las funciones $g_1, g_2, \cdots g_n$ que las conecten con otras variables $u_1, u_2, \cdots, u_m$, donde $g_1, g_2, \cdots g_n$ pueden ser funciones de una o varias variables (todas de las mismas). Así, si consideramos las n funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m) \\ x_2 &= g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m) \end{aligned}$$

podemos sustituirlas en la función $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y obtener la función compuesta:

$$z = f\big(g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)\big)$$

Ahora bien, las n funciones

$$x_1 = g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), \ x_2 = g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m), \ \cdots, \ x_n = g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)$$

pueden considerarse como las componentes de una sola función *vectorial* $\mathbf{g} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, de tal manera que a cada punto $(u_1, u_2, \cdots, u_m) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ la función $\mathbf{g}$ le asocia el punto $\mathbf{g}(u_1, u_2, \cdots, u_m) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, cuyas coordenadas son

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \big(g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)\big)$$

O sea,

$$g(u_1, u_2, \cdots, u_m) = \big(g_1(u_1, u_2, \cdots, u_m), g_2(u_1, u_2, \cdots, u_m), \cdots, g_n(u_1, u_2, \cdots, u_m)\big)$$

que en esquema sería:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{g}} \quad \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} \quad \mathbb{R} \\ (u_1, u_2, \cdots, u_m) & \mapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto z \end{array}$$

De esta manera se ve el proceso de composición de funciones de varias variables como un proceso entre dos funciones, que se puede enunciar formalmente de la siguiente forma:

Definición 4.19 (Composición de funciones). *Dadas la función $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto D_f de $\mathbb{R}^n$ y la función $\mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida en el conjunto D_g de $\mathbb{R}^m$, cuyo rango está contenido en D_f (es decir, $\mathbf{g}(D_g) \subseteq D_f$), entonces se puede formar la composición de ambas funciones $f \circ \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definida como:*

$$(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{u}) = f\big(\mathbf{g}(\mathbf{u})\big), \quad \mathbf{u} \in D_g$$

Esquemáticamente sería.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \\ f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} D_g \xrightarrow{\mathbf{g}} D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ f \circ \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \end{array}\right\} (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{u}) = f\big(\mathbf{g}(\mathbf{u})\big)$$

y mediante diagramas,

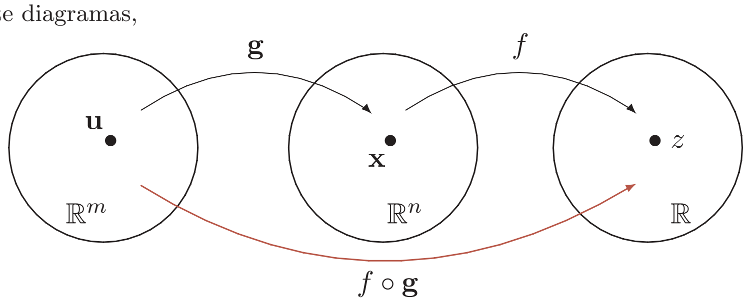


Figura 4.17: Composición de funciones

O bien, teniendo en consideración los dominios, Igual que en una variable, en general, la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa, y sí la asociativa.

4.8.3. Regla de la cadena. Perspectiva teórica: Diferencial

Teorema 4.9 (Regla de la cadena). *Sea $\mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el conjunto abierto D_g de $\mathbb{R}^m$, diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in D_g$. Sea $\mathbf{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una función definida en el conjunto abierto D_f de $\mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{g}(D_g) \subseteq D_f$, diferenciable en $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \in D_f$. Entonces la composición $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y además, en dicho punto,*

$$\boxed{\mathbf{d}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = \mathbf{df} \circ \mathbf{dg}}$$

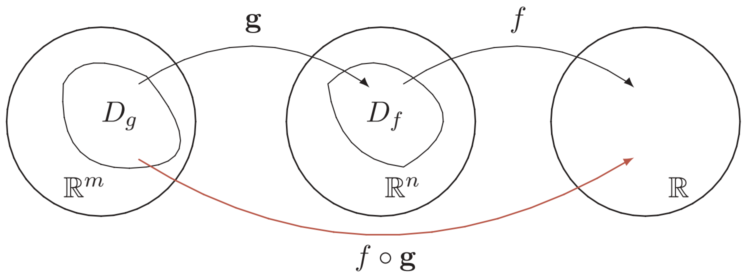


Figura 4.18: Composición de funciones

Demostración. Esquemáticamente, la situación de partida es,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathbf{g}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x}_0 & \longmapsto & \mathbf{y}_0 & \longmapsto & \mathbf{z}_0 \end{array}$$

(Si $p = 1$, la función f sería numérica, que es el objeto de estudio de este curso, sin embargo estudiamos el caso general ya que el valor de p no afecta a la demostración del teorema).
Por ser $\mathbf{g}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0$, se tiene:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{dg}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon_1(\mathbf{h}) \quad \text{con} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \epsilon_1(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \tag{4.10}$$

Consideremos ahora la imagen de $\mathbf{x}_0$ por $\mathbf{g}$: $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \in \mathbf{g}(D_g) \subseteq \mathbb{R}^n$. Puesto que $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{y}_0$, se tiene:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{df}(\mathbf{k}) + \|\mathbf{k}\|\epsilon_2(\mathbf{k}) \quad \text{con} \quad \lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} \epsilon_2(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \tag{4.11}$$

Elijamos

$$\mathbf{k} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \tag{4.12}$$

entonces $\mathbf{k}$ es una función de $\mathbf{h}$ que tiende a $\mathbf{0}$ cuando $\mathbf{h}$ tiende hacia $\mathbf{0}$. Despejando $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ en (4.12), se tiene: $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{k} = \mathbf{y}_0 + k$, y sustituyendo en (4.11),

$$\mathbf{y}_0 + k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \qquad \mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \qquad \mathbf{k} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$$

resulta:

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\big) - \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big) = \mathbf{df}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big) + \|\mathbf{k}\|\epsilon_2(\mathbf{k})$$

ahora bien, teniendo en cuenta que por (4.10) es $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{dg}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon_1(\mathbf{h})$, resulta

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\big) - \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big) = \mathbf{df}\big(\mathbf{dg}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon_1(\mathbf{h})\big) + \|\mathbf{k}\|\epsilon_2(\mathbf{k})$$

y al ser $\mathbf{df}$ una aplicación lineal, será $\mathbf{df}\big(\mathbf{dg}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon_1(\mathbf{h})\big) = \mathbf{df}\big(\mathbf{dg}(\mathbf{h})\big) + \|\mathbf{h}\|\mathbf{df}\big(\epsilon_1(\mathbf{h})\big)$, con lo que resulta:

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\big) - \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big) = \mathbf{df}\big(\mathbf{dg}(\mathbf{h})\big) + \|\mathbf{h}\|\mathbf{df}\big(\epsilon_1(\mathbf{h})\big) + \|\mathbf{k}\|\epsilon_2(\mathbf{k}) \tag{4.13}$$

de donde, para $\|\mathbf{h}\| \neq \mathbf{0}$, se tiene

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{df} \circ \mathbf{dg}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\Big(\mathbf{df}\big(\epsilon_1(\mathbf{h})\big) + \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}\epsilon_2(\mathbf{k})\Big)$$

luego (4.13) se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{df} \circ \mathbf{dg}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}) \tag{4.14}$$

donde

$$\epsilon(\mathbf{h}) = \begin{cases} \mathbf{df}\big(\epsilon_1(\mathbf{h})\big) + \dfrac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}\epsilon_2(\mathbf{k}) & \text{si } \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{0} \end{cases}$$

(el valor $\epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, se deduce al sustituir $\mathbf{h}$ por $\mathbf{0}$ en (4.13)).

Nos queda por demostrar que $\epsilon(\mathbf{h})$ tiende hacia $\mathbf{0}$ cuando $\mathbf{h}$ tiende hacia $\mathbf{0}$. Es decir, tenemos que demostrar que el siguiente límite es nulo:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\mathbf{df}\big(\epsilon_1(\mathbf{h})\big) + \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}\epsilon_2(\mathbf{k})\right) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{df}\big(\epsilon_1(\mathbf{h})\big) + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}\epsilon_2(\mathbf{k})$$

Primer sumando; puesto que $\mathbf{df}$ es lineal, es continua, y se puede decir que:

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \epsilon_1(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \mathbf{df}\big(\epsilon_1(\mathbf{h})\big) = \mathbf{0}$$

Segundo sumando; puesto que $\mathbf{dg}$ es continua, existe una constante $a > 0$ tal que, para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, se verifica que $\|\mathbf{dg}(\mathbf{h})\| \leq a\|\mathbf{h}\|$. Por consiguiente, según (4.12) y (4.10), se tiene:

$$\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\| = \|\Big(\mathbf{dg}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon_1(\mathbf{h})\Big)\| \leq \|\mathbf{dg}(\mathbf{h})\| + \|\mathbf{h}\|\|\epsilon_1(\mathbf{h})\|$$

con lo cual,

$$\|\mathbf{k}\| \leq a\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{h}\|\|\epsilon_1(\mathbf{h})\| = \big(a + \|\epsilon_1(\mathbf{h})\|\big)\|\mathbf{h}\|$$

y, por tanto:

$$\lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} \epsilon_2(\mathbf{k}) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}\epsilon_2(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

Y, en consecuencia, se concluye que $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$.

La relación (4.14) prueba, entonces que $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y también que su diferencial en ese punto es la compuesta $\mathbf{dg} \circ \mathbf{df}$ de las diferenciales de $\mathbf{g}$ y $\mathbf{f}$.Con lo cual el teorema 4.9 queda demostrado. □

4.8.4. Regla de la cadena. Perspectiva práctica: Parciales

En la Regla de la Cadena hay que diferenciar el aspecto teórico del aspecto práctico. El aspecto teórico presenta una gran elegancia y simplicidad, sin embargo no nos deja ver la riqueza de sus múltiples aplicaciones prácticas. Así, el teorema 4.9 puede enunciarse en términos de derivadas parciales de la siguiente forma:

Teorema 4.10 (Regla de la cadena). *Sea $\mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el conjunto abierto D_g de $\mathbb{R}^m$, diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in D_g$. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D_f de $\mathbb{R}^n$, tal que $\mathbf{g}(D_g) \subseteq D_f$, diferenciable en $\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \in D_f$. Entonces la composición $f \circ \mathbf{g} : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y además, en dicho punto, sus derivadas parciales son:*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big)\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0). \quad j = 1, 2, \ldots, m} \tag{4.15}$$

La fórmula (4.15) se comprende mejor si la desarrollamos en sus componente. En efecto, si la función $\mathbf{g}$ depende de m variables, $x_1, \cdots, x_m$, $(y_1, \cdots, y_n) = \mathbf{g}(x_1, \cdots, x_m)$, tendríamos la situación siguiente:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (y_1, \cdots, y_n) \mapsto z \end{array}$$

donde $\mathbf{g}$ es una función de n funciones coordenadas, cada una de ellas dependiendo de las m variable $x_1, \cdots, x_m$. Al hacer la composición con f, se obtiene la función $f \circ \mathbf{g}$ que depende, también, de las m variables $x_1, \cdots, x_m$. Para estas funciones, las derivadas parciales de las fórmulas (4.15) se puede expresar de la forma:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_m} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_m} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{array}\right\} \tag{4.16}$$

Es decir, de manera esquemática, pensando en términos de sustitución de las variables, y usando la misma letras para denotar a las funciones así como a sus imágenes, tenemos:

$$z = f(y_1, \cdots, y_n) \left\{\begin{array}{c} y_1 = y_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x_1, \cdots, x_m) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_m} = \dfrac{\partial f}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{array}\right.$$

Y forzando un poco más la notación, resulta,

$$z = z(y_1, \cdots, y_n) \left\{\begin{array}{c} y_1 = y_1(x_1, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x_1, \cdots, x_m) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_m} = \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{array}\right.$$

Luego, según la regla de la cadena se tiene:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}. \quad j = 1, 2, \ldots, m} \tag{4.17}$$

Es evidente la ventajosa simplicidad de la fórmula de las derivadas parciales de la función compuesta con esta presentación. Sin embargo, debemos hacer notar que: 1º no se hacen explícitos los puntos donde están calculadas las derivadas, y 2º se usan letras iguales para denotar cosas distintas, a saber: las funciones y sus imágenes.

Aquí se ha seguido el orden *alfabético* de las variables $x \to y \to z$. Sin embargo, en la práctica, cuando el número de variables es reducido, no se suele seguir este orden, ya que se acostumbra a utilizar letras distintas sin subíndices. Para varias variables, más acorde con la notación práctica hubiera sido seguir con el orden $t \to x \to z$, con lo que hubiera resultado:

$$z = f(x_1, \cdots, x_n) \left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_1(t_1, \cdots, t_m) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t_1, \cdots, t_m) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial z}{\partial t_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial t_m} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_m} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{array} \right.$$

Veamos la materialización de esta fórmula a los distintos casos concretos.

Regla de la cadena con una variable independiente

Si la función $\mathbf{g}$ depende de una sola variable, tendríamos la situación siguiente:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ t \mapsto (x_1, \cdots, x_n) \mapsto z \end{array}$$

donde $\mathbf{g}$ es una función de n funciones coordenadas, cada una de ellas dependiendo de una sola variable t. Al hacer la composición con f, se obtiene la función $f \circ \mathbf{g}$ que depende, también, sólo de t. Para estas funciones, las derivadas parciales de las fórmulas (4.15) del teorema anterior son *derivadas totales*, quedando como:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{g})(t) = (f \circ \mathbf{g})'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\mathbf{g}(t)\big)\frac{dg_i}{dt}(t) \tag{4.18}$$

donde $g_i, i = 1, 2, \cdots, n$, son las funciones coordenadas de $\mathbf{g}$.
Que se puede expresar, de manera esquemática, de la forma:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Es decir, de manera esquemática, pensando en términos de sustitución de las variables, tenemos:

$$z = f(x_1, \cdots, x_n) \left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

La suma que aparece en la igualdad (4.18) también puede expresarse como un producto *interior* de dos vectores, de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}\big(f \circ \mathbf{g}\big)(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\mathbf{g}(t)\big), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\mathbf{g}(t)\big)\right) \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix} = \nabla f\big(\mathbf{g}(t)\big) \cdot \mathbf{g}'(t)$$

donde, $\mathbf{g}'(t)$ representa el vector $\big(g_1'(t), \dots, g_n'(t)\big)$. De esta manera, la extensión de la regla de la cadena tiene un parecido más íntimo con el caso unidimensional, salvo que ahora el gradiente ∇f desempeña el papel de la derivada f'.

Planteamiento práctico. Con objeto de recordar con facilidad las fórmulas correspondientes a la regla de la cadena planteamos un segundo razonamiento (más práctico) centrado en dos variables.

Supongamos una función de dos variables $z = f(x, y)$, y supongamos que cada una de las variables x e y depende de una tercera variable t, mediante las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$. Podemos sustituir los valores de x e y en la función $z = f(x, y)$, con lo cual z pasaría a depender directamente de t y podríamos calcular la derivada de z respecto de t.

$$z = f(x, y) \left\{ \begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\} \Rightarrow z = f\big(x(t), y(t)\big) = h(t) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = h'(t)$$

Esto que puede hacerse por sustitución de las variables (sustituyendo primero y derivando después), también puede hacerse por la regla de la cadena. Para obtener la fórmula correspondiente, partimos de dz, y a partir de ahí obtenemos dz/dt, por simple división. En efecto,

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Otra manera de obtener la fórmula es mediante un diagrama en árbol, donde la derivada de la función z respecto de la variable t se obtiene “sumando”todos los caminos que van de t a z.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "\frac{\partial z}{\partial x}"] & \\ t \arrow[ur, "\frac{dx}{dt}"] \arrow[dr, "\frac{dy}{dt}"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "\frac{\partial z}{\partial y}"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Esta regla puede enunciarse de una manera más formal mediante el siguiente

Teorema 4.11 (Regla de la cadena con una variable independiente). *Sea $z = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$, siendo g y h funciones derivables de t, entonces z es una función derivable de t, y su derivada es*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Demostración. Puesto que g y h son funciones derivables respecto de t, resulta que ambos Δx y Δy tienden a cero cuando Δt tiende a cero. Además, al ser f una función diferenciable de x y de y, se tiene que

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Luego para $\Delta t \neq 0$, se tiene

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

de donde se deduce que

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\left(\frac{dx}{dt}\right) + 0\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \square$$

Ejemplo 4.53. *Dada la función $z = x^2y - y^2$, donde $x = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$. Hallar dz/dt cuando $t = 0$,*

(a) Por sustitución previa

(b) Mediante la Regla de la Cadena.

Solución. (a) Mediante la sustitución previa es un proceso elemental, basta con sustituir x e y por sus valores y derivar una vez hecha la sustitución.

$$z = x^2y - y^2 \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ y = e^t \end{array} \right\} \to z = e^t \operatorname{sen}^2 t - e^{2t}$$

de donde,

$$\frac{dz}{dt} = e^t \operatorname{sen}^2 t + 2e^t \operatorname{sen} t \cos t - 2e^{2t}$$

y, en consecuencia, resulta

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{t=0} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2$$

(b) Aplicando la Regla de la Cadena, resulta

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy)\cos t + (x^2 - 2y)e^t$$

Que podemos expresarlo en términos de t, o dejarlo como está. En consecuencia, dado que

$$t = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

resulta:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{t=0} = 0 + (0 - 2) \cdot 1 = -2$$

Ejemplo 4.54. *La altura de un cono recto circular mide* 15 *cm. y aumenta a razón de* $0'2$ *cm. cada minuto. El radio de la base mide* 10 *cm. y aumenta a razón de* $0'3$ *cm. cada minuto. Hallar la variación de volumen que experimenta en la unidad de tiempo.*

Solución. El volumen del cono viene definido por: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, de donde,

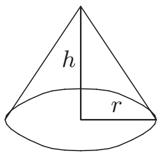


Figura 4.19: cono.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = \frac{2}{3}\pi r h \frac{dr}{dt} + \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

y, teniendo en cuenta que,

$$\text{para } \left\{ \begin{array}{l} h = 15 \\ r = 10 \end{array} \right\} \text{ se tiene } \left\{ \begin{array}{l} h'(t) = 0'2 \\ r'(t) = 0'3 \end{array} \right.$$

resulta,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right]_{\substack{h=15\\ r=10}} = \frac{2}{3}\pi \cdot 10 \cdot 15 \cdot 0'3 + \frac{1}{3}\pi \cdot 100 \cdot 0'2 = \frac{-110\pi}{3}\ cm^3/min$$

Regla de la cadena para dos variables independientes

Si la función $\mathbf{g}$ depende de dos variables, t_1 y t_2, $(x_1, \cdots, x_n) = \mathbf{g}(t_1, t_2)$, tendríamos la situación siguiente:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (t_1, t_2) \mapsto (x_1, \cdots, x_n) \mapsto z \end{array}$$

donde $\mathbf{g}$ es una función de n funciones coordenadas, cada una de ellas dependiendo de las dos variable t_1 y t_2. Al hacer la composición con f, se obtiene la función $f \circ \mathbf{g}$ que depende, también, de las variables t_1 y t_2. Para estas funciones, las derivadas parciales de las fórmulas (4.15) del teorema anterior son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big)\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(\mathbf{x}_0). \quad j = 1, 2 \tag{4.19}$$

donde $g_i, i = 1, 2, \cdots, n$, son las funciones coordenadas de $\mathbf{g}$.
Que, al igual que la fórmula (4.16), se puede expresar de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_2} \end{array}\right\}$$

Es decir, de manera esquemática, pensando en términos de sustitución de las variables, tenemos:

$$z = f(x_1, \cdots, x_n) \left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_1(t_1, t_2) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t_1, t_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_2} \end{array} \right.$$

La regla de la cadena, en este caso, consiste en un conjunto de dos fórmulas, una para cada derivada parcial $D_1(f\circ\mathbf{g})$, $D_2(f\circ\mathbf{g})$. Cada una de las cuales es una suma que también puede expresarse como un producto interior, y la fórmula (4.19 toma otra vez una forma parecida al caso unidimensional.

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\big(f\circ\mathbf{g}\big)(\mathbf{x}_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big)\right)\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dt_j}(\mathbf{x}_0)\\ \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt_j}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}=\nabla f\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big)\cdot D_j\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$$

para $j=1,\ 2.$
donde $D_j\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ representa el vector $\big(D_jg_1(\mathbf{x}_0),\ldots,D_jg_n(\mathbf{x}_0)\big)$.

Planteamiento práctico. Con objeto de recordar con facilidad las fórmulas correspondientes a la regla de la cadena planteamos un segundo razonamiento (más práctico) centrado en dos variables.

Supongamos una función de dos variables $z=f(x,y)$, y supongamos que cada una de las variables x e y dependen de otras dos variable s y t, mediante las funciones $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$. Podemos sustituir los valores de x e y en la función $z=f(x,y)$, con lo cual z pasaría a depender directamente de s y t y podríamos calcular las derivadas parciales de z respecto de s y respecto de t.

$$z=f(x,y)\left\{\begin{array}{c}x=x(s,t)\\ y=y(s,t)\end{array}\right\}\Rightarrow z=f\big(x(s,t),y(s,t)\big)=h(s,t)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial s}=?\\ \dfrac{\partial z}{\partial t}=?\end{array}\right.$$

Esto que puede hacerse por sustitución de las variables (sustituyendo primero y derivando después), también puede hacerse por la regla de la cadena. Para obtener la fórmula correspondiente, partimos de dz, y a partir de ahí obtenemos $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ por simple división. En cada caso, d se transforma en ∂, ya que al hacer la división suponemos que la "otra"variable permanece constante. En efecto,

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} & \qquad t=\text{cte.}\\ \dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} & \qquad s=\text{cte.}\end{array}\right.$$

Otra manera de obtener la fórmula es mediante un diagrama en árbol, donde la derivada de la función z respecto de cada variable se obtiene "sumando"todos los caminos que van desde la variable correspondiente a z, suponiendo el resto de las variables fijas.

$$t = \text{cte.} \quad \longrightarrow \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & x \arrow[dr, "\frac{\partial z}{\partial x}"] & \\ s \arrow[ur, "\frac{\partial x}{\partial s}"] \arrow[dr, "\frac{\partial y}{\partial s}"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "\frac{\partial z}{\partial y}"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$s = \text{cte.} \quad \longrightarrow \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & x \arrow[dr, "\frac{\partial z}{\partial x}"] & \\ t \arrow[ur, "\frac{\partial x}{\partial t}"] \arrow[dr, "\frac{\partial y}{\partial t}"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "\frac{\partial z}{\partial y}"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Estos resultados se pueden enunciar de una manera más formal mediante el siguiente

Teorema 4.12 (Regla de la cadena con dos variables independientes). *Sea $z = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y de y. Si $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ son tales que existen todas las parciales primeras $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$, entonces $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ existen y vienen dadas por*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Demostración. Para obtener $\partial z/\partial s$ mantenemos t constante, con lo cual se tiene que g y h son funciones derivables de la única variable s, y, en consecuencia, podemos aplicar el teorema 4.11 para obtener el resultado deseado. De la misma forma, para obtener $\partial z/\partial t$ mantenemos s constante, con lo cual g y h son funciones derivables de t solamente, y en consecuencia también podemos aplicar el teorema 4.11 para obtener el resultado deseado. $\square$

Ejemplo 4.55. *Dada la función $z = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$*

(a) Por sustitución de las variables.

(b) Por la regla de la cadena.

Solución. (a) Mediante la sustitución previa es un proceso elemental, basta con sustituir x e y por sus valores y derivar una vez hecha la sustitución.

$$z = 2xy \left\{ \begin{array}{l} x = s^2 + t^2 \\ y = s/t \end{array} \right\} \to z = 2(s^2 + t^2)\frac{s}{t} = 2(\frac{s^3}{t} + st)$$

de donde,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2(\frac{3s^2}{t} + t) = \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2(\frac{-s^3}{t^2} + s) = \frac{-2s^3 + 2st^2}{t^2}$$

(b) Aplicando la Regla de la Cadena, resulta

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2y)(2s) + (2x)(\frac{1}{t}) = 4sy + \frac{2x}{t} =$$
$$= 4s\frac{s}{t} + \frac{2}{t}(s^2 + t^2) = \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t} = \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (2y)(2t) + (2x)(\frac{-s}{t^2}) = 4ty - \frac{2s}{t^2}x =$$
$$= 4t\frac{s}{t} - \frac{2s}{t^2}(s^2 + t^2) = \frac{4t^2 s - 2s^3 - 2st^2}{t^2} = \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}$$

4.8.5. Regla de la cadena. Perspectiva general: Matriz jacobiana

La introducción del Jacobiano nos va a permitir utilizar el lenguaje algebraico de las matrices y las transformaciones lineales y nos va a permitir ver la regla de la cadena como un resultado de asombrosa sencillez y elegancia, como lo es en el caso de funciones de una variable.

Recordemos, primeramente, lo que establece la regla de la cadena para funciones de una sola variable: *la composición de dos funciones diferenciable es diferenciable y su derivada es el producto de las derivadas de cada una de las funciones que se están componiendo.* Queremos establecer un resultado similar para funciones vectoriales de cualquier número de variables.

Hasta ahora hemos definido los conceptos de “derivadas parciales”, “derivadas direccionales”, “gradiente” y “diferencial”, para funciones de varias variables, pero no hemos definido lo que se entiende por “derivada”de este tipo de funciones.

Definición 4.20 (Derivada). *Sea la función $f : \mathcal{D} \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida en el conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$. Se dice que esta función es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si existe una transformación lineal $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, llamada derivada de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$, tal que*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

(para $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in \mathcal{D}$)

NOTA: Siendo $\mathbf{r}$ una función que toma valores en $\mathbb{R}^m$, la interpretación del límite anterior sería de que todas las funciones componentes tenderán a cero cuando, al dividirlas por $\|\mathbf{h}\|$, $\mathbf{h}$ tiende a cero.

Hemos definido la derivada de una función vectorial como una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Toda transformación lineal tiene asociada una matriz de orden $m \times n$ que la representa.

Matriz de una transformación lineal. La matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se construye de la siguiente forma: Sean $\beta_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ y $\beta_2 = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \cdots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Entonces el vector $T(\mathbf{e}_j)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de β_2, es decir,

$$T(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2j}\bar{\mathbf{e}}_2 + \cdots + a_{mj}\bar{\mathbf{e}}_m$$

A la matriz $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n$, cuya j-ésima columna está constituida por las coordenadas de la imagen del j-ésimo vector $\mathbf{e}_j$ de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^m$, se le llama matriz de la transformación T respecto de las bases β_1 y β_2. Es decir, la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ queda unívocamente determinada cuando se da la imagen de una base de $\mathbb{R}^n$. Sean $\beta_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ y $\beta_2 = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \cdots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Las imágenes de los vectores de la base β_1, por estar en $\mathbb{R}^m$, se pueden expresar mediante combinación lineal de los vectores de β_2. Sean las imágenes de los vectores de la base β_1 mediante la transformación T las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} T(\mathbf{e}_1) = a_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \cdots + a_{m1}\bar{\mathbf{e}}_m \\ \quad\cdots \\ T(\mathbf{e}_n) = a_{1n}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2n}\bar{\mathbf{e}}_2 + \cdots + a_{mn}\bar{\mathbf{e}}_m \end{array}\right\}$$

Si $\mathbf{x}$ es un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$, e $\mathbf{y}$ su imagen en $\mathbb{R}^m$, será:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \quad \to \quad \mathbf{y} = y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \cdots + y_m\bar{\mathbf{e}}_m$$

se verificará:

$$\begin{aligned} y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \cdots + y_m\bar{\mathbf{e}}_m = T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) = \\ &= x_1(a_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + \cdots + a_{m1}\bar{\mathbf{e}}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\bar{\mathbf{e}}_1 + \cdots + a_{mn}\bar{\mathbf{e}}_m) = \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\bar{\mathbf{e}}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\bar{\mathbf{e}}_m \end{aligned}$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \quad\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\}$$

Son las ecuaciones de la transformación T respecto de las bases β_1 y β_2. Las ecuaciones se pueden escribir en forma matricial del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es decir, $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, donde las columnas de la matriz A son las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base canónica β_1 respecto de β_2.

Matriz jacobiana. Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$, entonces, según la definición 4.20, será:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}+\mathbf{r}(\mathbf{h}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \quad (\text{para } \mathbf{h} \text{ tal que } \mathbf{x}_0+\mathbf{h} \in \mathcal{D}).$$

Considerando el vector $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_j$ de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, con t suficientemente pequeño como para asegurar que $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in \mathcal{D}$, resulta:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{e}_j) + \mathbf{r}(\mathbf{h})$$

Y teniendo en cuenta que $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ es una transformación lineal, será: $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(t\mathbf{e}_j) = t\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j)$, luego,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + t\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) + \mathbf{r}(\mathbf{h})$$

de donde,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{t}$$

y teniendo en cuenta que $\|\mathbf{h}\| = \pm t$, podemos escribir

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t} \mp \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}$$

Al tomar límite cuando $t \to 0$ (i.e. cuando $\|\mathbf{h}\| \to \mathbf{0}$) el segundo sumando del lado derecho tiende a cero, quedando sólo:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{t}$$

Al descomponer $\mathbf{f}$ como $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, y tomando límites en cada una de las coordenadas, vemos que éstos son las derivadas parciales respecto de la variable x_j de cada una de las componentes. es decir,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\bar{\mathbf{e}}_i$$

Entonces la j-ésima columna de la matriz que representa a la transformación lineal (derivada) $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está formada por las derivadas parciales de las funciones componentes de $\mathbf{f}$ respecto de su j-ésima variable. Es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

A esta matriz de orden $m \times n$, en cuya i-ésima linea y j-ésima columna aparece la derivada parcial $\frac{\partial f_i}{x_j}(\mathbf{x}_0)$ de la i-ésima función componente de $\mathbf{f}$ respecto de su j-ésima variable, evaluada en $\mathbf{x}_0$, se le llama *matriz jacobiana* de la función $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$ y se denota $J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Esta es entonces la *derivada* de la función diferenciable $\mathbf{f}$ en $\mathbf{x}_0$ (identificando, como siempre, a la transformación lineal $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con la matriz que la representa).

Gradiente y matriz jacobiana. Consideremos el caso $m = 1$. En este caso, la función $f : \mathcal{D} \subsetneqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ será diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ si se da la transformación lineal $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuya representación matricial es la matriz $1 \times n$

$$Jf(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right)$$

tal que

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \quad \text{con} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Ahora bien, Si $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in \mathcal{D}$, se tiene

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = Jf(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \; \cdots \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)h_n$$

Comparando este resultado con el obtenido en la definición 4.7 (página 243), vemos que se trata exactamente de la misma definición, sólo que en aquélla se hablaba de la existencia de las derivadas parciales y ahora hablamos de la transformación lineal $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$ (la derivada de f en $\mathbf{x}_0$) o de un modo más preciso, de la matriz que la representa. Es decir, el residuo $r(\mathbf{h})$ queda determinado de la misma manera en ambas definiciones y se le pide que cumpla la misma propiedad.

Puede demostrarse que la función $\mathbf{f}:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0\in\mathcal{D}$ (según la definición 4.20) si y sólo si sus funciones coordenadas $f_i:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lo son (con la definición de diferenciabilidad 4.7). Más aún, teniendo en cuenta que la derivada de la i-ésima función coordenada f_i en $\mathbf{x}_0$ es la matriz de orden $1\times n$

$$Jf_i(\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}$$

tenemos que la derivada de la función $\mathbf{f}:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es la matriz que en su i-ésima fila tiene la derivada de su i-ésima función componente. Esquemáticamente:

$$Jf(\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\leftarrow & Jf_1(\mathbf{x}_0) & \rightarrow\\ \leftarrow & Jf_2(\mathbf{x}_0) & \rightarrow\\ & \vdots & \\ \leftarrow & Jf_m(\mathbf{x}_0) & \rightarrow\end{pmatrix}$$

Obsérvese también que la matriz $1\times n$, $Jf_i(\mathbf{x}_0)$, derivada de la función $f_i:\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, se identifica de manera natural con el vector gradiente de f_i en x_0

$$Jf_i(\mathbf{x}_0)=\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_o)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0),\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0),\cdots,\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right)$$

Así, el gradiente de una función de n variables (definido en 4.9) es como la *derivada* de la función (en el sentido de la definición 4.20).

Ejemplo 4.56. *Derivar la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=(x^2+3y^2,x^3+2y^5)$*

Solución. Las funciones coordenadas vienen definidas por:

$$f_1(x,y)=x^2+3y^2,\quad f_2(x,y)=x^3+2y^5$$

luego,

$$Jf=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 6y\\ 3x^2 & 10y^4\end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.57. *Hallar la derivada en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y)=\big(x+y,e^{x+y},\operatorname{sen}(x+y)\big)$.*

Solución. Las funciones coordenadas vienen definidas por:

$$f_1(x,y)=x+y,\quad f_2(x,y)=e^{x+y},\quad f_3(x,y)=\operatorname{sen}(x+y)$$

luego,

$$Jf=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ e^{x+y} & e^{x+y}\\ \cos(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}_{\substack{x=0\\y=0}}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Regla de la cadena. Caso general. Esquemáticamente la situación sería:

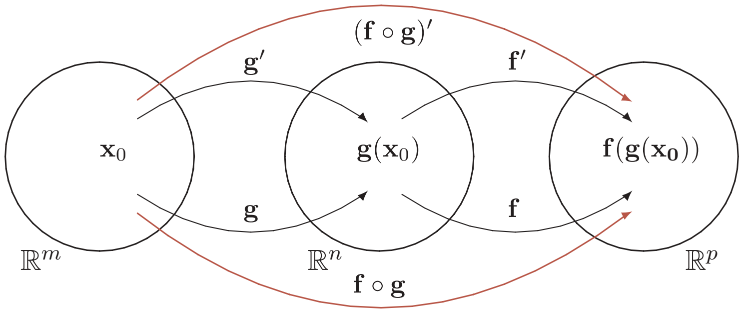


Figura 4.20: Composición de funciones

Supongamos que la función $\mathbf{g}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y la función $\mathbf{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. Lo que dice la regla de la cadena es que la función compuesta $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ será diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y que

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})'(\mathbf{x}_0)=\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0))\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0)$$

entendiéndose el lado derecho de esta expresión como una composición de transformaciones lineales, o bien, en términos matriciales

$$J(f\circ g)(\mathbf{x}_0)=Jf(g(\mathbf{x}_0))Jg(\mathbf{x}_0)$$

entendiéndose el lado derecho de esta última expresión como una multiplicación de matrices. Es decir, *la (matriz que representa a la) derivada de la composición es igual al producto de las (matrices que representan a las) derivadas de las funciones componentes.*

Ejemplo 4.58. *Dadas las funciones $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, definidas por:*

$$\mathbf{g}(x,y)=(3x,xy,y^2)$$
$$\mathbf{f}(x,y,z)=(x^2+3y^2,2xyz)$$

Hallar la derivada de la composición $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

(a) Mediante la regla de la cadena.

(b) Realizando previamente la composición.

Solución. (a) La matriz jacobiana de la composición vendrá definida por el producto de las matrices jacobianas correspondientes, es decir,

$$J(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}) = J\mathbf{f}\big(\mathbf{g}(x,y)\big)\,J\mathbf{g}(x,y) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) & \frac{\partial f_1}{\partial y}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) & \frac{\partial f_1}{\partial z}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) & \frac{\partial f_2}{\partial y}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) & \frac{\partial f_2}{\partial z}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x & 6y & 0 \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{pmatrix}_{\mathbf{g}(x,y)} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(3x) & 6(xy) & 0 \\ 2(xy)(y^2) & 2(3x)(y^2) & 2(3x)(xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6x & 6xy & 0 \\ 2xy^3 & 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x+6xy^2 & 6x^2y \\ 6xy^3+6xy^3 & 6x^2y^2+12x^2y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18x+6xy^2 & 6x^2y \\ 12xy^3 & 18x^2y^2 \end{pmatrix}$$

(b) Aplicando previamente la composición, resulta:

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y) &= \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(x,y)\big) = \mathbf{f}(3x, xy, y^2) = \big((3x)^2 + 3(xy)^2, 2(3x)(xy)(y^2)\big) = \\ &= (9x^2 + 3x^2y^2,\, 6x^2y^3)\end{aligned}$$

de donde, la derivada de la composición es la matriz:

$$J(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 18x+6xy^2 & 6x^2y \\ 12xy^3 & 18x^2y^2 \end{pmatrix}$$

que coincide con la obtenida mediante la regla de la cadena.

Ejemplo 4.59. *Dadas las funciones* $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *y* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$*, definidas por:*

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(x,y,z) &= (xy, yz, x+y+z) \\ \mathbf{f}(x,y,z) &= (x^2+y^3, y+z^2-1)\end{aligned}$$

Hallar la derivada de la composición $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *en el punto* $(1,1,1)$

(a) Mediante la regla de la cadena.

(b) Realizando previamente la composición.

Solución. (a) La matriz jacobiana de la composición vendrá definida por el producto de las matrices jacobianas correspondientes. En este caso, a ser $\mathbf{g}(1,1,1) = (1,1,3)$, será,

$$J(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(1,1,1) = J\mathbf{f}\big(\mathbf{g}(1,1,1)\big)\,J\mathbf{g}(1,1,1) = J\mathbf{f}(1,1,3)\,J\mathbf{g}(1,1,1)$$

luego

$$\begin{aligned} J\mathbf{f}(1,1,3) &= \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2z \end{pmatrix}_{(1,1,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ J\mathbf{g}(1,1,1) &= \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde, resulta:

$$J(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) Aplicando previamente la composición, resulta:

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(x,y,x) = \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(x,y,z)\big) = \mathbf{f}(xy, yz, x+y+z) = \big(x^2y^2 + y^3z^3,\, yz + (x+y+z)^2 - 1\big)$$

de donde, la derivada de la composición es la matriz:

$$J(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y^2 + 3y^2z^3 & 3y^3z^2 \\ 2(x+y+z) & z + 2(x+y+z) & y + 2(x+y+z) \end{pmatrix}$$

de donde resulta:

$$(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y^2 + 3y^2z^3 & 3y^3z^2 \\ 2(x+y+z) & z + 2(x+y+z) & y + 2(x+y+z) \end{pmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

que coincide con la obtenida mediante la regla de la cadena.

El teorema que establece rigurosamente la regla de la cadena en el caso general puede enunciarse de la siguiente forma:

Teorema 4.13. *Sea $\mathbf{f} : \mathcal{D}_f \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ una función definida en el abierto $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{g} : \mathcal{D}_g \subseteqq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función definida en el abierto $\mathcal{D}_g$ de $\mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{g}(\mathcal{D}_g) \subseteqq \mathcal{D}_f$. Si $\mathbf{g}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_g$ y $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{D}_f$ entonces la función $\mathbf{f}\circ\mathbf{g} : \mathcal{D}_g \subseteqq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y su derivada viene dada por la matriz:*

$$J(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{x}_0) = J\mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\big)\, J\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$$

La demostración puede verse en [2, Pita]

4.9. Funciones implícitas

4.9.1. Funciones de una variable

La ecuación de una curva en el plano puede expresarse bien en forma *explícita*, $y = f(x)$, o bien en forma *implícita*, $F(x,y) = 0$. No obstante, si tenemos una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$, no siempre representa ésta una función. Es decir, dada la ecuación $F(x,y) = 0$ nos planteamos la cuestión de si es siempre posible despejar y en términos de x y dejar establecida la función $y = f(x)$. La respuesta a esta cuestión es negativa. En efecto: De la expresión $x^2+y^2-1 = 0$ no podemos establecer *una* función $y = f(x)$ despejando y en términos de x, ya que $x^2 + y^2 = 1$ define dos funciones, a saber, $y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$. La ecuación $F(x,y) = 0$ siempre representa una *relación*, esto es, el conjunto de todos los pares que satisfacen la ecuación. No obstante, nos planteamos la siguiente pregunta ¿cuándo la relación definida por $F(x,y) = 0$ es también una función? En otras palabras, ¿cuándo la ecuación $F(x,y) = 0$ puede resolverse explícitamente respecto a y en función de x, obteniéndose solución única?

La cuestión anterior puede plantearse en términos de *curvas de nivel*. Así, podemos preguntarnos lo siguiente, dada la función $z = F(x,y)$, ¿es su nivel cero, $F(x,y)=0$, una curva que se puede ver como la gráfica de una función $y=f(x)$?. Así mismo, si conocemos algo referente a la continuidad o diferenciabilidad de F ¿qué podemos concluir en relación a la continuidad o diferenciabilidad de f?

El teorema de la función implícita trata *localmente* esta cuestión. Es decir, hacemos un planteamiento *local* de la cuestión anterior: Dada la función $z=F(x,y)$, sea (x_0,y_0) un punto para el cual $F(x_0,y_0)=0$. De $F(x,y)=0$, ¿se puede obtener (despejando y en términos de x) una función $y=f(x)$, *definida en una vecindad de* x_0, tal que $y_0=f(x_0)$? Cuando tal entorno y tal función $y=f(x)$ existen, decimos que la función $y=f(x)$ está definida *implícitamente* por la expresión $F(x,y)=0$, o bien que es una función implícita dada en $F(x,y)=0$.

Gráficamente, la situación puede visualizase, en el ejemplo de la circunferencia, de la siguiente forma:

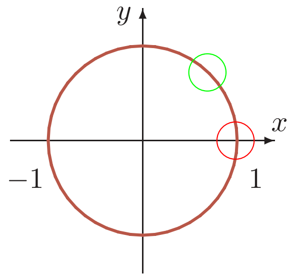


Figura 4.21: $x^2+y^2=1$

La ecuación $x^2+y^2=1$, en general no define una sola función $y=f(x)$, sin embargo, si nos limitamos a un entorno del punto $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, sí que queda definida una sola función (reduciéndonos a ese entorno), mientras que en un entorno del punto $(1,0)$ no queda definida dicha función (ya que cada punto tendría dos imágenes, al haber dos puntos en la misma vertical).

El teorema de la función implícita resuelve *localmente* la cuestión planteada, y nos dice que, dado un punto (x_0,y_0) tal que $F(x_0,y_0)=0$, en determinadas condiciones existirá un entorno de (x_0,y_0) de manera que, *en este entorno*, la relación definida por $F(x,y)=0$ es también una función. Esas condiciones son que F_x y G_y sean continuas en un entorno de (x_0,y_0) y que $F_y(x_0,y_0)\neq 0$. El teorema de la función implícita también nos dice que dicha función, $y=f(x)$, tiene *derivada continua* y nos da la manera de calcular dicha derivada, $y'=-F_x/F_y$.

Planteamiento práctico. Supongamos la ecuación $F(x,y)=0$, si supiéramos despejar y en términos de x, tendríamos $y=f(x)$, y podríamos calcular $\dfrac{dy}{dx}=?$.

$$F(x,y)=0 \quad\rightarrow\quad y=f(x) \quad\rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=?$$

El problema se presenta cuando no sabemos o no queremos despejar y en términos de x ¿cómo podemos calcular dicha derivada?.

Partamos de que $F(x,y)=0$, será $dF(x,y)=0$, de donde

$$dF=F_xdx+F_ydy=0 \;\rightarrow\; \frac{dF}{dx}=F_x\frac{dx}{dx}+F_y\frac{dy}{dx}=0 \;\rightarrow\; F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0$$

de donde, si $F_y(x,y) \neq 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Al mismo resultado llegamos si consideramos la función

$$z = F(x,y) = F(x, f(x))$$

entonces podemos aplicar el Teorema 4.11 y obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = F_x(x,y)\frac{dx}{dx} + F_y(x,y)\frac{dy}{dx}$$

Como $z = F(x,y) = 0$ para todo x en el dominio de f, se tiene $dz/dx = 0$ y en consecuencia

$$F_x(x,y)\frac{dx}{dx} + F_y(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Y si $F_y(x,y) \neq 0$, podemos concluir con que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Teorema 4.14 (De la función implícita). *Supongamos la función $z = F(x,y)$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Supongamos que la función F tiene derivadas parciales continuas en alguna bola $\mathcal{B}$ con centro en (x_0, y_0) y que $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces $F(x,y) = 0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así una función $y = f(x)$ con dominio en una vecindad V de x_0, tal que $y_0 = f(x_0)$, la cual tiene derivada continua en V que puede calcularse como*

$$y' = f'(x) = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \qquad x \in V$$

Esquemáticamente sería:

$$\left.\begin{array}{l} F(x_0,y_0) = 0 \\ F_x \text{ y } F_y \text{ continuas} \\ F_y(x_0,y_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = f(x), \text{ tal que } y_0 = f(x_0), \text{ y además } y' = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

Debe tenerse en cuenta que el teorema de la función implícita es un teorema de existencia. Dice que existe una función $y = f(x)$ definida implícitamente por $F(x,y) = 0$, sin embargo, no dice cómo se puede determinar dicha función. Es más, podría ocurrir que la estructura algebraica de la ecuación $F(x,y) = 0$ no permitiera el despeje de y en términos de x. De ahí la importancia del teorema que afirma que, si se cumplen las hipótesis, aunque no podamos despejar y en términos de x, tal función existe, y además el teorema nos dice cómo calcular su derivada.

También hay que advertir que se trata de un teorema *local*. Nos asegura la existencia de la función $y = f(x)$, o bien la posibilidad de despejar y en términos de x a partir de $F(x, y) = 0$, pero *solamente en las cercanías del punto* (x_0, y_0).

También debe tenerse en cuenta que para el caso de una variable existe la posibilidad de calcular la derivada de la función implícita aplicando directamente las reglas de derivación sobre la ecuación $F(x, y) = 0$. Simplemente habrá que tener en cuenta que cada vez que derivemos la variable y habrá que multiplicar por su derivada y'.

Ejemplo 4.60. *Calcular y', siendo* $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$

(a) Aplicando las reglas de derivación.

(b) aplicando el teorema de la función implícita.

Solución. (a) Mediante las reglas de derivación tenemos:

$$3y^2y' + 2yy' - 5y' - 2x = 0 \quad \to \quad y' = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

(b) Mediante el teorema de la función implícita, hacemos $F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4$, con lo cual,

$$\left.\begin{array}{l} F_x = -2x \\ F_y = 3y^2 + 2y - 5 \end{array}\right\} \to y' = \frac{-F_x}{F_y} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Ejemplo 4.61. *Razonar si la ecuación* $e^y = x^3 + 3y$ *determina una función* $y = f(x)$ *que cumple* $f(1) = 0$ *y que es derivable en* $x = 1$*. Calcular* $f'(1)$ *y la recta tangente a* $f(x)$ *en* $(1, 0)$*.*

Solución. El teorema de la función implícita afirma que la ecuación $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$ derivable en un punto x_0, si se cumplen las tres condiciones siguientes: El punto $P(x_0, y_0)$, con $y_0 = f(x_0)$, cumple la ecuación $F(P) = 0$, las derivadas parciales de F en P son continuas, y $F_y(P) \neq 0$.
El punto $P(1, 0)$ cumple la ecuación dada, en efecto:

$$e^0 = 1^3 + 3 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$$

Las derivadas parciales de $F(x, y) = e^y - x^3 - 3y$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ y por tanto en P, por tratarse de una función polinómica y una exponencial, en efecto:

$$\begin{array}{l} F_x(x, y) = -3x^2 \\ F_y(x, y) = e^y - 3 \end{array}$$

Y además: $F_y(1,0) = e^0 - 3 = 1 - 3 = -2 \neq 0$. Luego podemos afirmar la existencia de la función $y = f(x)$ que cumple $f(1) = 0$ y que es derivable en $x = 1$.
En virtud del teorema de la función implícita tenemos:

$$f'(x) = \frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = \frac{3x^2}{e^y - 3} \to f'(1) = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

y teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(1,0)$ viene definida por:

$$y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$

resulta: $\quad y = 0 - \frac{3}{2}(x-1) \quad \to \quad 3x + 2y = 3$

Ejemplo 4.62. *Dada la ecuación* $x^2 + y^2 = 2$

(a) Justificar que la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ *define, en un entono del punto* $(1,1)$*, una función* $y = y(x)$

(b) Calcular $y'(1)$, $y''(1)$

Solución. (a) Para que quede garantizada la existencia de la función $y = y(x)$, deberán cumplirse las tres condiciones siguientes:
El punto $(1,1)$ cumple la ecuación. En efecto $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$
Las derivadas parciales de la función $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ son continuas en un entorno del punto $(1,1)$. En efecto,

$$F_x = 2x \quad F_y = 2y \quad \text{que son continuas en } \mathbb{R}^2$$

$F_y(1,1) \neq 0$. En efecto, $F_y(1,1) = 2 \neq 0$
Luego existe la función $y = y(x)$. Que en este caso es $y = +\sqrt{2 - x^2}$.

(b) Para calcular las derivadas podemos aplicar las reglas de derivación. En efecto,

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \to \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \to \quad y' = \frac{-x}{y} \quad \to \quad y'(1) = \frac{-1}{1} = -1$$

y derivando nuevamente,

$$2 + 2y'y' + 2yy'' = 0 \ \to \ 1 + (y')^2 + yy'' = 0 \ \to \ y'' = \frac{-1-(y')^2}{y} = \frac{-2}{1} = -2$$

Nota: Hay que aclarar que los papeles de las letras x e y son perfectamente intercambiables. Así, si la función $z = F(x,y)$ es tal que en el punto (x_0, y_0) vale cero, $F(x_0, y_0) = 0$, que en una bola con centro en (x_0, y_0) tiene derivadas parciales continuas y que su derivada *respecto de* x es distinta de cero en (x_0, y_0), es decir, $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, el teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función $x = g(y)$ tal que $x_0 = g(y_0)$, para y en una vecindad de y_0, y además su derivada, en esa vecindad, es:

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{-F_y(x, y)}{F_x(x, y)}$$

Es evidente que si en el punto (x_0, y_0) se tiene

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

entonces el teorema de la función implícita nos dice que en los alrededores de (x_0, y_0), la gráfica de la curva $F(x_0, y_0) = 0$ se puede ver como la gráfica de una función $y = f(x)$ o bien como la gráfica de una función $x = f(y)$.

Puntos regulares. Si $z = F(x, y)$ es una función tal que $F(x_0, y_0) = 0$ y en una bola $\mathcal{B}$ con centro en (x_0, y_0) las parciales F_x y F_y son continuas y si $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ ó $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ (o equivalentemente si $\big(F_x(x_0, y_0)\big)^2 + \big(F_y(x_0, y_0)\big)^2 \neq 0$) entonces (x_0, y_0) se dice que es un punto *regular* de la curva $F(x, y) = 0$.
Es decir, los puntos regulares son aquellos puntos (x_0, y_0) tales que en una bola con centro en ellos, a partir de $F(x, y) = 0$, se puede despejar x o y en términos de y o x, respectivamente, y establecer una función con derivada continua $x = g(y)$ ó $y = g(x)$.
Si el punto (x_0, y_0) no es regular de $F(x, y) = 0$, se dice que es un punto *singular*.

4.9.2. Funciones de dos variables

Dada una ecuación $F(x, y, z) = 0$ nos planteamos ahora la cuestión de ¿cuándo de dicha expresión se puede despejar z en términos de x e y y formar así una función $z = f(x, y)$? Es decir, ¿cuándo el nivel cero, $F(x, y, z) = 0$, de la función $w = F(x, y, z)$ se puede ver como la gráfica de una función $z = f(x, y)$?

Planteamiento práctico. Supongamos la ecuación $F(x, y, z) = 0$, si supiéramos despejar z en términos de x e y, tendríamos $z = f(x, y)$, y podríamos calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x} =?$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} =?$.

$$F(x, y, z) = 0 \quad \to \quad z = f(x, y) \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} =? \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} =? \end{cases}$$

El problema se presenta cuando no sabemos o no queremos despejar z en términos de x e y ¿cómo podemos calcular dichas derivadas?.

Partamos de que $F(x,y,z)=0$, será $dF(x,y,z)=0$, de donde

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = F_x \dfrac{dx}{dx} + F_y \dfrac{dy}{dx} + F_z \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ \dfrac{dF}{dy} = F_x \dfrac{dx}{dy} + F_y \dfrac{dy}{dy} + F_z \dfrac{dz}{dy} = 0 \end{cases}$$

Ahora bien,
(a) Para $y = cte.$, en el primer caso resulta:

$$F_x + 0 + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

(b) Para $x = cte.$, en el segundo caso resulta:

$$0 + F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \to \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

Teorema 4.15 (De la función implícita). *Supongamos la función* $w = F(x,y,z)$. *Sea* $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *un punto tal que* $F(x_0,y_0,z_0) = 0$. *Supongamos que la función* F *tiene derivadas parciales continuas en alguna bola* $\mathcal{B}$ *con centro en* $\mathbf{p}$ *y que* $F_z(\mathbf{p}) \neq 0$. *Entonces* $F(x,y,z) = 0$ *se puede resolver para* z *en términos de* x *e* y *y definir así una función* $z = f(x,y)$ *con dominio en una vecindad* V *de* (x_0,y_0), *tal que* $z_0 = f(x_0,y_0)$, *la cual tiene derivadas parciales continuas en* V *que pueden calcularse como*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \qquad (x,y) \in V$$

Esquemáticamente sería:

$$\left.\begin{array}{l} F(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ F_x,\ F_y,\ F_z \text{ continuas} \\ F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = f(x,y),\ \text{tal que } z_0 = f(x_0,y_0),\ \text{y} \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \end{cases}$$

Las derivadas parciales también pueden calcularse a partir de las reglas ordinarias de derivación, suponiendo una de las variables constante, con la única observación de multiplicar por la derivada parcial correspondiente, cada vez que derivemos z.

Ejemplo 4.63. *Calcular* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *siendo* $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$

(a) Mediante las reglas ordinarias de derivación.

(b) Mediante las fórmulas de la función implícita.

Solución. (a) Mediante las reglas ordinarias de derivación tenemos:

$$6xz + 3x^2 z_x - 2xy^2 + 6z^2 z_x + 3yz_x = 0 \quad \rightarrow \quad z_x = \frac{-6xz + 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$
$$3x^2 z_y + 2x^2 y + 6z^2 z_y + 3z + 3yz_y = 0 \quad \rightarrow \quad z_y = \frac{2x^2 y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

(b) Mediante el teorema de la función implícita, hacemos:

$$F(x, y, z) = 3x^2 z - x^2 y^2 + 2z^3 + 3yz - 5,$$

con lo cual,

$$\left.\begin{array}{l} F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2 \\ F_y(x, y, z) = -2x^2 y + 3z \\ F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-F_x}{F_z} = \dfrac{-6xz + 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-F_y}{F_z} = \dfrac{2x^2 y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y} \end{array}$$

Ejemplo 4.64. *Razonar si la ecuación* $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0$*; determina una función* $z = f(x, y)$ *en un entorno del punto* $(0, 1)$*. Calcular* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$*,* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ *y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto* $(0, 1, f(0, 1))$*.*

Solución. El teorema 4.15 de la función implícita afirma que una ecuación $F(x, y, z) = 0$ define una función $z = f(x, y)$ diferenciable en un punto $\mathbf{p} = (x, y)$, si se cumplen las tres condiciones siguientes: el punto $P = (x, y, z)$ cumple la ecuación $F(P) = 0$, las derivadas parciales de F en P son continuas, y $F_z(P) \neq 0$.
En nuestro caso, el punto P que cumple la ecuación dada viene definido por las coordenadas:

$$x = 0, \quad y = 1 \quad \rightarrow \quad 2 + z^3 - 2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = -1$$

Las derivadas parciales de $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1$ son continuas en todo $\mathbb{R}^3$ y por tanto en P, en efecto:

$$\begin{array}{l} F_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz \\ F_y(x, y, z) = 6y^2 - 3xz - 2 \\ F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy \end{array}$$

Y además: $F_z(0, 1, -1) = 3 \neq 0$ Luego podemos afirmar la existencia de la función $z = f(x, y)$ diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (0, 1)$.
En virtud del teorema de la función implícita tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{-3x^2 + 3yz}{3z^2 - 3xy} \quad \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \frac{-F_x(0, 1, -1)}{F_z(0, 1, -1)} = -1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{-6y^2 + 3xz + 2}{3z^2 - 3xy} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = \frac{-F_y(0, 1, -1)}{F_z(0, 1, -1)} = \frac{-4}{3}$$

y teniendo en cuenta que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(0, 1, -1)$ viene definida por:

$$z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) \cdot (x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \cdot (y - 1)$$

resulta: $\quad z = -1 - x - \frac{4}{3}(y - 1)$, o bien, simplificando $3x + 4y + 3z = 1$

Ejemplo 4.65. *Sea F una función diferenciable y con derivadas parciales continuas tal que $F(9, 2, -4) = 0$ y $\nabla F(9, 2, -4) = (-1, 0, 5)$. ¿La ecuación $F(x, y, z) = 0$ define una función diferenciable $z = f(x, y)$ tal que $f(9, 2) = -4$? En caso afirmativo, determina $\frac{\partial f}{\partial x}(9, 2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(9, 2)$ y, con su ayuda, calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(9, 2, -4)$.*

Solución. El teorema 4.15 de la función implícita afirma que una ecuación $F(x, y, z) = 0$ define una función $z = f(x, y)$ diferenciable en un punto $\mathbf{p} = (x, y)$, si se cumplen las tres condiciones siguientes: el punto $P = (x, y, z)$ cumple la ecuación $F(P) = 0$, las derivadas parciales de F en P son continuas, y $F_z(P) \neq 0$.
En nuestro caso, el punto P que cumple la ecuación dada viene definido por $P(9, 2, -4)$
Por hipótesis, las derivadas parciales de F son continuas en todo $\mathbb{R}^3$ y por tanto en P. Sus valores vienen dados por las coordenadas del gradiente:

$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z) \ \rightarrow\ F_x(9, 2, -4) = -1,\ F_y(9, 2, -4) = 0,\ F_z(9, 2, -4) = 5$$

Y además: $F_z(9, 2, -4) = 5 \neq 0$ Luego podemos afirmar la existencia de la función $z = f(x, y)$ diferenciable en el punto $\mathbf{p} = (9, 2)$.
En virtud del teorema de la función implícita tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(9, 2) = \frac{-F_x(9, 2, -4)}{F_z(9, 2, -4)} = \frac{1}{5} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(9, 2) = \frac{-F_y(9, 2, -4)}{F_z(9, 2, -4)} = \frac{0}{5} = 0
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(9, 2, -4)$ viene definida por:

$$z = f(9, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(9, 2) \cdot (x - 9) + \frac{\partial f}{\partial y}(9, 2) \cdot (y - 2)$$

resulta: $\quad z = -4 + \frac{1}{5}(x - 9) + 0(y - 2)$, o bien, simplificando $x - 5z = 29$

4.10. Extremos de las funciones de varias variables

4.10.1. Introducción

Funciones de una variable

La función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, se dice que tiene un máximo (mínimo) local o relativo en un punto $x_0 \in I$ si en un entorno $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 se tiene $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x)$, respectivamente) para todo x en $\mathcal{V}_{x_0}$. En otras palabras, f tiene un máximo (mínimo) local en x_0 si $f(x_0)$ es el valor más grande (más pequeño) de la función en torno a x_0.

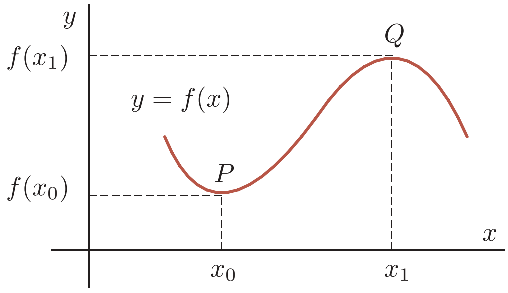


Figura 4.22: $y = f(x)$ tiene un mínimo local en $x = x_0$ y un máximo local en $x = x_1$.

Una condición necesaria para que la función f tenga un extremo (máximo o mínimo) local en x_0 es que, si $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$. Geométricamente esta condición significa que si la gráfica de la función es suave en x_0, su recta tangente en dicho punto debe ser horizontal. Es decir, en un extremo local la gráfica de la función o no tiene recta tangente, o si la tiene es una recta horizontal.

4.10.2. Definiciones

Máximos y mínimos absolutos.
Los valores $f(x_0, y_0)$ y $f(x_1, y_1)$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1)$ para todo (x, y) en $\mathcal{D}$ se conocen como mínimo absoluto y máximo absoluto de f en la región $\mathcal{D}$.

Teorema de existencia del máximo y del mínimo absoluto. Toda función continua, definida en una región *cerrada* y *acotada*, alcanza, en dicha región, un valor máximo absoluto y un mínimo absoluto.

Máximo y mínimo relativo.

Definición 4.21 (Extremo local). *Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f tiene un máximo (mínimo) local o relativo en el punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ si $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ $(f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ respectivamente) para toda $\mathbf{x}$ en una bola $\mathcal{B}$ de centro en $\mathbf{x}_0$.*

$$f(x_0, y_0) \text{ es mínimo relativo} \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{B}_{\mathbf{x}_0}$$

$$f(x_0, y_0) \text{ es máximo relativo} \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{B}_{\mathbf{x}_0}$$

Es decir, al igual que en el caso de funciones de una variable, la función f tendrá un máximo (mínimo) local en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ si $f(\mathbf{x}_0)$ es el valor más grande (más pequeño, respectivamente) de todos los valores de $f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x}$ en una bola de centro en $\mathbf{x}_0$.

Puntos críticos. Se llaman puntos críticos de una función a aquellos puntos en los que el gradiente vale cero o no está definido, es decir,

1. Puntos en los que todas las derivadas parciales valen cero (simultáneamente).
$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$
2. Puntos en los que alguna de las derivadas parciales no está definida.
$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad f_y(x_0, y_0) \quad \text{no existe}$$

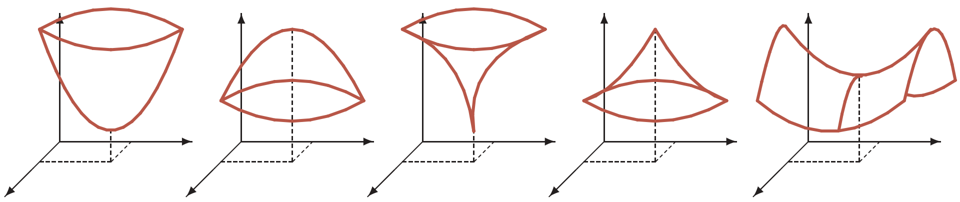


Figura 4.23: Puntos críticos.

En el primer caso, si f es diferenciable, sería $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ y, por tanto, todas las derivadas direccionales en (x_0, y_0) deben ser nulas y en consecuencia todas las rectas tangentes a la superficie en el punto (x_0, y_0) son horizontales, lo que significa que el plano tangente a la superficie en dicho punto es un plano horizontal. En el segundo caso, al no existir alguna de las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0), la función no es diferenciable en dicho punto y por tanto carece de plano tangente en el mismo. Lo que, gráficamente, significa que se trata de un punto "anguloso". En consecuencia, en ambos casos tenemos puntos candidatos a extremos relativos.

No podemos asegurar la existencia de extremo relativo ya que, en ambos casos, puede darse la situación de un «punto silla».

Definición 4.22 (Punto silla). *Si un punto crítico (x_0, y_0) no corresponde ni a máximo ni mínimo relativo, entonces el punto de la superficie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se llama punto silla.*

Es decir, (x_0, y_0) corresponde a un punto silla si en todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) la función toma valores por encima y por debajo de $f(x_0, y_0)$

El ejemplo más típico de punto silla es el que corresponde a la situación denominada «silla de montar», no obstante, pueden darse otras situaciones más irregulares.

Teorema 4.16 (Los extremos relativos se producen solamente en puntos críticos). *Si $f(x_0, y_0)$ es un extremo relativo de f en una región abierta R, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f.*

Demostración. En efecto, si $g(x) = f(x, x_0)$ tiene un extremo relativo en x_0, entonces $g'(x_0) = 0$ o no existe. Pero $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$
De la misma forma, si $h(y) = f(x_0, y)$ tiene un extremo relativo en y_0, entonces $h'(y_0) = 0$ o no existe. Pero $h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$ □

Al afirmar el teorema que en un máximo y en un mínimo relativo, las derivadas parciales o no existen o valen cero, lo que nos viene a decir es que los extremos de una función, en una región abierta, se producen solamente en los puntos críticos. Sin embargo, hay que advertir que no en todo punto crítico existe un máximo o un mínimo, ya que se puede producir lo que se llama un punto silla, que no son ni máximos ni mínimos relativos.

Si la región fuera cerrada podrían darse lo que se llaman *extremos en la frontera.*

4.10.3. Estudio de la naturaleza de los puntos críticos

a) Método algebraico.

Existen funciones que, por su sencillez, permiten estudiar la naturaleza de sus puntos críticos mediante argumentos exclusivamente algebraicos. Es decir, el estudio de la naturaleza de los extremos relativos, se hace a partir de la propia función, mediante transformaciones algebraicas de la misma. Comparando el valor de la función en el punto crítico con el valor de la función en los alrededores del punto crítico.

Ejemplo 4.66. *Determinar los extremos relativos de la función:*

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8$$

Solución. Hallamos las derivadas parciales y determinamos los correspondientes puntos críticos: Puntos en los que alguna de las derivadas parciales no está definida, y puntos en los que las dos derivadas parciales son nulas. En el caso de funciones polinómicas las parciales están siempre definidas, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x, y) = 6x - 6 \\ f_y(x, y) = 2y - 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 6x - 6 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} \mathbf{p}(1, 2)$$

Para estudiar la naturaleza del punto crítico $\mathbf{p}(1, 2)$ comparamos el valor de la función en el punto crítico con el valor de la función en los alrededores del punto crítico.

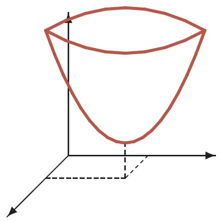


Figura 4.24: mínimo.

$$\begin{aligned}
f(1,2) &= 1 \\
f(x,y) &= 3x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = \\
&= 3(x^2 - 2x) + y^2 - 4y + 8 = \\
&= 3(x^2 - 2x + 1 - 1) + y^2 - 4y + 4 - 4 + 8 = \\
&= 3(x-1)^2 - 3 + (y-2)^2 - 4 + 8 = \\
&= 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1
\end{aligned}$$

Resulta que para cualquier punto (x,y) se tiene que $f(x,y) \geq f(1,2)$, luego $f(1,2)$ es un mínimo (absoluto).

Ejemplo 4.67. *Determinar los extremos relativos de la función:*

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución. Hallamos las derivadas parciales y determinamos los correspondientes puntos críticos: Puntos en los que alguna de las derivadas parciales no está definida, y puntos en los que las dos derivadas parciales son nulas.

$$\left.\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
f_y(x,y) &= -\frac{-2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}\right\}$$

Donde el único punto crítico es el punto $(0,0)$, en donde no están definidas ninguna de las dos derivadas parciales. Para estudiar la naturaleza del punto crítico $\mathbf{p}(0,0)$ comparamos el valor de la función en el punto crítico con el valor de la función en los alrededores del punto crítico.

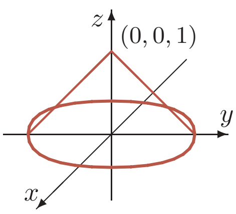


Figura 4.25: máximo.

$$f(0,0) = 1$$

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$$

Resulta que para cualquier punto (x,y) del plano se tiene que $f(x,y) \leq f(0,0)$, luego $f(0,0)$ es un máximo (absoluto).

b) Criterio de los cortes con los planos verticales.

Para comprobar que en un punto crítico no existe ni máximo ni mínimo cortamos la superficie mediante planos verticales que pasen por el punto crítico, si las curvas resultantes tienen puntos por encima y por debajo del punto crítico, entonces se trata de un punto silla. El método es sólo refutativo y no permite afirmar la existencia de máximo o mínimo, sino sólo de punto silla.

Ejemplo 4.68. *Determinar los extremos relativos de la función:*

$$f(x,y) = 1 - x^2 + y^2$$

Solución. Hallamos las derivadas parciales y determinamos los correspondientes puntos críticos: Puntos en los que alguna de las derivadas parciales no está definida, y puntos en los que las dos derivadas parciales son nulas. En el caso de funciones polinómicas las parciales están siempre definidas, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = -2x \\ f_y(x,y) = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \mathbf{p}(0,0)$$

Donde el único punto crítico es el punto $(0,0)$. Para estudiar la naturaleza del punto crítico $\mathbf{p}(0,0)$ comparamos el valor de la función en el punto crítico con el valor de la función en los alrededores del punto crítico.

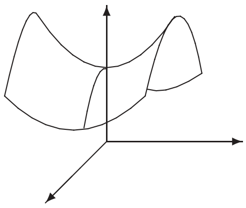


Figura 4.26: Punto silla.

$$f(0,0) = 1$$

$$f(x,y) = 1 - x^2 + y^2 = \begin{cases} f(x,0) = 1 - x^2 < 1 \\ f(0,y) = 1 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Para estudiar la naturaleza del punto crítico $\mathbf{p}(0,0)$ se ha cortado la superficie mediante los dos planos verticales $y = 0$ y $x = 0$ con lo que se han obtenido las curvas $f(x,0) = 1 - x^2$ y $f(0,y) = 1 + y^2$. Para la primera, el punto $x = 0$ es un máximo; y para la segunda, el punto $y = 0$ es un mínimo. Luego el punto crítico $\mathbf{p}(0,0)$ es un punto silla.

c) Criterio del hessiano.

Los métodos algebraicos solamente son útiles para funciones relativamente fáciles. Para funciones más complicadas no son operativos y necesitamos acudir a criterios analíticos, estudiando las derivadas parciales segundas.

Caso particular de funciones de dos variables.

Para estudiar la naturaleza de los puntos críticos, formamos la matriz hessiana en dichos puntos:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Y comparamos los signos de los dos determinantes principales:

$$D_1 = f_{xx}, \qquad D_2 = |Hf(x,y)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$$

Resultando, para el caso de dos variables:

H	f_{xx}
+	+ mínimo − Máximo
−	Silla
0	Duda

Nota: El criterio del hessiano puede fallar a la hora de estudiar la naturaleza de los extremos relativos de dos formas: Bien porque alguna de las derivadas parciales no esté definida, entonces no se puede aplicar el criterio; o bien, porque el hessiano sea cero, en cuyo caso el criterio no da información. En este caso habrá que aplicar otras técnicas, como puede ser el cortar la superficie por planos verticales.

Al ser $f_{xy} = f_{yx}$, se tiene que cuando el hessiano es positivo, entonces las dos derivadas parciales $f_{xx}(x_0, y_0)$ y $f_{yy}(x_0, y_0)$ deben tener el mismo signo, lo que significa que se puede reemplazar una por la otra en la definición del criterio.

El criterio del hessiano también se conoce como criterio de las derivadas parciales segundas, y se puede enunciar formalmente mediante el siguiente teorema

Teorema 4.17 (Criterio del hessiano). *Sea f una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas en una región abierta que contiene un punto (x_0, y_0), para el que $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$. Y sea d el valor del siguiente determinante*

$$d = |Hf(x_0, y_0)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

1. *Si $d > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo.*
2. *Si $d > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo.*
3. *Si $d < 0$, entonces $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ es un punto silla.*
4. *Si $d = 0$, entonces el criterio no da información.*

Ejemplo 4.69. *Encontrar los extremos relativos de la función:*

$$f(x, y) = x^3 - 6xy + 3y^2 - 1$$

Solución. Hallamos las dos derivadas parciales y determinamos los puntos críticos: Puntos en los que alguna de las derivadas parciales no está definida, y puntos en los que las dos derivadas parciales son nulas. En el caso de funciones polinómicas las parciales están siempre definidas, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 3x^2 - 6y \\ f_y(x,y) = -6x + 6y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} = 3x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x(3x-6) = 0 \\ x = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}$$

Luego los puntos críticos son $\mathbf{p}(0,0)$ y $\mathbf{q}(2,2)$.
Para estudiar la naturaleza de los puntos críticos, hallamos la matriz hessiana en cada uno de ellos:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Con lo cual resulta:

$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow (0,0,-1)$ es un punto silla

$|Hf(2,2)| = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 72 - 36 = 36 > 0$ y $f_{xx} = 12 > 0 \Rightarrow f(2,2)$ es un mínimo relativo.

Ejemplo 4.70. *Hallar y clasificar todos los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$$

Solución. Los puntos críticos son aquellos que anulan simultáneamente las dos derivadas parciales, o bien donde alguna de las derivadas parciales no existe. Al ser la función dada una función polinómica es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, luego los puntos críticos vendrán dado por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} F_x \equiv 4x^3 + 12xy^2 + 24x^2 = 0 \\ F_y \equiv 4y^3 + 12x^2y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x(4x^2 + 12y^2 + 24x) = 0 \\ 4y(y^2 + 3x^2) = 0 \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema igualamos a cero cada factor de la primera ecuación con cada factor de la segunda ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 1^o \\ 1^o \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} P_1(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^o \\ 2^o \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 + 3x^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} P_1(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^o \\ 1^o \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x^2 + 12y^2 + 24x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x^2 + 24x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x(x+6) = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_1(0,0) \\ P_2(-6,0) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^o \\ 2^o \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x^2 + 12y^2 + 24x = 0 \\ y^2 + 3x^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x^2 + 12y^2 + 24x = 0 \\ y^2 = -3x^2 \end{array}\right\} P_1(0,0)$$

Por tanto, las soluciones son $P_1(0,0)$, $P_2(-6,0)$

Para determinar si se trata de máximo o mínimo, hallamos la matriz hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2+12y^2+48x & 24xy \\ 24xy & 12y^2+12x^2 \end{pmatrix}$$

Con lo cual resulta que:

- $|Hf(-6,0)| = \begin{vmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{vmatrix} = 62208 > 0$ y $f_{xx} = +144 > 0 \Rightarrow$ $P_2(-6,0)$ se corresponde con un mínimo relativo.

- $|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow$ el hessiano no nos determina la naturaleza del punto crítico. Para estudiar la naturaleza del punto crítico $P_1(0,0)$ cortamos la superficie mediante el plano vertical $y = x$, con lo que obtenemos la curva $z = x^4 + x^4 + 6x^4 + 8x^3 = 8x^4 + 8x^3$ y estudiamos la naturaleza del origen en esta curva.
Tenemos:
$z'_x = 32x^3 + 24x^2 \quad \rightarrow \quad z'_x(0) = 0 \quad \rightarrow x_0 = 0$ es un punto crítico
$z''_x = 96x^2 + 48x \quad \rightarrow \quad z''_x(0) = 0$
$z'''_x = 198x + 48 \quad \rightarrow \quad z'''_x(0) = 48 \neq 0 \quad \rightarrow x_0 = 0$ es un punto de inflexión.
Luego el punto $P_1(0,0)$ se corresponde con un punto silla, ya que en cualquier entorno suyo hay tanto puntos por encima de $f(0,0)$ como puntos por debajo.

d) Puntos críticos en una función compuesta.

Igual que ocurre en los problemas de optimización de funciones de una variable, donde es posible sustituir la función objetivo por otra más simple. En varias variables también es posible simplificar los cálculos de derivación, sustituyendo la función objetivo por otra más simple, que nos facilite los cálculos de las derivadas parciales y sobre todo de resolución del sistema resultante. Esto es posible cuando la función objetivo sea la composición de una función con una función monótona. Por ejemplo, los puntos críticos de la función exponencial $f(x,y) = e^{g(x,y)}$ coinciden con los puntos críticos de la función exponente $w = g(x,y)$, ya que la función exponencial $z = e^t$ es monótona, y además creciente, luego se conserva incluso la naturaleza del punto crítico. Lo mismo ocurre en funciones del tipo $f(x,y) = \sqrt{g(x,y)}$ o bien, $f(x,y) = \ln\big(g(x,y)\big)$, sólo que estos dos casos habrá que eliminar aquellos puntos críticos que quedan fuera del dominio de la función.

Ejemplo 4.71. *Encontrar y clasificar todos los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = e^{x^2y - x\,y^2 + x\,y}$$

Solución. a) Resolvamos primero el ejemplo sin tener en cuenta la simplificación. Los puntos críticos son aquellos que anulan simultáneamente las dos derivadas parciales, o bien donde alguna de las derivadas parciales no existe. Como la función dada es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, por ser la composición de una función polinómica con la función exponencial, los puntos críticos vendrán dados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) \equiv (2xy - y^2 + y)e^{x^2y - x\,y^2 + x\,y} = 0 \\ f_y(x,y) \equiv (x^2 - 2xy + x)e^{x^2y - x\,y^2 + x\,y} = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y(2x - y + 1) = 0 \\ x(x - 2y + 1) = 0 \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema igualamos a cero cada factor de la primera ecuación con cada factor de la segunda ecuación:

$$\begin{array}{l} 1^{\text{o}} \\ 1^{\text{o}} \end{array}\left\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} P_1(0,0)$$

$$\begin{array}{l} 1^{\text{o}} \\ 2^{\text{o}} \end{array}\left\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -1 \end{array}\right\} P_2(-1,0)$$

$$\begin{array}{l} 2^{\text{o}} \\ 1^{\text{o}} \end{array}\left\} \begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 0 \end{array}\right\} P_3(0,1)$$

$$\begin{array}{l} 2^{\text{o}} \\ 2^{\text{o}} \end{array}\left\} \begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{array}\right\}_{e_2' = e_2 - 2e_1} \left.\begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ -3x = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \end{array}\right\} P_4\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Por tanto, las soluciones son $P_1(0,0)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(0,1)$, $P_4(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$

Para determinar si se trata de máximo o mínimo, hallamos la matriz hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Para lo cual calculamos las derivadas parciales segundas

$$\begin{array}{l} f_{xx} = 2ye^{x^2y - x\,y^2 + x\,y} + (2xy - y^2 + y)f_x \\ f_{xy} = (2x - 2y + 1)e^{x^2y - x\,y^2 + x\,y} + (2xy - y^2 + y)f_y \\ f_{yy} = -2xe^{x^2y - x\,y^2 + x\,y} + (x^2 - 2xy + x)f_y \end{array}$$

Con lo cual resulta que:

- $|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad \rightarrow \quad$ es un punto silla.

- $|Hf(-1,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad \rightarrow \quad$ es un punto silla.

- $|Hf(0,1)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \rightarrow \quad$ es un punto silla.

- $|Hf(\frac{-1}{3},\frac{1}{3})| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}e^{-1/27} & \frac{-1}{3}e^{-1/27} \\ \frac{-1}{3}e^{-1/27} & \frac{2}{3}e^{-1/27} \end{vmatrix} = (\frac{4}{9}-\frac{1}{9})e^{-1/27} = \frac{3}{9}e^{-1/27} > 0$ y $f_{xx} > 0 \quad \rightarrow \quad$ es un mínimo.

b) Este ejemplo puede resolverse de una manera mucho más fácil teniendo en cuenta que la función $z = e^t$ es monótona, y, en consecuencia, los puntos críticos de la función compuesta $z = e^{g(x,y)}$ coinciden con los puntos críticos de la función $g(x,y)$ que figura en el exponente, y que es mucho más fácil de estudiar que la función compuesta. Además, al ser creciente la función exponencial (a más más) se conserva la naturaleza de los puntos críticos. En consecuencia podemos estudiar los puntos críticos de la función

$$g(x,y) = x^2y - x\,y^2 + x\,y,$$

que figura en el exponente, y endosar los resultados a la función compuesta $f(x,y) = e^{x^2y - x\,y^2 + x\,y}$. En este caso, los puntos críticos vendrán dados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} g_x(x,y) \equiv 2xy - y^2 + y = 0 \\ g_y(x,y) \equiv x^2 - 2xy + x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y(2x - y + 1) = 0 \\ x(x - 2y + 1) = 0 \end{array}\right\}$$

Que es el mismo sistema de ecuaciones anterior, cuyas soluciones son:

$$P_1(0,0),\ P_2(-1,0),\ P_3(0,1),\ P_4(\frac{-1}{3},\frac{1}{3})$$

Para determinar si se trata de máximo o mínimo, hallamos la matriz hessiana.

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix}$$

Para lo cual calculamos las derivadas parciales segundas

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 2y \\ g_{xy} &= 2x - 2y + 1 \\ g_{yy} &= -2x \end{aligned}$$

Como puede verse, las ventajas sobre el método anterior, aquí son notable. Con lo cual resulta que:

- $|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \quad \rightarrow \quad$ es un punto silla.
- $|Hf(-1,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad \rightarrow \quad$ es un punto silla.
- $|Hf(0,1)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad \rightarrow \quad$ es un punto silla.

- $|Hf(\frac{-1}{3},\frac{1}{3})| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}e^{-1/27} & \frac{-1}{3}e^{-1/27} \\ \frac{-1}{3}e^{-1/27} & \frac{2}{3}e^{-1/27} \end{vmatrix} = (\frac{4}{9}-\frac{1}{9})e^{-1/27} = \frac{3}{9}e^{-1/27} > 0$ y $f_{xx} > 0 \quad \to \quad$ es un mínimo.

Que son los mismos resultados anteriores.

4.10.4. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

Planteamiento del problema. En los problemas clásicos de máximos y mínimos se trata de hacer máxima o mínima una función $f(x, y)$ sujeta a una restricción $g(x, y) = 0$.

Gráficamente el problema consiste en determinar el punto más bajo (o más alto) de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ que está situado sobre la curva de ecuación $g(x, y) = 0$, y se puede resolver de dos maneras diferentes:

a) Mediante un corte vertical de la superficie.
b) Mediante cortes horizontales (curvas de nivel).

Desde el punto de vista analítico, el primer caso corresponde a reducir el problema a una variable, y el segundo al método de los multiplicadores de Lagrange.

a) Mediante un corte vertical. Gráficamente consiste en cortar la superficie $f(x, y)$ mediante el plano (o cilindro) vertical de base la curva plana $g(x, y) = 0$ y hallar los extremos de la curva espacial resultante.

Analíticamente esto se consigue despejando la variable y en la ecuación $g(x, y) = 0$, y sustituyendo el valor obtenido, $y = \phi(x)$, en la en la función f, con lo cual el problema se reduce al cálculo de máximos y mínimos de una función de una sola variable.

$$f(x, y) = f\big(x, \phi(x)\big) = h(x)$$

El problema se presenta cuando no es posible o no es práctico despejar la variable y en la ecuación $g(x, y) = 0$.

Observación. El extremo de la función $f(x, y)$ condicionado por la ecuación $g(x, y) = 0$, no es extremo de la función $f(x, y)$, considerada aisladamente, sino de la intersección de la función con el plano vertical.

Ejemplo 4.72. *Hallar el mínimo de la función* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *condicionado por la restricción* $x + y - 1 = 0$*, reduciéndolo a una variable.*

Solución. Gráficamente se trata de encontrar el punto más bajo de la superficie de ecuación $f(x, y) = x^2 + y^2$ que se encuentra sobre la recta de ecuación $x + y - 1 = 0$. Analíticamente, el problema puede reducirse a una sola variable. En efecto, despejando y en la restricción resulta: $y = -x + 1$

y sustituyendo el valor obtenido en $f(x,y)$, resulta una función de una sola variable.

$$f(x,y) = x^2 + (-x+1)^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1$$

Es decir,

$$h(x) = 2x^2 - 2x + 1$$

de donde,

$$h'(x) = 4x - 2 = 0 \rightarrow x = 1/2 \rightarrow y = 1/2$$

Luego el mínimo de la función es

$$f(1/2, 1/2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

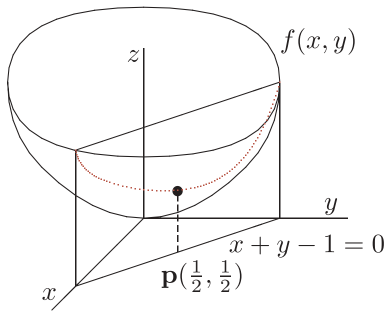


Figura 4.27: Cálculo de extremos mediante un corte vertical

Para comprobar que se trata de un mínimo acudimos a la derivada segunda $h''(x) = 4$, en consecuencia $h''(1/2) = +4$, luego se trata de un mínimo.

Nota: Este ejemplo se ha resuelto reduciéndolo a una sola variable. Con el método de los multiplicadores de Lagrange se trata de resolver el problema sin reducirlo a una sola variable, es decir, sin despejar la variable y de la ecuación $g(x,y) = 0$.

b) Mediante las curvas de nivel. Consideramos las curvas de nivel de la función $f(x,y)$,

$$f(x,y) = z$$

Como se trata de encontrar el máximo o el mínimo de la función $f(x,y)$, se trata de encontrar el máximo o el mínimo valor de z. Para ello imaginamos que las curvas de nivel se "*desplazan*" en la dirección del crecimiento de z.

Como el punto solución (x,y) también ha de cumplir la ecuación de la restricción $g(x,y) = 0$, deberá estar en la intersección de una curva de nivel con la gráfica de $g(x,y) = 0$, luego, se trata de encontrar:

a) Si buscamos un mínimo: El primer punto en que las curvas de nivel tocan a la gráfica de la restricción $g(x,y) = 0$

b) Si buscamos un máximo: el último.

Nota: Este método es utilizado en programación lineal para determinar la solución optima de una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones.

Ejemplo 4.73. *Hallar el mínimo de la función* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *condicionado por la restricción* $x + y - 1 = 0$*, mediante las curvas de nivel.*

Solución. Consideramos las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Para ello sustituimos $f(x,y)$ por z, y consideramos que z es un número, en cuyo caso tenemos que las curvas de nivel vienen definidas por

$$x^2 + y^2 = z$$

luego se trata de circunferencias con centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt{z}$, y al crecer z, las circunferencias se alejan del origen.

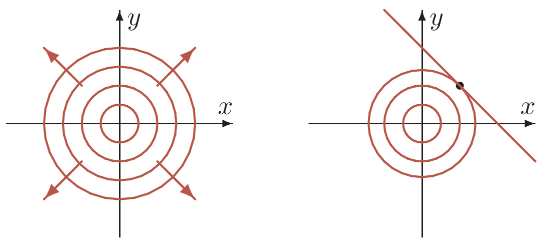


Figura 4.28: Cálculo de extremos mediante curvas de nivel

La primera circunferencia que toca a la recta de ecuación $x + y - 1 = 0$ lo hace en el punto $(1/2, 1/2)$. Luego ese punto corresponde al menor valor de z, para el cual (x,y) está en una curva de nivel y en la restricción. En consecuencia el mínimo solicitado es $f(1/2, 1/2) = 1/2$.

La situación en el espacio puede verse mediante el siguiente gráfico

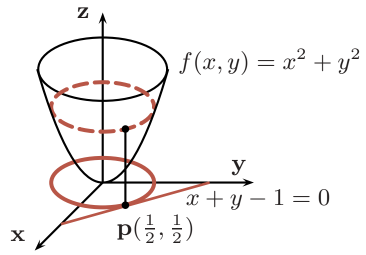


Figura 4.29: Cálculo de extremos mediante curvas de nivel

Método de los multiplicadores de Lagrange.

En el método gráfico de las curvas de nivel se trata de encontrar el punto (x,y) donde la curva de nivel de la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ es tangente a la curva de ecuación $g(x,y) = 0$. Ahora bien, dos curvas son tangentes si sus vectores normales son paralelos. En consecuencia, dado que los vectores normales a dichas curvas son los vectores gradientes, se tiene que, en el punto de tangencia, el vector gradiente ∇f debe ser un múltiplo escalar del vector gradiente ∇g. Luego

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

donde el escalar λ se conoce como *multiplicador de Lagrange*. Las condiciones necesarias para la existencia de tales multiplicadores vienen recogidas en el siguiente teorema

Teorema 4.18 (Teorema de Lagrange). *Sean f y g funciones con derivadas parciales primeras continuas tal que f tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) de la curva de la ligadura $g(x, y) = 0$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe un número real λ tal que*

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

El teorema de Lagrange también se cumple para funciones de tres o más variables, usando un argumento paralelo con las superficies de nivel.

El método de los multiplicadores de Lagrange usa el Teorema 4.18 para hallar los extremos de una función f sujeta a una ligadura $g(x, y) = 0$.

Teorema 4.19 (Método de los multiplicadores de Lagrange). *Si f y g satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange y f tiene un máximo o mínimo sujeto a la ligadura $g(x, y) = 0$, entonces dicho extremo se produce en uno de los puntos críticos de la función L dada por*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Nota: Puesto que λ puede ser indiferentemente positivo o negativo, la relación anterior puede sustituirse por esta otra:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Para funciones de tres variables se tiene

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

En consecuencia, si las funciones f y g tienen derivadas parciales continuas, entonces, *los extremos de la función $f(x, y)$, condicionados por la restricción*

$$g(x, y) = 0,$$

se producen en los puntos críticos de la función:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

Dichos puntos críticos vendrán determinados por las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f_x + \lambda\, g_x = 0 \\ f_y + \lambda\, g_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{array}\right\}$$

El procedimiento más cómodo para resolver el sistema consiste en eliminar λ entre las dos primeras ecuaciones y sustituir el resultado en la tercera. En el proceso de resolución del sistema hay que procurar evitar perder soluciones en las simplificaciones. Por ejemplo, de la ecuación $\lambda\, x = x$ se obtienen dos soluciones $x = 0$ y $\lambda = 1$, mientras que si "tachamos" la x perdemos la solución $x = 0$.
Para determinar la naturaleza de los puntos críticos podemos seguir dos procedimientos:
a) Función implícita. Consiste en suponer que el problema se ha resuelto por sustitución de la variable, sin resolverlo por dicho método, pero estudiando la naturaleza de los puntos críticos como si así se hubiera hecho. En el supuesto de que la ecuación $g(x,y) = 0$ defina y como función implícita respecto de la variable x, en un entorno del punto crítico (x_0, y_0). Es decir, $y = h(x)$, con $y_0 = h(x_0)$. Podemos suponer que hemos sustituido, en $f(x,y)$, y por su valor $y = h(x)$, con lo que obtenemos una función de una sola variable $f^*(x) = f\big(x, h(x)\big)$. La naturaleza del punto crítico (x_0, y_0) en $f(x,y)$ condicionado por $g(x,y) = 0$, será la del punto crítico x_0 en f^*. Es evidente que la función $f(x,y)$ posee un máximo (resp., mínimo) condicionado por $g(x,y) = 0$, en (x_0, y_0) si y solamente si la función $f^*(x) = f\big(x, h(x)\big)$ posee un máximo (resp., mínimo) en x_0. Con lo cual el estudio de la naturaleza de los puntos críticos se hace en una función de una sola variable, acudiendo al signo de su segunda derivada $f''\big(x_0, h(x_0), h'(x_0), h''(x_0)\big)$, sin que para ello sea necesario conocer la expresión de $y = h(x)$, puesto que $h(x_0)$, está dado, por el punto crítico; y $h'(x_0)$ y $h''(x_0)$, se obtienen directamente a partir de $g(x,y) = 0$, en virtud del teorema de la función implícita.

El método se generaliza a más de dos variables de manera natural. Así, La función $f(x,y,z)$ posee un máximo (resp., mínimo) condicionado por la restricción $g(x,y,z) = 0$, en (x_0, y_0, z_0) si y solamente la función $f^*(x,y) = f\big(x, y, h(x,y)\big)$ posee un máximo (resp., mínimo) en (x_0, y_0). Con lo cual el estudio de la naturaleza de los puntos críticos se hace en una función de una variable menos, acudiendo al signo de su hessiano (ello siempre que la ecuación $g(x,y,z) = 0$ defina implícitamente $z = h(x,y)$, en un entorno del punto (x_0, y_0)). Así,

$$Hf^*(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f^*_{xx} & f^*_{xy} \\ f^*_{yx} & f^*_{yy} \end{vmatrix}$$

donde no es necesario conocer la expresión $z = h(x,y)$, y los valores de z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy} y z_{yy}, en el punto (x_0, y_0), necesarios para el cálculo de dicho hessiano, se determinan mediante la derivación implícita.

b) En el caso de dos variables, también puede estudiarse la naturaleza del punto crítico estudiamos el signo del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = - \to \text{mínimo} \\ = + \to \text{Máximo} \\ = 0 \to \text{duda} \end{array}$$

Resolvamos el ejemplo 4.72 mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 4.74. *Hallar el mínimo de la función $f(x,y) = x^2+y^2$ condicionado por la restricción $x+y-1=0$, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.*

Solución. Formamos la función de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$$

Que, en nuestro caso, es:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x+y-1)$$

Los puntos críticos de esta función vendrán determinados por las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x \equiv 2x + \lambda = 0 \\ L_y \equiv 2y + \lambda = 0 \\ L_\lambda \equiv x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda = -2x \\ \lambda = -2y \end{array}\right\} -2x = -2y \Rightarrow x = y \\ x + y = 1 \to 2x = 1 \to x = \dfrac{1}{2} \to y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Luego el único punto crítico es el punto $\mathbf{p}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para determinar su naturaleza estudiamos el signo del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = - \to \text{mínimo} \\ = + \to \text{Máximo} \\ = 0 \to \text{duda} \end{array}$$

De donde,

$$\Delta L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Ejemplo 4.75. *Inscribir un rectángulo de área máxima, con los lados paralelos a los ejes de coordenadas, en la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = 3 - x^2$ y los ejes de coordenadas.*

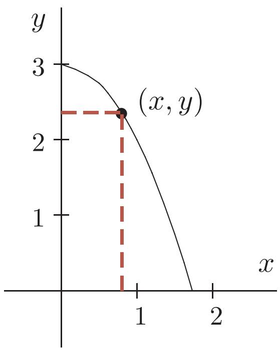


Figura 4.30: $y = 3 - x^2$

$$\left.\begin{array}{l} a = x \cdot y \\ x^2 + y - 3 = 0 \end{array}\right\} L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y - 3)$$

de donde, los puntos críticos vendrán determinados por las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x \equiv y + 2x\lambda = 0 \\ L_y \equiv x + \lambda = 0 \\ L_\lambda \equiv x^2 + y - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{-y}{2x} \\ \lambda = -x \end{array}\right\} \frac{-y}{2x} = -x \Rightarrow y = 2x^2$$

$$x^2 + 2x^2 - 3 = 0 \to 3x^2 = 3 \to x^2 = 1$$

Solución. La función a maximizar es el área del rectángulo, $a = x \cdot y$. La restricción viene determinada por el hecho de que el punto (x, y) debe pertenecer a la parábola $y = 3 - x^2$, luego tenemos:
Y al ser $x > 0$ por ser (x, y) un punto del primer cuadrante, resulta:

$$x = 1 \quad \to \quad y = 2 \quad \to \quad \lambda = -1$$

Luego el único punto crítico es el punto $P(1, 2)$. Para determinar su naturaleza estudiamos el signo del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 1 \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 1 & 2x & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = - \to \text{mínimo} \\ = + \to \text{Máximo} \\ = 0 \to \text{duda} \end{array}$$

De donde,

$$\Delta L(1, 2; -1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

4.10.5. Máximos y mínimos absolutos

Estamos interesados, ahora, en encontrar el valor máximo y el valor mínimo que alcanza una función continua sobre un recinto cerrado y acotado. Bajo estos supuestos, los extremos absolutos de la función, limitándonos a dicho recinto, pueden producirse solamente en dos lugares diferentes; o bien, en algún extremo relativo que es a su vez extremo absoluto; o bien, en el contorno del recinto.

Si la función no es continua o el recinto no es cerrado y acotado, entonces, ni está garantizada la existencia de los extremos absolutos, ni que esté situado en dichos lugares.

Toda función continua definida en un recinto cerrado y acotado alcanza un valor máximo y un valor mínimo sobre dicho recinto. Para hallar los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un recinto cerrado y acotado realizaremos el siguiente proceso:

1. Hallamos los puntos críticos en el *interior* del recinto. Para ello hallamos los puntos críticos de la función, ignorando el contorno del recinto, y una vez hallados los puntos críticos seleccionamos los situados en el interior del recinto.

2. Hallamos los puntos críticos en el *contorno del recinto*. Para ello estudiamos los extremos de la función *condicionados* por el contorno; bien aplicando los multiplicadores de Lagrange, o bien por sustitución de la variable.

3. Comparamos los valores de la función en los puntos críticos hallados. El mayor corresponde al máximo y el menor al mínimo.

Ejemplo 4.76. *Determinar los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *en el recinto* $x^2 - 2x + y^2 - 3 \leq 0$.

Solución. Localizamos el recinto expresando la ecuación en forma canónica $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$, luego se trata del círculo $\mathcal{C}$ con centro en el punto $C(1,0)$ y radio 2.
Se trata de una función continua definida en un recinto cerrado y acotado, luego alcanzará un máximo y un mínimo en dicho recinto. Para encontrarlos seguimos los siguientes pasos:
(a) En primer lugar determinamos los puntos críticos del *interior* del recinto, igualando a cero las derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{l} f_x \equiv 2x = 0 \\ f_y \equiv 2y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} P_1(0,0) \in \mathcal{C}$$

(b) En segundo lugar determinamos los puntos críticos en la frontera del recinto, para ello construimos la función lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - 2x + y^2 - 3)$$

y buscamos sus puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} L_x \equiv 2x + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ L_y \equiv 2y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda \equiv x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + \lambda x - \lambda = 0 \\ y + \lambda y = 0 \quad \to \\ x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda = -1 \to 1 = 0 \\ y = 0 \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{array}$$

Los puntos críticos del contorno son: $P_2(3,0)$ y $P_3(-1,0)$.
(c) Comparamos los valores de la función en cada uno de los puntos críticos,

el mayor será el máximo y el menor el mínimo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0)=0 \\ f(3,0)=9 \\ f(-1,0)=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{mínimo} \\ \text{Máximo} \end{array}$$

Para determinar los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado no es necesario determinar la naturaleza de cada uno de los puntos críticos.

Ejemplo 4.77. *Determinar los extremos absolutos de la función*

$$f(x,y)=x^2+3y^2 \text{ en el recinto } x^2-2x+y^2-3\leq 0.$$

Solución. Localizamos el recinto expresando la ecuación en forma canónica $(x-1)^2+y^2\leq 4$, luego se trata del círculo $\mathcal{C}$ con centro en el punto $C(1,0)$ y radio 2.
Se trata de una función continua definida en un recinto cerrado y acotado, luego alcanzará un máximo y un mínimo en dicho recinto. Para encontrarlos seguimos los siguientes pasos:

(a) En primer lugar determinamos los puntos críticos del *interior* del recinto, igualando a cero las derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{l} f_x\equiv 2x=0 \\ f_y\equiv 6y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} P_1(0,0)\in\mathcal{C}$$

(b) En segundo lugar determinamos los puntos críticos en la frontera del recinto, para ello construimos la función lagrangiana:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+3y^2+\lambda(x^2-2x+y^2-3)$$

y buscamos sus puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} L_x\equiv 2x+2\lambda x-2\lambda=0 \\ L_y\equiv 6y+2\lambda y=0 \\ L_\lambda\equiv x^2-2x+y^2-3=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+\lambda x-\lambda=0 \\ 3y+\lambda y=0 \quad\to \\ x^2-2x+y^2-3=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda=-3\to x=3/2 \\ y=0\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{array}$$

Para $x=\frac{3}{2}$, resulta, de la tercera ecuación, $\frac{9}{4}-3+y^2-3=0$, de donde, $y^2=6-\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$, y en consecuencia $y=\pm\sqrt{\frac{15}{4}}$
Luego los puntos críticos del contorno son:

$$P_2(3,0),\ P_3(-1,0),\ P_4(\tfrac{3}{2},\sqrt{\tfrac{15}{4}}),\ P_5(\tfrac{3}{2},-\sqrt{\tfrac{15}{4}}).$$

(c) Comparamos los valores de la función en cada uno de los puntos críticos, el mayor será el máximo y el menor el mínimo.

$$\begin{array}{l} f(0,0)=0\to\text{mínimo} \\ f(3,0)=9 \\ f(-1,0)=1 \\ f\left(\frac{3}{2},\sqrt{\frac{15}{4}}\right)=\frac{9}{4}+\frac{45}{4}=\frac{54}{4}\to\ \text{Máximo} \\ f\left(\frac{3}{2},-\sqrt{\frac{15}{4}}\right)=\frac{9}{4}+\frac{45}{4}=\frac{54}{4}\to\text{Máximo} \end{array}$$

Para determinar los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un recinto cerrado y acotado no es necesario determinar la naturaleza de cada uno de los puntos críticos.

Ejemplo 4.78. *determinar los extremos absolutos de la función*

$$f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$$

en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tales que* $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

Solución. La función $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2) = xy - x^3y - xy^3$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$. El recinto dado es el cuadrado unidad situado en el primer cuadrante. Por tanto, se trata de una función continua definida en un recinto cerrado y acotado, luego alcanzará un máximo y un mínimo absoluto. Para encontrarlos, seguimos los siguientes pasos:
(a) En primer lugar determinamos los puntos críticos del interior del recinto, igualando a cero las derivadas parciales

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) \equiv y - 3x^2y - y^3 = 0 \\ f_y(x,y) \equiv x - x^3 - 3xy^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y(1-3x^2-y^2) = 0 \\ x(1-x^2-3y^2) = 0 \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema igualamos a cero cada factor de la primera ecuación con cada factor de la segunda ecuación:

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l} 1^{\text{o}} \\ 1^{\text{o}} \end{array} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} P_1(0,0) \\
\begin{array}{l} 1^{\text{o}} \\ 2^{\text{o}} \end{array} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 1-x^2-3y^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 1-x^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_2(1,0) \\ Q_1(-1,0) \notin A \end{array} \\
\begin{array}{l} 2^{\text{o}} \\ 1^{\text{o}} \end{array} \left.\begin{array}{l} 1-3x^2-y^2 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1-y^2 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_3(0,1) \\ Q_2(0,-1) \notin A \end{array} \\
\begin{array}{l} 2^{\text{o}} \\ 2^{\text{o}} \end{array} \left.\begin{array}{l} 1-3x^2-y^2 = 0 \\ 1-x^2-3y^2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x^2+y^2 = 1 \\ x^2+3y^2 = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y^2 = 1-3x^2 \\ x^2+3-9x^2 = 1 \end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{l} y^2 = 1-3x^2 \\ -8x^2 = -2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y^2 = 1-3x^2 \\ x^2 = 1/4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y^2 = 1-3x^2 \\ x = \pm 1/2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y^2 = 1-3/4 = 1/4 \\ x = \pm 1/2 \end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{l} y = \pm 1/2 \\ x = \pm 1/2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_4(1/2,1/2) \\ \text{el resto no} \end{array}
\end{array}$$

(b) En segundo lugar determinamos los puntos críticos de la frontera del recinto. Estos puntos críticos serán los cuatro extremos del recinto $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(0,1)$, $P_5(1,1)$, y los puntos críticos situados en los cuatro segmentos de la frontera del recinto, que los hallamos por sustitución en $z = f(x,y) = xy(1-x^2-y^2) = xy - x^3y - xy^3$, estudiando los puntos críticos de las funciones resultantes, que son de una sola variable.

$$\begin{array}{l}
x = 0 \to z = 0 \to z' = 0 \text{ para cualquier valor de } y \to P_6(0,y) \\
x = 1 \to z = y - y - y^3 = -y^3 \to z' = -3y^2 = 0 \to y = 0 \to P_2(1,0) \\
y = 0 \to z = 0 \to z' = 0 \text{ para cualquier valor de } x \to P_7(x,0) \\
y = 1 \to z = x - x^3 - x = -x^3 \to z' = -3x^2 = 0 \to x = 0 \to P_3(0,1)
\end{array}$$

(c) Por último comparamos los valores de la función en cada uno de los puntos críticos, el mayor será el máximo absoluto y el menor el mínimo.

$$\begin{array}{l} f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = 0 \\ f(0,y) = f(x,0) = 0 \\ f(1,1) = 1 - 1 - 1 = -1 \text{ mínimo} \\ f(1/2,1/2) = 1/4 - 1/16 - 1/16 = 2/16 = 1/8 \text{ Máximo} \end{array}$$

Para determinar los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un recinto cerrado y acotado no es necesario determinar la naturaleza de cada uno de los puntos críticos.

4.11. Problemas propuestos del Capítulo 4

Ejercicios propuestos del Capítulo 4

Soluciones en la página **??**

4.1. Estúdiese la continuidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de la función f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,\mathrm{sen}\,y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4.2. Encontrar y clasificar todos los puntos críticos de la función $f(x,y)=2x^2-y^3-2xy$

Problemas resueltos del Capítulo 4

4.1. *¿La ecuación $3y^3x^4-x^2y=2$ define una función $y=f(x)$ derivable en $x=1$? Justifica tu respuesta y en caso afirmativo calcula $f'(1)$ y con su ayuda determina la ecuación de la recta tangente a la curva $3y^3x^4-x^2y=2$ en el punto $\big(1,f(1)\big)$*

Solución. El teorema de la función implícita afirma que una ecuación $F(x,y)=0$ define una función $y=f(x)$ derivable en un punto x_0, si se cumplen las tres condiciones siguientes: El punto $P(x_0,y_0)$ con $y_0=f(x_0)$ cumple la ecuación $F(P)=0$, las derivadas parciales de F en P son continuas, y $F_y(P)\neq0$.
- El punto que cumple la ecuación dada, viene definido por:

$$3y^3 1^4-1^2y=2 \quad\to\quad 3y^3-y-2=0$$

de donde, aplicando Ruffini, se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -1 & -2\\ 1 & \downarrow & 3 & 3 & 2\\ \hline & 3 & 3 & 2 & 0\end{array} \quad\Rightarrow 3y^3-y-2=(y-1)(3y^2+3y+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=1\\ 3y^2+3y+2=0\end{cases}$$

puesto que $3y^2+3y+2\neq0$, ya que, si no, sería $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-24}}{6}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-15}}{6}$ resulta que, para $x=1$, el único punto $P(1,f(1))$ que cumple la ecuación dada es el punto $(1,1)$.

- Las derivadas parciales de $F(x,y)=3y^3x^4-x^2y-2$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ y por tanto en P, por tratarse de una función polinómica, en efecto:

$$\begin{aligned}F_x(x,y)&=12y^3x^3-2xy\\ F_y(x,y)&=9y^2x^4-x^2\end{aligned}$$

- Y además: $F_y(1,1)=9-1=8\neq0$.
Luego podemos afirmar la existencia de la función $y=f(x)$ que cumple $f(1)=1$ y que es derivable en $x=1$. Además, en virtud del teorema de la función implícita tenemos:

$$f'(x)=\frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=\frac{-12y^3x^3+2xy}{9y^2x^4-x^2}\to f'(1)=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}$$

y teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P(1,1)$ viene definida por:

$$y=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)$$

resulta: $\quad y=1-\dfrac{5}{4}(x-1) \quad\to\quad 5x+4y=9$

Problemas propuestos del Capítulo 4

Soluciones en la página 391

4.1. Demostrar la relación existente entre la derivada direccional y las derivadas parciales de una función diferenciable, aplicando la regla de la cadena con una variable independiente

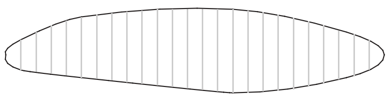
Capítulo 5

Integral definida y Cálculo de primitivas.

5.1. La estimación de un área. Sumas de Riemann.

5.1.1. Significado geométrico de la integral

Con la integral definida se pretende calcular el área de una región del plano limitada por una curva cualquiera.



Nota. Es una costumbre muy extendida resaltar las áreas marcándolas con múltiples líneas paralelas. Mucha gente traza estas líneas de manera oblicua. Sin embargo, esta manera de trazar las líneas no conduce a ningún resultado práctico. Si queremos que el rayado nos de luz y podamos visualizar algunas propiedades, este rayado habrá de hacerse con líneas verticales u horizontales. Así, entre cada dos líneas podemos imaginar un estrecho rectángulo. Lo que es fundamental en el cálculo integral.

En particular:

1. Si la función f es positiva sobre el intervalo cerrado $\left[a, b\right]$. La integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX y las perpendiculares por los puntos a y b.

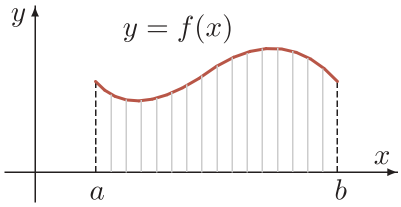


Figura 5.1: $\int_a^b f(x)\,dx =$ área bajo la curva.

2. Si la función f es negativa sobre el intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. La integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa el área de la región limitada por la curva, el eje OX, y las perpendiculares por los puntos a y b, pero con signo negativo.

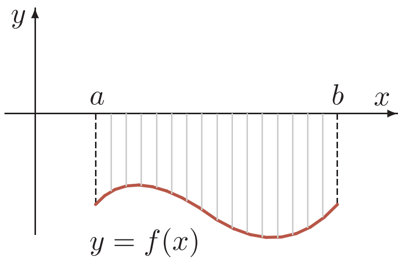


Figura 5.2: $\int_a^b f(x)\,dx = -$ área sobre la curva.

3. Si la función toma valores positivos y negativos sobre el intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. Entonces, la integral definida de la función f sobre dicho intervalo representa la suma de las áreas de las regiones comprendidas entre la función, el eje de las x, y las perpendiculares por a y b, pero asignándole a cada una de ellas el signo $+$ o $-$ según que esté por encima o por debajo del eje x. Por lo que en tal caso la integral no nos da una medida del área.

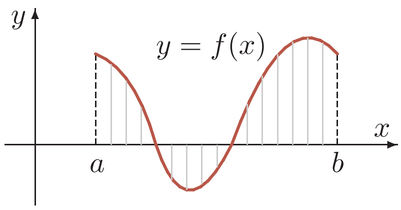


Figura 5.3: $\int_a^b f(x)\,dx =$ área 1 - área 2 + área 3.

Cálculo de integrales mediante áreas

Lo normal será calcular áreas a partir del concepto de integral. No obstante, en ocasiones, el significado gráfico de la integral nos permitirá calcular algunas integrales mediante áreas.

Ejemplo 5.1. *Hallar gráficamente la siguiente integral:*

$$\int_1^4 (x-2)\,dx$$

Solución. Representamos la función $y = x - 2$ y hallamos las áreas correspondientes.

$$A_1 = \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \qquad A_2 = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$$

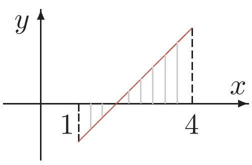


Figura 5.4:

La integral vendrá definida como la suma aritmética de las áreas correspondientes, asignado signo negativo a las áreas situadas por debajo del eje horizontal y positivo a las situadas por encima. Es decir:

$$\int_1^4 (x-2)\,dx = -A_1 + A_2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 5.2. *Hallar gráficamente* $\displaystyle\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

Solución. Representamos la función $y = \sqrt{25-x^2}$ y hallamos las áreas correspondientes. Para ello eliminamos la raíz cuadrada.

$$y = \sqrt{25-x^2} \quad (\Rightarrow y > 0) \quad \to \quad y^2 = 25 - x^2 \quad \to \quad x^2 + y^2 = 25$$

Luego se trata de la semicircunferencia superior de radio 5 y centro el origen de coordenadas.

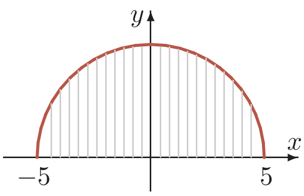


Figura 5.5:

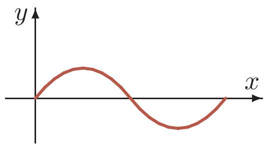
$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{25\pi}{2}$$

La integral vendrá definida como el área del semicírculo. Es decir:

$$\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{25\pi}{2}$$

Ejemplo 5.3. *Calcular gráficamente* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

Solución. Representamos la función $y = \operatorname{sen} x$ y hallamos las áreas correspondientes. Al ser la función simétrica respecto del eje horizontal resultan las áreas iguales y por tanto se compensan, dando una integral nula. En efecto.



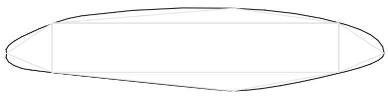
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = A - A = 0$$

Figura 5.6:

El método exhaustivo o de *llenado* para el cálculo de áreas

Este método era utilizado por los griegos para el cálculo de áreas planas y consiste en lo siguiente: Para calcular el área de una región plana irregular se sigue el siguiente proceso:

(a) Para el cálculo aproximado del área. Se rellena la región lo más posible de polígonos (triángulos, cuadriláteros, rectángulos, trapecios, etc.) y luego se toma como valor aproximado del área de la región la suma de las áreas de todos estos polígonos.



$$A \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

(b) Para el cálculo exacto del área se sigue el siguiente proceso:

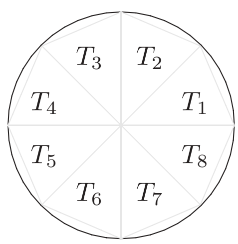
1. Se idea un procedimiento de división en polígonos que vaya aproximando de manera sucesiva al área total buscada.

2. Por paso al límite se *llena* la figura y se calcula el área exacta.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular el área del círculo conociendo la longitud de la circunferencia. Para ello ideamos el siguiente procedimiento:

1. Dividimos el círculo en triángulos isósceles iguales, con vértice común en el centro del círculo. El proceso de "llenado" se obtiene aumentando el número de triángulos. El área del circulo será aproximadamente la suma de las áreas de los triángulos. El área de cada triángulo es $T = \frac{1}{2}bh$ donde b es la base y h la altura

2. Por paso al límite obtenemos el área total del círculo (la altura del triángulo se transforma en el radio del círculo y la suma de las bases en la longitud de la circunferencia.



$$\begin{aligned} C &\approx T_1 + T_2 + \cdots + T_8 \\ &\approx \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh + \cdots + \frac{1}{2}bh \\ &\approx \frac{1}{2}h\big(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\big) \\ &\quad\;\; \downarrow \quad\; \downarrow \\ C &= \frac{1}{2}R\, \overbrace{2\pi R} = \pi R^2 \end{aligned}$$

La dificultad de este procedimiento está en idear, en cada caso, el proceso de "llenado", y principalmente en saber dar el "paso al límite".

Sumas de Riemann

Riemann utilizó el método exhaustivo, pero utilizando siempre rectángulos. El proceso de "llenado" consiste en estrechar al máximo los rectángulos. Se divide la región en rectángulos. En la práctica dichos rectángulos serán horizontales o verticales. Sin embargo, para el planteamiento teórico supondremos que dichos rectángulos son verticales. Los rectángulos no tienen por qué tener la misma anchura. La altura del rectángulo puede ser cualquier valor comprendido entre el valor mínimo y el máximo de la función en cada uno de los subintervalos. De esta manera el área de la región se puede aproximar, cuanto queramos, mediante la suma de las áreas de los rectángulos.

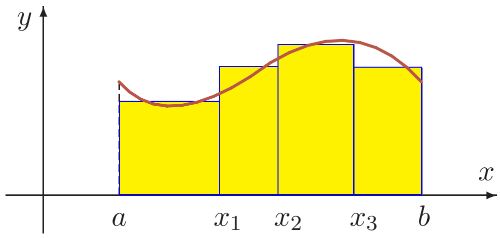
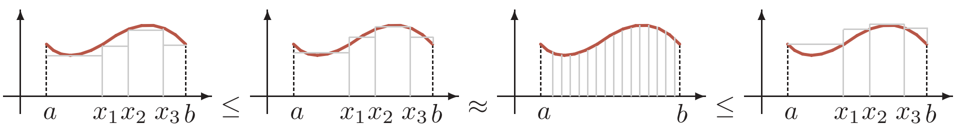


Figura 5.7: Área bajo la curva ≈ suma de las áreas de los rectángulos.

Teniendo en cuenta que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura, tenemos las siguientes sumas, según tomemos los rectángulos de altura mínima, intermedia o máxima.



$$\begin{aligned}&m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+m_3(x_3-x_2)+m_4(b-x_3)\leq\\ &\leq f(x_1^*)(x_1-a)+f(x_2^*)(x_2-x_1)+f(x_3^*)(x_3-x_2)+f(x_4^*)(b-x_3)\approx\int_a^b f(x)\,dx\leq\\ &\leq M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+M_3(x_3-x_2)+M_4(b-x_3)\end{aligned}$$

A la suma de las áreas de los rectángulos se les llama sumas de Riemann. A la primera de ellas se le llama suma inferior y a la última suma superior. En general, poniendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, resulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n$$

La integral como el límite de una suma

La integral puede interpretarse como el límite de la suma de las áreas de los infinitos rectángulos infinitesimales. Es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \Big(f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n \Big) = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

que podemos expresar como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

donde x_i es un punto cualquiera del subintervalo correspondiente.

5.1.2. Cálculo de límites utilizando el concepto de integral

Supongamos que utilizamos una partición regular del intervalo $\big[0,1\big]$, es decir, todos los subintervalos con la misma anchura, por ejemplo, dividiéndolo en n partes iguales. Tendremos todos los rectángulos con la misma base, $\Delta x = 1/n$. Como altura de cada rectángulo podemos tomar la imagen del extremo derecho del subintervalo correspondiente. En este caso, la integral entre $\big[0,1\big]$ de una función continua se puede expresar de la siguiente forma:

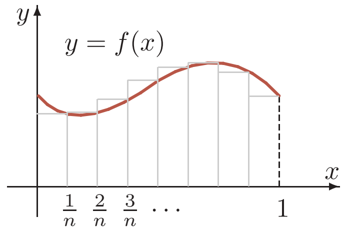


Figura 5.8:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\Big(f(\frac{1}{n})\frac{1}{n} + f(\frac{2}{n})\frac{1}{n} + \cdots + f(\frac{n}{n})\frac{1}{n}\Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\end{aligned}$$

Y viendo la igualdad de derecha a izquierda, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

lo que nos permite calcular el límite de algunas sumas a partir del concepto de integral.

Ejemplo 5.4. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\Big)$$

Solución. Sacamos factor común la base de los rectángulos, $1/n$, y el resto lo expresamos en función de k/n.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\Big) = \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1+n^2} + \frac{2n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2+n^2}\right) = \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1/n}{(\frac{1}{n})^2+1} + \frac{2/n}{(\frac{2}{n})^2+1} + + \cdots + \frac{1}{(\frac{n}{n})^2+1}\right) = \\ &\qquad\qquad = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{(\frac{k}{n})^2+1} = \int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\Big)$$

Solución. Sacamos factor común la base de los rectángulos, $1/n$, y el resto lo expresamos en función de k/n.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)= \\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)= \\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}++\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)= \\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\Big[\operatorname{arc\,tg}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.6. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)$$

Solución. Sacamos factor común la base de los rectángulos, $1/n$, y el resto lo expresamos en función de k/n.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)= \\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{(n+1)^2}+\frac{n^2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n^2}{(n+n)^2}\right)= \\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n+n}\right)^2\right)= \\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)^2\right)= \\
&\qquad=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\right)^2dx=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx= \\
&\qquad=\Big[\frac{-1}{1+x}\Big]_0^1=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

Solución. Sacamos factor común $1/n$ y el resto lo expresamos en función de

k/n.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} & \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+n}\right)= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\ln|1+x|\Big]_0^1=\ln 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$$

Solución. Sacamos factor común $1/n$ y el resto lo expresamos en función de k/n.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n}+e^{2/n}+\cdots+e^{n/n}\right)= \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{k/n}=\int_0^1 e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.9. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^8}\sum_{k=1}^{n}k^7$$

Solución. Sacamos factor común $1/n$ y el resto lo expresamos en función de k/n. Téngase en cuenta que al ser k el índice del sumatorio, todas las demás *variables* son *constantes* y se pueden introducir en el sumatoria, incluida la propia n.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^8}\sum_{k=1}^{n}k^7 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n}k^7 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^7 &= \int_0^1 x^7\,dx= \\
&= \Big[\frac{x^8}{8}\Big]_0^1=\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.10. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

Solución. Sacamos factor común $1/n$ y el resto lo expresamos en función de k/n. Téngase en cuenta que la falta de un rectángulo infinitesimal no afecta al resultado.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\int_0^1 x\,dx=$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

Intervalo de integración distinto del $[0,1]$

En el cálculo de límites mediante integrales, el intervalo de integración puede ser cualquiera. En efecto, si utilizamos una partición regular, la integral entre $[a,b]$ de una función continua se puede expresar de la siguiente forma:

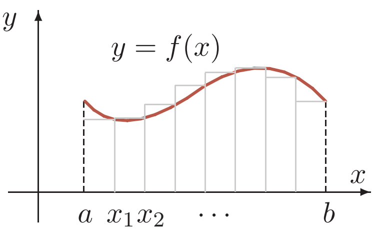


Figura 5.9:

Al dividir el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, la base de cada uno de los n rectángulos infinitesimales será: $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, y por lo tanto las coordenadas de los puntos x_1, x_2, ... serán:

$$x_1=a+\frac{b-a}{n},\quad x_2=a+2\frac{b-a}{n}=a+\frac{2}{n}(b-a),\ \ldots$$
$$\ldots\quad x_k=a+k\frac{b-a}{n}=a+\frac{k}{n}(b-a)\quad\ldots$$

Y tomando $f(x_i)$ como altura de los rectángulos, resulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(f(x_1)\frac{b-a}{n}+f(x_2)\frac{b-a}{n}+\cdots+f(x_n)\frac{b-a}{n}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\Big(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\Big)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\Big(a+\frac{k}{n}(b-a)\Big)$$

Y viendo la igualdad de derecha a izquierda, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Si $b-a$ es un número entero, entonces podemos dividir el intervalo $\big[a,b\big]$ en $(b-a)n$ partes iguales, con lo cual la base de los rectángulos infinitesimales resultantes sería $\Delta x = \dfrac{b-a}{(b-a)n} = \dfrac{1}{n}$. Con lo cual $x_k = a + \dfrac{k}{n}$. Y resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{(b-a)n} f\left(a + \frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

La clave para determinar los límites de integración $\big[a,b\big]$, está en conocer el primer y el último valor de $f(x)$, es decir, $f(a)$ y $f(b)$. Más que la fórmula, debe buscarse el proceso de integración, utilizando un gráfico auxiliar. Unas veces habrá que pensar que sólo la unidad se ha dividido en n partes y otras que todo el intervalo de integración se ha dividido en las n partes.

Ejemplo 5.11. *Calcular* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

Solución. Podemos suponer que el intervalo $\big[0,\pi\big]$ lo hemos dividido en n partes iguales. La base de los rectángulos infinitesimales será $\Delta x = \pi/n$, y los puntos de la partición $x_1 = \pi/n$, $x_2 = 2\pi/n$, ..., $x_n = n\pi/n$. Falta un término, pero no afecta al resultado, ya que $\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{n} = \operatorname{sen}\pi = 0$.

de donde,

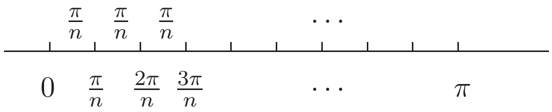
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{n}\right) = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = \\
&\qquad = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

Como regla práctica para determinar los límites de integración y el correspondiente incremento de x puede utilizarse la siguiente: Una vez determinado el valor de $x = \frac{k\pi}{n}$, tenemos:

$$x = \frac{k\pi}{n} \quad \left\{\begin{array}{lclcl} k=0 & \to & x=0 & \Rightarrow & a=0 \\ k=n & \to & x=\pi & \Rightarrow & b=\pi \\ k=1 & \to & x=\frac{\pi}{n} & \Rightarrow & \Delta x = \frac{\pi}{n} \end{array}\right.$$

Ejemplo 5.12. *Calcular* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Solución. Igual que en el ejemplo anterior, podemos suponer que el intervalo $\big[0,\pi\big]$ lo hemos dividido en n partes iguales. La base de los rectángulos infinitesimales será $\Delta x = \pi/n$, y los puntos de la partición $x_1 = \pi/n$, $x_2 = 2\pi/n$, …, $x_n = n\pi/n$.



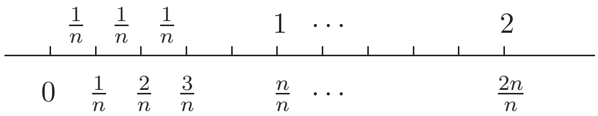
En consecuencia necesitamos sacar factor común el incremento de x $\Delta x = \frac{\pi}{n}$, de donde,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}$$

Ejemplo 5.13. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$$

Solución. Podemos suponer que el intervalo $\big[0,2\big]$ lo hemos dividido en $2n$ partes iguales. La base de los rectángulos infinitesimales será $\Delta x = 1/n$, y los puntos de la partición $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$, …, $x_n = 2n/n = 2$.



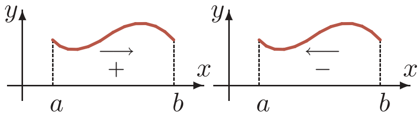
En consecuencia, sacamos factor común $1/n$ y el resto lo expresamos en función de k/n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{2n/n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} e^{k/n} = \int_0^2 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_0^2 = e^2 - 1$$

5.1.3. Propiedades de la integral definida

a) Relativas al intervalo de integración.

1. Si $a < b$ no tiene sentido hablar del intervalo $\big[b,a\big]$. No obstante, se admite por convenio que: *Al intercambiar los límites de integración, la integral cambia de signo.*

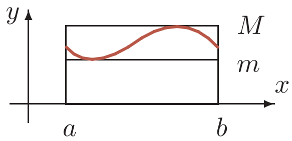


$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

2. *Si los límites de integración coinciden, la integral vale cero.*

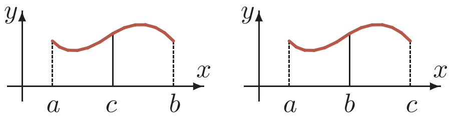
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. La integral de una función siempre está contenida entre dos valores: El rectángulo mínimo y el rectángulo máximo.



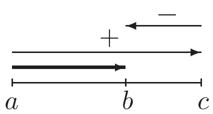
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \qquad (5.1)$$

4. Cualquiera que sean los números a, b y c, se cumple que:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

siempre que la función sea integrable sobre dichos intervalos. Esta propiedad se cumple aunque el punto c no esté situado entre a y b.



b) Relativas al integrando.

1. La integral de la suma es la suma de las integrales.

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Un factor constante puede sacarse fuera de la integral.

$$\int_a^b r f(x)\,dx = r\int_a^b f(x)\,dx$$

3. La integral de una función positiva, es positiva.

$$f(x) \geq 0, \quad x \in \big[a,b\big] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

4. Si una función es menor que otra, entonces su integral también lo es.

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in \big[a, b\big] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Ejemplo 5.14. *Sabiendo que* $\displaystyle\int_1^4 f(t)\,dt = -5$ *y* $\displaystyle\int_1^2 2f(t)\,dt = -1$ *hallar:* $\displaystyle\int_2^4 f(t)\,dt$

Solución.

$$\int_1^2 2f(t)\,dt = 2\int_1^2 f(t)\,dt = -1 \to \int_1^2 2f(t)\,dt = \frac{-1}{2}$$

$$\int_1^4 f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^4 f(t)\,dt = \frac{-1}{2} + \int_2^4 f(t)\,dt = -5$$

luego

$$\int_2^4 f(t)\,dt = -5 + \frac{1}{2} = \frac{-9}{2}$$

Ejemplo 5.15. *Sabiendo que:*

$$\int_1^4 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 10, \qquad \int_4^1 \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = 3 \qquad \int_0^4 g(x)\,dx = 5$$

Calcular $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$

Solución.

$$\left.\begin{array}{l} \int_1^4 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 10 \\ \int_4^1 \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \int_1^4 f(x)\,dx - \int_1^4 g(x)\,dx = 10 \\ \int_4^1 f(x)\,dx + \int_4^1 g(x)\,dx = 3 \end{array}\Bigg\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\int_4^1 f(x)\,dx + \int_4^1 g(x)\,dx = 10 \\ \int_4^1 f(x)\,dx + \int_4^1 g(x)\,dx = 3 \end{array}\right\} 2\int_4^1 g(x)\,dx = 13 \to \int_4^1 g(x)\,dx = \frac{13}{2}$$

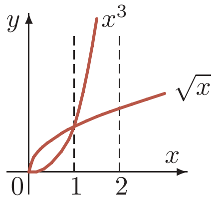
de donde,

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^4 g(x)\,dx + \int_4^1 g(x)\,dx = 5 + \frac{13}{2} = \frac{23}{2}$$

Ejemplo 5.16. *Establecer una relación de desigualdad entre las siguientes parejas de integrales:*

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \;\square\; \int_0^1 x^3 dx \qquad \int_1^2 \sqrt{x}\,dx \;\square\; \int_1^2 x^3 dx$$

Solución. Si observamos las gráficas de ambas funciones en los dos intervalos de referencia, resulta:



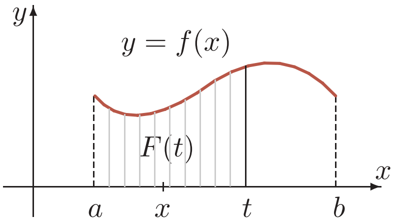
$$0 \leq x \leq 1 \to \sqrt{x} \geq x^3 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x}\, dx \geq \int_0^1 x^3\, dx$$

$$1 \leq x \leq 2 \to \sqrt{x} \leq x^3 \Rightarrow \int_1^2 \sqrt{x}\, dx \leq \int_1^2 x^3\, dx$$

5.2. El teorema fundamental del Cálculo

La función integral o función área

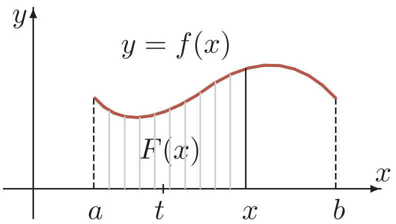
Dada una función integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$, se define su función integral sobre dicho intervalo como *el área bajo la curva desde el punto a hasta un punto variable* $t \in [a, b]$ O bien, dado que es más habitual hablar



$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

Figura 5.10:

de $F(x)$ en lugar de $F(t)$, basta con intercambiar los papeles de ambas variables.



$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Figura 5.11:

Teorema fundamental del Cálculo

Teorema 5.1. *Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces su función integral, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad a \leq x \leq b$, es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y su derivada $F'(x) = f(x)$.*

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a, b] \\ F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \end{array}\right\} F'(x) = f(x)$$

Demostración. Aplicando la definición de derivada a la función F, resulta,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x) \square$$

En la demostración se ha tenido en cuenta que, para h pequeño,

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt \approx f(x) \cdot h$$

En efecto,

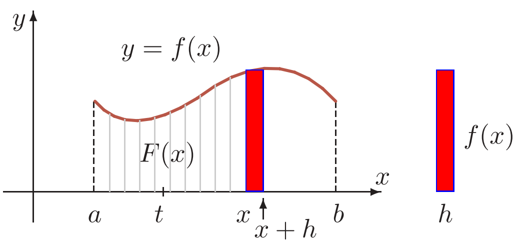


Figura 5.12:

La integral

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

representa el área del rectángulo infinitesimal de base h y altura $f(x)$.

De una manera más formal, teniendo en cuenta la desigualdad (5.1), se puede establecer de la siguiente forma:

$$m_x h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M_x h \quad \to \quad m_x \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq M_x$$

de donde, tomando límite,

$$\lim_{h \to 0} m_x \leq \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq \lim_{h \to 0} M_x$$

de donde,

$$f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(x)$$

Lecturas del teorema fundamental del Cálculo

Del Teorema fundamental del Cálculo se pueden desprender las siguientes interpretaciones:

1. Si la función f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces su función integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es una *primitiva* de $f(x)$.

2. Toda función continua sobre un intervalo cerrado, tiene una primitiva sobre dicho intervalo.

3. La derivada de una integral, con límite superior variable, respecto de dicho límite superior, coincide con el valor del integrando en dicho límite superior.
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

4. La derivada del área coincide con el valor de la función en la frontera:

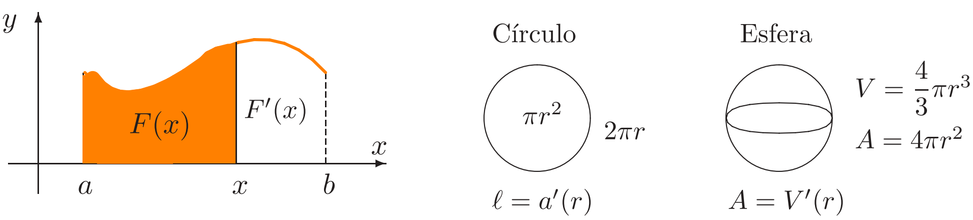


Figura 5.13:

Derivada de integrales

Ejemplo 5.17. *Hallar* $\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{x^2+1}\,dx$

Solución. Aplicando directamente el teorema fundamental resulta,
$$\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{t^2+1}$$

Ejemplo 5.18. *Hallar* $\frac{d}{dt}\int_t^3 \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Solución. Para poder aplicar el teorema fundamental, el límite variable, respecto del que se deriva, ha de ser el límite superior de la integral, en consecuencia habrá que intercambiar los límites,
$$\frac{d}{dt}\int_t^3 \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{d}{dt} - \int_3^t \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen}^2 t$$

Derivada de integrales cuando el límite superior es una función

Cuando la variable de integración no coincide con la variable de derivación, aplicamos el teorema de la derivada de la función compuesta
$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \begin{bmatrix} u = g(x) \\ du = g'(x)dx \end{bmatrix} = \frac{d}{dx}\int_a^u f(t)\,dt =$$
$$= \frac{d}{du}\left(\int_a^u f(t)\,dt\right)\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx} = f[g(x)]\cdot g'(x)$$

Ejemplo 5.19. *Hallar* $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{t^2} \cos x^2\,dx$

Solución.
$$\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} \cos x^2\,dx = \cos(t^2)^2 \cdot 2t = 2t\cos t^4$$

Derivada de integrales cuando los dos límites son funciones

Aplicando los resultados anteriores, resulta,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt &= \frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = \\ &= \frac{d}{dx}\left(-\int_a^{h(x)} f(t)\,dt + \int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = -f[h(x)]h'(x) + f[g(x)]g'(x) = \\ &= f[g(x)]g'(x) - f[h(x)]h'(x)\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f[g(x)]g'(x) - f[h(x)]h'(x)} \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.20. *Hallar* $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \ln t\,dt$

Solución. Aplicando la fórmula (5.2) resulta,

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \ln t\,dt = \ln x^3 \cdot 3x^2 - \ln x^2 \cdot 2x = 9x^2 \ln x - 4x\ln x = \big(9x^2 - 4x\big)\ln x$$

Ejemplo 5.21. *Hallar* $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2\,dt \qquad x > 0$

Solución. Aplicando la fórmula (5.2) resulta,

$$\frac{d}{dx}\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos t^2\,dt = \cos(\sqrt{x})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

Ejemplo 5.22. *Hallar el límite* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3}$

Solución. La sustitución directa da la indeterminación $0/0$ que se *rompe* aplicando la Regla de L'Hôpital. En efecto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x \cdot 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 5.23. *Hallar el límite* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x} \cos t^2\,dt}{x}$

Solución. La sustitución directa da la indeterminación 0/0 que se *rompe* aplicando la Regla de L'Hôpital. En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\, dt}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1$$

Ejemplo 5.24. *Hallar el límite* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt}$

Solución. La sustitución directa da la indeterminación 0/0 que se *rompe* aplicando la Regla de L'Hôpital. En efecto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)}\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 1$$

5.2.1. Regla de Barrow: La integral como una primitiva

Teorema 5.2 (Regla de Barrow). *Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y G es una primitiva cualquiera de f, entonces:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)$$

Demostración. Sea f continua en $[a,b]$ y G una primitiva cualquiera de f. Por ser f continua sobre $[a,b]$, su función integral $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ será una primitiva de f. En consecuencia tendremos dos primitivas de una misma función que, por tanto, se diferenciaran en una constante $G(x) = F(x) + C$, de donde,

$$\left.\begin{array}{l} G(b) = F(b) + C \\ G(a) = F(a) + C \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} G(b) = \int_a^b f(t)\, dt + C \\ G(a) = 0 + C = C \end{array}\right\} G(b) = \int_a^b f(x)\, dx + G(a)$$

de donde,

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) \qquad \square$$

Observaciones:

1. La importancia de esta regla es fundamental, ya que pone en relación las integrales con las derivadas. Sin embargo hay que advertir que solamente es aplicable a funciones *continuas* definidas en intervalos cerrados.

2. Para hallar la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado seguiremos el siguiente proceso:

   a) Se halla una primitiva cualquiera de la función, sin tener en cuenta la constante (la más sencilla).

b) Se sustituyen en esta primitiva los límites de integración -el superior y el inferior- y se restan los resultados.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$$

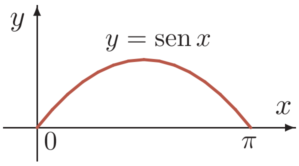
Ejemplo 5.25. *Calcular* $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

Solución. Basta con encontrar una primitiva de x^2 y evaluarla en los extremos de integración.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5.26. *Hallar el área de la región bajo la gráfica de* $y = \operatorname{sen} x$ *entre* 0 *y* π.

Solución. El área viene definida por la siguiente integral,



$$A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 =$$
$$= -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Figura 5.14:

Ejemplo 5.27. *Calcular* $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

Solución.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arc\,tg} x\Big]_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Integración de funciones definidas a trozos

Ejemplo 5.28. *Dada la función definida por* $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ *calcular* $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Solución. Descomponemos la integral con objeto de integrar por tramos, utilizando en cada tramo la función correspondiente.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

Ejemplo 5.29. *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$

Solución. Separamos los dos casos del valor absoluto.

$$f(x) = |1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad 1-x \geq 0 \\ -1+x & \text{si} \quad 1-x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

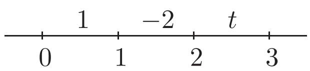
de donde,

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 = 1$$

Ejemplo 5.30. *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \\ -2 & si \quad x \in (1,2] \\ x & si \quad x \in (2,3] \end{cases}$

determinar $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

Solución. El valor de $F(x)$ dependerá del tramo en el que está situada la x

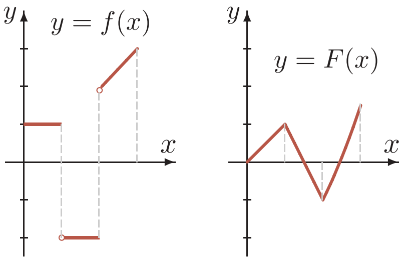


$$x \in [0,1] \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = \big[t\big]_0^x = x$$

$$x \in (1,2] \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^x -2\,dt = \big[t\big]_0^1 + \big[-2t\big]_1^x =$$
$$= 1 - 2x + 2 = -2x + 3$$

$$x \in (2,3] \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 -2\,dt + \int_2^x t\,dt =$$
$$= \big[t\big]_0^1 + \big[-2t\big]_1^2 + \big[\frac{t^2}{2}\big]_2^x = 1 - 4 + 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{2} = \frac{x^2}{2} - 3$$

de donde, la función F vendrá definida por:



$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ -2x+3 & \text{si } x \in (1,2] \\ \dfrac{x^2}{2} - 3 & \text{si } x \in (2,3] \end{cases}$$

Figura 5.15:

B. Cálculo de primitivas.

5.3. Integración inmediata.

Definición 5.1 (Primitiva). *Una función $F(x)$ se llama primitiva de otra función $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.*

Proposición 5.1. *Si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas, que se diferencian entre sí en una constante.*

Definición 5.2 (Integral indefinida). *Se llama integral indefinida de una función $f(x)$ al conjunto formado por todas sus primitivas, y se denota por:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Ejemplo 5.31. *Hallar* $\displaystyle\int \left(x^3 + 2x^2 + 1\right)\,dx$

Solución. Buscamos una primitiva del integrando, es decir una función tal que al derivarla nos de el integrando. En consecuencia,

$$\int \left(x^3 + 2x^2 + 1\right)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x + C$$

Nota. Como consecuencia del Teorema fundamental del Cálculo se puede afirmar que toda función continua tiene una primitiva. Pero eso no significa que esa primitiva se pueda expresar en términos elementales. Por ejemplo la integral $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ solamente se puede calcular desarrollando en series el *senx*, con lo cual obtenemos como resultado de la integral, un desarrollo en serie. Es decir, obtenemos el desarrollo en serie de la primitiva, pero no obtenemos la primitiva expresada en términos elementales.

5.3.1. Propiedades de la integral indefinida

1. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

2. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$
3. $\int df(x) = f(x) + C$
4. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
5. $\int r\,f(x)\,dx = r\int f(x)\,dx$ Un factor constante puede sacarse fuera del signo de integración.

5.3.2. Tabla de integrales inmediatas

$\int dx = x + C$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$
$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a} + C$	$\int \dfrac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \dfrac{dx}{\operatorname{senh}^2 x} = -\coth x + C$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{a} + C$	

Aunque no son inmediatas, también deben tenerse presente las siguientes integrales por aparecer con mucha frecuencia.

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C$$

Ejemplo 5.32. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

Solución. Realizando el cuadrado tenemos:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C$$

Ejemplo 5.33. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^3+x}dx$

Solución. Operando tenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^2}{x^3+x}dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)}dx = \int \frac{(x^2+1)+2x}{x(x^2+1)}dx = \\ = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx = \ln|x| + 2\operatorname{arc\,tg} x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.34. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \big(\operatorname{tg} x + \cot x\big)^2 dx$

Solución. Operando tenemos:

$$\begin{aligned}\int \big(\operatorname{tg} x + \cot x\big)^2 dx = \int \big(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x \cdot \cot x + \cot^2 x\big)dx = \\ = \int \big(\operatorname{tg}^2 x + 2 + \cot^2 x\big)dx = \int \big(\operatorname{tg}^2 x + 1 + 1 + \cot^2 x\big)dx = \\ = \int \big(\operatorname{tg}^2 x + 1\big)dx + \int \big(1 + \cot^2 x\big)dx = \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx = \\ = \operatorname{tg} x - \cot x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.35. *hallar* $\displaystyle\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Solución. En este caso tenemos que tener en cuenta la derivada de una función compuesta.

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int \big(x^2+1\big)^{1/2} 2x\,dx = \frac{\big(x^2+1\big)^{3/2}}{3/2} + C = \\ = \frac{2}{3}\big(x^2+1\big)\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

5.4. Integración mediante cambio de variable

El cambio de variable en una integral indefinida se puede efectuar de dos formas:

1. Cambiando la variable x por una función $x = g(t)$, donde $g(t)$ es una función monótona continuamente derivable de una nueva variable t.

$$\int f(x)\,dx = \begin{bmatrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{bmatrix} = \int f\big[g(t)\big]\,g'(t)\,dt$$

2. Cambiando parte del integrando por una nueva variable $g(x) = t$:

$$\int f\big[g(x)\big]\,g'(x)\,dx = \begin{bmatrix} g(x) = t \\ g'(x)dx = dt \end{bmatrix} = \int f(t)\,dt$$

En la práctica se combinan ambos métodos, ya que $x = g(t) \leftrightarrow t = g^{-1}(x)$. La función que se utilice tendrá que tener derivada continua para que se pueda realizar la nueva integral, e inversa para poder deshacer el cambio.

Ejemplo 5.36. *Hallar la integral* $\displaystyle\int x\left(x^2+3\right)^4\,dx$

Solución. Hacemos el cambio de variable buscando la derivada de una potencia:

$$\int x\left(x^2+3\right)^4\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2+3 \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} = \int u^4\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^4\,du = \\ = \frac{1}{2}\frac{u^5}{5} + C = \frac{\left(x^2+3\right)^5}{10} + C$$

Ejemplo 5.37. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{\cos 3t}{(1+\operatorname{sen} 3t)^5}\,dt$

Solución. Hacemos el cambio de variable buscando la derivada de una potencia:

$$\int \frac{\cos 3t\,dt}{(1+\operatorname{sen} 3t)^5} = \frac{1}{3}\int (1+\operatorname{sen} 3t)^{-5} 3\cos 3t\,dt = \begin{bmatrix} u = 1+\operatorname{sen} 3t \\ du = 3\cos 3t\,dt \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{3}\int u^{-5}\,du = \frac{1}{3}\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{12u} + C = \frac{-1}{12(1+\operatorname{sen} 3t)^4} + C$$

Ejemplo 5.38. *Hallar la integral* $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx$

Solución. Hacemos el cambio de variable buscando la derivada del sen:

$$\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{bmatrix} = \int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C = -\cos e^x + C$$

Ejemplo 5.39. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \ln\big(\cos x\big)\operatorname{tg} x\,dx$

Solución. Hacemos el cambio de variable llamando t a una parte del integrando, de manera que podamos identificar dt en el resto:

$$\int \ln\big(\cos x\big)\operatorname{tg} x\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln\cos x \\ dt = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\operatorname{tg} x\,dx \end{bmatrix} = -\int t\,dt = \\ = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{2}\Big(\ln(\cos x)\Big)^2 + C$$

Ejemplo 5.40. *Hallar la integral* $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Solución. Hacemos el cambio de variable llamando $t = \sqrt{x+1}$, sin embargo, para hallar dt no derivamos directamente, sino que previamente eliminamos la raíz cuadrada:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x+1} \to t^2 = x+1 \\ x = t^2 - 1 \to dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \left(t^2 - 1\right) t \cdot 2t\,dt =$$

$$= \int \left(2t^4 - 2t^2\right)\,dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5} - \frac{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3} + C$$

Ejemplo 5.41. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{e^{6x}dx}{e^{6x}+1}$

Solución. Teniendo en cuenta que el numerador es la derivada del denominador, salvo un factor constante, hacemos el cambio de variable buscando la derivada del ln:

$$\int \frac{e^{6x}dx}{e^{6x}+1} = \begin{bmatrix} e^{6x} + 1 = t \\ 6e^{6x}dx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{\ln|t|}{6} + C = \frac{\ln\left(e^{6x}+1\right)}{6} + C$$

Ejemplo 5.42. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{e^{3x}dx}{e^{6x}+1}$

Solución. En este caso hacemos el cambio de variable buscando la derivada del arc tg:

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{6x}+1} = \begin{bmatrix} e^{3x} = t \\ 3e^{3x}dx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} e^{3x} + C$$

Ejemplo 5.43. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

Solución. En este caso hacemos el cambio de variable buscando dejar el *seno* exclusivamente en función de la variable de integración:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{bmatrix} = 2\int \operatorname{sen} t dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C$$

Ejemplo 5.44. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

Solución. En este caso hacemos el cambio de variable buscando eliminar la raíz cuadrada, para lo cual hacemos $\sqrt{x+1} = t$, sin embargo, en vez de derivar esta expresión directamente, la elevamos al cuadrado previamente:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1} = t \to x+1 = t^2 \to x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{2t\,dt}{(t^2+1)t} = \int \frac{2\,dt}{(t^2+1)} = 2\operatorname{arc\,tg} t + C = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1} + C$$

Ejemplo 5.45. *Hallar la integral* $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

Solución. En este caso podemos elegir entre dos opciones; hacemos el cambio de variable buscando eliminar la raíz cuadrada, o bien, tenemos encuenta que lo expresión que hay fuera de la raíz es la derivada del radicando.
En el primer caso,

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x^3+1} = t \to x^3+1 = t^2 \\ 3x^2dx = 2tdt \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\int t\cdot t\,dt =$$
$$= \frac{2}{3}\int t^2dt = \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3+1}\right)^3 + C = \frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1} + C$$

y en el segundo,

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \begin{bmatrix} x^3+1 = t \\ 3x^2dx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{1/2}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{x^3+1}\right)^3 + C = \frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1} + C$$

El cambio de variable en la integral definida

Cuando se hace un cambio de variable en una integral definida hay que cambiar los límites de integración en función de la nueva variable. Si no queremos cambiar los límites de integración habrá que deshacer el cambio antes de la sustitución. En general,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \begin{bmatrix} x = g(t) \to dx = g'(t)\,dt \\ x_0 = g(t_0)\ ;\ x_1 = g(t_1) \end{bmatrix} = \int_{t_0}^{t_1} f\big[g(t)\big]g'(t)\,dt$$

Ejemplo 5.46. *Hallar* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

Solución. Para resolver esta integral hacemos la sustitución trigonométrica $x = \operatorname{sen} x$, con objeto de eliminar la raíz cuadrada generando un cuadrado en su interior.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = \operatorname{sen} t \to dx = \cos t\,dt \\ x = 0 \to 0 = \operatorname{sen} t \to t = 0 \\ x = 1 \to 1 = \operatorname{sen} t \to t = \pi/2 \end{bmatrix} =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

5.5. Integración por partes.

Integrando la diferencial del producto de dos funciones $d(u\,v) = v\,du + u\,dv$ resulta, $\int d(u\,v) = \int v\,du + \int u\,dv$, de donde, $u\,v = \int v\,du + \int u\,dv$. Esto nos permite expresar una de las dos integrales en función de la otra:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

La constante de integración sólo se añade al final del proceso.

Si la integral fuera definida, sería:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Ejemplo 5.47. *Hallar la integral* $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Solución.

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Ejemplo 5.48. *Hallar la integral* $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

Solución. En este ejemplo la elección de u y dv no resultan evidentes. Forzamos la situación para que el dv elegido sea fácil de integrar.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = x\sqrt{1+x^2}dx \end{array}\right\}$$

de donde,

$$\left\{\begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = \int x\sqrt{1+x^2}dx = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,2x\,dx}{2} = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{2\cdot 3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} \end{array}\right.$$

con lo que resulta,

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}dx = \frac{x^2(1+x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\int (1+x^2)^{3/2}2xdx =$$

$$= \frac{x^2(1+x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{5/2}}{5/2} = \frac{1}{3}x^2(1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1+x^2)^{5/2} + C$$

Ejemplo 5.49. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \ln x\,dx$

Solución. Elegimos $u = \ln x$ y como dv el propio dx.

$$\int \ln x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Ejemplo 5.50. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

Solución. Elegimos $u = \operatorname{arc\,tg} x$ y como dv el propio dx.

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x \\ dv = dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{array} \right] = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Ejemplo 5.51. *Hallar la integral* $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

Solución. Elegimos $u = x^2$ y $dv = e^x dx$.

$$\int x^2 e^x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = e^x \end{array} \right] = x^2 e^x - \int 2x e^x\, dx = x^2 e^x - I_1$$

Aparece una nueva integral I_1 que tambien calculamos por partes.

$$I_1 = \int 2x e^x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = e^x \end{array} \right] = 2x e^x - \int 2e^x\, dx = 2x e^x - 2e^x$$

de donde resulta,

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) + C = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

Ejemplo 5.52. *Hallar la integral* $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

Solución. Elegimos $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$.

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \operatorname{sen} x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx = -e^x \cos x + I_1$$

Aparece una nueva integral I_1 que también calculamos por partes.

$$I_1 = \int e^x \cos x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{array} \right] = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

Apareciendo, nuevamente, la integral que, en un principio, tratábamos da calcular. Sustituimos y operamos como si se tratara de una ecuación, agrupando las dos integrales,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

de donde resulta,

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

y despejando la integral y añadiendo la constante, resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + C$$

Ejemplo 5.53. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Solución. Elegimos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $dv = dx$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2} \\ dv = dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = \dfrac{-x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ v = x \end{array}\Bigg] =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Aparece una nueva integral I_1 que calculamos sumando y restando a^2 en el numerador.

$$I_1 = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

La primera integral es inmediata. Para calcular la segunda integral racionalizamos la expresión con lo cual resulta,

$$I_1 = a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Apareciendo, nuevamente, la integral que, en un principio, tratábamos da calcular. Sustituimos y operamos como si se tratara de una ecuación, agrupando las dos integrales,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

de donde resulta,

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$$

y despejando la integral y añadiendo la constante, resulta

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$$

5.6. Integración de funciones racionales

Se llaman funciones racionales a las que vienen definidas por el cociente de dos polinomios.

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\, dx$$

5.6.1. Integración de fracciones elementales

Se denominan *fracciones simples (o elementales)* a las fracciones racionales de los cuatro tipos siguientes:

$$\text{I.}\ \frac{1}{x-a} \qquad \text{II.}\ \frac{1}{(x-a)^n} \qquad \text{III.}\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \qquad \text{IV.}\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

siendo x^2+px+q irreducible.
Las siguientes integrales racionales son inmediatas:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Integrales del tipo:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \ \text{ siendo } x^2+px+q \neq 0$$

En el trinomio cuadrado del denominador se separa el cuadrado perfecto del binomio.

Ejemplo 5.54. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+13}\, dx$

Solución. Expresamos el denominador como el cuadrado de un binomio,

$$x^2+4x+13 = (x+2)^2 - 4 + 13 = (x+2)^2 + 9$$

de donde,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{9}\int \frac{1/3\, dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{3} + C$$

Ejemplo 5.55. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2-4x+10}\,dx$

Solución. Expresamos el denominador como el cuadrado de un binomio, sacando previamente 2 factor común,

$$2x^2-4x+10 = 2[x^2-2x+5] = 2[(x-1)^2-1+5] = 2[(x-1)^2+4]$$

de donde,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2-4x+10} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+1} = \\ &= \frac{2}{8}\int \frac{1/2\,dx}{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.56. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2-4x+8}\,dx$

Solución. Esta integral es del tipo $\ln + \operatorname{arc\,tg}$. Para ello buscamos en el numerador la derivada del denominador $2x-4$ y luego separamos en dos integrales; la primera es un $\ln$ y en la segunda buscamos el $\operatorname{arc\,tg}$, expresando el denominador como el cuadrado de un binomio,

$$\begin{aligned}&\int \frac{(3x+2)\,dx}{x^2-4x+8} = 3\int \frac{(x+2/3)\,dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4/3}{x^2-4x+8}\,dx = \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4+4+4/3}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{16/3\,dx}{(x-2)^2+4} = \\ &= \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8| + 4\int \frac{1/2\,dx}{\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2+1} = \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 4\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{2} + C\end{aligned}$$

5.6.2. Integración de funciones racionales con ayuda del desarrollo en fracciones simples.

Al integrar una función racional se deben seguir los siguientes pasos:

1. División de los polinomios.- Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, la primera operación es efectuar la división.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

De donde, aplicando la prueba de la división, resulta:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \to \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales; la primera es inmediata por ser la integral de un polinomio, y la segunda es más fácil que la inicial ya que el grado de $R(x)$ es inferior que el de $Q(x)$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

2. Factorización del denominador. Pueden darse los siguientes casos:

   a) El denominador tiene sólo raíces reales simples.

   b) El denominador tiene sólo raíces reales, aunque alguna de ellas es múltiple.

   c) Entre las raíces del denominador las hay complejas simples, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible.

   d) Entre las raíces del denominador las hay complejas múltiple, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible que se repite.

3. Descomponer la fracción en fracciones simples.

La determinación de los coeficientes se puede hacer por dos métodos:

1. Identificando los coeficientes de los términos del mismo grado de x.

2. Dando valores arbitrarios a x.

NOTA: En todo momento debemos comprobar si la fracción que vamos a integrar es o no una fracción elemental, o la derivada de un ln.

Ejemplo 5.57. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x - 12}{x^2 - 4}\, dx$

Solución. Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +3x^2 & -6x & -12 & x^2-4 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & & +8x & & 2x+3 \\ \cline{1-3}
& 3x^2 & +2x & -12 & \\
& -3x^2 & & +12 & \\ \cline{2-4}
& & 2x & &
\end{array}
\quad \to \quad \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x - 12}{x^2 - 4} = 2x + 3 + \frac{3x}{x^2 - 4}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser la derivada de un logaritmo.

$$\int \frac{2x^3+3x^2-6x-12}{x^2-4}\,dx = \int (2x+3)\,dx + \int \frac{2x}{x^2-4}\,dx = x^2+3x+\ln|x^2-4|+C$$

Ejemplo 5.58. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{2x^3-5x^2-4x+13}{x^2-4x+4}\,dx$

Solución. Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{rl}
2x^3-5x^2-4x+13 & \underline{|\,x^2-4x+4} \\
\underline{-2x^3+8x^2-8x} & 2x+3 \\
3x^2-12x+13 & \\
\underline{-3x^2+12x-12} & \\
1 &
\end{array}$$

Por consiguiente, aplicando la prueba de la división, resulta:

$$\frac{2x^3-5x^2-4x+13}{x^2-4x+4} = 2x+3+\frac{1}{x^2-4x+4}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser elemental.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3-5x^2-4x+13}{x^2-4x+4}\,dx &= \int (2x+3)\,dx + \int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx = \\
&= x^2+3x+\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = x^2+3x-\frac{1}{x-2}+C
\end{aligned}$$

(a) El denominador tiene sólo raíces reales simples.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

Ejemplo 5.59. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx$

Solución. Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{rl}
x^2+3x-4 & \underline{|\,x^2-2x-8} \\
\underline{-x^2+2x+8} & 1 \\
5x+4 &
\end{array}
\quad \to \quad \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} = 1+\frac{5x+4}{x^2-2x-8}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, la primera es inmediata, por ser polinómica, pero la segunda no.

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,dx = x + I_1$$

Para calcular la segunda integral factorizamos el denominador y descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$x^2-2x-8=0 \to x = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{2\pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

de donde resulta,

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8} = \frac{5x+4}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x,

$$\begin{array}{l} x=4 \quad \to 24=6A \quad \to A=4 \\ x=-2 \to -6=-6B \to B=1 \end{array}$$

Con lo cual resulta,

$$I_1 = \int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}\,dx = \int \frac{4}{x-4}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx = 4\ln|x-4| + \ln|x+2|$$

de donde,

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = x + 4\ln|x-4| + \ln|x+2| + C$$

(b) El denominador tiene sólo raíces reales, aunque alguna de ellas es múltiple.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^3} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{D}{(x-x_2)^3}$$

Ejemplo 5.60. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

Solución. Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{r|l} x^4-x^3-x-1 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2} -x^4+x^3 \qquad & x \\ \cline{1-1} -x-1 & \end{array} \qquad \to \qquad \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x + \frac{-x-1}{x^3-x^2}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, la primera inmediata, por ser polinómica, y la segunda no.

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + I_1$$

Para calcular la segunda integral factorizamos el denominador y descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

de donde resulta,

$$\frac{-x-1}{x^3-x^2} = \frac{-x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x,

$$\begin{array}{l} x=0 \to -1=-B \to B=1 \\ x=1 \to -2=C \quad \to C=-2 \\ x=2 \to -3=2A+B+4C \to -3=2A+1-8 \to 2A=4 \to A=2 \end{array}$$

Con lo cual resulta,

$$I_1 = \int \frac{-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{-2}{x-1}\,dx = 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1|$$

de donde,

$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C$$

(c) Entre las raíces del denominador las hay complejas simples, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

Ejemplo 5.61. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx$

Solución. Factorizamos el denominador y descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 7 & -5 \\ 1 & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^3-3x^2+7x-5 = (x-1)(x^2-2x+5) \\ x^2-2x+5=0 \to x = \dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} \text{ Sin solución.} \end{array}$$

De donde resulta,

$$\frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5} = \frac{8x^2+6x+6}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+5} = $$
$$= \frac{A(x^2-2x+5)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x,

$x=1 \to 20=4A \to A=5$
$x=0 \to 6=5A-N \ \to \ N=5A-6=25-6=19$
$x=2 \to 50=5A+2M+N \to 50=25+2M+19 \to 2M=6 \to M=3$

Con lo cual resulta,

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = \int \frac{5}{x-1}\,dx + \int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,dx = 5\ln|x-1| + I_1$$

Para calcular la integral I_1 siempre seguimos el siguiente procedimiento: En primer lugar expresamos la parte literal del denominador como el cuadrado de un binomio y al binomio le llamamos t,

$$x^2-2x+5=(x-1)^2-1+5=(x-1)^2+4$$

Con lo cual resulta la siguiente integral,

$$I_1 = \int \frac{3x+19}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{3x+19}{(x-1)^2+4}\,dx = \begin{bmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{bmatrix} = \int \frac{3t+22}{t^2+4}\,dt =$$

Para resolver esta integral separamos la parte literal de la parte numérica; con la parte literal buscamos un ln y con la numérica un arc tg

$$= \int \frac{3t}{t^2+4}\,dt + \int \frac{22}{t^2+4}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt + \frac{22}{4}\int \frac{1}{t^2/4+1}\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|t^2+4| + \frac{22}{4}\cdot 2\int \frac{1/2}{(t/2)^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\ln|t^2+4| + 11\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + 11\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}$$

con lo cual, resulta

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = 5\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + 11\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2} + C$$

(d) Entre las raíces del denominador las hay complejas múltiple, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible que se repite.

Estas integrales se resuelven buscado una fórmula recurrente, o mediante el método de Hermite.

Método de Hermite. Consiste en tratar todas las raíces como si fueran simples y añadir un término complementario que es la derivada respecto de x de un cociente en el que el denominador se obtiene multiplicando los factores de raíces multiples elevados a su exponente disminuido en una unidad y el numerador es un polinomio de grado una unidad menos que el denominador resultante.

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^2(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)^2}\,dx$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} + \frac{Px+Q}{dx^2+ex+f} + \\ + \frac{d}{dx}\left[\frac{Rx^2+Sx+T}{(x-x_2)(dx^2+ex+f)}\right]$$

de donde,

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{A}{x-x_1}dx + \int \frac{B}{x-x_2}dx + \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx + \\ + \int \frac{Px+Q}{dx^2+ex+f}dx + \frac{Rx^2+Sx+T}{(x-x_2)(dx^2+ex+f)}$$

Nota. Debemos observar lo siguiente:

1. Como el término complementario es una derivada no necesitamos integrarlo.

2. Las raíces simples no aparecen en el denominador del término complementario.

Esquemáticamente el método de Hermite se puede recordar de la siguiente forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum \left[\begin{array}{c}\text{todas las raíces}\\ \text{como simples}\end{array}\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{\begin{array}{l}\text{polinomio de grado}\\ \text{el que resulte en el denominador -1}\end{array}}{\begin{array}{l}\text{producto de factores múltiples,}\\ \text{eleados a su exponente -1}\end{array}}\right]$$

Ejemplo 5.62. *Calcular,* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Solución. Dado que $x^2+1=0$ no tiene raíces, se trata de una raíz compleja de multiplicidad 2. Con lo cual, aplicamos el método de Hermite y resulta:

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{Mx+N}{1+x^2} + \frac{d}{dx}\left[\frac{Ax+B}{1+x^2}\right]$$

Derivamos el cociente y sumamos las fracciones,

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{Mx+N}{1+x^2} + \frac{A(1+x^2)-2x(Ax+B)}{(1+x^2)^2} = \\ = \frac{(Mx+N)(1+x^2)+A(1+x^2)-2x(Ax+B)}{(1+x^2)^2}$$

calculamos los coeficientes dando valores a x

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 & \to 1 = N + A \\ x=1 & \to 1 = (M+N)2 + 2A - 2(A+B) \\ x=-1 & \to 1 = (-M+N)2 + 2A + 2(-A+B) \\ x=2 & \to 1 = (2M+N)5 + 5A - 4(2A+B) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} N + A = 1 \\ 2M + 2N + 2A - 2A - 2B = 1 \\ -2M + 2N + 2A - 2A + 2B = 1 \\ 10M + 5N + 5A - 8A - 4B = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} N + A = 1 \\ 2M + 2N - 2B = 1 \\ -2M + 2N + 2B = 1 \\ 10M + 5N - 3A - 4B = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \\ \\ 3^{\text{a}} + 2^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} - 2 \cdot 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A = 1 - N \\ 2M + 2N - 2B = 1 \\ 4N = 2 \to N = 1/2 \\ 6M + N - 3A = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A = 1/2 \\ 2M - 2B = 0 \\ N = 1/2 \\ 6M - 3A = -3/2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = M \\ N = 1/2 \\ 6M = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 0 \\ N = 1/2 \\ M = 0 \end{array}\right\}$$

luego,

$$\int \frac{dx}{(1+x)^2} = \int \frac{1/2\,dx}{1+x^2} + \int \frac{d}{dx}\left[\frac{1/2\,x}{1+x^2}\right] dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

5.7. Integración de expresiones trigonométricas

5.7.1. Integración de potencias de funciones trigonométricas

Consideremos integrales del tipo:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

existen dos casos para los que se puede resolver la integral,

1. Si alguno de los exponentes es un número impar y positivo, se separa uno para el diferencial y el resto se transforma en el contrario, mediante la formula fundamental de la trigonometría $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y al contrario se le llama t. El segundo coeficiente puede ser cualquier número real.

   Por ejemplo, si $m = 2k+1$, entonces,

   $$\operatorname{sen}^{2k+1} x = \operatorname{sen}^{2k} x \cdot \operatorname{sen} x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x = (\sqrt{1 - \cos^2 x})^k \operatorname{sen} x$$

2. Si los dos exponentes son pares positivos, se van rebajando los grados con las siguientes fórmulas trigonométricas.

   $$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Ejemplo 5.63. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\ \operatorname{sen} x\, dx = \\
&= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\ \operatorname{sen} x\, dx = \int (\cos^2 x - \cos^4 x)\ \operatorname{sen} x\, dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x\, dx = dt \end{array} \right] = -\int (t^2 - t^4)\, dt = \frac{-t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \\
&= \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.64. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{(\cos 2x)^{3/2}}\, dx$

Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{(\cos 2x)^{3/2}}\, dx &= \int \operatorname{sen}^3 2x\, (\cos 2x)^{-3/2}\, dx = \\
&= \int \operatorname{sen}^2 2x\, (\cos 2x)^{-3/2}\ \operatorname{sen} 2x\, dx = \\
&= \int (1-\cos^2 2x)(\cos 2x)^{-3/2}\ \operatorname{sen} 2x\, dx = \\
&= \int \Big((\cos 2x)^{-3/2} - (\cos 2x)^{1/2} \Big)\ \operatorname{sen} 2x\, dx = \\
&= \frac{-1}{2}\int \Big((\cos 2x)^{-3/2} - (\cos 2x)^{1/2} \Big)\,(-2\operatorname{sen} 2x)\, dx = \\
&= \left[\begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2\operatorname{sen} 2x\, dx = dt \end{array} \right] = \frac{-1}{2}\int (t^{-3/2} - t^{1/2})\, dt = \frac{-1}{2}\frac{t^{-1/2}}{-1/2} + \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \\
&= t^{-1/2} + \frac{t^{3/2}}{3} + C = (\cos 2x)^{-1/2} + \frac{1}{3}(\cos 2x)^{3/2} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.65. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

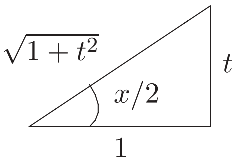
Solución. Tenemos,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int \big(\operatorname{sen}^2 x\big)^2 dx = \int \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4}\int \big(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\big)\, dx = \frac{1}{4}\int \Big(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\Big)\, dx = \\
&= \frac{1}{8}\int \big(2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x\big)\, dx = \frac{1}{8}\int \big(3 - 4\cos 2x + \cos 4x\big)\, dx = \\
&= \frac{1}{8}\Big(3x - \frac{4\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\Big) + C = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C
\end{aligned}$$

5.7.2. Integración de funciones racionales del sen y del cos

Consideremos las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde R es una función racional.
En general, esta integral siempre se puede transformar en una integral racional mediante el cambio $\operatorname{tg}(x/2) = t$.
Como resultado de esta sustitución tenemos:

$$\operatorname{tg}(x/2) = t \;\rightarrow\; x/2 = \operatorname{arc\,tg} t \;\rightarrow\; x = 2\operatorname{arc\,tg} t \;\rightarrow\; dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$



$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

El cambio general $\operatorname{tg}(x/2) = t$ siempre resuelve la integral, pero en muchos casos conduce a cálculos complicados. Existen tres casos particulares en los que la integral se puede resolver de una manera más fácil que con el cambio general.

1. Si la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es *impar* respecto a $\operatorname{sen} x$, o sea, si

   $$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

   entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\cos x = t$

2. Si la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es *impar* respecto a $\cos x$, o sea, si

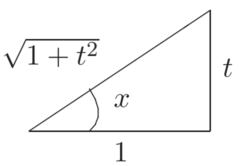
   $$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

   entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\operatorname{sen} x = t$

3. Si la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es *par* respecto a $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, o sea, si

   $$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x),$$

   entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\operatorname{tg} x = t$
   En este caso, como resultado de esta sustitución tenemos:



$$\operatorname{tg} x = t \;\rightarrow\; x = \operatorname{arc\,tg} t \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ejemplo 5.66. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx$

Solución. La función es impar respecto al $\operatorname{sen} x$, por tanto, hacemos el cambio $\cos x = t$, de donde resulta,

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \to \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2} \\ -\operatorname{sen} x\, dx = dt \to dx = \dfrac{-dt}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}\, dx = \int \frac{-dt}{1-t^2}\, dx = \int \frac{dt}{t^2-1}\, dx = I$$

Que es una función racional,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{A}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x

$$\begin{array}{l} x = 1 \to 1 = 2B \to B = 1/2 \\ x = -1 \to 1 = -2A \to A = -1/2 \end{array}$$

de donde,

$$I = \int \frac{-1/2}{t+1}\, dt + \int \frac{1/2}{t-1}\, dt = \frac{-1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$$

Ejemplo 5.67. *Hallar la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x - 2\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}$

Solución. Hacemos el cambio general $\operatorname{tg}(x/2) = t$, con lo cual resulta,

$$dx = \frac{2\, dt}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2\, t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

de donde,

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x - 2\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x} = \int \frac{1}{(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4\, t}{1+t^2})\frac{2\, t}{1+t^2}} \frac{2\, dt}{1+t^2} =$$
$$= \int \frac{dt}{\frac{2+2t^2+1-t^2-4t}{1+t^2} t} = \int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}\, dt = I$$

que es una integral racional, para resolverla la descomponemos en fracciones simples.

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \to t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1} = \frac{A(t-3)(t-1)+Bt(t-1)+Ct(t-3)}{t(t-3)(t-1)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x

$$\begin{array}{l} t=0 \to 1 = 3A \to A = 1/3 \\ t=1 \to 2 = -2C \to C = -1 \\ t=3 \to 10 = 6B \to B = 10/6 = 5/3 \end{array}$$

de donde,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1/3}{t}\,dt + \int \frac{5/3}{t-3}\,dt + \int \frac{-1}{t-1}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{5}{3}\ln|t-3| - \ln|t-1| = \\ &= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right| + C \end{aligned}$$

5.8. Integración de funciones irracionales

5.8.1. Radicales semejantes

Las integrales del tipo

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right) dx$$

se convierten en racionales con el cambio de variable,

$$\sqrt[\alpha]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \quad \to \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^\alpha \ \text{ donde } \ \alpha = \operatorname{mcm}\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$$

Ejemplo 5.68. *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}+1}\,dx$

Solución. Expresamos las raíces con índice común.

$$\int \frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}+1}\,dx = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\,dx = \int \frac{\sqrt[6]{(2x-3)^3}}{\sqrt[6]{(2x-3)^2}+1}\,dx = I$$

y hacemos el siguiente cambio:

$$\sqrt[6]{2x-3} = t \ \to \ 2x-3 = t^6 \ \to \ 2\,dx = 6t^5 dt \ \to \ dx = 3t^5 dt$$

de donde,

$$I = \int \frac{t^3}{t^2+1} 3t^5 dt = \int \frac{3t^8}{t^2+1}\,dt = I$$

que es una integral racional, para resolverla efectuamos la división de los polinomios.

$$
\begin{array}{r|l}
3t^8 & t^2+1 \\ \cline{2-2}
-3t^8-3t^6 & 3t^6-3t^4+3t^2-3 \\ \cline{1-1}
-3t^6 & \\
3t^6+3t^4 & \\ \cline{1-1}
3t^4 & \\
-3t^4-3t^2 & \\ \cline{1-1}
-3t^2 & \\
3t^2+3 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

Por consiguiente:

$$\frac{3t^8}{t^2+1} = 3t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 3 + \frac{3}{t^2+1}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser elemental.

$$I = \int (3t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 3)\,dx + \int \frac{3}{t^2+1}\,dx = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^3}{3} - 3t + 3\operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= 3\Big[\frac{1}{7}(2x-3)^{7/6} - \frac{1}{5}(2x-3)^{5/6} + \frac{1}{3}(2x-3)^{3/6} - (2x-3)^{1/6} + \operatorname{arc\,tg}(2x-3)^{1/6}\Big] + C$$

5.8.2. La sustitución trigonométrica

Las integrales de la forma:

$$\int R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big)\,dx, \qquad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0$$

se suelen resolver mediante la sustitución trigonométrica o bien la sustitución hiperbólica. Para ello, formamos previamente el cuadrado perfecto en el trinomio $ax^2 + bx + c$, y realizando la correspondiente sustitución lineal, la integral se reduce a uno de los siguientes tipos:

$$\int R\big(t, \sqrt{p^2-t^2}\big)\,dx, \quad \int R\big(t, \sqrt{t^2-p^2}\big)\,dx, \quad \int R\big(t, \sqrt{t^2+p^2}\big)\,dx$$

A la primera integral se le aplica cualquiera de las sustituciones:

$$t = p \operatorname{sen} u, \quad t = p\cos u, \quad t = p \operatorname{tgh} u$$

a la segunda, las sustituciones:

$$t = p\sec u, \quad t = p\cosh u$$

y a la tercera, las sustituciones:

$$t = p \operatorname{tg} u, \quad t = p \operatorname{senh} u$$

En general, para elegir el tipo de sustitución que se va a aplicar, se tiene en cuenta que de lo que se trata es de eliminar la raíz cuadrada, buscando un cuadrado en su interior, para ello se elige la fórmula fundamental de la trigonometría o de la trigonometría hiperbólica que convenga.

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \quad \to \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cosh^2\alpha - \operatorname{senh}^2\alpha = 1 \quad \to \cosh^2\alpha = 1 + \operatorname{senh}^2\alpha$$

En todos estos casos, el cuadrado se elimina con la raíz, ya que el radicando resulta positivo.

Ejemplo 5.69. *Calcular la integral* $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Solución. Aplicamos la sustitución $x = \operatorname{sen} t$ y transformamos la integral en una integral trigonométrica.

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t dt \end{bmatrix} = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cos t dt =$$
$$= \int \cos t \cos t\, dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C =$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

de donde, al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\operatorname{sen} t = x \quad \to \quad t = \operatorname{arc\,sen} x, \quad \cos t = \sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo 5.70. *Calcular la integral* $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

Solución. Aplicamos la sustitución $x = \cosh t$ y transformamos la integral en una integral hiperbólica.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \begin{bmatrix} x = \cosh t \\ dx = \operatorname{senh} t\,dt \end{bmatrix} = \int \sqrt{\cosh^2 t - 1}\ \operatorname{senh} t\,dt =$$
$$= \int \operatorname{senh} t\ \operatorname{senh} t\,dt = \int \operatorname{senh}^2 t\,dt = \int \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = \frac{\operatorname{senh} 2t}{4} - \frac{t}{2} + C =$$
$$= \frac{2\operatorname{senh} t\cosh t}{4} - \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right] + C$$

de donde, se han tenido en cuenta las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{senh}^2 t = \frac{\cosh 2t - 1}{2}, \quad \operatorname{senh} 2t = 2\operatorname{senh} t\ \cosh t$$

y al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\cosh t = x \quad \to \quad t = \operatorname{arg\,cosh} x = \ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right], \quad \operatorname{senh} t = \sqrt{x^2-1}$$

Ejemplo 5.71. *Calcular la integral* $\displaystyle\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$

Solución. Formamos previamente el binomio cuadrado en el radicando.

$$4x - x^2 = -\big[x^2 - 4x\big] = -\big[(x-2)^2 - 4\big] = 4 - (x-2)^2$$

de donde, aplicando la sustitución $x - 2 = 2\operatorname{sen} t$, transformamos la integral en una integral trigonométrica, en efecto,

$$\int \sqrt{4x - x^2}\,dx = \int \sqrt{4 - (x-2)^2}\,dx = \begin{bmatrix} x - 2 = 2\operatorname{sen} t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{bmatrix} =$$
$$= \int \sqrt{4 - 4\operatorname{sen}^2 t}\;2\cos t\,dt = 4\int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}\;\cos t\,dt =$$
$$= 4\int \cos t\;\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\big[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\big] + C =$$
$$= 2t + 2\operatorname{sen} t\;\cos t + C = 2\operatorname{arc\,sen}\frac{x-2}{2} + 2\frac{x-2}{2}\frac{1}{2}\sqrt{4x - x^2} + C =$$
$$= 2\operatorname{arc\,sen}\frac{x-2}{2} + \frac{x-2}{2}\sqrt{4x - x^2} + C$$

de donde, se han tenido en cuenta las siguientes fórmulas:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}, \qquad \operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\;\cos t$$

y al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\operatorname{sen} t = \frac{x-2}{2} \;\to\; t = \operatorname{arc\,sen}\frac{x-2}{2}, \;\cos t = \sqrt{1 - \big(\frac{x-2}{2}\big)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4x - x^2}$$

Ejemplo 5.72. *Calcular la integral* $\displaystyle\int \sqrt{4 + x^2}\,dx$

Solución. Aplicamos la sustitución $x = 2\operatorname{senh} t$ y transformamos la integral en una integral hiperbólica.

$$\int \sqrt{4 + x^2}\,dx = 2\int \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \begin{bmatrix} x/2 = \operatorname{senh} t \\ dx = 2\cosh t\,dt \end{bmatrix} =$$
$$= 2\int \cosh t \cdot 2\cosh t\,dt = 4\int \cosh^2 t\,dt = 4\int \frac{1+\cosh 2t}{2}\,dt =$$
$$= 4\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{senh} 2t}{4}\right) + C = 2t + \operatorname{senh} 2t + C =$$
$$= 2\operatorname{arg\,senh}\frac{x}{2} + 2\operatorname{senh} t\cosh t + C =$$
$$= 2\ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\right) + 2\frac{x}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} + C =$$
$$= 2\ln\frac{x + \sqrt{4 + x^2}}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 + x^2} + C =$$
$$= 2\ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4 + x^2} + C$$

5.9. Problemas propuestos del Capítulo 5

Ejercicios propuestos del Capítulo 5

Soluciones en la página **??**

5.1. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx$

Problemas resueltos del Capítulo 5

5.1.

Solución.

Problemas propuestos del Capítulo 5

Soluciones en la página 391

5.1.

Capítulo 6

Aplicaciones de la integral.

6.1. Cálculo del área de una figura plana.

En general, para calcular el área de una región plana:

1. La dividimos en franjas, infinitamente estrechas, de manera horizontal o vertical,

2. Suponemos que las franjas son rectángulos, con lo cual su área se obtendrá como el producto de la base por la altura (la base será el diferencial correspondiente dx o dy), es decir,

$$da = h\,dx, \text{ o bien, } da = h\,dy.$$

3. Calculamos el área total como la *suma* de las áreas de los infinitos rectángulos:

$$A = \int_a^b da$$

Los límites de integración se determinan estudiando el recorrido del diferencial correspondiente.

Si las curvas se cortan dentro del intervalo de integración, entonces habrá que descomponer la integral en dichos puntos y calcular las áreas por separado.

En particular,

Proposición 6.1 (Área bajo una curva). *El área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, siendo $f(x) \geq 0$, por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y por el segmento $[a, b]$ del eje Ox viene definido por la integral,*

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

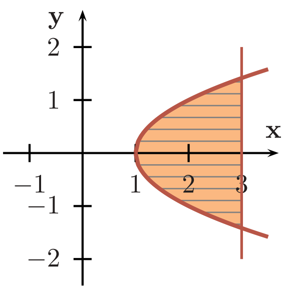
Proposición 6.2 (Área entre dos curvas). *El área de la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, siendo $f_1(x) \leq f_2(x)$, y por las rectas $x = a$ y $x = b$ viene definida por la integral,*

$$\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx$$

Ejemplo 6.1. *Hallar el área de la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$*

Solución. En primer lugar localizamos el recinto. Podemos utilizar la función tal como viene definida o bien trasladarla y girarla con objeto de hacer coincidir la recta $x = 3$ con uno de los ejes de coordenadas. En este ejemplo, utilizaremos la función tal como viene definida y dividiremos el recinto en franjas horizontales o verticales.

(a) Franjas horizontales:



Los puntos de corte de ambas curvas son:

$$x = 3 \to 3 = y^2 + 1 \to y = \pm\sqrt{2} \to (3, \pm\sqrt{2})$$

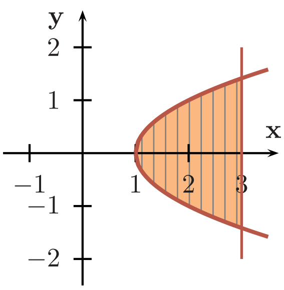
el diferencial de área viene definido por:

$$da = h\,dy = (3-x)dy = [3-(y^2+1)]dy = (2-y^2)dy$$

Con lo cual el área total será:

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} da = 2\int_0^{\sqrt{2}} (2-y^2)dy = 2\left[2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(b) Franjas verticales:



En este caso los límites de integración son:

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 3$$

el diferencial de área viene definido por:

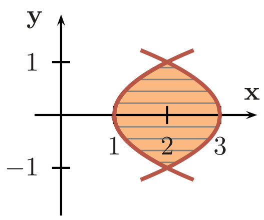
$$da = h\,dx = (2y)dx = 2\sqrt{x-1}\,dx = 2(x-1)^{1/2}dx$$

Con lo cual el área total será:

$$A = \int_1^3 da = 2\int_1^3 (x-1)^{1/2}dx = 2\left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^3 = 2\left(\frac{2}{3}2\sqrt{2} - 0\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Ejemplo 6.2. *Calcular el área de la región comprendida entre las parábolas $x = y^2 + 1$ y $x = 3 - y^2$.*

Solución. En primer lugar localizamos el recinto. Podemos utilizar las funciones tal y como vienen definidas o bien intercambiar la x por la y con objeto de que sean funciones respecto de x. En este ejemplo utilizaremos las funciones tal y como vienen definidas y dividiremos el recinto en franjas horizontales.



Los puntos de corte de ambas curvas los obtenemos por igualación:

$$y^2 + 1 = 3 - y^2 \to 2y^2 = 2 \to y = \pm 1$$

Es decir, $P(2,1)$ y $Q(2,-1)$
el diferencial de área viene definido por:

$$da = h\,dx = (x_d - x_i)dy = \big[(3-y^2)-(y^2+1)\big]dy = \\ = (2-2y^2)dy$$

Con lo cual el área total será:

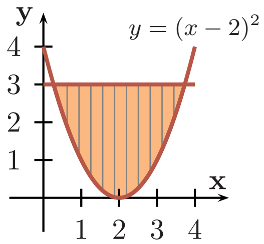
$$A = \int_{-1}^{1} da = 2\int_{0}^{1} da = 2\int_{0}^{1} (2-2y^2)dy = 4\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 4(1-\frac{1}{3}) = \frac{8}{3}$$

También podemos dividir la región en franjas verticales, pero en este caso el cálculo del área resulta un poco más complicado, ya que tenemos que descomponer la región en dos regiones. En efecto,

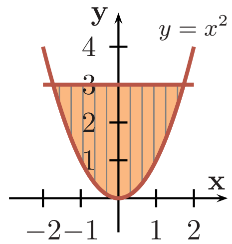
$$A = \int_1^2 da_1 + \int_2^3 da_2 = \int_1^2 2y_1dx + \int_2^3 2y_2dx =$$
$$= \int_1^2 2\sqrt{x-1}dx + \int_2^3 2\sqrt{3-x}dx = 2\left[\frac{2(x-1)^{3/2}}{3}\right]_1^2 + 2\left[\frac{-2(3-x)^{3/2}}{3}\right]_2^3 =$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Ejemplo 6.3. *Calcular el área de la región limitada por las gráficas de* $y = (x-2)^2$ *e* $y = 3$.

Solución. Para facilitar los cálculos podemos desplazar el recinto 2 unidades a la izquierda, con objeto de centrarlo en el eje de ordenadas, con lo cual la región estará limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2$, e $y = 3$.



$\Rightarrow$



Dividiendo el recinto en franjas verticales, tenemos:

$$da = h\,dx = (3 - y)\,dx = (3 - x^2)dx$$

y los límites de integración:

$$x^2 = 3 \;\to\; x = \pm\sqrt{3}$$

de donde,

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} da = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2)dx = 2\left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

También podemos dividir el recinto en franjas horizontales, y tenemos:

$$da = h\,dy = (2x)dy = (2\sqrt{y})\,dy = 2y^{1/2}dy$$

de donde,

$$A = \int_0^3 da = 2\int_0^3 y^{1/2}dy = 2\left[\frac{2y^{3/2}}{3}\right]_0^3 = 4\sqrt{3}$$

6.2. Cálculo del volumen de un cuerpo

6.2.1. Volumen de un cuerpo cualquiera: Método de secciones

En general, para calcular el volumen de un cuerpo:

1. Lo dividimos en secciones, rebanadas o lonchas, infinitamente estrechas, mediante cortes con planos perpendiculares a una dirección determinada (normalmente uno de los ejes de coordenadas o una recta paralela a uno de ellos),

2. Suponemos que las secciones son cilíndricas, con lo cual su volumen se obtendrá como el producto del área de la base por la altura (la altura será el diferencial correspondiente dx o dy), es decir, $dv = S(x)\,dx$, o bien $dv = S(y)\,dy$.

3. Calculamos el volumen total como la suma de los volúmenes de las infinitas secciones:
$$V = \int_a^b dv$$
Los límites de integración se determinan estudiando el recorrido del diferencial correspondiente.

En particular,

Proposición 6.3 (Método de las secciones). *Si el área de la sección de un cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox puede expresarse en función de x, es decir, $S = S(x)$, siendo $a \leq x \leq b$, entonces el volumen de la parte del cuerpo comprendida entre los planos $x = a$ y $x = b$, perpendiculares al eje Ox, viene definido por la fórmula:*

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

6.2.2. Volumen de un sólido de revolución: Método de discos

Al cortar un sólido mediante planos perpendiculares al eje de giro las secciones que se obtienen son discos, con lo cual su volumen viene determinado por $dv = \pi r^2 dx$, o bien, $dv = \pi r^2 dy$, si el eje de giro es frontera a la región que gira; y por $dv = \pi(r_2^2 - r_1^2)\,dx$, o bien, $dv = \pi(r_2^2 - r_1^2)\,dy$, si el eje de giro es exterior a la región que gira.

En consecuencia,

Proposición 6.4 (Giro de trapecio curvilíneo). *Si un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las verticales por los puntos $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje Ox, entonces el volumen del cuerpo de revolución que se engendra viene definido por la fórmula:*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Proposición 6.5 (Giro de región entre dos curvas). *Si la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$, e $y = f_2(x)$, siendo $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, y las verticales por los puntos $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje Ox, entonces el volumen del cuerpo de revolución que se engendra viene definido por la fórmula:*

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

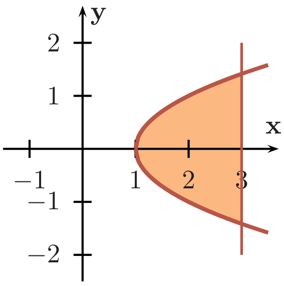
6.2.3. Volumen de un sólido de revolución: Método de los cilindros

Si dividimos un sólido de revolución mediante cilindros concéntricos con el eje de giro, cada cilindro con un espesor infinitesimal. El volumen de cada uno de estos cilindros vendrá determinado por: $dv = 2\pi rh\,dx$, o bien $dv = 2\pi rh\,dy$.

La región generatriz deberá estar a un solo lado del eje de giro, en caso contrario habrá que descomponer la integral y hacer los volúmenes por separado. También habrá que descomponer la integral si la región viene determinada por dos curvas que se cortan dentro del intervalo de integración. Este método también se llama de «capas».

Ejemplo 6.4. *Hallar por el método de discos y por el de capas el volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre la parábola* $x = y^2 + 1$ *y la recta* $x = 3$ *alrededor de la recta* $x = 3$.

Solución. En primer lugar localizamos el recinto.



Podemos utilizar la región tal como viene dada o bien trasladarla y girarla con objeto de que el giro de la región de haga sobre uno de los ejes de coordenadas. Así, pueden utilizarse, por ejemplo, las funciones $y = -x^2 + 2$, o bien, $y = x^2 - 2$, y girarlas sobre el eje Ox. En este ejemplo utilizaremos la función tal como viene definida.

1. Método de discos: Hallamos el volumen de un disco elemental dV,

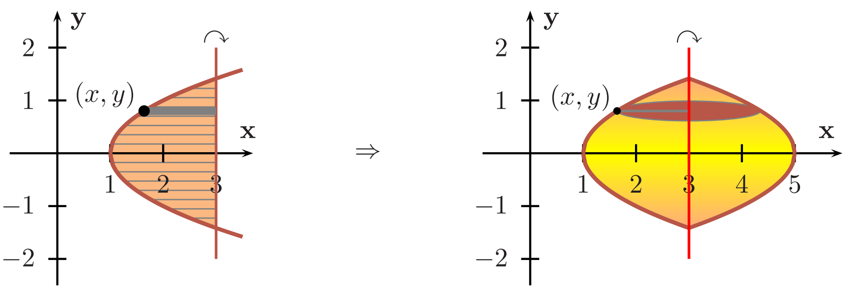


Figura 6.1: Método de discos

$$dV = \pi r^2\, dy = \pi(3-x)^2 dy = \pi(3-y^2-1)^2 dy = \pi(2-y^2)^2 dy$$

Hallamos los límites de integración para la variable y:

$$x = 3 \quad \to \quad 3 = y^2 + 1 \quad \to \quad y = \pm\sqrt{2}$$

con lo cual, el volumen total, al ser simétrico, será:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dV = 2\int_0^{\sqrt{2}} dV = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2-y^2\right)^2 dy = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(4 - 4y^2 + y^4\right) dy = 2\pi \left[4y - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= 2\pi \left(4\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5}\right) = 2\pi \frac{60\sqrt{2} - 40\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{15} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

2. Método de las capas.

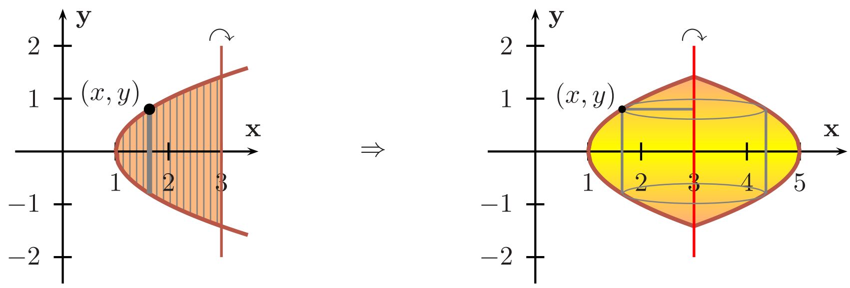


Figura 6.2: Método de capas

Hallamos el volumen de un cilindro elemental dV,

$$dV = 2\pi r h\, dx = 2\pi(3-x)(2y)dx = 4\pi(3-x)\sqrt{x-1}\, dx$$

con lo cual el volumen total será.

$$V = \int_1^3 dV = 4\pi \int_1^3 (3-x)\sqrt{x-1}\, dx =$$

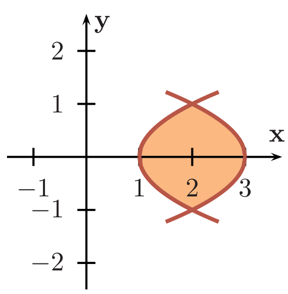
$$= \begin{bmatrix} x-1 = t^2 \to x = t^2+1 \to dx = 2t\, dt \\ x_0 = 1 \to t_0 = 0;\ x_1 = 3 \to t_1 = \sqrt{2} \end{bmatrix} = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} (3-t^2-1)t2t\, dt =$$

$$= 8\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-t^2)t^2 dt = 8\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2t^2-t^4)dt = 8\pi \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 8\pi\left(\frac{2\sqrt{2^3}}{3} - \frac{\sqrt{2^5}}{5}\right) = 8\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5}\right) = 8\pi\frac{20\sqrt{2}-12\sqrt{2}}{15} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$

Ejemplo 6.5. *Calcular el volumen generado al girar la región comprendida entre las parábolas* $x = y^2+1$ *y* $x = 3-y^2$*, alrededor del eje* OY*, aplicando el método de discos y el de capas.*

Solución. En primer lugar localizamos el recinto.



Podemos utilizar la región tal como viene dada o bien intercambiar la x por la y con objeto de que sean funciones respecto de x. En este ejemplo utilizaremos la función tal como viene definida.
Los puntos de corte de ambas curvas los obtenemos por igualación:

$$y^2+1 = 3-y^2 \;\to\; 2y^2 = 2 \;\to\; y = \pm 1$$

Es decir, $P(2,1)$ y $Q(2,-1)$

1. Método de discos:

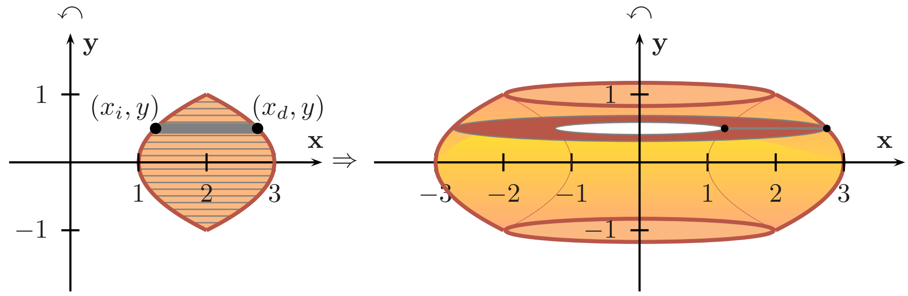


Figura 6.3: Método de discos

Hallamos el volumen de un disco elemental dV,

$$dV = \pi r_2^2 dy - \pi r_1^2 dy = \pi(x_d^2 - x_i^2)dy = \pi\Big[(3-y^2)^2 - (y^2+1)^2\Big]dy = \pi(8-8y^2)dy$$

Los límites de integración para la variable y son $y = \pm 1$. Con lo cual, el volumen, al ser simétrico, será:

$$V = \int_{-1}^{1} dV = 2\int_0^1 dV = 2\pi \int_0^1 (8-8y^2)dy =$$
$$= 2\pi \left[8y - \frac{8}{3}y^3\right]_0^1 = 2\pi\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$$

2. Método de las capas (cilindros).

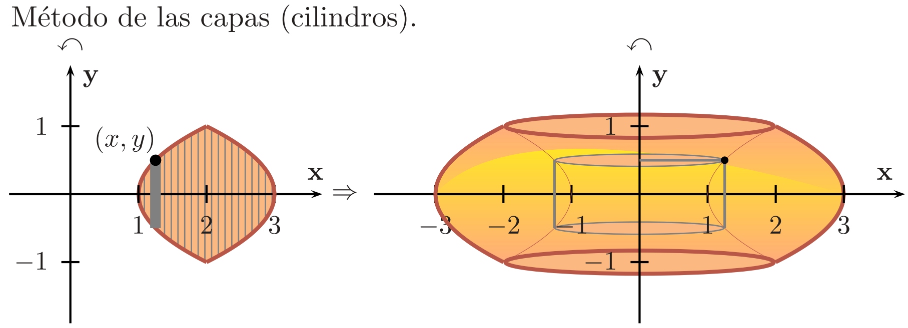


Figura 6.4: Método de cilindros

Hallamos el volumen de un cilindro elemental dV,

$$dV = 2\pi r h\, dx = 2\pi x(2y)dx = 4\pi xy\, dx$$

Ahora bien, el valor de y cambia a partir de $x = 2$, por tanto tendremos que descomponer la integral en este punto. Los límites de integración para la variable x son $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Con lo cual el volumen total será:

$$V = \int_1^2 dV_1 + \int_2^3 dV_2 = 4\pi \int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx + 4\pi \int_2^3 x\sqrt{3-x}\, dx$$

Ambas integrales se resuelven por cambio de variable,

$$I_1 = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x-1=t^2 \\ x = t^2+1 \to dx = 2t\,dt \end{array} \right\} = \int_0^1 (t^2+1)t2t\,dt =$$

$$= \int_0^1 (2t^4+2t^2)dt = \left[\frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$$

$$I_2 = \int_2^3 x\sqrt{3-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} 3-x=t^2 \to x = 3-t^2 \\ dx = -2t\,dt \end{array} \right] = \int_1^0 (3-t^2)t(-2t)\,dt =$$

$$= \int_1^0 (-6t^2+2t^4)dt = \left[\frac{-6t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right]_1^0 = -\left(\frac{-6}{3} + \frac{2}{5}\right) = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

Con lo cual, el volumen es,

$$V = 4\pi(I_1+I_2) = 4\pi\left(\frac{16}{15} + \frac{8}{5}\right) = 4\pi\frac{40}{15} = \frac{160\pi}{15} = \frac{32\pi}{3}$$

Ejemplo 6.6. *Dada la región limitada por las gráficas de $y=\sqrt{x}$, $y=0$ y $x=4$, obtener, aplicando el método de discos y el de capas, el volumen del sólido formado haciendo girar dicha región en torno al eje OX y al eje OY.*

Solución. 1. Giro en torno al eje OX
(a) Método de los discos:

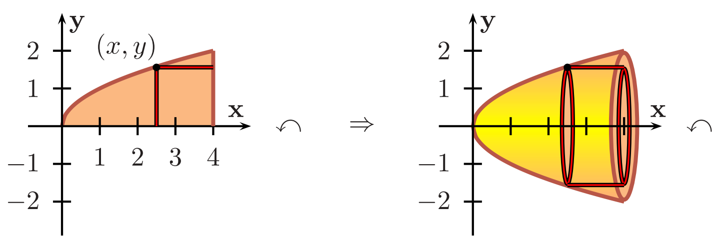


Figura 6.5: Método de discos y cilindros

Por el método de discos, el diferencial de volumen es:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi y^2 dx = \pi x\,dx$$

de donde, el volumen total será:

$$V = \int_0^4 dV = \int_0^4 \pi x\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

(b) Método de cilindros. El diferencial de volumen es,

$$dV = 2\pi rh\,dy = 2\pi y(4-x)\,dy = 2\pi y(4-y^2)\,dy = 2\pi(4y-y^3)\,dy$$

de donde, el volumen total es,

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 2\pi(4y - y^3)\,dx = 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi(8-4) = 8\pi$$

2. Giro en torno al eje OY.

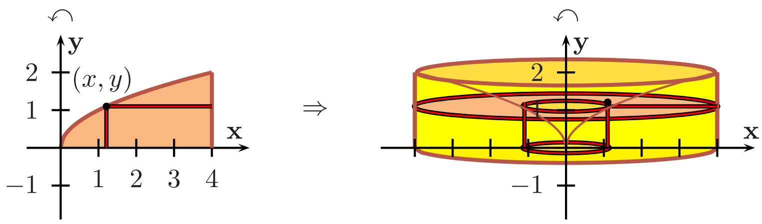


Figura 6.6: Método de discos y cilindros

(a) Método de discos. El diferencial de volumen es,

$$dV = \pi(r_2^2 - r_1^2)\,dy = \pi(16 - x^2)\,dy = \pi(16 - y^4)\,dy$$

de donde, el volumen total es:

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi(16 - y^4)\,dy = \pi\left[16y - \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \pi(32 - \frac{32}{5}) = \frac{128\,\pi}{5}$$

(b) Método de los cilindros. El diferencial de volumen es,

$$dV = 2\pi r h\,dx = 2\pi x y\,dx = 2\pi x\sqrt{x}\,dx = 2\pi x^{3/2}dx$$

de donde, el volumen total es

$$V = \int_0^4 dV = \int_0^4 2\pi x^{3/2}\,dx = 2\pi\left[\frac{2x^{5/2}}{5}\right]_0^4 = \frac{2\pi\cdot 2\cdot 32}{5} = \frac{128\,\pi}{5}$$

Ejemplo 6.7. *Obtener el volumen del sólido formado al girar la región limitada por las gráficas de $y = (x-2)^2$ e $y = 3$, en torno a la recta $y = 3$, aplicando el método de discos y el de capas.*

Solución. Para facilitar los cálculos podemos desplazar el recinto 2 unidades a la izquierda, con objeto de centrarlo en el eje de ordenadas. Con lo cual el volumen se generará al girar la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 3$, en torno a la recta $y = 3$. También se podría voltear la región con objeto de hacerla girar en torno al eje Ox, sin embargo, la integral resultante en esta caso es un poco más difícil.
1. Método de discos. Hallamos el volumen de un disco elemental dV:

$$dV = \pi r^2\,dx = \pi(3-y)^2\,dx = \pi(3-x^2)^2\,dx = \pi(9 - 6x^2 + x^4)\,dx$$

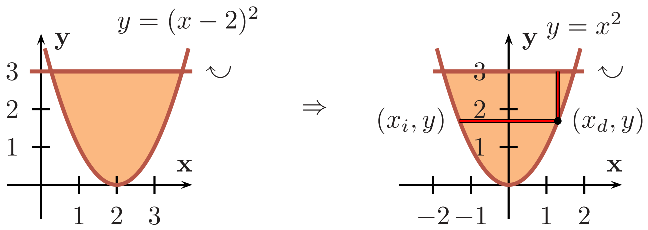


Figura 6.7: Método de discos y cilindros

Los límites de integración para la variable x son $\pm\sqrt{3}$, y al ser la región simétrica resulta:

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dV = 2\int_0^{\sqrt{3}} dV = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (9 - 6x^2 + x^4)\, dx =$$
$$= 2\pi \left[9x - 2x^3 + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(9\sqrt{3} - 2\cdot 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5}\right) =$$
$$= 2\pi \frac{45\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{5} = \frac{48\pi\sqrt{3}}{5}$$

2. Método de los cilindros. Hallamos el volumen de un disco elemental dV:

$$dV = 2\pi rh\, dy = 2\pi(3-y)2\sqrt{y}\, dy = 4\pi(3-y)\sqrt{y}\, dy$$

Los límites de integración de la variable y son 0 y 3, con lo cual el volumen total será:

$$V = \int_0^3 dV = 4\pi \int_0^3 (3-y)\sqrt{y}\, dy = 4\pi \int_0^3 \left(3y^{1/2} - y^{3/2}\right) dy =$$
$$= 4\pi \left[2y^{3/2} - \frac{2y^{5/2}}{5}\right]_0^3 = 4\pi \left[2\cdot 3\sqrt{3} - \frac{2\cdot 9\sqrt{3}}{5}\right] = 4\pi \frac{30-18}{5}\sqrt{3} = \frac{48\pi\sqrt{3}}{5}$$

6.3. Límite de sumas

Los siguientes límites pueden calcularse mediante integrales:

Proposición 6.6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

Ejemplo 6.8. *Calcular el siguiente límite,* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \cdots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$.

Solución. Este límite lo podemos resolver mediante integrales, en efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+1}+\cdots+\sqrt{4n+n}}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+1}+\cdots+\sqrt{4n+n}}{n\cdot n^{1/2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{4n+i}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{4+\frac{i}{n}} =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{4+x}\,dx = \int_0^1 (4+x)^{1/2} = \left[\frac{2(4+x)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(5\sqrt{5}-8)$$

6.4. Problemas propuestos del Capítulo 6

Ejercicios propuestos del Capítulo 6

Soluciones en la página ??

6.1.

Problemas resueltos del Capítulo 6

6.1.

Solución.

Problemas propuestos del Capítulo 6

Soluciones en la página ??

6.1.

Soluciones a los ejercicios y problemas propuestos

Capítulo 1

Ejercicios de la sección 1.1 (pág. 14)

1.1.1. a) $(-\infty, 1]$ b) $(-\infty, -3]$

1.1.2. a) Sin solución. b) $[-1, 2]$ c) $[-2, 2]$

1.1.3. a) $[1, 5]$ b) $(-2, 5)$

1.1.4. a) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ b) $[0, 1] \cup [5, 6]$

1.1.5. a) $x = -1$, b) Sin solución, c) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$

1.1.6. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ b) $x_1 = 1/2$, $x_2 = 5/4$ c) 2, 3, 5 d) -1 y 1

1.1.7. a) $1 < x < 4$ b) $x < 1/2$, $x > 5/4$

1.1.8. a) $0 < |x - x_0| < \delta$ b) $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Ejercicios de la sección 1.2 (pág. 22)

1.2.1. a) $d = \sqrt{2}$ b) $d = 3$

1.2.2. $x = \pm 3$

1.2.3. $y_1 = 6$, $y_2 = -2$.

1.2.4. a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ b) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$

1.2.5. a) Circunferencia $C(-3, 2)$, $r = 1$, b) Punto (1,-2) c) Sin solución.

1.2.6. a) Círculo $C(3, 2)$, $r = 2$, b) Exterior círculo $C(2, 1)$, $r = 2$ c) Sin solución.

1.2.7. Circunferencia con $C(1/2, 1/2)$ y $r = \sqrt{1/2}$

1.2.8. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$

Ejercicios de la sección 1.3 (pág. 46)

1.3.1. a) No definido, b) 0, c) 2, d) $\sqrt{x + \Delta x + 1}$

1.3.2. a) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$, b) $(3, +\infty)$, c) $[0, 2]$

1.3.3. a) 0, b) No definido, c) $\sqrt{x-1}$, d) 0, e) -1, f) $\sqrt{x} - 1$

1.3.4. a) $g\big(f(x)\big) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ b) $f\big(g(x)\big) = \dfrac{2x + 1}{4x^2 + 12x + 10}$

1.3.5. $f\big(g(x)\big) = \sqrt[3]{(x-1)^3} + 1 = x$, $g\big(f(x)\big) = \big(\sqrt[3]{x} + 1 - 1\big)^3 = x$

1.3.6. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$ $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

1.3.7. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \\ 5 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Ejercicios de la sección 1.4 (pág. 56)

1.4.1. a) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$, b) $-1, -1, 1, 1, -1, \ldots$, c) $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$, d) $1, 0, \dfrac{-1}{3}, 0, \dfrac{1}{5}, \ldots$.

1.4.2. a) $(-1)^{n+1}2n$, b) $\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$, c) $\dfrac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$

1.4.3. a) 0, b) 0, c) 3/2, d) ∞

1.4.4. a)e^k, b) $e^{3/2}$, c) e^{-1}

1.4.5. a) $\dfrac{1}{p+1}$, b) 1, c) $\dfrac{e}{2}$.

1.4.6. a) converge a 0 (nota: $n! \leq n^{n-1}$)

1.4.7. a) no monótona, b) monótona decreciente, c) monótona creciente.

Ejercicios de la sección 1.5 (pág. 85)

1.5.1. a) 1/8, b) 1/6, c) 0

1.5.2. $a = 2$, $b = -1$

1.5.3. a) $-\infty$, b) $+\infty$, c) No definido.

1.5.4. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$.

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 1 (pág. 91)

1.1. a) $(-1, 3)$, b) $(-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$, c) $[1, 5]$, d) $(-\infty, 5/3] \cup [3, +\infty)$

1.2. a) $C(-2, 1)$, $r = 2$, b) fuera, circunferencia, dentro

1.3. a) $[1, 3) \cup (3, +\infty)$ b) $[-1, 3)$

1.4. a) 1/2 b) 1/2 c) 1/4 c) e^3

1.5. a) 4/7 b) 1/2 c) $e^{1/3}$

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 1 (pág. 92)

1.1. a) $e^{7/3}$

Capítulo 2

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 2 (pág. 146)

2.1.

a) $x^2 + y^2 \leq 4$ Círculo	b) $x \neq y$ Plano, salvo y=x
c) $\lvert y\rvert \leq \lvert x\rvert, x \neq 0$ Ángulos op.	d) $x^2 + 4y^2 < 4$ Int. elipse
e) $x \neq y$ Plano, salvo recta $y = x$	f) $x + y < 4$ Semiplano
g) $\mathbb{R}^2$ Todo el plano	h) $y \neq 0$ $\mathbb{R}^2$, salvo eje OX
i) $xy < 4$ franja entre hipérbola	

2.2.

a) $2x^2$	b) 0	c) $4x^2y^2$
d) $\cos(x^2 + y^2 - z)$	e) $\cos(2x)$	f) $\lvert x\rvert$

2.3.

a) Plano horizontal	b) Plano	c) Cono
d) Semiesfera sup.	e) Semielipsoide sup.	f) Silla de montar

2.4.

a) Circunferencias concéntricas	b) Circunferencias concéntricas
c) Hipérbola	d) Rectas paralelas
e) Plano	f) Esfera
g) Paraboloide	h) Cono

2.5. $\begin{cases} \text{a) } \ln 2 & \text{b) } \frac{5}{3} & \text{c) } 0 & \text{d) No existe} \\ \text{e) } 1 & \text{f) } 0 & \text{g) } 0 & \text{h) } -\frac{1}{8} \\ \text{i) } 3 & \text{j) No existe} & \text{k) No existe} & \text{l) No existe} \\ \text{m) No existe} & \text{n) No existe} & \text{o) } 0 & \text{p) } 2 \\ \text{q) } 0 & \text{r) } 1 & \text{s) } 0 & \text{t) No existe} \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \text{a) } f(0,0)=0 & \text{b) } \mathbb{R}^2-\{(0,0)\} & \text{c) } y \neq 1-x^2 \ , \ y>0 \\ \text{d) } f(0,y)=y & \text{e) } x^2+y^2<1 & \text{f) } y>-1 \ , \ y \neq -x^2 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} \text{a) Continua} & \text{b) } y \neq -x & \text{c) } (x,y) \neq (0,0) \\ \text{d) } |x| \neq 2|y| & \text{e) } (x,y) \neq (0,0) & \text{f) Continua en } (0,-2), \\ & & \quad y \neq -2, x \neq \pm k\pi \end{cases}$

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 2 (pág. 148)

2.1.

Capítulo 3

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 3 (pág. 208)

3.1.

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 6 (pág. 210)

3.1.

Capítulo 4

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 4 (pág. 326)

4.1. La función no es continua en $(0,0)$ y por tanto no es diferenciable en dicho punto. Aplíquese infinitésimo $\operatorname{sen} y \sim y$ y luego trayectorias rectilíneas. En el resto del plano es diferenciable por tratarse de una función elemental.

4.2. $P_1(0,0) \to$ punto silla, $P_2(-1/6,-1/3) \to$ mínimo relativo.

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 6 (pág. 327)

4.1. Sea $z=f(x,y)$, hagamos $x=x_0+tu_1$ e $y=x_0+tu_2$, en consecuencia $z=g(t)$. Hállese $g'(0)$ mediante la definición de derivada y mediante la regla de la cadena e iguálense los resultados.

Capítulo 5

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 5 (pág. 375)

5.1. **a)** $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+C$

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 5 (pág. 375)

5.1.

Capítulo 6

Soluciones a los ejercicios propuestos del Capítulo 6 (pág. 388)

6.1. **a)** $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$

Soluciones a los problemas propuestos del Capítulo 6 (pág. 388)

6.1.

Bibliografía

[1] Larson - Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica*, Mc Graw Hill, 1992.

[2] Claudio Pita Ruiz, *Calculo Vectorial*, Prentice Hall Hispanoamericana, Mexico, 1994.

[3] Robert G. Bartle, *Introducción al Análisis Matemático*, Editorial Limusa, S.A. México, 1982.

Índice alfabético

Binomio de Newton, 190

Campo escalar, 96
  vectorial, 97
Composición de funciones, 32, 104
  vectoriales, 105, 277
Concavidad, 202
Continuidad, 66
  en dos variables, 121
Crecimiento, 200
Curvas de nivel, 113

Derivadas
  direccionales, 227
  parciales, 211
    cruzadas, 223
    de órdenes superiores, 222
    notación vectorial, 217
Diferenciabilidad, 233
Diferencial, 239
Distancia:
  entre números reales, 13
  entre puntos del espacio, 17
  entre puntos del plano, 16
Dominio, 25, 97
  implícito de una función, 30
    de varias variables, 97

Entorno, 119
Extremos, 196, 305
  condicionados, 315
  de una variable, 196
    absolutos, 196
    relativos, 200

Función
  de una variable, 26
    dominio implícito, 30
    límite, 56
  de varias variables, 94
    composición, 32, 104
    continuidad, 121
    dominio, 97
    gráfica, 110
    límite, 121
    operaciones, 102
  derivada parcial, 214
  dominio, 25
  implícita, 296
  inversa, 36
  inyectiva, 36
  recorrido, 25
  vectorial, 96, 268

Gradiente, 249

Hessiano, 309

Infinitésimos, 133
Integración
  cambio de variable, 352
  funciones irracionales, 371
  funciones racionales, 359
  funciones trigonométrica, 367
  inmediata, 350
  método de Hermite, 365
  por partes, 356
  sustitución trigonométrica, 372
  tabla, 351
Integral, 329

aplicaciones, 377
áreas, 377
indefinida, 350
límite de una suma, 334

Jacobiano, 274

Límite
de funciones, 56
de dos variables, 121
de sucesiones, 47
mediante integrales, 334

Mac Laurin, 184
Multiplicadores de Lagrange, 315

Plano tangente, 254, 257, 258
Primitiva, 350
Puntos de inflexión, 202

Razón de cambio, 218
Recorrido, 25
Recta normal, 260
Regla de Barrow, 347
Regla de la cadena, 276

Sucesión
acotada, 55
límite, 47
monótona, 54
Sumas de Riemann, 329

Taylor, 183
cálculos aproximados, 193
límites, 195
polinomio, 183
resto, 192
Teorema
de Schwartz, 224
fundamental, 343

Vector normal, 254
Volumen, 380
de revolución
capas, 381
discos, 381